Werk

Titel: Berechnung von linearen Mehrfachkorrelationen mit Hilfe von Adjunktionsmatrizen n...

Autor: Hoch, J.

Jahr: 1962

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?358794056_0005|log7

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Frisch [2] hat nun ein Berechnungsverfahren für lineare Mehrfachkorrelationen herausgebracht, das diesen Mangel vermeidet und neben laufender exakter Rechenkontrolle eine übersichtliche Gestaltung der verwickelten Rechnungsvorgänge ermöglicht. Dieses Verfahren ist jedoch verhältnismäßig unbekannt geblieben und – soweit dem Verfasser bekannt – im deutschsprachigen Fachschrifttum bisher nicht ausführlich behandelt worden. Lediglich Schlums [3] beschreibt im Rahmen einer Untersuchung über Fragen des Straßenverkehrs die praktische Anwendung der Methode. Die mathematischen Zusammenhänge werden jedoch nicht erläutert.

Im folgenden soll daher ein Weg für die mathematische Ableitung der erforderlichen Berechnungsformeln angegeben werden. Dabei entspricht die Herleitung der Adjunktionsmatrizen und der Formeln für die Regressionskoeffizienten den Gedanken von Frisch [2]. Für den totalen Korrelationskoeffizienten und die mittlere Abweichung gibt Frisch keine Formeln an, da er wegen der Mängel dieser Maßzahlen – insbesondere des totalen Korrelationskoeffizienten – für die Messung der Zusammenhänge anders geartete Verfahren vorschlägt, die jedoch in der Handhabung verhältnismäßig umständlich sind.

Wenn auch die Problematik des totalen Korrelationskoeffizienten keineswegs verkannt werden darf, so muß er doch bis heute als das gebräuchlichste und einfachste Korrelationsmaß angesehen werden und dürfte in Verbindung mit der mittleren Abweichung auch ganz brauchbar sein. Es erscheint daher vertretbar, das sehr zweckmäßige Verfahren von Frisch um die leicht aus den Adjunktionsmatrizen zu gewinnenden Formeln für die mittlere Abweichung und den totalen Korrelationskoeffizienten zu erweitern.

Die praktische Zahlenrechnung ist in den unter [3] und [4] im Literaturverzeichnis am Schluß aufgeführten Veröffentlichungen beschrieben.

2. Mathematische Ableitung der Berechnungsformeln

Sieht man die Korrelationsgleichung in der Form

$$X'_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} = A_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} + A_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot X_j + \tag{1}$$

$$A_{ik\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot X_k + \ldots + A_{i\nu\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot X_\nu$$

als ein mathematisches System im ν-dimensionalen Raum an, so können bekanntlich die Regressionskoeffizienten $A_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate aus der Bedingungsgleichung

Betrifft: Metrika Band 5 1962
Durch ein Versehen der Druckerei wurde das Gleichungssystem (4) auf Seite 19 nicht abgedruckt. Wir bitten, die unten abgedruckte Formel in Ihrem Heft einzusetzen.

$$
\begin{array}{ll}
 & n \cdot A_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} + A_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma X_j + A_{ik\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma X_k + \ldots + A_{i\nu\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma X_\nu - \Sigma X_i = 0 \\
(4) & A_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma X_j + A_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma X_j^2 + A_{ik\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma X_j \cdot X_k + \ldots + A_{i\nu\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma X_j \cdot X_\nu - \Sigma X_i \cdot X_j = 0 \\
 & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
 & A_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma X_\nu + A_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma X_\nu \cdot X_j + A_{ik\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma X_\nu \cdot X_k + \ldots + A_{i\nu\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma X_\nu^2 - \Sigma X_i \cdot X_\nu = 0
\end{array}
$$

16-10

$$(2) \qquad S_i = \sum^{n} \lambda^2_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} = \sum^{n} (X_i - X'_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)})^2 = \text{Minimum}$$

ermittelt werden. Dabei ist zu beachten, daß hier der Ausgleich für die i-Achse durchgeführt worden ist, und daß für ein vollständiges Korrelationssystem nacheinander die Koeffizientenbestimmung in Bezug auf alle ν Achsen durchgeführt werden muß. Gleichung (2) ausgeschrieben lautet:

$$S_i = \Sigma(X_i - A_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} - A_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot X_j -$$

$$A_{ik\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot X_k - \ldots - A_{i\nu\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot X_\nu)^2 = \text{Minimum}$$

Die Werte für die Koeffizienten folgen aus

$$(3) \qquad \frac{\partial S_i}{\partial A_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}} = 0$$

wobei i und j alle Werte $\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu$ annehmen können. Führt man, wie bereits oben angenommen, den Ausgleich für die i-Achse durch, so entwickeln sich aus Gleichung (3) die Normalgleichungen in der Form

(4)

Zur Vereinfachung setzt man $z_i = \dfrac{X_i - X_{im}}{\sqrt{\Sigma(X_i - X_{im})^2}}$, so daß $\Sigma z_i^2 = 1$ wird.

(Normierte Variable).

Damit ändern sich auch die Koeffizienten $A_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$, die dann die Bezeichnung $B_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$ erhalten sollen. Aus der Normierungsbedingung folgt weiter $\Sigma z_i = 0$, da ja $\Sigma(X_i - X_{im}) = 0$ ist. Folglich werden sämtliche Glieder der ersten Normalgleichung und die jeweils ersten Glieder der übrigen Normalgleichungen zu Null. Es bleiben $(\nu - 1)$ Gleichungen zur Bestimmung der $(\nu - 1)$ gesuchten normierten Regressionskoeffizienten $B_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$ übrig. Die Normalgleichungen lauten jetzt:

(5)

$$B_{ij(\alpha\beta\ldots\nu)} \cdot \Sigma z_j^2 + B_{ik(\alpha\beta\ldots\nu)} \cdot \Sigma z_j \cdot z_k + \ldots + B_{i\nu(\alpha\beta\ldots\nu)} \cdot \Sigma z_j \cdot z_\nu = \Sigma z_i \cdot z_j$$

$$B_{ij(\alpha\beta\ldots\nu)} \cdot \Sigma z_k \cdot z_j + B_{ik(\alpha\beta\ldots\nu)} \cdot \Sigma z_k^2 + \ldots + B_{i\nu(\alpha\beta\ldots\nu)} \cdot \Sigma z_k \cdot z_\nu = \Sigma z_i \cdot z_k$$

$$\begin{array}{lll} \cdot & \cdot & \cdot \quad = \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad = \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad = \end{array}$$

$$B_{ij(\alpha\beta\ldots\nu)} \cdot \Sigma z_\nu \cdot z_j + B_{ik(\alpha\beta\ldots\nu)} \cdot \Sigma z_\nu \cdot z_k + \ldots + B_{i\nu(\alpha\beta\ldots\nu)} \cdot \Sigma z_\nu^2 = \Sigma z_i \cdot z_\nu .$$

Das ist ein System inhomogener linearer Gleichungen, das sich durch die Lineartransformation

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}_{ij(\alpha\beta\ldots\nu)} = \Sigma \mathfrak{z}_i \cdot \mathfrak{z}_j$$

ausdrücken läßt. Die Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}$ sei entsprechend den übrigen Bezeichnungen mit $\mathfrak{A}_{ij(\alpha\beta\ldots\nu)}$ bezeichnet und lautet ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} \Sigma z_j^2 & \Sigma z_j \cdot z_k & \ldots \Sigma z_j \cdot z_\nu \\ \Sigma z_k \cdot z_j & \Sigma z_k^2 & \ldots \Sigma z_k \cdot z_\nu \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \Sigma z_\nu \cdot z_j & \Sigma z_\nu \cdot z_k & \ldots \Sigma z_\nu^2 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_{ii(\alpha\beta\ldots\nu)} .$$

Die Regressionskoeffizienten für die Korrelationsgleichung mit normierten Variablen lassen sich nun nach der Cramer'schen Regel bestimmen. Unter Beachtung der Vorzeichen $(-1)^{i+j}$ wird:

(6)
$$B_{ij(\alpha\beta\ldots\nu)} = -\frac{\det \mathfrak{A}_{ij(\alpha\beta\ldots\nu)}}{\det \mathfrak{A}_{ii(\alpha\beta\ldots\nu)}} .$$

Dann ist $\mathfrak{A}_{ij(\alpha\beta\ldots\nu)}$ die Matrix, die gebildet wird, indem man die Spalte j der Koeffizientenmatrix $\mathfrak{A}_{ii(\alpha\beta\ldots\nu)}$ durch den Vektor

$$\begin{pmatrix} \Sigma z_i \cdot z_j \\ \Sigma z_i \cdot z_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Sigma z_i \cdot z_\nu \end{pmatrix}$$

ersetzt, der den rechten Seiten der Normalgleichungen (5) entspricht.

Wegen der Normierungsbedingung wird mit $\Sigma z_i^2 = 1$ die Produktensumme $\Sigma(z_i \cdot z_j)$ gleich dem einfachen Korrelationskoeffizienten r_{ij}, denn $\Sigma(z_j \cdot z_j)$ entspricht ja dem Ausdruck

$$\frac{\Sigma (X_i - X_{im}) \cdot (X_j - X_{jm})}{\sqrt{\Sigma (X_i - X_{im})^2} \cdot \sqrt{\Sigma (X_j - X_{jm})^2}} = r_{ij} \ .$$

Aus ν Veränderlichen lassen sich insgesamt ν^2 einfache Korrelationskoeffizienten bilden, die in Matrizenform geschrieben werden können und als Ausgangspunkt für die Berechnung der Mehrfachkorrelation die Original-Korrelations-Matrix ergeben. Sie lautet:

$$\begin{pmatrix} r_{ii} & r_{ij} & r_{ik} & \cdots & r_{i\nu} \\ r_{ji} & r_{jj} & r_{jk} & \cdots & r_{j\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ r_{\nu i} & r_{\nu j} & r_{\nu k} & \cdots & r_{\nu\nu} \end{pmatrix} . \tag{7}$$

In dieser Matrix ist $r_{ii} = r_{jj} = r_{kk} = \ldots = r_{\nu\nu} = 1$ und $r_{ij} = r_{ji}$, $r_{ik} = r_{ki}, \ldots, r_{i\nu} = r_{\nu i}$. Die Rekursionsformel zur Bestimmung der Regressionskoeffizienten (Gleichung 6) läßt sich nun in Matrizenschreibweise wie folgt angeben:

$$B_{ij(\alpha\beta\ldots\nu)} = -\frac{\det \begin{pmatrix} r_{ji} & r_{jk} & \cdots & r_{j\nu} \\ r_{ki} & 1 & \cdots & r_{k\nu} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ r_{\nu i} & r_{\nu k} & \cdots & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & r_{jk} & \cdots & r_{j\nu} \\ r_{kj} & 1 & \cdots & r_{k\nu} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ r_{\nu j} & r_{\nu k} & \cdots & 1 \end{pmatrix}} = -\frac{\det \mathfrak{A}_{ij(\alpha\beta\ldots\nu)}}{\det \mathfrak{A}_{ii(\alpha\beta\ldots\nu)}} \ . \tag{8}$$

Vergleicht man die Matrizen der Gleichung (8) mit der Original-Korrelations-Matrix (7), so stellt man leicht fest, daß der Zähler der Gleichung (8) die zum Element r_{ij} gehörige Blockmatrix der Original-Korrelations-Matrix

darstellt, und daß ebenso $\mathfrak{A}_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$ die zum Element r_{ii} gehörende Untermatrix ist. Die Regressionskoeffizienten $B_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$ lassen sich also aus den Determinanten der entsprechenden Untermatrizen ableiten.

Bei einem vollständigen Korrelationssystem müssen – wie bereits erwähnt – ν^2 Normalgleichungen aufgelöst werden. Dieses umfangreiche Rechnungswerk läßt sich nur bei systematischem Vorgehen bewältigen. Frisch [2] bezeichnet die Determinanten der Gleichung (8) abweichend von der üblichen Schreibweise mit $\det \mathfrak{A}_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} = \hat{r}_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$, was in der weiteren Entwicklung ebenfalls geschehen soll.

Betrachtet man die Original-Korrelations-Matrix (7), so läßt sich deren Determinante

$$\Delta_{(\alpha\beta\ldots\nu)} = \begin{vmatrix} r_{ii} & r_{ij} & r_{ik} & \cdots & r_{i\nu} \\ r_{ji} & r_{jj} & r_{jk} & \cdots & r_{j\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_{\nu i} & r_{\nu j} & r_{\nu k} & \cdots & r_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

dadurch berechnen, daß man sie nach den Elementen einer Zeile oder einer Spalte entwickelt. Z. B.

(9)
$$\Delta_{(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} =$$

$$= r_{ii} \cdot \hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} + r_{ij} \cdot \hat{r}_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} + r_{ik} \cdot \hat{r}_{ik\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} + \cdots + r_{i\nu} \cdot \hat{r}_{i\nu\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$$

oder

$$= r_{ji} \cdot \hat{r}_{ji\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} + r_{jj} \cdot \hat{r}_{jj\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} + r_{jk} \cdot \hat{r}_{jk\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} + \cdots + r_{j\nu} \cdot \hat{r}_{j\nu\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$$

und so fort. Selbstverständlich müssen sämtliche Entwicklungen zu dem selben Wert $\Delta_{(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$ führen. Die hier auftretenden Unterdeterminanten $\hat{r}_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$ werden auch algebraische Komplemente oder Adjunkten genannt. Sie entsprechen den zur Berechnung der Regressionskoeffizienten $B_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$ in Gleichung (8) verwendeten Determinanten und werden nach Frisch zu den sogenannten Adjunktionsmatrizen zusammengefaßt. Dabei liefern die Adjunkten jeder der ν möglichen Entwicklungen nach Gleichung (9) jeweils eine Zeile der entsprechenden Adjunktionsmatrix $(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)$. So stimmen die Unterdeterminanten der beiden in Gleichung (9) angegebenen Entwicklungen mit den Zeilen 1 und 2 der ν-reihigen Adjunktionsmatrix

$$\begin{pmatrix} \hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} & \hat{r}_{ij\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} & \hat{r}_{ik\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} & \cdots & \hat{r}_{i\nu\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} \\ \hat{r}_{ji\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} & \hat{r}_{jj\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} & \hat{r}_{jk\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} & \cdots & \hat{r}_{j\nu\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \hat{r}_{\nu i\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} & \hat{r}_{\nu j\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} & \hat{r}_{\nu k\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} & \cdots & \hat{r}_{\nu\nu\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} \end{pmatrix}$$

überein.

Die zwangsläufige Rechenkontrolle besteht nun darin, daß die Produktensumme der Elemente einer Zeile der Adjunktionsmatrix mit den entsprechenden Elementen der gleichen Zeile in der Original-Korrelations-Matrix der Determinanten $\Delta_{(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)}$ entspricht und nach Gleichung (9) diese Produktensumme, die zur Berechnung der folgenden Matrizen erforderlich ist, für alle Zeilen gleich sein muß. Die Adjunktionsmatrizen werden ausgehend von der Original-Korrelations-Matrix aus den zweireihigen Matrizen über die dreireihigen usw. errechnet. Die Elemente in der ν-reihigen Matrix sind also stets die Determinanten aller vorhandenen $(\nu - 1)$-reihigen Matrizen, die sich aus der Original-Korrelations-Matrix entwickeln lassen.

Für Mehrfachkorrelationen bis zu vier Veränderlichen liegen die Rechenvorschriften tabelliert vor. Sie sind in den Tafeln 2 bis 4 nochmals wiedergegeben. Zur Erläuterung dieser Tafeln sei die Berechnung des Elements $\hat{r}_{12\,(1\,2\,3)}$ der Matrix 1 2 3 (Tafel 3) aus der Dreier-Reihe gezeigt. Im Feld 1 2 dieser Matrix bedeutet der Ausdruck $\hat{r}_{22\,(23)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{23\,(23)} \cdot r_{13}$, daß man den Wert für $\hat{r}_{12\,(1\,2\,3)}$ erhält, wenn man das Element 2 2 der Matrix 2 3 aus der Zweier-Reihe mit r_{12} und das Element 2 3 der selben Matrix mit r_{13} multipliziert und die beiden Produkte addiert. Vorzeichen müssen dabei beachtet werden. Aus den Adjunktionsmatrizen, die auf diese Weise stufenweise von der niedrigeren zur höheren fortschreitend ermittelt werden, können nun alle wichtigen Größen der Korrelationsrechnung abgeleitet werden.

Bekannt ist ja bereits die Formel für die Regressionskoeffizienten. Sie lautet:

$$B_{ij\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} = -\frac{\hat{r}_{ij\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)}}{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)}}. \tag{10}$$

Die Reduktion der $B_{ij\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)}$ in die Koeffizienten $A_{ij\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)}$ ist sehr einfach. Wie leicht nachprüfbar, gilt

$$A_{ij\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} = B_{ij\,(\alpha\,\beta\ldots\,\nu)} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_j}. \tag{11}$$

Als nächstes sei der partielle Korrelationskoeffizient $r_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$ betrachtet, der den Zusammenhang zwischen den Veränderlichen X_i und X_j angibt, wenn alle $\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu$ Variablen in die Rechnung einbezogen würden. Aus der einfachen Korrelation ist bekannt, daß

$$r_{ij} = \sqrt{A_i \cdot A_j} \quad \text{oder}$$

$$r_{ij}^2 = A_i \cdot A_j$$

wird. Das gleiche gilt auch für den partiellen Korrelationskoeffizienten. Hier wird:

$$r_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}^2 = A_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot A_{ji\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$$

Gleichung (11) eingesetzt, folgt weiter:

$$r_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}^2 = \frac{\hat{r}_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \sigma_i \cdot \hat{r}_{ji\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \sigma_j}{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \sigma_j \cdot \hat{r}_{jj\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \sigma_i}$$

(12)

$$r_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} = \frac{-\hat{r}_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}}{\sqrt{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \hat{r}_{jj\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}}}.$$

Das Minuszeichen ist anzusetzen.

Für die Beurteilung einer Korrelation spielt weiterhin die mittlere Abweichung eine wichtige Rolle. Sie beträgt

(13)
$$\sigma_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} = \pm \sqrt{\frac{\sum \lambda_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}^2}{n}}.$$

$\sum \lambda_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}^2 = \sum (X_i - X'_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)})^2$ kann aber erst ermittelt werden, wenn die Regressionsgleichung $Y'_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} = f(X_\alpha, X_\beta \ldots X_\nu)$ vorliegt und die Differenz zwischen dem tatsächlich beobachteten Wert Y_i und dem berechneten Wert $Y'_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$ für den gesamten Umfang n der untersuchten statistischen Masse berechnet worden ist. Die Berechnung dieser Differenz wird aber in vielen Fällen nicht nötig sein. Dagegen kann auf die Bestimmung von $\sigma_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$ in keinem Fall verzichtet werden. Die Adjunktionsmatrizen ermöglichen es, die Streuung $\sigma_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}^2$ unmittelbar zu errechnen. Nach Gleichung (13) ist

$$\sigma_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum^n \lambda_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}^2 \cdot$$

In anderer Form angeschrieben

$$\frac{1}{n} \cdot \sum^n \lambda_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum^n \lambda_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \lambda_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$$

Wie leicht nachzuprüfen, gilt auch [1]

$$\Sigma \lambda_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \lambda_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} = \Sigma \lambda_i \cdot \lambda_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \tag{14}$$

Setzt man in Gleichung (14) den Ausdruck für $\lambda_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$ ein, so folgt

$$\Sigma \lambda^2_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} = \Sigma \lambda_i \cdot (\lambda_i - A_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \lambda_j - \tag{15}$$

$$- A_{ik\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \lambda_k - \ldots - A_{i\nu\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \lambda_\nu) \ .$$

Dabei ist zu berücksichtigen, daß für

$$\lambda_i = x_i = Y_i - Y_{im}$$

der konstante Summand der Regressionsgleichung $A_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} = 0$ wird.

Führt man auch hier die normierten Variablen

$$z_i = \frac{Y_i - Y_{im}}{\sqrt{\Sigma\,(Y_i - Y_{im})^2}}$$

ein, so nimmt die Gleichung (15) die folgende Form an:

$$\frac{\Sigma \lambda^2_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}}{n^2 \cdot \Sigma\,(Y_i - Y_{im})^2} = \frac{1}{n^2} \Sigma\, z_i \cdot \Big(z_i - B_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot z_j -$$

$$- B_{ik\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot z_k - \ldots - B_{i\nu\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot z_\nu \Big) = \frac{1}{n^2} \Big[\Sigma\, z_i^2 - B_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma\, z_i \cdot z_j -$$

$$- B_{ik\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma\, z_i \cdot z_k - \ldots - B_{i\nu\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)} \cdot \Sigma\, z_i \cdot z_\nu \Big] .$$

Für $B_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}$ den Ausdruck nach Gleichung (10) eingesetzt und beide Seiten mit n^2 multipliziert, ergibt sich

$$\frac{\sigma^2_{i\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}}{\sigma_i^2} = 1 + \frac{\hat{r}_{ij\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}}{r_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}} \cdot r_{ij} + \frac{\hat{r}_{ik\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}}{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}} \cdot r_{ik} + \ldots + \frac{\hat{r}_{i\nu\,(\alpha\,\beta\cdot\nu)}}{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}} \cdot r_{i\nu},$$

wenn man weiter berücksichtigt, daß $\Sigma\, z_i \cdot z_j = r_{ij}$ ist.

Mit $1 = \frac{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}}{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\,\ldots\,\nu)}}$ und $r_{ii} = 1$ wird

$$\frac{\sigma^2_{i\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)}}{\sigma^2_i} =$$

$$= \frac{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)} \cdot r_{ii}}{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)}} + \frac{\hat{r}_{ij\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)} \cdot r_{ij}}{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)}} + \frac{\hat{r}_{ik\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)} \cdot r_{ik}}{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)}} + \ldots + \frac{\hat{r}_{i\nu\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)} \cdot r_{i\nu}}{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)}}.$$

Der Zähler auf der rechten Seite der Gleichung entspricht nach Gleichung (9) der Determinanten $\Delta_{(\alpha\,\beta\ldots\nu)}$ der Original-Korrelations-Matrix. Damit lautet der Ausdruck für die Streuung

$$\sigma^2_{i\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)} = \sigma^2_i \cdot \frac{\Delta_{(\alpha\,\beta\ldots\nu)}}{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)}} \tag{16}$$

und läßt sich leicht aus den Adjunktionsmatrizen berechnen.

Nun kann auch sofort die Formel für den totalen Korrelationskoeffizienten angegeben werden, der sich ja genau wie bei der einfachen Korrelation nach der Gleichung

$$R_{i\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{i\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)}}{\sigma^2_i}}$$

berechnen läßt. Setzt man hier die Gleichung (16) in entsprechender Abwandlung ein, so erhält man

$$R_{i\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_i \cdot \Delta_{(\alpha\,\beta\ldots\nu)}}{\sigma^2_i \cdot \hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)}}}$$

(17)

$$R_{i\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)} = \sqrt{1 - \frac{\Delta_{(\alpha\,\beta\ldots\nu)}}{\hat{r}_{ii\,(\alpha\,\beta\ldots\nu)}}}.$$

Damit stehen die wichtigsten Formeln zur Berechnung einer linearen Mehrfachkorrelation mit Hilfe der Adjunktionsmatrizen nach Frisch zur Verfügung.

r_{ij}	1	2	3	4
1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}
2		r_{22}	r_{23}	r_{24}
3			r_{33}	r_{34}
4				r_{44}

Tafel 1 : Original - Korrelation - Matrix

$\hat{r}_{ij}$	1	2
1	r_{11}	$-r_{12}$
2		r_{22}
Δ_{12}	$1 -$	r_{12}^2

$\hat{r}_{ij}$	1	3
1	r_{11}	$-r_{13}$
3		r_{33}
Δ_{13}	$1 -$	r_{13}^2

$\hat{r}_{ij}$	1	4
1	r_{11}	$-r_{14}$
4		r_{44}
Δ_{14}	$1 -$	r_{14}^2

$\hat{r}_{ij}$	2	3
2	r_{22}	$-r_{23}$
3		r_{33}
Δ_{23}	$1 -$	r_{23}^2

$\hat{r}_{ij}$	2	4
2	r_{22}	$-r_{24}$
4		r_{44}
Δ_{24}	$1 -$	r_{24}^2

$\hat{r}_{ij}$	3	4
3	r_{33}	$-r_{34}$
4		r_{44}
Δ_{34}	$1 -$	r_{34}^2

Tafel 2 : Adjunktionsmatrizen Zweier - Reihen

$\hat{r}_{ij}$	1	2	3
1	Δ_{23}	$-(\hat{r}_{22(23)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{23(23)} \cdot r_{13})$	$-(\hat{r}_{23(23)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{33(23)} \cdot r_{13})$
2		Δ_{13}	$-(\hat{r}_{13(13)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{33(13)} \cdot r_{23})$
3			Δ_{12}
Δ_{123}	$\hat{r}_{11(123)} + \hat{r}_{12(123)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{13(123)} \cdot r_{13}$ $= \hat{r}_{22(123)} + \hat{r}_{12(123)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{23(123)} \cdot r_{23}$ $= \hat{r}_{33(123)} + \hat{r}_{13(123)} \cdot r_{13} + \hat{r}_{23(123)} \cdot r_{23}$		

$\hat{r}_{ij}$	1	2	4
1	Δ_{24}	$-(\hat{r}_{22(24)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{24(24)} \cdot r_{14})$	$-(\hat{r}_{24(24)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{44(24)} \cdot r_{14})$
2		Δ_{14}	$-(\hat{r}_{14(14)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{44(14)} \cdot r_{24})$
4			Δ_{12}
Δ_{124}	$\hat{r}_{11(124)} + \hat{r}_{12(124)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{14(124)} \cdot r_{14}$ $= \hat{r}_{22(124)} + \hat{r}_{12(124)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{24(124)} \cdot r_{24}$ $= \hat{r}_{44(124)} + \hat{r}_{14(124)} \cdot r_{14} + \hat{r}_{24(124)} \cdot r_{24}$		

$\hat{r}_{ij}$	1	3	4
1	Δ_{34}	$-(\hat{r}_{33(34)} \cdot r_{13} + \hat{r}_{34(34)} \cdot r_{14})$	$-(\hat{r}_{34(34)} \cdot r_{13} + \hat{r}_{44(34)} \cdot r_{14})$
3		Δ_{14}	$-(\hat{r}_{14(14)} \cdot r_{13} + \hat{r}_{44(14)} \cdot r_{34})$
4			Δ_{13}
Δ_{134}	$\hat{r}_{11(134)} + \hat{r}_{13(134)} \cdot r_{13} + \hat{r}_{14(134)} \cdot r_{14}$ $= \hat{r}_{33(134)} + \hat{r}_{13(134)} \cdot r_{13} + \hat{r}_{34(134)} \cdot r_{34}$ $= \hat{r}_{44(134)} + \hat{r}_{14(134)} \cdot r_{14} + \hat{r}_{34(134)} \cdot r_{34}$		

$\hat{r}_{ij}$	2	3	4
2	Δ_{34}	$-(\hat{r}_{33(34)} \cdot r_{23} + \hat{r}_{34(34)} \cdot r_{24})$	$-(\hat{r}_{34(34)} \cdot r_{23} + \hat{r}_{44(34)} \cdot r_{24})$
3		Δ_{24}	$-(\hat{r}_{24(24)} \cdot r_{23} + \hat{r}_{44(24)} \cdot r_{34})$
4			Δ_{23}
Δ_{234}	$\hat{r}_{22(234)} + \hat{r}_{23(234)} \cdot r_{23} + \hat{r}_{24(234)} \cdot r_{24}$ $= \hat{r}_{33(234)} + \hat{r}_{23(234)} \cdot r_{23} + \hat{r}_{34(234)} \cdot r_{34}$ $= \hat{r}_{44(234)} + \hat{r}_{24(234)} \cdot r_{24} + \hat{r}_{34(234)} \cdot r_{34}$		

Tafel 3 : Adjunktionamatrizen Dreier - Reihen

$\hat{r}_{ij}$	1	2	3	4
1	Δ_{234}	$-(\hat{r}_{22(234)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{23(234)} \cdot r_{13} + \hat{r}_{24(234)} \cdot r_{14})$	$-(\hat{r}_{23(234)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{33(234)} \cdot r_{13} + \hat{r}_{34(234)} \cdot r_{14})$	$-(\hat{r}_{24(234)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{34(234)} \cdot r_{13} + \hat{r}_{44(234)} \cdot r_{14})$
2		Δ_{134}	$-(\hat{r}_{13(134)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{33(134)} \cdot r_{23} + \hat{r}_{34(134)} \cdot r_{24})$	$-(\hat{r}_{14(134)} \cdot r_{12} + \hat{r}_{34(134)} \cdot r_{23} + \hat{r}_{44(134)} \cdot r_{24})$
3			Δ_{124}	$-(\hat{r}_{14(124)} \cdot r_{13} + \hat{r}_{24(124)} \cdot r_{23} + \hat{r}_{44(124)} \cdot r_{34})$
4				Δ_{123}

$$\Delta_{1234} = \hat{r}_{11(1234)} + r_{12} \cdot \hat{r}_{12(1234)} + r_{13} \cdot \hat{r}_{13(1234)} + r_{14} \cdot \hat{r}_{14(1234)}$$
$$= \hat{r}_{22(1234)} + r_{12} \cdot \hat{r}_{12(1234)} + r_{23} \cdot \hat{r}_{23(1234)} + r_{24} \cdot \hat{r}_{24(1234)}$$
$$= \hat{r}_{33(1234)} + r_{13} \cdot \hat{r}_{13(1234)} + r_{23} \cdot \hat{r}_{23(1234)} + r_{34} \cdot \hat{r}_{34(1234)}$$
$$= \hat{r}_{44(1234)} + r_{14} \cdot \hat{r}_{14(1234)} + r_{24} \cdot \hat{r}_{24(1234)} + r_{34} \cdot \hat{r}_{34(1234)}$$

Tafel 4: Adjunktionsmatrix - Vierer - Reihe

Literatur

[1] Yule: An Introduction To The Theory Of Statistics – London 1922.

[2] Frisch, R.: Statistical Confluence Analysis By Means Of Complete Regression System, Universitetets Økonomiske Institut, Publicasjon Nr. 5, Oslo 1934.

[3] Schlums, J.: Statistische Forschungsmethoden als Hilfsmittel bei Verkehrsanalysen. Bauplanung und Bautechnik, Bd. 2, Nr. 4, 1948.

[4] Hoch, J.: Die allgemeinen Zusammenhänge zwischen Bearbeitungsaufwand, Leistung und Zugbildungsaufgabe der Rangierbahnhöfe. Archiv für Eisenbahntechnik, Folge 14 (1960).