Werk

Titel: Déchirures de variétés de dimension trois et la conjecture de Nash de rationalité...

Autor: Benedetti, Riccardo; Marin, Alex

Jahr: 1992

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?358147735_0067|log36

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Comment. Math. Helvetici 67 (1992) 514–545 0010–2571/92/040514–32$1.50 + 0.20/0
© 1992 Birkhäuser Verlag, Basel

Déchirures de variétés de dimension trois et la conjecture de Nash de rationalité en dimension trois

Dédié à Heisuke Hironaka

RICCARDO BENEDETTI ET ALEXIS MARIN

Nash a montré en 1951 ([N]) que toute variété C^∞ compacte connexe et sans bord V^n est difféomorphe à une branche d'une variété algébrique réelle X. Il termine cet article célèbre par deux conjectures en demandant successivement à la variété algébrique X d'être:

(i) non singulière et connexe;
(ii) rationnelle.

Rapellons qu'une variété algébrique est rationnelle si elle est birationnellement isomorphisme à l'espace projectif RP^n. Par exemple la sphère euclidienne S^n est rationnelle grâce à la projection stéréographique $\mathscr{S} : S^n \backslash \{N\} \to R^n \subset RP^n$. Plus généralement les modifications élémentaires de la géométrie algébrique par éclatements et contractions (cf. [S] VI 2.2) sont des exemples d'isomorphismes birationnels. On dira qu'une variété algébrique X est *élémentaire* si on peut l'obtenir à partir de S^n par une suite d'éclatements sur des centres lisses, ces variétés élémentaires sont non-singulières.

La première conjecture a été démontrée en 1973 par Tognoli ([T]), la deuxième est toujours ouverte (Cf. [I] p 37). En dimension 2 toute surface non orientable est difféomorphe à une somme connexe de plans projectifs réels, donc à une surface rationnelle élémentaire P_k obtenue en éclatant le plan projectif en k points alignés sur une droite d. D'autre part en contractant la transformée stricte de d dans P_{2g} on obtient une surface algébrique X_g homéomorphe à une surface orientable de genre g. Les mêmes idées permettent aussi d'obtenir la conjecture de Nash pour les variétés de dimension quatre simplement connexes (Théorème D dans l'appendice A).

Si le genre g est supérieur à 1 la surface X_g obtenue ci-dessus est singulière, on ne peut l'éviter car Comessati avait montré dès 1913 qu'une surface rationnelle lisse orientable est une sphère ou un tore ([C] ou, [K], [Si] pour une démonstration moderne): il faut dans la conjecture de Nash permettre des singularités pour un modèle rationnel X d'une variété C^∞ quelconque.

Dans cet article nous allons établir la conjecture de Nash en dimension trois :

THEOREME A. *Soit V une variété fermée connexe C^∞ de dimension trois. Alors il y a un ensemble algébrique affine rationnel Y et un homéomorphisme h de Y sur V tel que les restrictions de h aux strates de la stratification par singularité de Y sont des difféomorphismes. De plus*:

(i) *L'ensemble singulier $\Sigma(Y)$ de Y est de dimension* 1. *Il est lisse si V est orientable ou si* $\dim(H_1(V; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 1$.

(ii) *Il y a une résolution des singularités de Y par une variété élémentaire X: un morphisme régulier $\sigma : X \to Y$, qui induit*:

(ii1) *un isomorphisme birégulier $\Phi : X \setminus \sigma^{-1}(\Sigma(Y)) \to Y \setminus \Sigma(Y)$.*

(ii2) *une fibration de classe C^∞ à fibres connexes*
$\phi : \sigma^{-1}(\Sigma(Y) \setminus \Sigma(\Sigma(Y))) \to \Sigma(Y) \setminus \Sigma(\Sigma(Y))$.

Les modifications élémentaires algébriques ont des analogues topologiques décrits au §1.E ci-dessous, d'où une notion de *variété top-élémentaire* (i.e. obtenue à partir de la sphère S^n par une suite d'éclatements topologiques) et de *m-équivalence* entre variétés lisses qui sera pour nous la version topologique de l'isomorphisme birationnel.

On peut alors formuler la *conjecture de Nash topologique*:

Toute variété fermée connexe de dimension n est m-équivalente à la sphère S^n.

Cette conjecture de Nash topologique est vraie en dimension trois. Après les quelques rappels et préliminaires topologiques du §1 elle sera établie au §2. La démonstration s'appuie sur un résultat plus précis pour les variétés orientables :

THEOREME B^+. *Soit V une variété fermée orientable de dimension* 3 *alors il y a des entrelacs K et L dans V et une somme connexe R d'espaces projectifs RP^3 tels que les éclatés topologiques $\hat{V}$ et $\hat{R}$ de V et R sur K et L respectivement sont difféomorphes par un difféomorphisme qui respecte les diviseurs exceptionnels.*

Par définition (cf. §1 E.6 et E.7) un tel difféomorphisme est une *déchirure* de V sur R. Contrairement à la classification à m-équivalence près la classification des variétés de dimension trois à déchirure près est non triviale :

Si V est une variété non orientable telle que le cup-carré de $w_1(V)$ est nul et F est une surface duale de $w_1(V)$ on construira au §1.B une forme d'*enroulement caractéristique* (cf. B.1 et B.6) sur le noyau de $H_1(F; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_1(V; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ qui est quadratique pour la forme bilinéaire d'intersection de F et dont les invariants (nullité ou non sur sur le radical de la forme bilinéaire associée et invariant de Arf

lorsqu'il est défini) sont invariants par déchirure. Au §3 on déterminera les variétés équivalentes par déchirure à une variété élémentaire et on obtiendra la classification à déchirure près :

THEOREME B. *Une variété fermée connexe de dimension trois V est équivalente par déchirure à une variété top-élémentaire si et seulement si on n'a pas simultanément $b_1(V) = 1$ et la forme d'enroulement caractéristique est d'invariant de Arf* 1.

THEOREME C. *Deux variétés de dimension trois V et V' sont équivalentes par déchirure si et seulement si*:

(i) *Il y a un isomorphisme linéaire gradué entre leurs cohomologie à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ préservant le degré, la première classe de Stiefel–Whitney w_1 et le cup-produit avec w_1.*

(ii) *Dans le cas où $w_1(V)^2 = 0$ mais V est non orientable, les formes d'enroulement caractéristique ont mêmes invariants.*

Le théorème B implique le théorème A par des arguments classiques d'approximation algébrique à la Nash–Tognoli qui seront exposés au §4. Un exemple de variété non équivalente par déchirure à une variété élémentaire est M_2, le fibré en tores sur le cercle de monodromie $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Au cours de la démonstration du théorème C on produira une liste explicite d'exemples analogues, représentant sans répétitions toute les classes de déchirure. Comme les méthodes du §4 permettent d'obtenir des modèles projectifs rationnels lisses pour chaque variété élémentaire et donc pour chaque classe de déchirure distincte de M_2 le théorème C implique aussi :

COMPLEMENT AU THEOREME A. *Si la variété V n'est pas dans la classe de déchirure de M_2 il y a une variété élémentaire X obtenue par éclatement sur des courbes algébriques lisses C_i dans une variété élémentaire explicite ne dépendant que de la classe de déchirure de V et des submersions algébriques π_i des diviseurs exceptionnels correspondants E_i sur des courbes lisses Σ_i tels que la variété rationnelle affine Y soit obtenue à partir de X en contractant les fibres des π_i.*

En particulier, sauf peut-être pour M_2, la classe de déchirure n'est pas une obstruction à l'existence d'un modèle algébrique non-singulier (par contre, d'après le théorème B, il n'y a pas de variété élémentaire dans la classe de M_2). D'ailleurs nous n'avons pas connaissance d'obstruction topologique à l'existence de modèles non-singuliers dans le cas de variété de dimension supérieure à deux (dans le cas de dimension paire il est probable que les démonstrations de [K] et [Si] donnent des obstructions analogues à celles dévoilées par Comessati, elles restent cependant à expliciter).

En 1987, comme première étape vers la conjecture de Nash, nous avions fait quelques remarques sur la conjecture de Nash topologique ([BM]). Nous l'avions notamment réduite à certaines questions de "calcul de Kirby". Une réduction analogue a été aussi annoncée par Akbulut ([A]). Ayant pris connaissance d'un article de Nakanishi ([Nk]) sur la congruence de Fox des entrelacs de S^3 le premier auteur ([B]) a achevé ce programme, en particulier il a montré la conjecture de Nash topologique en dimension trois dans le cas orientable et réduit le cas général au cas orientable. En s'appuyant aussi sur Nakanishi, Akbulut et King ([AK]) ont indépendamment montré cette conjecture de Nash topologique de dimension trois. Cette approche par "calcul de Kirby" est esquissée dans l'appendice B. L'approche par les déchirures présentée ici, outre qu'elle dégage des phénomènes de nouement apparement nouveaux des surfaces caractéristiques dans les variétés de dimension trois permet de résoudre la conjecture de Nash originelle sous la forme précise du théorème A et de son complément ci-dessus. Elle permet aussi d'éviter le résultat de Nakanishi et donc de libérer la conjecture de Nash topologique des diagrammes de dénouement que Nakanishi utilise pour montrer son théorème. Nous n'arrivons cependant pas à produire une démonstration alternative du résultat de Nakanishi.

Bien que la méthode de [B] permette de réduire le cas général au cas orientable la version forte du théorème principal qui y est énoncée est erronée car les modèles proposés ne couvrent pas toutes les classes de déchirure possibles. Une première version du présent travail était aussi fautive essentiellement car nous y affirmions que la forme d'enroulement était linéaire. Cette erreur a été débusquée par A. Degtyarev, S. Finashin, V. Kharlamov et G. Mihalkin nous les remercions tout particulièrement de leur perspicacité ainsi que de l'intêret qu'ils ont porté au "rétablissement de la vérité". Ils ont obtenu des présentations alternatives du phénomène d'enroulement caractéristique tant en étudiant quand était bien définie la forme de Seifert d'une surface qu'à l'aide de structures Pin-auxilliaries.

En mars 92 Gregory Mihalkin obtiendra la conjecture de Nash topologique en dimension quatre ([Mih]).

§1 Rappels et préliminaires topologiques

(A) *L'anneau d'intersection d'une variété de dimension trois*

Hormis dans l'appendice A, où l'utilisation de la cohomologie à coefficients entiers est explicitement mentionnée, les coefficients de tout objet homologique ou cohomologique dans cet article sont sous-entendus : il s'agit de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, les entiers modulo deux.

D'après la dualité de Poincaré si V est une variété fermée connexe de dimension n le cup-produit $H^i(V) \times H^j(V) \to H^{i+j}(V)$ en cohomologie à coefficients modulo deux a une version duale : l'intersection $H_{n-i}(V) \times H_{n-j}(V) \to H_{n-(i+j)}(V)$ en homologie. Dans cet article nous préfèrerons ce produit d'intersection homologique d'un maniement plus intuitif au "produit tasse" cohomologique, il nous arrivera cependant, pour simplifier l'expression et être conforme aux notations traditionnelles des classes caractéristiques, de "confondre" parfois classes dans le H^1 et hypersurfaces.

Voici, pour la commodité du lecteur une présentation rapide de la théorie de l'intersection homologique à coefficients modulo deux et du lissage des cycles de petite co-dimension.

Soit V une variété fermée de dimension n que l'on suppose triangulée. Une *chaîne géométrique* Σ modulo 2 de degré k, plus brièvement *k-chaîne*, dans V est une partie Σ de V triangulée par un sous-complex d'une subdivision linéaire de V qui est réunion de simplexes de dimension k. On note $C_k(V)$ l'ensemble des k-chaînes de V. L'adhérence de la différence symétrique fait de $C_k(V)$ un groupe abélien dont tous les éléments sont d'ordre 2 (i.e. un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espace vectoriel). Le *bord* d'une k-chaîne Σ est la $(k-1)$-chaîne $\partial\Sigma$ formée des simplexes de dimension $k-1$ de Σ qui sont face d'un nombre impair de simplexes de dimension k de Σ. Un *k-cycle* est une chaine de bord nul. L'opérateur de bord $\partial_k : C_k(V) \to C_{k-1}(V)$ est linéaire et vérifie $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$, autrement dit les $C_k(V)$ muni des opérateurs ∂_k forment un complexe dont l'homologie est l'homologie modulo 2 de la variété V. On notera $H_k(V)$ le $k^{\text{ième}}$ *groupe d'homologie modulo* 2 ainsi défini, son rang $b_k(V)$ est le $k^{\text{ième}}$ *nombre de Betti modulo* 2. On note $C_*(V)$ et $H_*(V)$ les sommes directes des $C_k(V)$ et des $H_k(V)$ respectivement. De même pour une sous-variété W d'une variété V des groupes d'homologie relative $H_k(V, W)$ seront définis à partir du complexe relatif $C_k(V, W)$ des k-chaînes dont le bord est dans W.

Les k-cycles sont des généralisations des sous-variétés triangulées qui ont l'avantage de pouvoir être organisés en groupes abéliens et donc de permettre des calculs effectifs. Evidement pour les cycles de dimension zéro il n'y a pas de différence. Thom ([Th]) a déterminé en général quand une classe d'homologie est représentée par une sous-variété, en particulier : *en dimension ambiante inférieure à* 6 *on ne perd rien en passant des cycles aux sous-variétés.* Indiquons comment obtenir de manière élémentaire ce résultat de Kneser–Rohlin–Thom dans le cas de dimension inférieure à 4 qui suffira à nos besoins.

(i) Par une méthode de lissage locale, due à Kneser, tout cycle Σ de co-dimension 1 (i.e. Σ est un $(n-1)$-cycle dans une variété V de dimension n) est homologue à une sous variété triangulée W de co-dimension 1 dans V, et une telle sous-variété W de co-dimension 1 est homologue à 0 (i.e. au cycle vide) si et seulement si elle borde une sous-variété triangulée X.

(ii) En co-dimension 2, Rohlin a remarqué qu'il en était de même pour les cycles Σ qui ont un relèvement en un cycle orienté (i.e. on peut choisir une orientation $\mathcal{O}_\sigma$ pour chaque $(n-2)$-simplexe σ d'une triangulation de Σ tel que tout $(n-3)$-simplexe de Σ soit le bord orienté d'un nombre pair $2m$ de simplexes σ de Σ dont exactement m sont munis de l'orientation choisie $\mathcal{O}_\sigma$, les m autres de l'orientation opposée).

En dimension 3 les cycles de co-dimension 2 sont de dimension 1 et vérifient évidement cette dernière condition. D'ailleurs en ce cas la démonstration est plus simple et due à Frankl et Pontriaguine. (On pourra se reporter aux pages 56 à 78 de [GM] pour une discussion de ces méthodes de lissage combinatoire et les références aux textes originaux).

Soit V une variété de dimension n inférieure à quatre et α et β des classes d'homologie de dimension i et j respectivement. D'après ce qui précède, et comme des sous-variétés isotopes sont des cycles homologues, on peut supposer que α et β sont représentées par deux sous-variétés A et B transverses[1] dans V. Leur intersection C est alors une sous-variété de V de dimension $k = n-(i+j)$ dont la classe dans $H_k(V)$ ne dépend que de α et β. Cette classe est notée $\alpha \cdot \beta$ c'est le *produit d'intersection* de α et de β. Ce produit munit $H_*(V)$ d'une structure d'anneau commutatif dit *anneau d'intersection* de la variété V.

Isolons, en dimension ambiante inférieure à 4, les énoncés que nous utiliserons.

AFFIRMATION A.1. (i) *Si c est une courbe simple fermée tracée sur une surface S représentant une classe γ de $H_1(S)$ alors l'intersection $\gamma \cdot \gamma$ est nulle si et seulement si c est bilatérale dans S.*

(ii) *Si cette surface est plongée dans une variété de dimension trois V l'intersection des classes représentées par c et S est nulle si et seulement si, près de c, la surface S est bilatérale dans V.*

(iii) *Soient F, S, T trois surfaces dans une variété de dimension trois V. On suppose F transverse à S et T et on note c et d les courbes d'intersection. Soient ϕ, σ, τ et γ, δ les classes de F, S, T et c, d dans $H_2(V)$ et $H_1(V)$ respectivement. Alors l'intersection $\gamma \cdot \delta$ de γ et δ dans F est égale à l'intersection $\sigma \cdot \tau \cdot \phi$ de σ, τ, ϕ dans V.*

(B) *Les bords sur une surface plongée et leur enroulement*

DEFINITIONS B.1. Soit S une surface dans une variété V de dimension trois. Son espace de *bords* $B_1(S)$ est le noyau du morphisme $H_1(S) \to H_1(V)$ induit sur

---

[1] L'intersection se définie en général pour des cycles non nécessairement sous-variété par des arguments de position générale.

l'homologie de degré 1 par l'inclusion de S dans V. Le *défaut* de S est la dimension de son espace de bords. Une *membrane* pour une courbe c de S représentant un bord est une surface $\mathfrak{M}$ plongée dans V, bordant c et en position générale relativement à S : la surface S est transverse à l'intérieur de $\mathfrak{M}$ et l'intersection de S et de $\mathfrak{M}$ est l'union de c et d'une courbe d, proprement plongée dans S ($\partial d = d \cap \partial\mathfrak{M}$) dite *intersection stricte* de la membrane avec la surface. Les fibrés normaux $\nu(d; S)$ et $\nu(d; \mathfrak{M})$ coïncident sur le bord de d (c'est le fibré normal à $\partial d = d \cap c$ dans c). Si les auto-intersections de d dans $\mathfrak{M}$ et dans S n'ont pas de sens puisque la courbe d peut avoir un bord non vide on peut cependant définir la différence de ces auto-intersections ou *enroulement* $\mu(\mathfrak{M})$ de la membrane $\mathfrak{M}$ comme l'évaluation, sur la classe fondamentale du double abstrait $d_+ \cup d_-$ de d, du fibré en droite obtenu en recollant les fibrés $\nu(d; S)$ et $\nu(d; \mathfrak{M})$ par l'identité de $\nu(\partial d; c)$.

AFFIRMATION B.2. *Soit c une courbe connexe de la surface S représentant un bord. Alors la surface S est, près de c, bilatérale dans V. De plus la courbe c est bilatèrale dans S.*

Démonstration. Comme la classe γ de la courbe c est nulle dans $H_1(V)$, l'intersection de la classe σ de S et de γ est nulle ainsi (cf. A.1(ii)) la surface S est bilatérale dans V près de c. Si c n'était pas aussi bilatérale dans S elle aurait un voisinage non orientable dans V et ne serait pas nulle dans $H_1(V)$ (cf. C ci-dessous). □

Comme d'après B.2 la surface S et la variété V sont orientables au voisinage de c le bord ∂T d'un tube $T(c)$ autour de c est un tore coupant la surface S en deux courbes c_+ et c_-, homologues dans ∂T.

DEFINITION B.3. On dit qu'une membrane $\mathfrak{M}$ est *simple* si elle coupe chacune des courbes c_+ et c_- en au plus un point et son intersection stricte d avec S est connexe.

AFFIRMATION B.4. *Soit c comme dans B.2. Alors il y a une membrane simple $\mathfrak{M}$ pour c.*

Démonstration. L'intersection d'une membrane $\mathfrak{M}$ avec ∂T est homologue soit à $c_\pm$, soit à l'union de $c_\pm$ et d'un méridien de $T(c)$. Ainsi, quitte à changer la membrane $\mathfrak{M}$ dans un collier de ∂T, on peut supposer qu'elle coupe chacune des courbes $c_\pm$ en au plus un point : l'intersection stricte d a au plus une composante à bord non vide. Il suffit alors d'ajouter des anses d'indice 1 à $\mathfrak{M}$ pour connecter les composantes de d. □

DEFINITION B.5. Une classe d'homologie σ de degré 2 dans une variété de dimension trois V est d'*intersection orientable* si pour toute classe $\tau \in H_2(V)$ on a $\tau \cdot \tau \cdot \sigma + \tau \cdot \sigma \cdot \sigma = 0$.

PROPOSITION B.6. (i) *Si la surface S n'est pas d'intersection orientable dans V alors toute courbe représentant un bord borde une membrane d'enroulement nul.*

(ii) *Si la surface S est d'intersection orientable dans V alors l'enroulement d'une membrane ne dépend que de la classe d'homologie du bord de la membrane. L'application $\mu : B_1(S) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ainsi définie est quadratique de forme bilinéaire associée b, la restriction à $B_1(S)$ de la forme d'intersection de la surface S.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ deux choix de membrane pour une même courbe c. D'après l'interprétation de l'enroulement comme différence des auto-intersections, dans la surface et la membrane, de l'intersection de la membrane avec la surface, le cycle $\tau = \mathfrak{M}' \cup \mathfrak{M}''$ vérifie (cf. A.1(iii)):

$$\tau \cdot \tau \cdot \sigma + \tau \cdot \sigma \cdot \sigma = \tau \cdot \tau \cdot \sigma - \tau \cdot \sigma \cdot \sigma = \mu(\mathfrak{M}') - \mu(\mathfrak{M}'').$$

D'où (i) car en ce cas si $\mathfrak{M}'$ est une membrane bordant une courbe c avec $\mu(\mathfrak{M}') = 1$ il y a une membrane $\mathfrak{M}''$ de bord c telle que le cycle τ associé vérifie $\tau \cdot \tau \cdot \sigma + \tau \cdot \sigma \cdot \sigma = 1$. On obtient aussi dans (ii) que $\mu(\mathfrak{M})$ ne dépend que du bord c de la membrane. Pour vérifier que $\mu(\mathfrak{M})$ ne dépend que de la classe d'homologie de c nous allons procéder en deux temps : d'abord (a) vérifier que si c borde une surface D dans la surface S alors $\mu(\mathfrak{M}) = 0$, puis (b) montrer que si $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ sont des membranes pour des courbes c' et c'' alors il y a une membrane $\mathfrak{M}$ bordant une courbe c obtenue en remplaçant chaque composante d'un voisinage de $c' \cap c''$ par deux arcs disjoints de même bord et telle que:

$$\mu(\mathfrak{M}) = \mu(\mathfrak{M}') + \mu(\mathfrak{M}'') + c' \cdot c''.$$

Si les courbes c' et c'' sont homologues alors la courbe c borde dans S : cette formule et $\mu(\mathfrak{M}) = 0$ d'après le point (a) donnent $\mu(\mathfrak{M}') = \mu(\mathfrak{M}'')$. La formule pour c' et c'' quelconques établit aussi le caractère quadratique de l'enroulement μ.

(a) La surface D mise en position général relativement à S est une membrane pour c d'enroulement nul.

(b) Comme l'enroulement ne dépend que de la classe d'isotopie de la membrane modulo son bord, on peut supposer que $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ sont transverses et, près $c' \cap c''$, transverse à S et du même côté de S. Une membrane $\mathfrak{M}$ obtenue en remplaçant un voisinage de $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}''$ par une surface de même bord convient. En effet chaque

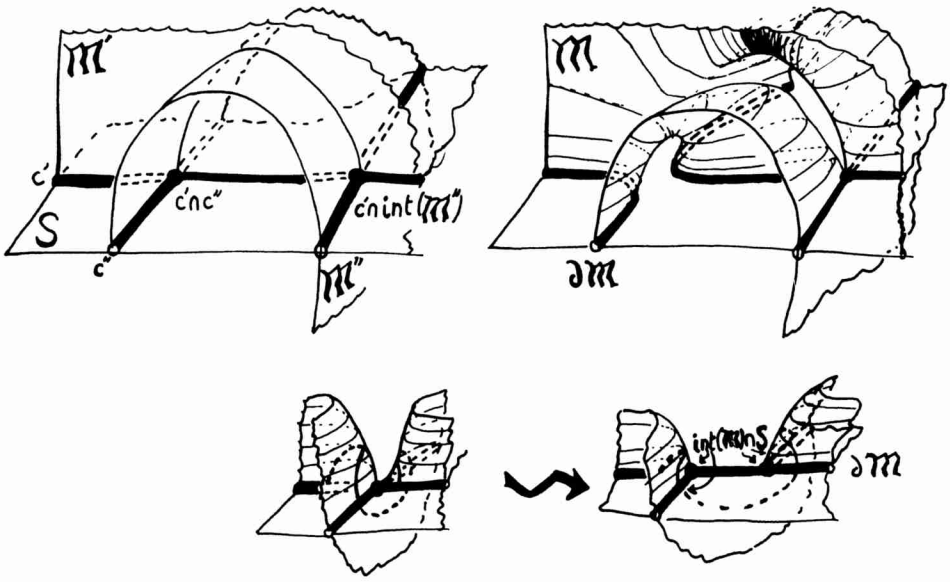

Figure 1

point de $(c' \cap \text{int}(\mathfrak{M}'')) \cup (c'' \cap \text{int}(\mathfrak{M}'))$ ajoute 1 à l'enroulement (cf. Figure 1) d'où la formule puisque $(c' \cap c'') \cup (c' \cap \text{int}(\mathfrak{M}'')) \cup (c'' \cap \text{int}(\mathfrak{M}'))$ est le bord de la courbe $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}''$ et a donc une nombre pair de points). □

Si la restriction d'une forme quadratique q sur un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espace vectoriel E au radical $E^{\perp}$ de la forme bilinéaire associée b est nulle alors q induit sur le quotient $E/E^{\perp}$ une forme quadratique non dégénérée dont l'invariant de Arf détermine la classe d'isométrie de q (le couple (E, b) étant donné). D'autre part les formes quadratiques associées à b dont la restriction à $E^{\perp}$ est non nulle sont toutes isométriques.

DEFINITION B.7. Soit S une surface d'intersection orientable dans une variété V de dimension trois. Le *défaut algébrique* $d_a(S)$ d'une surface S est 0, 2 ou 1 suivant que sa forme d'enroulement a un invariant de Arf défini et valant 0 ou 1 ou n'a pas d'invariant de Arf défini (i.e. est non nulle sur le radical de la forme bilinéaire associée).

Si une surface S n'est pas d'intersection orientable son *défaut algébrique* est 0.

Le rang r de la restriction de la forme d'intersection à l'espace des bords $B_1(S)$ est pair : $r = 2q$. Le *genre algébrique* de S est $g_a(S) = q$ si $d_a(S) = 0$, $g_a(S) = q + 1$ si $d_a(S) \neq 0$.

PROPOSITION B.8. *Le défaut algébrique d'une surface S d'intersection orientable dans une variété V de dimension trois ne dépend que de la classe d'homologie σ de S dans $H_2(V)$.*

Démonstration. Soient S_0 et S_1 deux surfaces homologues dans V. Il y a alors une variété G de dimension trois dans $V \times I$ et de bord $S_0 \times 0 \cup S_1 \times 1$. On peut supposer que la projection sur l'intervalle I induit sur G une fonction de Morse générique. Il faut montrer que le franchissement de chaque niveau critique ne change pas le défaut algébrique. Les maximums et minimums suppriment ou introduisent des sphères et ne changent pas l'enroulement. On peut donc (quitte à renverser localement le sens de parcours de I) ne considérer que les points d'indice 1 : soit on connecte deux composantes de la surface et on ne change pas la classe d'isométrie de l'enroulement, soit on fait la somme connexe de la surface S avec un tore dont une courbe non séparante borde la co-âme de l'anse. Ainsi l'espace des bords voit sa dimension augmenter de 1 ou 2, dans le premier cas la dimension du radical augmente de 1, dans le second le radical est inchangé. Comme la co-âme est une membrane d'enroulement nul (car d'intersection stricte vide) la nullité ou non de l'enroulement sur le radical subsiste et, si l'invariant de Arf est défini il le reste et ne change pas. □

(C) *Hypersurfaces caractéristiques*

On peut orienter le complémentaire du $(n-1)$-squelette d'une variété triangulée V de dimension n. Il y a donc un sous-complexe K de V dont le complémentaire est orienté et qui est minimal pour cette propriété. Un tel K est un cycle de co-dimension 1 et réciproquement pour tout cycle Σ homologue on peut orienter le complémentaire de Σ de manière à ce que cette orientation ne s'étende pas à un ouvert plus grand.

En particulier l'orientation $\mathcal{O}_{V\setminus\Sigma}$ du complémentaire diffère de l'orientation suivie par continuité le long d'une courbe à chaque traversée d'un $(n-1)$-simplexe σ de Σ. Ainsi $\mathcal{O}_{V\setminus\Sigma}$ induit sur les deux côtés d'un tel σ la même orientation : Σ est un cycle orientable (le bord de la n-chaîne orientée formée des simplexes de $V\setminus\Sigma$ orientés par $\mathcal{O}_{V\setminus\Sigma}$ représente deux fois le cycle Σ).

D'après A on peut prendre pour Σ une hypersurface F, une telle hypersurface F est dite *caractéristique*, la classe qu'elle représente dans $H_{n-1}(V)$ est duale de la *première classe de Stiefel–Whitney* $w_1(V) \in H^1(V)$. D'après ce qui précède on a :

AFFIRMATION C.1. (i) *Une courbe simple fermée c préserve l'orientation d'une variété V si et seulement si la première classe de Stiefel–Whitney $w_1(V)$ s'anulle sur la classe d'homologie γ de c.*

(ii) *Toute hypersurface duale de* $w_1(V)$ *est orientable.* □

D'où en utilisant A.1(iii):

AFFIRMATION C.2. (i) *Une classe* $\sigma \in H^1(V)$ *est duale d'une classe d'intersection orientable si et seulement si* $\sigma \cup w_1(V) = 0$, *en particulier*:

(ii) Une surface caractéristique dans une variété de dimension trois V est d'intersection orientable si et seulement si elle est de carré nul. □

DEFINITION C.3. Une variété V de dimension trois est dite de *type 0* si elle est orientable, *fortement non orientable* ou de *type II* ou si $w_1(V)^2 \neq 0$, *faiblement non orientable* si $w_1(V) \neq 0 = w_1(V)^2$. L'espace des bords d'une surface caractéristique F dans une variété faiblement orientable est donc muni d'une forme d'enroulement dite *caractéristique* $\mu: B_1(F) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le *défaut algébrique* et le *genre* d'une variété non orientable sont ceux d'une surface caractéristique. Une variété faiblement orientable est dite de *type I,d* si son défaut algébrique vaut d.

AFFIRMATION C.4. *Soit* $\mathfrak{M}$ *une membrane simple bordant une courbe non séparante d'une surface caractéristique F dans une variété de dimension trois alors* $\mu(\mathfrak{M}) = 0$ *si et seulement si* $\mathfrak{M} \backslash F$ *a un nombre impair de bouts: soit* $\mathfrak{M}$ *est transverse à F et l'intersection stricte d est bilatérate dans* $\mathfrak{M}$, *soit* $\mathfrak{M}$ *n'est pas transverse à F et F n'est pas bilatérale au voisinage de* $\mathfrak{M} \cap F$.

En particulier l'auto-intersection d'une surface caractéristique connexe dans une variété faiblement non orientable est d'enroulement nul. □

EXEMPLES C.5. Une matrice 2×2 à coefficients entiers A de déterminant -1 induit un difféomorphisme renversant l'orientation du tore T^2. Le cylindre $M(A) = T^2 \times [0, 1]/\{(x, 0) \sim (A(x), 1)\}$ d'une telle matrice est une variété de dimension trois faiblement non-orientable et ayant le tore $T^2 \times 0$ comme surface caractéristique. Soit c une courbe de T^2 telle que $A(c)$ coupe c transversalement en un point p. En modifiant au voisinage de p l'anneau immergé $c \times [0, 1]/\{(p, 0) \sim (p, 1)\} \subset M(A)$ on obtient une membrane d'enroulement 1 pour une courbe homologue à $c + A(c)$, ainsi :

(a) Si $A = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on obtient $M_1 = M(A_1)$ avec $b_1(M_1) = 2$ et $d_a(M_1) = 1$.

(b) Si $A = A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on obtient $M_2 = M(A_2)$ avec $b_1(M_2) = 1$ et $d_a(M_2) = 2$.

(c) Soient pour $i = 1, 2$, N_i les complémentaires dans les variétés $M(A_i)$ ci-dessus d'un tube ouvert autour du cercle $\{0\} \times [0, 1]/\{(0, 0) \sim (0, 1)\} \subset M(A_i)$. On dit que N_i est une *vrille de défaut i*, son bord est une bouteille de Klein et si c est

une courbe simple fermée orientée et renversant l'orientation d'une variété V de dimension trois le *vrillement de défaut* i de V le long de c est $\mathfrak{U}_i(V, c) = V \setminus \mathring{T}(c) \cup N_i$. Si V est de type I,d alors $\mathfrak{U}_1(V, c)$ est de type $I,1$ et $\mathfrak{U}_2(V, c)$ de type $I,(2-d)$. Remarquons que $\mathfrak{U}_2(V, c)$ et V ont des anneaux de cohomologie isomorphes.

(D) *Surfaces désorientées et désorientables dans une variété de dimension trois*

DEFINITION D.1. Une surface connexe S proprement plongée dans une variété de dimension trois V (i.e. $\partial S = S \cap \partial V$) est dite *désorientée* si elle est non orientable mais a un voisinage dans V orientable. Un nœud K dans V est dit *faiblement trivial* si une section d'un tube $T(K)$ autour de K borde dans $V \setminus (\mathring{T}(K) \cup S)$ une surface désorientée S.

Soit c l'âme d'un ruban de Möbius M plongé dans une surface désorientée S. Comme un voisinage de S dans V est orientable la courbe c préserve l'orientation de V et le ruban M est unilatéral dans V. D'après l'affirmation A.1.(ii) l'intersection des classes représentées par c et S est non nulle, ainsi, selon la définition D.2 ci-dessous la surface S est désorientable.

DEFINITION D.2. Une surface connexe S plongée dans V est dite *désorientable* si elle a un voisinage orientable dans V et si il y a une courbe c conservant l'orientation de V qui a une intersection non nulle avec S. Une classe x de $H_2(V)$ est *désorientable* si elle est représentée par une surface désorientable.

Dans une variété orientable V toute élément non nul de $H_2(V)$ est représenté par une surface désorientée et un nœud est faiblement trivial[2] dès qu'il représente 0 en homologie modulo 2. Cela découle de la dualité de Poincaré et du lemme suivant :

LEMME D.3. *Une classe de degré* 2 *désorientable est représentée par une surface désorientée.*

Démonstration. Il suffit d'ajouter à une surface S désorientable représentant cette classe une anse le long d'un arc convenable d'une courbe c transverse à S donnée par la définition D.2. □

---

[2] Dans une variété non orientable la faible trivialité est une notion plus subtile : le double de Whitehead d'une section $S^1 \times (*)$ du fibré non trivial $S^1 \underset{\sim}{\times} S^2$ n'est pas faiblement trivial bien qu'il soit homotopiquement trivial.

(E) *Eclatements, chirurgie de Dehn et déchirures*

Soit W une sous variété lisse de co-dimension q d'une variété V de classe C^∞. Un voisinage tubulaire $T(W)$ autour de W dans V s'identifie au cylindre de la projection du fibré en sphères bord du tube $\pi : \partial T(W) \to W$. Let fibré π se factorise en $\pi = P(\xi) \circ \nu$ où $P(\xi) : U(W) \to W$ est le projectivisé du fibré normal ξ à W dans V et $\nu : \partial T(W) \to U(W)$ l'application de Gauss qui à chaque point x de $\partial T(W)$ associe la droite de $\xi^{-1}(\pi(x))$ passant par x.

DEFINITION E.1. L'*éclatée* $\hat{V}$ de V de *centre* W (ou le long de W) est la variété obtenue en remplaçant $T(W)$ par le cylindre de l'application de Gauss ν. L'identification de $V \setminus W$ à $\hat{V} \setminus U(W)$ produit $\varepsilon : V \cdots \to \hat{V}$ qui "éclate" chaque point w de W en l'espace projectif $P(\xi)^{-1}(w) \approx RP^{q-1}$, la *contraction* σ inverse de ε par contre est une application C^∞ partout définie (cf. [Ae]). Si F est une sous-variété de V non incluse dans W la *transformée stricte* de F est la fermeture $\tilde{F}$ dans $\hat{V}$ de $\varepsilon(F \setminus W)$. Remarquons que si F contient W ou est transverse à W alors $\tilde{F}$ s'identifie avec l'éclatée $\hat{F}$ de F le long de $F \cap W$.

En dimension 3 les seuls "diviseurs exceptionnels" possibles $U(W)$ au dessus d'une sous variété connexe W sont:

(a) Un plan projectif RP^2 unilatéral si W est un point.
(b) Un tore unilatéral T^2 si W est un cercle préservant l'orientation.
(c) Une bouteille de Klein unilatérale K^2 si W est un cercle renversant l'orientation.

En particulier on a le

LEMME E.2. *Soit $\hat{V}$ une variété de dimension trois obtenue par éclatement sur une sous-variété connexe W d'une variété de dimension trois V alors $b_1(\hat{V}) = b_1(V) + 1$ et $\hat{V}$ est non orientable si W est de dimension* 1. □

Réciproquement:

LEMME E.3. *Toute sous-variété U décrite en* (a), (b) ou (c) *d'une variété de dimension trois M apparaît comme diviseur exceptionnel d'une contraction $\sigma : M \to N$ unique à isomorphisme près, dès que l'on a fixé la classe d'homotopie de la restriction σ_U à U de la contraction (qui doit être telle que la restriction $\nu(U, M)_{|(\sigma_U)^{-1}(w)}$ du fibré normal à U dans M aux fibres de σ_U est non triviale).* □

DEFINITION E.4. Une variété V est dite *élémentaire* si elle est obtenue à partir de la sphère S^3 par une suite d'éclatements sur des centres lisses. Deux variétés V

et V' de classe C^∞ sont dites *équivalentes par modification élémentaires* (*m-équivalentes* en abrégé) si il y a une suite finie de variétés $V = V_0, V_1, \ldots, V_n = V'$ où, pour chaque indice i inférieur à n, il y a une permutation (k, l) des indices i et $i+1$ telle que V_l soit difféomorphe à l'éclatée de V_k le long d'une sous-variété.

Soient L_1 et L_2 deux entrelacs dans deux variétés de dimension trois V_1 et V_2. Soit $T(L_i)$ un tube autour de L_i dans V_i. Un *méridien* de l'entrelacs L_i est une courbe m_i de $T(L_i)$ qui borde un disque transverse à L_i. Une *chirurgie de Dehn* entre V_1 et V_2, d'*âmes* deux entrelacs L_1 et L_2 est la donnée d'un homéomorphisme $h : V_1 \backslash \mathring{T}(L_1) \to V_2 \backslash \mathring{T}(L_2)$ entre les extérieurs de ces entrelacs, une *chirurgie ordinaire* est une chirurgie de Dehn qui envoit chaque méridien de L_1 sur une section due Tube $T(L_2)$.

Remarquons que les composantes de $\partial T(L_i)$ sont des tores si la composante λ correspondante de l'entrelacs préserve l'orientation, des bouteilles de Klein sinon. Dans ce dernier cas toute chirurgie de Dehn préserve la classe d'isotopie du méridien et s'étend à la composante de $T(L_i)$ correspondante (car dans la bouteille de Klein il n'y a qu'une classe d'isotopie de courbe essentielle à deux côtés). On peut donc supposer, et on supposera toujours dans la suite, que *les entrelacs L_i ont toutes leurs composantes préservant l'orientation.*

Plus généralement, puisque deux courbes simples sur un tore sont isotopes dès qu'elles sont homotopes, une chirurgie de Dehn qui préserve les classes d'homotopie des méridiens s'étend en un isomorphisme d'entrelacs $H : (V_1, L_1) \to (V_2, L_2)$.

D'après le théorème de Rohlin–Wallace ([W]) il y a une chirugie entre deux variétés fermées connexes de dimension trois si et seulement si elles sont soit toutes deux orientables, soit toutes deux non-orientables, nous n'utiliserons qu'une forme plus précise de ce fait pour les variétés qui ont la même homologie à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ que la sphère S^3 (d'après la dualité de Poincaré il revient au même de dire que leurs H_1 à coefficients $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont nuls). Nous appelerons *sphère d'homologie* de dimension trois une telle variété.

FAIT E.5. *Toute sphère d'homologie de dimension trois H est le dernier terme H_n d'une suite de sphères d'homologies de dimension trois $S^3 = H_0, H_1, \ldots, H_n$ où chaque H_{i+1} s'obtient à partir de la précédente H_i par chirurgie sur un nœud K_i faiblement trivial.*

Démonstration. D'après le théorème de Rohlin–Wallace ([W]) une variété de dimension trois orientable V borde une variété de dimension quatre W ayant une décomposition en anses sans anse d'indice impair. La forme d'intersection q de W

est représentée par la matrice d'enlacement de l'entrelacs "repéré[3]" L des cercles d'attachement des anses d'indice 2 (cf. [Ki2]).

Si V est une sphère d'homologie la forme q est non dégénérée et, quitte à faire la somme connexe de W avec un plan projectif complexe, on peut supposer la forme q sur le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ espace vectoriel $H_2(W)$ non totalement isotrope donc diagonalisable.

En réalisant une diagonalisation par glissement d'anses on obtient que chaque composante K_i de l'entrelacs L borde une surface S_i disjointe du reste de L et que les repérages sont d'auto-enlacement impair, le nœud K_{i+1} est ainsi faiblement trivial dans la sphère d'homologie H_i obtenue en ne faisant que les chirurgies sur $K_1, \ldots, K_i$. □

DEFINITION E.6. Une *déchirure* est une chirurgie de Dehn qui envoie les méridiens du tube $T(L_1)$ sur des courbes homologues modulo 2 aux méridiens du tube $T(L_2)$.

LEMME E.7. *Une chirurgie de Dehn* $h : V_1 \backslash \mathring{T}(L_1) \to V_2 \backslash \mathring{T}(L_2)$ *s'étend, après éclatement* (cf. E.1) *le long des âmes* L_i *de la chirurgie, en un homéomorphisme* $\hat{h} : (\hat{V}_1, U(L_1)) \to (\hat{V}_2, U(L_2))$ *si et seulement si c'est une déchirure.*

Démonstration. Les méridiens forment une base du noyau de $H_1(\partial \hat{T}(L_i)) \to H_1(\hat{T}(L_i))$, d'où la nécessité. Pour la suffisance on peut supposer que h est "linéaire" sur chaque tore [dans les coordonnées "longitude, méridien" $h(u, v) = (au + bv, cu + dv)$ avec a, b, c, d entiers et u, v dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$]. Désignons par τ_i l'involution de $\partial \hat{T}(L_i)$ qui à tout point x d'une composante de $\partial \hat{T}(L_i)$ associe le point diamétralement opposé sur le méridien passant par x [$\tau(u, v) = (u, v + \frac{1}{2})$].

Un homéomorphisme $h : V_1 \backslash \mathring{T}(L_1) \to V_2 \backslash \mathring{T}(L_2)$ s'étend en un homéomorphisme des éclatés dès que sa restriction au bord conjugue les involutions τ_i [$\forall x \in \partial \hat{T}(L_1)$ $h(\tau_1(x)) = \tau_2(h(x))$], c'est clairement le cas si h préserve la classe d'homologie modulo 2 des méridiens [b est alors pair et d impair]. □

Soit $h : V_1 \backslash \mathring{T}(L_1) \to V_2 \backslash \mathring{T}(L_2)$ une déchirure entre deux variétés de dimension 3 et S une surface dans V_1 transverse à l'entrelacs L_1. Comme h préserve les classes d'homologie des méridiens il y a une surface E proprement plongée dans $T(L_2)$ et bordant $h(\partial(S \backslash \mathring{T}(L_1)))$.

---

[3] Un *repérage* (framing en anglais) d'une sous-variété L d'une variété V est une trivialisation de son fibré normal. Pour repérer un entrelacs $L = (K_1, \ldots, K_n)$ à voisinage orientable dans une variété de dimension trois il suffit de se donner un section s de son fibré normal. La matrice d'enlacement de l'entrelacs repéré (L, s) est $(lk(K_i, s(K_j)))$.

DEFINITION E.8. La Surface $h(S\backslash\mathring{T}(L_1)) \cup E$ est dite obtenue par *rapièçage* à partir de S, sa classe d'homologie dans $H_2(V_2)$ ne dépend que de celle de S dans $H_2(V_1)$, plus précisément :

LEMME E.9. *Soient V_1 et V_2 deux variétés de dimension trois équivalentes par déchirure alors*:

(i) *Les variétés V_1 et V_2 ont même type* (cf. C.3).

(ii) *La déchirure h induit un isomorphisme linéaire gradué $h^* : H^*(V_2) \to H^*(V_1)$ tel que*:

$$h^*(w_1(V_2)) = w_1(V_1)$$

et pour tout x dans $H^1(V_2)$, $h^2(x \cup w_1(V_2)) = h^1(x) \cup w_1(V_1)$.

Démonstration. Comme h préserve les classes d'homologie des méridiens, la première partie de (ii) résulte de la comparaison des suites exactes de Mayer–Vietoris de $V_i = V_i\backslash\mathring{T}(L_i) \cup T(L_i)$ pour $i = 1, 2$. Comme l'entrelacs L_1 est à voisinage orientable on peut choisir une surface caractéristique F_1 dans V_1 disjointe de L_1, la surface $F_2 = h(F_1)$ sera caractéristique dans V_2 et a même forme d'enroulement donc même défaut algébrique que F_1 d'où (i) et la deuxième partie de (ii). □

REMARQUE E.10. (a) On ne peut espérer d'isomorphisme multiplicatif sur tout l'anneau de cohomologie : en effet RP^3 et $S^1 \times S^2$ n'ont pas mêmes structures multiplicatives bien que les nœuds RP^1 et $S^1 \times \{*\}$ aient pour extérieurs des tores solides dont l'identification produit une déchirure.

(b) Contrairement aux déchirures les éclatements ne préservent pas le type : en éclatant une variété V le long d'une courbe simple fermée duale de $w_1(V)^2$ on change le type. Nous utiliserons deux manifestations de ce phénomène :

(b1) Le complémentaire de l'entrelacs de Hopf dans la sphère S^3 est fibré en anneaux, ainsi l'éclatée de la sphère S^3 le long de l'entrelacs de Hopf est fibré en tores, d'après E.2 la réduction mod 2 de la monodromie de ce fibré est conjuguée à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et d'après C.5 cet éclaté est de type I,1. En fait *l'éclaté de S^3 le long de l'entrelacs de Hopf est la variété M_1 de type I,1* décrite en C.5.

(b2) Soit M_0 le fibré non trivial en sphères S^2 sur le cercle, c'est une variété de type $I0$. *L'éclatée $\hat{M}_0$ de M_0 le long du double de Whitehead K d'une section est une variété de type I,2.* En effet il y a dans M_0 un tore T caractéristique bilatéral disjoint de K et dont des générateurs de l'homologie bordent des disques D et D' coupant K transversalement en un point (cf. Figure 2). Une surface caractéristique F dans $\hat{M}_0$ est l'union du diviseur exceptionel et de la transformée stricte T' de T. Ainsi les éclatés des deux disques ci-dessus sont des membranes d'enroulement 1 pour les

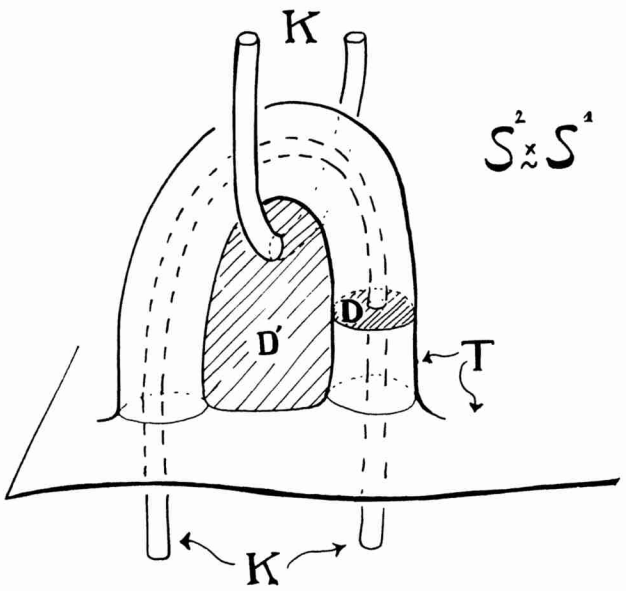

Figure 2

générateurs de $H_1(T')$. Comme une surface de Seifert pour K se relève en une membrane bordant un générateur du radical de $B_1(F)$, cette membrane est d'enroulement nul puisque T' est bilatérale, ainsi l'invariant de Arf de la forme d'enroulement est défini et vaut 1. □

§2. Dénouement par déchirure, le cas orientable et la conjecture de Nash topologique

A déchirure près les nœuds faiblement triviaux sont trivaux et les classes désorientables s'isolent dans des espaces projectifs RP^3 plus précisément :

LEMME 1. *Soit S une surface désorientée dans une variété de dimension trois V. On suppose que le bord de S a au plus deux composantes connexes et on se donne une orientation de ∂S. Alors il y a un entrelacs L porté par S et une déchirure $h : V'\backslash\mathring{T}(L') \to V\backslash\mathring{T}(L)$ d'âme L telle que S soit le rapiéçage d'une anneau ou d'un disque bilatéral dans V' et ayant ∂S comme bord orienté si S a un bord non vide, d'un plan projectif à voisinage orientable si S est fermée.*

Démonstration. Soient en effet $c_1, \ldots, c_n$ des courbes deux à deux disjointes renversant l'orientation de S, elles conservent l'orientation ambiante et ont donc

pour voisinage dans V et S des tores solides T_i et des rubans de Möbius M_i respectivement. Les bords de ces M_i sont homologues aux méridiens des T_i, ainsi les courbes c_i se contractent sur une surface S' à voisinage orientable dans la déchirure correspondante.

Comme toute surface fermée non orientable est somme connexe de plans projectifs réels il y a dans S un tel système de courbes c_i tel que la surface S' ainsi obtenue soit un plan projectif, un disque ou un anneau suivant que S a 0, 1 ou 2 composantes de bord. □

COROLLAIRE 1. *Soit V une variété fermée connexe de dimension trois alors il y a une suite variétés $V = V_0, V_1, \ldots, V_n = V'$ telle que chaque V_{i+1} s'obtient à partir de V_i par une déchirure ou une contraction sur un point ou un cercle préservant l'orientation et V' a son H^1 engendré par $w_1(V')$.*

Démonstration. D'après E.2 du §1 il suffit de montrer que si il y a dans V une surface S non séparante et non caractéristique alors il y a une déchirure dans laquelle le rapiécé de S se contracte. On peut supposer que S est connexe et, si V est non orientable, que S coupe une surface caractéristique F en une courbe connexe ne séparant pas S. D'après D.3 on peut supposer de plus que $S \setminus \mathring{T}(F)$ est désorientée. Le lemme 1 produit une déchirure disjointe de F dans laquelle $S \setminus \mathring{T}(F)$ se rapièce en un plan projectif S' unilatéral si S est disjoint de F, et un anneau A qui forme avec $S \cap T(F)$ un tore unilatéral S' si S rencontre F. D'où le résultat d'après E.3 du §1. □

Démonstration du théorème B^+. Comme V est orientable toutes les contractions qui ont lieu dans le corollaire 1 sont, d'après E.2 du §1 sur des points et il y a une déchirure de V sur une somme connexe de $b_1(V)$ exemplaires de RP^3 et d'une sphère d'homologie. Il suffit donc de montrer que toute telle sphère d'homologie admet une déchirure sur la sphère standard S^3. D'après le fait E.5 du §1, l'affirmation suivante achève la démonstration.

AFFIRMATION. *Soit H' une sphère d'homologie obtenue par une chirurgie sur un nœud K faiblement trivial dans une sphère d'homologie H. Alors il y a une déchirure entre H et H'.*

Démonstration. D'après D.3 du §1 et le lemme 1 il y a une déchirure de H sur une sphère d'homologie H_1 dans laquelle le nœud K est trivial, d'où une déchirure de H' sur une sphère d'homologie H'_1 obtenue par chirurgie sur le nœud K vu dans H_1. Comme H'_1 est une sphère d'homologie le nœud K a, dans H_1, un nombre d'enlacement impair avec le repérage servant à définir la chirurgie (cf. [Ki2]). D'après E.7 du §1 il y a une déchirure entre H'_1 et la variété H''_1 difféomorphe à H'_1

obtenue par chirurgie de H_1' sur le nœud trivial K repéré par une section de nombre d'enlacement 1 avec K, d'où le résultat par composition de déchirures. □□

PROPOSITION 1. *Toute variété fermée connexe de dimension trois est m-équivalente à la sphère* S^3.

Démonstration. D'après le théorème B^+ il suffit de montrer que toute variété de dimension trois est m-équivalente à une variété orientable. On va établir que si une variété de dimension trois possède une surface caractéristique connexe de genre $g+1>0$ allors elle est m-équivalente à une variété W qui possède une surface caractéristique connexe de genre g si $g>0$ et est orientable si $g=0$, d'où le résultat par récurrence sur g. On se ramène d'abord au cas où F est unilatérale en remarquant que si F est bilatérale la transformée stricte de F dans l'éclatée de V le long d'une courbe non séparante de F est une surface caractéristique unilatérale de même genre que F. Si F est un tore unilatéral on peut d'après E.3 du §1 le contracter pour obtenir une variété orientable. Si g est postif on considère une courbe c séparant F en une surface trouée bilatérale S_0 de genre g un tore troué unilatéral T_0. Comme c borde la surface désorientable S_0 le lemme 1 nous assure que V est équivalente par déchirure à une variété V' dans laquelle le nœud c est trivial. Ainsi la variété V'' obtenue partir de V par chirurgie sur le nœud c repéré par un bicollier de c dans F est équivalente par déchirure à la somme connexe de V' et de RP^3, et V'' est m-équivalente à V' et donc à V. L'affirmation de récurrence vient alors de ce que la surface caractéristique de V'' obenue à partir de F par chirurgie plongée est union disjointe d'une surface S de genre g et d'un tore unilatéral qui se contracte d'après E.3. □

§3. Classification à déchirure près : démonstration du théorème C

PROPOSITION 2. *Toute variété fermée connexe de dimension trois V est équivalente par déchirure à une variété W possédant une surface caractéristique F dont le défaut est égal à son défaut algébrique.*

Démonstration. Soit V' une variété dans la classe de déchirure de V et F' une surface caractéristique connexe de genre g pour V', définissons la complexité du couple (V', F') comme étant $1+g$ si F' est bilatérale et g sinon. Soit (W, F) un tel couple de complexité minimale. Si le défaut de F n'était pas égal à son défaut algébrique il y aurait d'après B.4 et B.6 une membrane simple $\mathfrak{M}$ pour une courbe c non séparante de F d'enroulement $\mu(\mathfrak{M})=0$. Le lemme suivant contredirait alors la minimalité de (W, F).

LEMME 2. *Soit F une surface caractéristique connexe de genre g dans une variété V de dimension 3 et $\mathfrak{M}$ une membrane simple pour une courbe non séparante c de F. Si $\mu(\mathfrak{M}) = 0$ il y a une déchirure de V sur une variété W possédant une surface caractéristique F' qui est*:

(i) *unilatérale de genre au plus g si F est bilatérale*;

(ii) *de genre $g - 1$ si F est unilatérale.*

Démonstration. On distingue deux cas suivant que la membrane simple $\mathfrak{M}$ est ou non transverse à F près de son bord. Dans le premier cas l'intersection stricte d est une courbe simple fermée le long de laquelle on peut découper la membrane $\mathfrak{M}$ pour obtenir une membrane $\mathfrak{M}'$ bordant l'union de c et des deux composantes d_- et d_+ du bord d'un collier autour de d dans F (cf. Figure 3).

Comme la courbe c est non triviale dans $H_1(F)$ la trace de $\mathfrak{M}'$ sur le complémentaire de l'intérieur d'un tube $T(F)$ autour de la surface F dans W représente un élément non nul et non caractéristique de $H_2(W \setminus \mathring{T}(F), \partial T(F))$. Ainsi d'après D.3 du §1 on peut supposer $\mathfrak{M}' \setminus d$ est désorientée. En ajoutant à $\mathfrak{M}'$ une demi-anse d'indice 1 on obtient une membrane désorientée $\mathfrak{N}$ bordant l'une des courbes $d_\pm$ et une somme connexe de l'autre avec c. Le lemme 1 permet alors, quitte à déchirer hors de F, de supposer que $\mathfrak{N}$ est un anneau bilatéral. Comme, près de d, la membrane $\mathfrak{N}$ arrive "des deux côtés" de F la surface obtenue en remplaçant un bicollier du bord de $\mathfrak{N}$ dans F par le bord d'un bicollier de $\mathfrak{N}$ dans W est une surface F' unilatérale de même genre que F : On a obtenu (i) si la surface F était bilatérale. Si F est unilatérale on peut ajouter une demi-anse à $\mathfrak{N}$ pour connecter ses deux composantes de bord puis toujours grâce au lemme 1 se ramener au cas où $\mathfrak{N}$ est un disque. Une chirurgie plongée donne alors (ii).

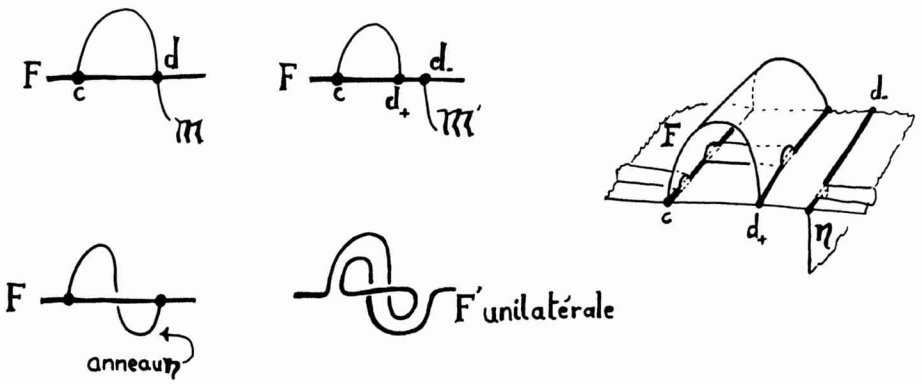

Figure 3.

Dans le deuxième cas la trace $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{M}$ sur $W \setminus \mathring{T}(F)$ a un bord connexe. Par la même méthode que précédement on se ramène au cas où $\mathfrak{N}$ est un disque, ainsi $\mathfrak{M}$ est un ruban de Möbius bilatéral. Il y a alors un difféomorphisme du complémentaire d'un tube autour de c qui est l'identité hors du bicollier de $\mathfrak{M}$ dans W et dans le bicollier une isotopie de l'identité au double tour du ruban de Möbius $\mathfrak{M}$. Ce difféomorphisme s'étend en un difféomorphisme entre W la variété obtenue par chirugie sur le nœud c dans laquelle on peut faire une chirurgie plongée qui baisse le genre de la surface F. □□

REMARQUE (G. Mihalkin). On peut, dans la dernière partie de la démonstration, éviter le difféomorphisme de "double tour" le long du ruban de Möbius $\mathfrak{M}$ en remarquant que $\mathfrak{N}$ se prolonge en une membrane transverse à F pour une courbe c′ homologue modulo 2 (mais non modulo 4) à c.

Démonstration du théorème B. La nécessité vient de ce que le type est invariant par déchirure (E.9(i)) et qu'une variété élémentaire V avec $b_1(V) = 1$ est d'après E.2 du §1 l'éclatée de la sphère S^3 sur un point ou un nœud K, dans le premier cas elle est orientable, dans le deuxième cas la transformée stricte d'une surface de Seifert pour K est une membrane d'enroulement nul elle est donc de type $I0$ ou $I1$.

Pour la suffisance il suffit, d'après le théorème B^+, de montrer que si V est une variété non-orientable qui n'est pas de type $I2$ avec $b_1(V) = 1$ on peut construire une suite de variétés V_i comme dans le corollaire 1 aboutissant à une variété V_n orientable : en effet on peut supposer par position générale que les centres des déchirures permettant de passer de V_i à V_{i+1} sont disjoints des centres des contractions de V_j sur V_{j+1} pour $j < i$ et on peut repousser toutes les déchirures dans le premier étage de la construction : le passage de V_0 *à* V_1.

Si V possède un tore caractéristique unilatéral on peut, d'après E.3 le contracter pour obtenir une variété orientable. Soit F une surface caractéristique de défaut égal au défaut algébrique donnée par la proposition 2. Si F est une sphère on obtient un tore caractéristique unilatéral en lui ajoutant un anse le long d'un arc renversant l'orientation. Si F est un tore de défaut 1, il est bilatéral et il y a une surface S coupant F en une courbe non séparante. Comme dans le corollaire 1 on se ramène par déchirure disjointe de F au cas où S est un tore unilatéral et l'image de F est un tore caractéristique unilatéral dans la variété obtenue en contractant S. De même si le genre de F est supérieur à 1 on construit après déchirure disjointe de F un tore unilatéral coupant F en une courbe non séparante non homologue dans V à l'auto-intersection de F. La variété V' obtenue en contractant S vérifie $w_1(V')^2 \neq 0$ et si une surface caractéristique F' de V' de défaut nul n'est pas un tore unilatéral elle est de genre supérieur à un et on peut recommencer.

Reste le cas où V est de type $I2$ avec $b_1(V) > 1$ et F est un tore. Dans l'exemple (b2) de la remarque E.10 on avait construit une variété élémentaire M_0' de type $I2$ avec $b_1(M_0') = 2$, d'où le résultat si on admet le théorème C de classification à déchirure près, nous donnons cependant ci-dessous un argument alternatif direct. D'après C.4 une membrane simple bordant une courbe non séparante c de F n'est pas transverse à F et, comme $b_1(V) > 1$, il y a une telle membrane $\mathfrak{M}$ qui contient un arc α proprement plongé dans $\mathfrak{M}$, tel que α coupe transversalement en un point une surface S disjointe de F et $\partial\alpha$ borde sur c un arc γ contenant les deux points où $\mathfrak{M}$ n'est pas transverse à F. Il y a donc une surface D disjointe de α, de bord le bord d'un disque de F contenant l'arc γ et d'intérieur disjoint de F et du même côté de F que $\mathfrak{M}$ près de $c \cap \partial D$. Le lemme 1 permet de déchirer hors de $F \cup \alpha$ pour transformer D en un disque, ainsi la surface caractéristique F' obtenue à partir de F par chirurgie plongée sur α et sur D est l'union d'un tore unilatéral et d'un tore bilatéral. La membrane $\mathfrak{M}$ se chirurgise aussi pour donner une membrane $\mathfrak{M}'$ qui est transverse à la composante bilatérale de F'. Ainsi lorsque l'on contracte la composante unilatérale de F' on obtient une variété de dimension trois et une membrane d'enroulement nul bordant une courbe non séparante d'un tore caractéristique: cette variété est de l'un des types type $I0$ ou $I1$ déjà traité. □

PROPOSITION 3. *Soit V une variété fermée connexe de dimension trois faiblement non orientable de défaut algébrique non nul. Alors V est équivalente par déchirure à une variété obtenue par vrillement (cf.* C.5(c)) *d'une variété W possèdant une surface caractéristique G de défaut nul.*

Démonstration. D'après la proposition 2 on peut supposer que la variété V a une surface caractéristique F connexe dont le défaut est égal à son défaut algébrique. Comme l'espace des bord $B_1(F)$ est de dimension 1 ou 2 et qu'en ce dernier cas la forme d'intersection de la surface F est non dégénérée sur $B_1(F)$ on peut couper la surface F en un tore troué F_0 dont l'homologie contient $B_1(F)$ et une surface F_1 dont l'homologie s'injecte dans $H_1(V)$.

Ainsi tout élément de $B_1(F)$ est bord d'une membrane $\mathfrak{M}$ telle que $\mathfrak{M} \cap F \subset F_0$. (Si une membrane $\mathfrak{N}$ bordant une courbe c de F_0 coupe F_1 l'intersection avec $\mathfrak{N}$ produit un élément du dual de $H_1(F_1)$ qui, par dualité de Poincaré, est représenté par l'intersection avec une surface fermée S ; la somme connexe de $\mathfrak{N}$ avec S est la membrane $\mathfrak{M}$ cherchée.) D'après l'affirmation C.4 du §1 une telle membrane $\mathfrak{M}$ est non transverse à F et $\mathfrak{M} \setminus \mathring{T}(F)$ a deux composantes de bord a et b qui se projettent sur F_0 en deux courbes simples fermées $\bar{a}$ et $\bar{b}$ se coupant transversalement en un point (on note $\pi : \partial T(F) \to F$ la projection et $\pi^{-1}(\bar{a}) = a \cup -a$). Le lemme 1 assure alors que, quitte à déchirer hors de F, on peut supposer que $\mathfrak{M} \setminus \mathring{T}(F)$ est un anneau. On munit a et b de l'orientation bord de cet anneau.

Supposons d'abord que le défaut est 2 et soit $\mathfrak{M}'$ une membrane bordant un élément c' de $B_1(F)$ distinct de c. Comme $H_1(F_0)$ a trois éléments non triviaux on a, quitte à changer $\mathfrak{M}'$ dans un voisinage de F_0 et à renuméroter, $\bar{a} = \bar{a}'$ et $\bar{b}'$ est homotope au juxtaposé de $\bar{a}$ et $\bar{b}$ et est transverse à $\bar{a}$ et à $\bar{b}$ avec $\bar{b}' \cap (\bar{a} \cup \bar{b}) = \bar{a} \cap \bar{b}$. Alors nécessairement a et a' sont de part et d'autre de F : $a' = -a$ (sinon on peut supposer que a et a' sont disjointes dans $\partial T(F)$ et y bordent un anneau A, ainsi $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}' \cup A$ serait une surface immergée dont la courbe de points doubles n'a qu'un point dans son bord!). L'intersection $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}') \setminus \mathring{T}(F)$ est alors l'union d'un arc joignant les deux composantes de $\partial(\mathfrak{M} \setminus \mathring{T}(F))$ et de courbes bordant des disques dans $\mathfrak{M}$, ces disques permettent par chirugie plongée de $\mathfrak{M}'$ de se ramener au cas où $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}') \setminus \mathring{T}(F)$ est un arc α. Quitte à déchirer hors de $F \cup \mathfrak{M}$ on peut supposer grâce au lemme 1 que $\mathfrak{M}' \setminus \alpha$ est un disque, ainsi $\mathfrak{M}'$ est un anneau et $F_0 \cup \mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}'$ est l'âme de la vrille de défaut 2 cherchée.

Dans le cas de défaut 1 la courbe $-a \cup -b$ est homologue à zéro dans $V \setminus \mathring{T}(F)$, d'après la suite exacte de Mayer–Vietoris. Il y a donc une membrane $\mathfrak{M}'$ dans $V \setminus \mathring{T}(F)$ qui borde $-a \cup -b$. Comme dans le cas de défaut 2 on se ramène au cas où $\mathfrak{M}'$ est un anneau coupant $\mathfrak{M}$ en un arc α : $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}'$ est un tore immergé et $F_0 \cup \mathfrak{M} \cup \mathfrak{M}'$ est l'âme de la vrille de défaut 1 cherchée. □

On obtient par une application inductive analogue du lemme 1:

PROPOSITION 4. *Soit V une variété non orientable possédant une surface caractéristique F de défaut nul et de genre g. Alors il y a une déchirure, disjointe de F, de V sur une variété W et des surfaces Σ_i dans W deux à deux transverse et transverses à F, $1 \leq i \leq k$ avec $k = 2g - 1$ ou $2g$ suivant que V est fortement ou faiblement non orientable et telles que*:

$\Sigma_i \cap F = \gamma_i$ est une courbe simple fermée, $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \varnothing$ pour $|i - j| > 1$, et $\Sigma_i \cap \Sigma_{i+1}$ est une courbe simple fermée δ_i coupant F transversalement en un point.

Pour i pair Σ_i est un tore unilatéral.

Pour i impair et inférieur à k, la surface Σ_i est une bouteille de Klein bilatérale.

Enfin si V est fortement non orientable, la surface Σ_{2g-1} est un plan projectif bilatéral.

De plus si K est un nœud coupant F transversalement en un point on peut demander à Σ_1 de le contenir et à δ_1 d'en être disjoint. □

Soit Z l'union de F et d'un nœud K coupant F transversalement en un point si F est une sphère, l'union de F et des surfaces Σ_i si F est de genre positif.

Le complexe Z est de caractéristique d'Euler 1 ainsi le bord d'un voisinage régulier N de Z est une sphère [le double $D(N)$ de N est une variété fermée

de dimension trois donc de caractéristique d'Euler 0, comme d'autre part $\chi(D(N)) = 2\chi(N) - \chi(\partial N)$ il vient $\chi(\partial N) = 2$ donc ∂N est une sphère car ∂N est clairement connexe]. D'autre part il n'y a qu'une manière d'épaissir Z en le voisinage régulier N car les fibrés normaux à F et aux Σ_i sont déterminés par l'énoncé de la proposition 4. Soient $V_g^{I,0}$ et V_g^{II} les variétés fermées obtenues en bouchant par un disque les voisinages N ci-dessus correspondants aux cas faiblement et fortement orientables et pour $d > 0$, la variété $V_g^{I,d}$ est obtenue par vrillement de défaut d sur $V_{g-1}^{I,0}$.

Démonstration du théorème C. La nécessité a été obtenue en E.9 du §1. Pour la suffisance on remarque que d'après le théorème B^+ et les propositions 3 et 4 toute variété fermée connexe V de dimension trois est équivalente par déchirure à la somme connexe V_n de n exemplaires de l'espace projectif RP^3 si elle est orientable, à la somme connexe de V_n et d'une variété explicite $V_g^{I,d}$ ou V_g^{II} ne dépendant que du type I, d ou II de V et du genre algébrique g de V sinon (cf. C.3 du §1). Suivant que le type est O, I ou II l'entier n est défini par : $n = b_1(V)$, $n + 2g = b_1(V) + d$, $n + 2g = b_1(V)$. □

§4. Approximation algébrique et démonstration du théorème A

Rappelons quelques définitions et résultats de géométrie algébrique réelle (nous suivrons le livre [BCR]). Soit Y une variété algébrique réelle affine compacte. Une classe $z \in H_k(Y)$ est *algébrique* si elle est représentée par la classe fondamentale d'un sous-ensemble algébrique de dimension k de Y. On dit que Y a son homologie algébrique si toutes ses classes d'homologie sont algébriques.

Un fibré fortement algébrique sur Y est par définition la pré-image du fibré tautologique sur une grassmannienne par une fonction régulière (cf. [BCR] 3.2.1) de Y dans cette grassmannienne. On montre :

(4.1) *Un fibré topologique sur Y est isomorphe à un fibré fortement algébrique si et seulement si il l'est stablement* ([BCR] 12.3.5).

(4.2) *Une section σ continue d'un fibré fortement algébrique sur Y s'approxime par une section régulière s* ([BCR] 12.3.1).

(4.3) *Si Y est de plus non singulière près d'un sous-ensemble algébrique Z non singulier sur lequel σ s'annule on peut demander à s et σ de coïncider sur Z et à s d'approximer σ pour la topologie C^∞ près de tout fermé sur lequel σ est C^∞* ([BCR] 12.5.5 et 12.3.2).

(4.4) *Si Y est non singulière de dimension d il y a un fibré fortement algébrique ξ de rang 1 sur Y dont la première classe de Stiefel–Whitney $w_1(\xi)$ est duale*

d'une classe z de $H_{d-1}(Y)$ *si et seulement si cette classe est algébrique* ([BCR] 12.4.8).

Comme une hyper-surface M d'une variété V de dimension d détermine[4] un fibré de rang 1 dont la classe d'isomorphisme ne dépend que de la classe de M dans $H_{d-1}(Y)$ l'approximation algébrique de (4.3) donne :

(4.5) *On peut, par une isotopie* C^∞ *petite, pousser sur un sous-ensemble algébrique non singulier toute hyper-surface* C^∞ *d'une variété algébrique affine compacte non singulière dont l'homologie de codimension* 1 *est algébrique* ([BCR] 12.4.10).

En dimension trois on peut approximer les sous-variétés C^∞ de toute dimension par des sous-variétés algébriques non singulières :

PROPOSITION 5. *Soit X une variété algébrique réelle lisse de dimension trois qui est affine et compacte et dont l'homologie est algébrique, alors toute sous-variété* C^∞ *de X s'approxime pour la topologie* C^∞ *par une sous-variété algébrique non singulière.*

Démonstration. Cette proposition peut se déduire des résultats de Bochnak et Kucharz ([BK]) su la K-théorie fortement algébrique des variétés réelles non singulières de dimension trois. Donnons en cependant une preuve élémentaire.

D'après (4.5) il suffit de montrer que l'on peut approximer toute sous-variété de dimension 1. Soit donc L un entrelacs C^∞ dans X et Z' un sous-ensemble algébrique de dimension 1 dont la classe fondamentale Z représente la classe d'homologie de L (Z est obtenu en enlevant à Z' les points isolés de Z'). Quitte à isotoper légèrement L on peut le supposer disjoint de Z'. Remarquons que, comme sous-ensemble algébrique de dimension 1 dans une variété algébrique lisse de dimension trois, Z est un graphe à valences paires topologiquement localement plat[5] (cf. [BCR] Théorèmes 9.3.5 et 11.2.2). On peut donc appliquer à $K = L \cup Z$ la remarque suivante:

REMARQUE. *Soit K un graphe dont tous les sommets sont de valence paire et qui est plongé de manière localement plate dans une variété de dimension trois V.*

---

[4] La pré-image du fibré tautologique sur RP^{n+1} par la construction de Thom sur le fibré normal à M dans V.

[5] i.e. près de chaque point de Z la paire (Y, Z) est homéomorphe à une paire de cones (cS, cA) où A est un ensemble fini à nombre pair d'éléments dans une sphère S.

Alors il y a un fibré ξ sur V qui est C^∞ de rang 2 et possède une section continue σ dont l'ensemble des zéros est le graphe K et qui est topologiquement transverse à K là où K est une sous-variété (i.e. hors des sommets de valence supérieur à 2).

De plus on peut supposer que la section σ est C^∞ et transverse là où K est une sous-variété C^∞ de V.

Démonstration. Si K est une sous-variété et $\pi : T(K) \to K$ est la projection du fibré normal à K dans V le fibré $\pi^*(v)$ sur $T(K)$ a une section σ' transverse dont l'ensemble des zéros est K. Ainsi la restriction de $\pi^*(v)$ à $T(K)\backslash K$, munie de la section σ' est isomorphe à la restriction du stabilisé $\theta \oplus \varepsilon$ du fibré d'orientation θ de V, munie de la section provenant du facteur trivial ε. Le fibré ξ et la section σ sont obtenus en recollant $(\pi^*(v), \sigma')$ et $(\theta \oplus \varepsilon_{|V\backslash K}, (0, 1))$.

Dans le cas général le fibré ξ est obtenu par le procédé ci-dessus appliqué à une sous-variété K' de V qui coïncide avec K hors de l'intérieur d'un voisinage conique N du zéro-squelette de K. La restriction de ce fibré ξ à la boule N est triviale, supposons la trivialisée, on peut prendre pour section σ l'extension conique dans cette trivialisation de la restriction à $V\backslash \mathring{N}$ de la section transverse à K' construite dans le paragraphe précédent. □

La deuxième classe de Stiefel–Whitney $w_2(\xi)$ est nulle car représentée par $L \cup Z$. Il s'ensuit que la restriction au 2-squelette d'une triangulation de X du fibré stabilisé $\xi \oplus \varepsilon$ est isomorphe à la somme d'un fibré trivial et d'un fibré de rang 1 ([M] 12.1). Comme $\pi_2(O(3))$ est nul le fibré $\xi \oplus \varepsilon$ est lui aussi un stabilisé d'un fibré de rang 1. D'après (4.1) et (4.4)[6] il y a un fibré fortement algébrique isomorphe à ξ. On conclut alors par le théorème d'approximation relative (4.3). □□

Remarquons que si une variété algébrique réelle affine non singulière X et une sous-variété algébrique non singulière Z de X ont toute deux leur homologie algébrique il en est de même de l'éclatée $\hat{X}$ de centre Z (cf. [BCR] 3.5.10 et E.1 et E.2 du §1).

Démonstration du théorème A. Soit $V' = RP^3 \# V$ l'éclaté de V sur un point si V est équivalent par déchirure à M_2, $V' = V$ sinon. D'après le théorème B il y a une variété top-élémentaire W obtenue à partir de la sphère S^3 par une suite d'éclatements $S^3 = W_0 \leftarrow W_1 \leftarrow \cdots W_n \leftarrow W_{n+1} = W$ et une fibration C^∞ à fibres connexes

---

[6] Car l'homologie de dimension 2 de Y algébrique.

$\varphi : E_n \to L$ du diviseur exceptionnel E_n du dernier éclatement $W_n \leftarrow W_{n+1}$ sur un entrelacs L de V' telle que le fibré normal à E^n dans W_{n+1} le long de chaque fibre de φ est non trivial et V' est difféomorphe à la variété obtenue par contraction de E_n sur L suivant φ. Si $V' = RP^3 \# V$ on peut supposer que le plan projectif $RP^2 \subset RP^2 \# V$ est transverse aux centres des éclatements et on note S la transformée stricte de RP^2 dans W.

La proposition 5 permet par récurrence de voir la tour $W_0 \leftarrow W_1 \leftarrow \cdots \leftarrow W_{n+1}$ comme une tour de variétés rationnelles non-singulières $S^3 = X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \cdots \leftarrow X_{n+1} = X$ où chacune des X_i est obtenue à partir de la précédente X_{i-1} par un éclatement de centre une courbe algébrique non-singulière Z_{i-1}. On note $\eta : X \to W_{n+1}$ le difféomorphisme ainsi obtenu.

Si l'on prend soin d'approximer le centre H_n du dernier éclatement composante par composante on obtient que chaque composante connexe de la courbe Z_n est irréductible il en est de même de chaque composante connexe de la surface algébrique $\Theta = \Theta_n$ dans $X = X_{n+1}$ correspondant à la surface E_n de W_n. Ces composantes ont leur homologie algébrique (engendrée par une fibre de l'éclatement et la classe de Stiefel–Whitney du fibré normal).

En identifiant l'entrelacs L à Σ, une union disjointe de droites projectives RP^1, le théorème d'approximation 4.2 permet d'approximer pour la topologie C^∞ la fibration $\varphi \circ \eta : \Theta \to \Sigma$ par une application régulière ϕ ([BCR] 13.3.1). De même une version relative du théorème d'approximation 4.5 obtenue à partir de 4.3 permet d'isotoper S relativement à l'intersection de S avec les transformés strictes des diviseurs exceptionnels des éclatements $X_i \leftarrow X_{i+1}$ sur un ensemble algébrique Σ.

La variété rationnelle affine Y du théorème A sera alors obtenue par la solution du "problème de modification" donnée par la proposition 6 ci-dessous qui généralise la construction du compactifié d'Alexandroff algébrique ([BCR] 3.5.3). (Si $V' = RP^3 \# V$ il faut après avoir appliqué une première fois ce principe pour contracter les fibres de ϕ et obtenir une variété affine compacte Y' l'appliquer une deuxième fois à la fermeture projective Y'' de Y' pour contracter en un point l'union de l'image de Σ dans Y'' avec $Y''_\infty = Y'' \cap RP^{k-1}_\infty$, la partie à l'infini de Y''.)

PROPOSITION 6. *Soit X une variété algébrique réelle projective, $\Theta \subset X$ une sous-variété propre et $\phi : \Theta \to \Sigma$ une application régulière où $\Sigma \subset \mathbb{R}^m$ est une variété algébrique réelle affine.*

Alors il y a une variété algébrique réelle affine $Y \subset \mathbb{R}^k$ contenant Σ pour une inclusion naturelle de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^k$ et une application rationnelle régulière $\sigma : X \to Y$ étendant ϕ, et telle que la restriction Φ de σ à $X \backslash \Theta$ est un isomorphisme algébrique de $X \backslash \Theta$ sur $Y \backslash \Sigma$.

Démonstration. Donnons en une esquisse et renvoyons à [BR] 3.7.13 pour les détails :

Il y a un plongement régulier de l'espace projectif réel RP^n dans un espace affine $\mathbb{R}^N$ d'image Zariski-fermée dans l'espace projectif RP^N correspondant ([BCR] 3.4.4), ou [BR] 3.6.1 et 3.7.12) on peut donc supposer que la variété X est réalisée comme un ensemble algébrique affine dans un $\mathbb{R}^N$ Zariski-fermé dans RP^N. La somme des carrés d'équations homogènes de X est alors un polynôme homogène $H \in \mathbb{R}[X_0, X_1, \ldots, X_N]$ avec $X = \{[x_0, x_1, \ldots, x_N] \in RP^N | H(x_0, \ldots, x_N) = 0\}$.

Soit aussi $T \in \mathbb{R}[X_0, X_1, \ldots, X_N]$ un polynôme homogène de degré d tel que $\Theta = \{T = 0\}$. Par définition d'une application régulière (cf. [BCR] 3.2.1) l'application ϕ a une extension rationnelle

$$G' = \frac{P'}{Q'} = \left(\frac{P'_1}{Q'}, \ldots, \frac{P'_m}{Q'}\right) : \mathbb{R}^N \cdots \to \mathbb{R}^m$$

où le diviseur polaire $\{Q' = 0\}$ de G' est disjoint de Θ. L'application

$$G = \frac{P}{Q} = \frac{P'Q'}{Q'^2 + T^2}$$

est une extension régulière de ϕ à $\mathbb{R}^N$. Soit Γ_X et Γ_Θ les ensembles algébriques affines

$$\Gamma_X = \{(x, u, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m | x \in X, u = T(1, x), zQ(1, x) = P(1, x)\},$$

$$\Gamma_\Theta = \{(x, u, s) \in \Gamma_X | x \in \Theta\}.$$

Il y a des identifications birégulières naturelles de X, Θ avec Γ_X et Γ_Θ respectivement et donc il suffit de démontrer la proposition en remplaçant ϕ par la restriction à Γ_Θ de la projection naturelle de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ sur $\mathbb{R}^m$.

Soit $\Sigma' = \{0\} \times \Sigma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $R \in \mathbb{R}[U, Y]$ un polynôme tel que $\Sigma' = \{R = 0\}$ et $\hat{\sigma}$ l'application polynomiale de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ définie par $\hat{\sigma}(x, u, y) = (R(u, y)x, u, y)$. Posons

$Y = \hat{\sigma}(\Gamma_X) \cup (\{0\} \times \Sigma')$ et soit Φ la restriction de $\hat{\sigma}$ à Γ_X.

Les équations $H(R(u, y), x) = 0$, $R(u, y)^d u = T(R(u, y), x)$, $y \cdot Q(R(u, y), x) = P(R(u, y), x)$ définissent Y donc Y est bien une variété algébrique affine, il est clair que l'application σ a les propriétés demandées. □

Appendice A

La conjecture de Nash pour les variétés simplement connexes de dimension quatre

Soient P le plan projectif complexe muni de son orientation de variété complexe et Q le même plan projectif mais muni de l'orientation opposée. On note par R et S les sphères d'auto-intersection $+$ et -1 dans P et Q respectivement correspondant à une droite projective complexe. Si V est une variété de dimension quatre la somme connexe $M = V \# pP \# qQ$ $(p, q \in \mathbb{N})$ contient donc des sphères $R_1, \ldots, R_p, S_1, \ldots, S_q$ d'auto-intersection ± 1 dans M telles que la variété V s'obtienne à partir de M en contractant en un point chacune des sphères R_i et S_j.

D'après le théorème de Wall ([Wa]) pour toute variété simplement connexe V de dimension quatre il y a des entiers p et q et un difféomorphisme $h : V \# pP \# qQ \to W_N = \#_N (P \# Q)$. Ainsi pour les variétés de dimension quatre simplement connexes on a stablement une situation analogue à celle qui permet de résoudre la conjecture de Nash en dimension 2 :

THEOREME D. *Soit V une variété de dimension quatre simplement connexe. Alors V est homéomorphe à un ensemble algébrique rationnel Y dont l'ensemble singulier Σ est fini.*

De plus il y a une variété rationnelle non singulière X et une surface algébrique non singulière Θ dans X dont chaque composante est difféomorphe à la sphère, d'auto-intersection ± 1 dans X et une application régulière $\pi : (X, \Theta) \to (Y, \Sigma)$ qui réalise un isomorphisme birationnel entre $X \setminus \Theta$ et $Y \setminus \Sigma$.

Demonstration. Considérons la sphère S^4 comme la sphère unité dans $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$. On munit les intérieurs des hémisphères nord et sud de la structure complexe transportée de celle de $\mathbb{C}^2$ par la première projection. L'éclatée complexe X_N de S^4 le long de $2N$ points également répartis entre ces deux hémisphères est une variété rationnelle non singulière difféomorphe à W_N. Les "fibrés tautologiques" des éclatements sont des fibrés en droites complexes fortement algébriques sur X_N et dont les classes de Chern forment une base de $H^2(X_N; \mathbb{Z})$. Par produit tensoriel il s'en suit que toute classe de $H^2(X_N; \mathbb{Z})$ est classe de Chern d'un fibré en droites complexes fortement algébrique sur X_N. Ainsi les arguments à la Nash–Tognoli du paragraphe 4 permettent d'approximer les sphères $h(R_i)$ et $h(S_j)$ par des surfaces algébriques non singulières d'où le théorème D grâce à la proposition 6. □

Appendice B

Le m-calcul des entrelacs repérés dans S^3

Soit D un disque de bord C dans une variété V de dimension trois et $h_D : V\backslash C \to V\backslash C$ le tour complet[7] le long de D. Pour $\varepsilon = \pm 1$, l'homéomorphisme h_D^ε s'étend en un homéomorphisme de V sur la variété déduite de V par chirurgie d'âme la nœud C repéré par la section s_ε dont le nombre d'enlacement avec C est ε. Ainsi si L est un entrelacs repéré dans S^3 et D un disque dans S^3 de bord C disjoint de L alors la variété obtenue par chirurgie sur L est difféomorphe à celle obtenue par chirurgie sur le *ε-mouvement de Kirby* de L le long de D : $K_D^\varepsilon(L) = h_D^\varepsilon(L) \amalg (C; s_\varepsilon)$.

Bien que nous ne l'utiliserons pas signalons que réciproquement Kirby, Fenn et Rourke ([Ki], [FR]) ont montré que si deux entrelacs repérés dans S^3 représentent des variétés orientées positivement difféomorphes alors on peut passer de l'un à l'autre par une suite de mouvements de Kirby et de leurs inverses.

Le *calcul des modifications élémentaires* d'entrelacs repérés dans S^3 ou *m-calcul* est la relation d'équivalence sur les entrelacs repérés engendrée par :

m_1: *Les mouvements de Kirby et leurs inverses.*
m_2: *Le changement de repérage dans la même classe modulo* 2.
m_3: *L'introduction ou la suppression de l'entrelacs L d'une composante C bordant un disque disjoint de L et repréré par la section* s_2.

REMARQUE. Les mouvements m_1 et m_2 permettent le mouvement de double tour :

m_4: *Si D est un disque de bord disjoint de L, passer de L à l'entrelacs repéré* $h_D^{\pm 2}(L)$.

Démonstration. En effet d'après le mouvement m_1 on peut introduire deux composantes parallèles à C l'une repérée par s_1, l'autre par s_{-1}. Le mouvement m_2 permet de changer ces repérages en s_{-1}, s_{-1}, respectivement s_1, s_1. En supprimant ces deux composantes par des mouvements m_1 on obtient bien respectivement $h_D^{+2}(L)$ et $h_D^{-2}(L)$. □

---

[7] Hors d'un bicollier $D \times]-1, 1[$ autour de D le tour complet h_D est l'identité et sur $D \times]-1, 1[$, $h_D(z, t) = (-\exp(\pi i t)z, t)$.

Fox dit que deux entrelacs (non repérés!) sont $(2, 1)$-*congruents* si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite d'isotopies et de double tours m_4.

Le lemme E.7 du §1 nous assure que des entrelacs équivalents sous m_1 et m_2 présentent des variétés orientables équivalentes par déchirures. Comme les mouvements m_3 correspondent à l'introduction ou la suppression d'un facteur RP^3 en somme connexe, des entrelacs m-équivalents produisent des variétés m-équivalentes.

La trivialité des variétés orientables à m-équivalence près découle alors du résultat suivant de Nakanishi ([Nk]) : *Deux entrelacs dans la sphère* S^3 *sont* $(2,1)$-*congruents si et seulement si leurs matrices de nombre d'enlacement sont congrues modulo* 2.

Démonstration. Soit en effet V une variété orientable présentée par un entrelacs repéré L. Quitte à faire un mouvement de Kirby on peut supposer que la forme d'intersection de la trace de la chirurgie est impaire (elle est représentée par la matrice d'enlacement de l'entrelacs repéré L). D'après la classification des formes quadratiques non isotropes sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on peut, après glissement d'anses, supposer que la matrice des nombres d'enlacement de L est diagonale modulo 2. Ainsi d'après le résultat de Nakanishi et en tirant partie des mouvements m_2, la variété V est équivalente par déchirures à une variété orientable présentée par un entrelacs trivial repéré par des sections de nombre d'enlacement 1 ou 2 : c'est une somme connexe d'espaces projectifs réels RP^3, d'où une démonstration alternative du théorème B^+. □

REFERENCES

[Ae] AEPPLI A. *Modifikation von reelen und komplexen Mannigfaltigkeiten*, Comment. Math. Helv. *31* (1957), 219–301.

[A] AKBULUT S. *$\mathbb{Z}_2$-framed link theory*, abstract AMS 1/30/1987, 832–57–118.

[AK] AKBULUT S., KING H. *Rational structures on 3-manifolds*, Pac. J. of Math. *150* (1991), 201, 214.

[B] BENEDETTI R. *On 3-Manifolds up to Blowing up*, Proceedings of the symposium on Diff. Anal. and Diff. Top. RIMS Kyoto 10.30–11–2 (1989).

[BM] BENEDETTI R., MARIN A. *Remarks on 3-manifolds up to blowing up*, Publ. Dipart. Mat. Pisa *207* (1987).

[BR] BENEDETTI R., RISLER J. J. "Real algebraic and semi-algebraic set". Hermann 1990.

[BCR] BOCHNAK J., COSTE M., ROY M. F. "Géométrie algébrique réelle", Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 12. Springer 1987.

[BK] BOCHNAK J., KUCHARZ W. *K-theory of real algebraic surfaces and threefolds*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. *106* (1989), 471–480.

[C] COMESSATI A. *Sulla connessione delle superficie razionali reali*, Annali di Mat. (3) *23* (1914).

[FR] FENN R., ROURKE C. *On Kirby's calculus of links*, Topology *18* (1979), 1–15.

[GM] GUILLOU L., MARIN A. "A la recherche de la topologie perdue", Progress in Mathematics, vol. 62. Birkäuser 1986.

[I] IVANOV N. *Approximations of smooth manifolds by real algebraic sets*, Russian Math. Surv. *37*:1 (1982), 1–59.

[K] KHARLAMOV V. S. *The topological type of non singular surfaces in RP^3 of degree four*, Funk. Anal. and its Appl. *10*, 4 (1976), 295–305.
[Ki1] KIRBY R. *A calculus for framed links in S^3*, Invent. Math. *45* (1978), 35–56.
[Ki2] KIRBY R. "The Topology of 4-Manifolds", Lecture Notes in Mathematics N° 1374, Springer 1989.
[Mih] MIHALKIN G. *The proof of topological Nash conjecture in dimension* 4. (Preprint 1992.)
[M] MILNOR J. W., STASHEFF J. D. "Characteristic classes", Annals of Math. Studies N° 76 (1974).
[Nk] NAKANISHI Y. *On Fox's congruence classes of knots II*, Osaka J. of Math. *27* (1990), 207–217.
[N] NASH J. F. *Real algebraic manifolds*, Ann. of Math. (2) *56* (1952), 405–421.
[S] SHAFAREVICH I. "Basic algebraic geometry", Grundlehren der Math. Wiss. 213. Springer 1974.
[Si] SILHOL R. *Cohomologie de Galois et cohomologie des variétés algébriques réelles ; applications aux surfaces rationnelles*, Bull. Soc. Math. France *115* (1987), 107–125.
[Th] THOM R. *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comm. Math. Helv. *28* (1954), 17–86.
[T] TOGNOLI A. *Su una congettura di Nash*, An. Sc. Norm. Sup., Pisa *27* (1973), 167–187.
[Wa] WALL C. T. C. *On simply connected 4-manifold*, J. London Math. Soc. *39* (1964), 141–149.
[W] WALLACE A. H. *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math. *12* (1960), 503–528.

Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
Via Buonarroti 2
56100 PISA, ITALY

and

Unité de mathématiques pures et appliquées
Ecole normale supérieure de Lyon
46 Allée d'Italie
69364 LYON cedex 07
FRANCE

Received, June 26, 1990.