Werk

Titel: Die irreduziblen Darstellungen der Gruppen SL...(Z...), insbesondere SL...(Z...)....

Autor: Wolfart, Jürgen; Nobs, Alexandre

Jahr: 1976

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?358147735_0051|log36

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Comment. Math. Helvetici 39 (51) 491–526 Birkhäuser Verlag, Basel

Die irreduziblen Darstellungen der Gruppen $SL_2(Z_p)$, insbesondere $SL_2(Z_2)$. II. Teil

ALEXANDRE NOBS[1] und JÜRGEN WOLFART

1. Übersicht über Methoden und Ergebnisse

Für beliebige Primzahlpotenzen p^λ gewinnen wir alle irreduziblen Darstellungen der Gruppen $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}/p^\lambda\mathbf{Z})$—und damit auch der Gruppen $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$—mit Hilfe der vollständigen Zerlegung der Weilschen Darstellungen zu binären quadratischen Moduln, wie sie in Teil I dieser Arbeit [7] definiert wurden. Wir werden Teil I immer als "I" zitieren und von dort, soweit nichts anderes gesagt wird, alle Begriffe und Bezeichnungen übernehmen. Zur Zerlegung der Weilschen Darstellung $W(M, Q)$ zum binären quadratischen Modul (M, Q) verwenden wir die in I, §3 geschilderten Methoden:

ERSTE ZERLEGUNGSMETHODE (Kloosterman [3]). *Sei* $\mathfrak{U}$ *eine abelsche Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(M, Q)$ *und* χ *ein Charakter von* $\mathfrak{U}$. *Dann ist* $V(\chi) := \{f \in \mathbf{C}^M \mid f(\varepsilon x) = \chi(\varepsilon) f(x)\ \forall x \in M, \forall \varepsilon \in \mathfrak{U}\}$ *ein* $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}/p^\lambda\mathbf{Z})$*-invarianter Unterraum von* $\mathbf{C}^M$. *Die zugehörige Unterdarstellung von* $W(M, Q)$ *werde mit* $W(M, Q, \chi)$ *bezeichnet.*

Für alle binären quadratischen Moduln werden wir in §2 die Automorphismengruppe bestimmen: $\mathrm{Aut}(M, Q)$ ist—mit Ausnahme der Fälle $M \cong \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$—stets Diedererweiterung einer abelschen Gruppe $\mathfrak{U}$ (für $p \neq 2$ siehe dazu [3], [8]). Für die so gefundene abelsche Gruppe $\mathfrak{U}$ kann man mit Erfolg die erste Zerlegungsmethode einsetzen:

DEFINITION. Eine Charakter χ von $\mathfrak{U}$ heiße primitiv, wenn ein $\varepsilon \in \mathfrak{U}$ mit $\chi(\varepsilon) \neq 1$ existiert, welches den Untermodul pM elementweise fest lässt, ausser wenn $M \cong \mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (für diesen Sonderfall siehe §2).

(Das bedeutet, daß man χ nicht als $\chi' \circ \rho$ schreiben kann, wobei ρ die kanonische Projektion von $\mathfrak{U}$ auf die entsprechende abelsche Automorphismengruppe $\mathfrak{U}'$

[1] Unterstützt durch den Schweizerischen Nationalfonds (820.167.73).

eines quadratischen Moduls (pM, Q') mit $Q'(px) = pQ(x)$ (für x in M) ist, und χ' ein Charakter von $\mathfrak{U}'$ ist.) Die primitiven Charaktere liefern den größten Teil der gesuchten Darstellungen:

HAUPTSATZ 1. *Seien χ, χ_1, χ_2 primitive Charaktere für binäre quadratische Moduln und seien χ^2, χ_1^2, $\chi_2^2 \not\equiv 1$. Dann ist*

a) *$W(M, Q, \chi)$ irreduzibel und von der gleichen Stufe wie $W(M, Q)$,*

b) *$W(M_1, Q_1, \chi_1) \cong W(M_2, Q_2, \chi_2)$ genau dann, wenn die quadratischen Moduln (M_1, Q_1) und (M_2, Q_2) isomorph sind und $\chi_1 = \chi_2$ oder $\bar{\chi}_2$ ist.*

Den Beweis dieses Satzes werden wir in den §§3 bis 7 führen: Zunächst werden wir in Fallunterscheidung bezüglich der verschiedenen Isomorphieklassen binärer quadratischer Moduln zeigen, daß der Satz richtig ist unter der Voraussetzung $(M, Q) = (M_1, Q_1) = (M_2, Q_2)$; in §7 werden wir dann beweisen, daß jedes solche $W(M, Q, \chi)$ den quadratischen Modul (M, Q) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.—Für $p \neq 2$ ist dieses Resultat bekannt ([3], [8]); wir verwenden zum Teil ähnliche Beweisideen wie Tanaka [8]. Casselman [1] hat die Existenz eines Teils dieser Darstellungen (für beliebige Primzahlen p) auf etwas anderem Wege bewiesen.—*Für nicht-primitive χ ist $W(M, Q, \chi)$ im allgemeinen reduzibel.* Die Zerlegung dieser Darstellungen (welche die Hauptschwierigkeit im zweiten Teil der Arbeit von Kloosterman [3] ausmacht und von Tanaka [8] und Casselman [1] gar nicht angegriffen wurde) wird durch I, Lemma 3 ermöglicht. Auf diesem Lemma beruht nämlich die

ZWEITE ZERLEGUNGSMETHODE. *Sei $W(M, Q)$ eine Weilsche Darstellung von $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}/p^\lambda\mathbf{Z})$ vom Grad p^n und der Stufe $\lambda > 1$. Der binäre quadratische Modul (M, Q) erfülle $M \not\cong \mathbf{Z}/p^\lambda\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ im Fall $p \neq 2$ und $M \not\cong \mathbf{Z}/2^{\lambda-1}\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/2^{\lambda-1}\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ im Fall $p = 2$. Dann ist das Komplement von $\sum_{\chi \text{ primitiv}}^{\oplus} W(M, Q, \chi)$ in $W(M, Q)$ eine Summe $\sum_{j=1}^{p+1} W(M_j, Q_j)$ von $p+1$ Weilschen Darstellungen $W(M_j, Q_j)$ vom Grad p^{n-2}; diese $W(M_j, Q_j)$ sind in eindeutiger Weise in $W(M, Q)$ eingebettet, und für alle $j \neq h$ ist der Durchschnitt $W(M_j, Q_j) \cap W(M_h, Q_h)$ eine (eindeutig in $W(M, Q)$ eingebettete) Weilsche Darstellung $W(M_0, Q_0)$ vom Grad p^{n-4}.*

Wir werden die genannten Einbettungen in §8 beschreiben und für alle (M, Q) die zugehörigen (M_j, Q_j) und (M_0, Q_0) konkret angeben. Die vollständige Zerlegung der $W(M, Q)$ ist damit durch Induktion über die Ordnung der quadratischen Moduln bzw. den Grad der Weilschen Darstellungen zu lösen, indem man erstens den Hauptsatz 1 anwendet, zweitens die $W(M, Q, \chi)$ mit primitivem χ und $\chi^2 \equiv 1$ zerlegt (diese treten nur für $\lambda = 1$ im Fall $p \neq 2$ und für $\lambda < 6$ oder für[(2)]

$M \cong A_{\lambda-1} \oplus A_1$ im Fall $p=2$ auf und sind i.a. reduzibel, s. §9), drittens jene $W(M, Q)$ reduziert, bei welchen der Modul M von der Form[2] $A_\lambda \oplus A_1$ oder A_λ im Fall $p \neq 2$ bzw. $A_{\lambda-1} \oplus A_2$ und $A_{\lambda-1} \oplus A_1$ im Fall $p=2$ ist (§6).

Die Anzahl der so gefundenen irreduziblen Darstellungen von $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ der Stufe λ—das sind insbesondere alle in Hauptsatz 1 genannten Darstellungen, wenn $W(M, Q)$ die Weilschen Darstellungen der Stufe λ durchläuft—ergibt sich aus den Tabellen in §9 als

$$p^\lambda + 3p^{\lambda-1} \quad \text{für} \quad p \neq 2 \quad \text{und} \quad \lambda > 1$$

und

$$23 \cdot 2^{\lambda-3} \quad \text{für} \quad p=2 \quad \text{und} \quad \lambda > 6.$$

Da die Anzahl der Konjugiertenklassen von $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ gerade $p^\lambda + 4\sum_{k=0}^{\lambda-1} p^k$ bzw. $23 \cdot 2^{\lambda-2} - 16$ für $\lambda > 2$ (I, Satz 5) ist, hat man damit alle gewünschten Darstellungen bekommen, sofern das Problem für kleine λ gelöst ist. Hier treten in der Tat für $p=2$ Ausnahmedarstellungen auf. Insgesamt erhält man, was für $p \neq 2$ bereits durch [3] und [8] bekannt ist,

HAUPTSATZ 2. *In den Weilschen Darstellungen $W(M, Q)$ zu binären quadratischen Moduln sind alle irreduziblen Darstellungen der Gruppen $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}/p^\lambda\mathbf{Z})$ enthalten (i.a. in der Form $W(M, Q, \chi)$ des Hauptsatzes 1) mit Ausnahme von 18 Darstellungen für $p=2$, welche in §9 beschrieben werden. Diese Ausnahmedarstellungen lassen sich als Tensorprodukte von je zwei Darstellungen schreiben, welche in den $W(M, Q)$ vorkommen; das ist (nach I, §2) gleichbedeutend damit, daß sie in Weilschen Darstellungen zu quaternären quadratischen Formen enthalten sind.*

Diese Beschreibung ist explizit: Man kann jeweils Basen für die Darstellungsräume angeben und Darstellungsmatrizen bezüglich dieser Basen für erzeugende Elemente der Gruppen. Es ist kein Problem, diese Darstellungsmatrizen für alle Gruppenelemente aufzustellen und die Charaktere der Darstellungen zu berechnen (etwa mit Hilfe von [4], Satz 1 und 2, [9], (18) sowie [3], S. 368).

2. Die Automorphismengruppen binärer quadratischer Moduln

Im folgenden werden wir die Automorphismengruppen für ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen binärer quadratischer Moduln

[2] Wie in I schreiben wir $A_n := \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$.

beschreiben. Einen Beweis werden wir nur im Fall der *unverzweigten* quadratischen Form führen, da überall ähnliche Überlegungen angestellt werden.

1. $M = A_\lambda \oplus A_\lambda$ *mit* $Q(x, y) = p^{-\lambda}xy$, $\lambda \geq 1$, ("*zerlegt*", I (10a) und (12a)). Aut (M, Q) ist Diedererweiterung einer abelschen Gruppe $\mathfrak{U} \cong A_\lambda^\times$ der Ordnung $p^{\lambda-1}(p-1)$ mit dem Element $\kappa: (x, y) \mapsto (y, x)$. Die Wirkung von $A_\lambda^\times$ auf M wird definiert durch $a: (x, y) \mapsto (a^{-1}x, ay)$. Um die primitiven Charaktere für $\lambda > 1$ zu beschreiben, Ordnung $p-1$) und $W = \{a \in A_\lambda^\times \mid a \equiv 1 \bmod p\}$ (erzeugt von[3] $1+p$) auf; hier gilt: χ primitiv $\Leftrightarrow \chi|_W$ injektiv. Im Fall $p = 2$ und $\lambda > 2$ ist $A_\lambda^\times = \langle -1 \rangle \times \langle 5 \rangle$ (mit $\langle n \rangle$ bezeichnen wir die von n erzeugte zyklische Untergruppe) und χ ist genau dann primitiv, wenn χ auf der Untergruppe $\langle 5 \rangle$ vom Grad $2^{\lambda-2}$ injektiv ist. Für $p = \lambda = 2$ ist $A_\lambda^\times = \langle -1 \rangle$, und χ ist primitiv, wenn $\chi(-1) = -1$. Man erhält also $(p-1)^2 p^{\lambda-2}$ bzw. $2^{\lambda-2}$ primitive Charaktere für $\lambda \geq 2$.

2. $M = A_\lambda \oplus A_\lambda$ *mit* $Q(x, y) = p^{-\lambda}N(\xi)$, $\lambda \geq 1$, wo $\xi = x + y(1+\sqrt{-t})/2$, $t \equiv 3 \bmod 4$ quadratfrei und p in $\mathbf{Q}(\sqrt{-t})$ träge ist ("*unverzweigt*", I (10b) und (12b)): M ist hier isomorph zu $\mathfrak{O}/p^\lambda\mathfrak{O}$, wobei $\mathfrak{O}$ der Ring der ganzen Größen in $\mathbf{Q}(\sqrt{-t})$ ist; damit wird M zu einem lokalen Ring, dessen maximales Ideal von[3] p erzeugt wird. Die Norm N (= Norm der Körpererweiterung $\mathbf{Q}(\sqrt{-t})/\mathbf{Q}$, auf $\mathfrak{O}$ restringiert und mod p^λ betrachtet; analog verfahren wir mit der Konjugation und der Spur Tr) induziert einen Gruppenhomomorphismus $N^\times$ von $M^\times$ auf $A_\lambda^\times$. Läßt man $\mathfrak{U} := \{\varepsilon \in M^\times \mid N(\varepsilon) = 1\}$ multiplikativ auf M operieren, so ist Aut (M, Q) die Diedererweiterung von $\mathfrak{U}$ mit der Konjugation $\kappa: \xi \mapsto \bar{\xi}$. $\mathfrak{U}$ besitzt folgende Struktur:

$$\mathfrak{U} = \begin{cases} \langle \zeta \rangle & \text{mit} \quad \operatorname{ord} \zeta = p+1 \quad \text{für} \quad \lambda = 1 \\ \langle \zeta \rangle \times \langle \alpha \rangle & \text{mit} \begin{cases} \operatorname{ord} \zeta = 6, & \operatorname{ord} \alpha = 2^{\lambda-2} \quad \text{für} \quad p = 2 \\ \operatorname{ord} \zeta = p+1, & \operatorname{ord} \alpha = p^{\lambda-1} \quad \text{für} \quad p \neq 2 \end{cases}, \lambda \geq 2 \end{cases}$$

Dabei ist $\langle \alpha \rangle = \{\varepsilon \in U \mid \varepsilon \equiv 1 \bmod p$ für $p \neq 2$ bzw. mod 4 für $p = 2\}$. Nun ist $\chi \in \operatorname{Car} \mathfrak{U}$ (Gruppe der Charaktere von $\mathfrak{U}$) für $\lambda > 1$, $p \neq 2$ und $\lambda > 2$, $p = 2$ genau dann primitiv, wenn $\chi|_{\langle \alpha \rangle}$ injektiv ist bzw. wenn $\chi(-1) = -1$ ist im Fall $\lambda = 2$, $p = 2$. Die Anzahl der primitiven Charaktere ist $p^\lambda - p^{\lambda-2}$ für $\lambda \geq 2$.

Beweis. Daß die angegebene Gruppe aus Automorphismen besteht, ist klar, und daß sie eine Diedererweiterung von $\mathfrak{U}$ ist, liegt daran, daß für alle $\varepsilon \in \mathfrak{U}$ stets $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{-1}$ ist. Daß Aut (M, Q) nicht größer ist als diese Diedergruppe, kann man elementar einsehen. Daß $N^\times = N|_{M^\times}: M^\times \to A_\lambda^\times$ surjektiv ist, folgt daraus, daß

[3] Soweit Mißverständnisse ausgeschlossen sind, unterscheiden wir nicht zwischen Restklassen und Repräsentanten.

$\mathbf{Q}_p(\sqrt{-t})$ eine unverzweigte Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$ ist und läßt sich aus der lokalen Klassenkörpertheorie ableiten oder auch elementar zeigen (I, Beweis von Satz 4). Daher muß $\operatorname{ord} \mathfrak{U} = \operatorname{ord}(\text{Kern } N^\times) = \operatorname{ord} M^\times (\operatorname{ord} A_\lambda^\times)^{-1} = (p^{2\lambda} - p^{2\lambda-2}) \times (p^\lambda - p^{\lambda-1})^{-1} = (p+1)p^{\lambda-1}$ sein.

In $M^\times$ existiert ein γ mit $\operatorname{ord}(\gamma \bmod p) = p^2 - 1$, da M/pM ein Körper mit p^2 Elementen ist. Man rechnet leicht nach, daß $\zeta := \gamma^{p^{2\lambda-2}(p-1)}$ in $\mathfrak{U}$ liegt und die Ordnung $p+1$ besitzt. Im Falle $p=2$, $\lambda > 1$ kann man o.B.d.A. $t = 3$ setzen und für ζ eine primitive sechste Einheitswurzel nehmen.—Um α zu gewinnen bzw. seine Ordnung zu bestimmen, betrachtet man die Folge der Einseinheitengruppen $\mathfrak{U}_i := \{1 + \beta p^i \in \mathfrak{U}\}$, $i = 1, \ldots, \lambda$. Eine elementare Rechnung zeigt, daß $\mathfrak{U}_i \neq \mathfrak{U}_{i+1}$ für alle $i < \lambda$ ist. Für $p \neq 2$ wählen wir nun $\alpha = 1 + \beta p \in \mathfrak{U}_1$, $\alpha \notin \mathfrak{U}_2$, d.h. mit $\beta \in M^\times$. Dann ist, wie man z.B. durch Induktion über λ einsieht, $\alpha^{p^{\lambda-2}} = 1 + \beta p^{\lambda-1} \neq 1$ und $\alpha^{p^{\lambda-1}} = 1$, also $\operatorname{ord} \alpha = p^{\lambda-1}$. Für $p = 2$ ist dies nicht richtig, da $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2 \cup (-1) \cdot \mathfrak{U}_2$ ist; für jedes $\alpha = 1 + 4\beta$ mit $\beta \in M^\times$ kann man jedoch analog auf $\operatorname{ord} \alpha = 2^{\lambda-2}$ schließen. Da nun $\langle \alpha \rangle \subset \mathfrak{U}_1$ für $p \neq 2$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ für $p = 2$ ist und $\langle \zeta \rangle \cap \mathfrak{U}_1$ bzw. $\langle \zeta \rangle \cap \mathfrak{U}_2 = \{1\}$ ist, und da $\operatorname{ord} \alpha = \operatorname{ord} \mathfrak{U}_1$ bzw. $\operatorname{ord} \mathfrak{U}_2$ ist, ist sogar $\langle \alpha \rangle = \mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ und folglich $\mathfrak{U} = \langle \zeta \rangle \times \langle \alpha \rangle$.

Für $\lambda > 1$ lassen genau die Elemente von $\mathfrak{U}_{\lambda-1}$ den Untermodul pM elementweise fest. Ein primitiver Charakter muß also $\chi|_{\mathfrak{U}_{\lambda-1}} \neq 1$ erfüllen. Da $\mathfrak{U}_{\lambda-1} = \langle \alpha^{p^{\lambda-2}} \rangle$ für $p \neq 2$ und $\langle \alpha^{2^{\lambda-3}} \rangle$ für $p = 2$, $\lambda > 2$ bzw. $\langle -1 \rangle$ für $p = 2$, $\lambda = 2$ ist, sind jene Charaktere primitiv, welche auf $\langle \alpha \rangle$ injektiv sind bzw. $\chi(-1) = -1$ (für $p = \lambda = 2$) erfüllen.

3. *$M = A_\lambda \oplus A_{\lambda-\sigma}$ für $p \neq 2$, $\lambda \geq 2$ und $\sigma = 1, \ldots, \lambda - 1$ mit $Q(x, y) = p^{-\lambda} r(x^2 + p^\sigma t y^2)$* ("*verzweigt*", I (10c)). Für jedes σ erhält man hier vier nichtisomorphe quadratische Moduln je nach den Werten von $\left(\frac{r}{p}\right), \left(\frac{t}{p}\right)$ (es sei stets $p \nmid r, t$), welche jedoch für die Struktur von $\operatorname{Aut}(M, Q)$ keine Rolle spielen: Wir haben $Q(x, y) = p^{-\lambda} r N(\xi)$ mit $\xi = x + y\sqrt{-p^\sigma t} \in \mathfrak{O}_\sigma / p^{\lambda-\sigma}\sqrt{-p^\sigma t}\,\mathfrak{O}_\sigma$, wobei $\mathfrak{O}_\sigma$ den Ring $\{x + y\sqrt{-p^\sigma t} \mid x, y \in \mathbf{Z}\}$ bezeichnet. Wenn wir M mit dem Ring $\mathfrak{O}_\sigma / p^{\lambda-\sigma}\sqrt{-p^\sigma t}\,\mathfrak{O}_\sigma$ identifizieren, ist $\operatorname{Aut}(M, Q)$ die Diedererweiterung der (multiplikativ auf M operierenden) abelschen Gruppe $\mathfrak{U} := \{\varepsilon \in M \mid N(\varepsilon) = 1 \in A_\lambda\}$ der Ordnung $2 \cdot p^{\lambda-\sigma}$ mit der Konjugation $\kappa : \xi \mapsto \bar{\xi}$. Die Gruppe $\mathfrak{U}$ ist zyklisch, und zwar ist $\mathfrak{U} = \langle -1 \rangle \times \langle \alpha \rangle$ mit $\alpha \in \mathfrak{U}_0$, $\alpha \notin \mathfrak{U}_1$ und $\operatorname{ord} \alpha = p^{\lambda-\sigma}$, wenn man $\mathfrak{U}_i := \{\varepsilon \in \mathfrak{U} \mid \varepsilon \equiv 1 \bmod p^i\sqrt{-p^\sigma t}\,\mathfrak{O}_\sigma\}$ setzt für $i = 0, \ldots, \lambda - \sigma$. Das Element $\alpha^{p^{\lambda-\sigma-1}}$ erzeugt $\mathfrak{U}_{\lambda-\sigma-1}$; ein Charakter $\chi \in \operatorname{Car} \mathfrak{U}$ ist primitiv genau dann, wenn $\chi|_{\langle \alpha \rangle}$ injektiv ist. Es gibt $2 \cdot (p-1)p^{\lambda-\sigma-1}$ primitive Charaktere.

4. *$M = A_{\lambda-1} \oplus A_{\lambda-\sigma-1}$ für $p = 2$, $\lambda \geq 3$ und $\sigma = 0, \ldots, \lambda - 3$ mit $Q(x, y) = 2^{-\lambda} r(x^2 + 2^\sigma t y^2)$* ("*verzweigt*", I (12c)). Wir haben hier $M \cong \mathfrak{O}_\sigma / 2^{\lambda-\sigma-1}\sqrt{-2^\sigma t}\,\mathfrak{O}_\sigma$

mit $\mathfrak{O}_\sigma = \{x + y\sqrt{-2^\sigma t} \mid x, y \in \mathbf{Z}\}$ und $Q(x, y) = 2^{-\lambda} rN(\xi)$, wobei $\xi = x + y\sqrt{-2^\sigma t}$ ist Die Gruppe Aut (M, Q) ist Diedererweiterung der abelschen Gruppe $\mathfrak{U} = \{\varepsilon \in M \mid N(\varepsilon) = 1 \in A_\lambda\}$ mit der Konjugation $\kappa : \xi \mapsto \bar{\xi}$; die Gruppe $\mathfrak{U}$ ist von der Form $\langle i \rangle \times \langle \alpha \rangle$ im Fall $\sigma = 0$, $t = 1$ $(i = \sqrt{-1})$ und $\langle -1 \rangle \times \langle \alpha \rangle$ in allen anderen Fällen.[4] Die folgende Tabelle gibt Auskunft über α für die verschiedenen (M, Q) aus I, Satz 4, (12c):

σ	r	t	$\alpha = x + y\sqrt{-2^\sigma t}$ mit	ord α	Anzahl der primitiven Charaktere
0	1; 3	1	$x = 4$, $y \equiv 1 \bmod 4$	$2^{\lambda-3}$	$2^{\lambda-2}$
		5	$x = 2$, $y \equiv 3 \bmod 4$	$2^{\lambda-2}$ (4)	$2^{\lambda-2}$
	1	3; 7	$x \equiv 1 \bmod 4$, $y = 4$	$2^{\lambda-3}$	$2^{\lambda-3}$
1	1; 5	1; 5	$x \equiv 1 \bmod 4$, $y = 2$	$2^{\lambda-3}$	$2^{\lambda-3}$
	1; 3	3; 7			
2	1; 3	1; 3; 5; 7	$x \equiv 1 \bmod 4$, $y = 2$	$2^{\lambda-4}$	$2^{\lambda-4}$
≥ 3	1; 3; 5; 7	1; 3; 5; 7	$x \equiv 1 \bmod 4$, $y = 1$	$2^{\lambda-\sigma-1}$	$2^{\lambda-\sigma-1}$

χ ist primitiv genau dann, wenn χ injektiv auf $\langle \alpha \rangle$ ist außer in den Fällen $\lambda = 3$, $\sigma = 0$, wo $\langle \alpha \rangle$ durch $\langle -1 \rangle$, und $\lambda = 4$, $\sigma = 0$, $t = 5$, wo $\langle \alpha \rangle$ durch $\langle -\alpha^2 \rangle$ zu ersetzen ist.

5. $M = A_{\lambda-1} \oplus A_1$ *für* $p = 2$, $\lambda \geq 2$ *mit* $Q(x, y) = 2^{-\lambda} r(x^2 + 2^{\lambda-2} t y^2)$ (I, (12c)). Im Unterschied zu den eben beschriebenen Gruppen fällt hier die Konjugation weg, so daß man stets eine abelsche Gruppe $\mathfrak{U} = \text{Aut}(M, Q)$ erhält. Diese besteht aus $\{1\}$ für $\lambda = 2$, $t = 3$, aus $\{1, (x, y) \mapsto (y, x)\}$ für $\lambda = 2$, $t = 1$, aus $\{\pm 1\}$ für $\lambda = 3$ oder 4, und ist von der Form $\langle -1 \rangle \times \langle \alpha \rangle$ für $\lambda \geq 5$ mit ord $\alpha = 2$ und

$$\alpha = \begin{cases} 1 + 4t + \sqrt{-8t} & \text{für } \lambda = 5, \\ 1 - 2^{\lambda-3} t + \sqrt{-2^{\lambda-2} t} & \text{für } \lambda > 5. \end{cases}$$

Für $\lambda \geq 5$ nennen wir χ primitiv, wenn $\chi(\alpha) \neq -1$.

3. Die zerlegte Reihe

Die Untersuchung von $W(M, Q)$ mit $M = A_\lambda \oplus A_\lambda$ und $Q(x, y) = p^{-\lambda} xy$ kann man wesentlich vereinfachen, wenn man ausnützt, daß $W(M, Q)$ zur *natürlichen Darstellung* D_λ isomorph ist; abweichend von der Terminologie aus I, §2 (dort

[4] Mit Ausnahme von $\lambda = 3$, $\sigma = 0$, $t = 5$, wo $\mathfrak{U} = \langle \alpha \rangle$ mit $\alpha^2 = -1$ ist.

war $D_\lambda := W(M, Q)$) definieren wir hier D_λ durch folgende Operation von $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ auf $\mathbf{C}^M$:

$$(S \cdot f)(X) := f(XS) \quad \text{für} \quad f \in \mathbf{C}^M, S \in \mathbf{SL}_2(A_\lambda), X \in M$$

(X sei als Zeilenvektor geschrieben und XS wie üblich als Matrizenmultiplikation definiert). Der Isomorphismus $W(M, Q) \xrightarrow{\varphi} D_\lambda$ ist definiert durch (mit $\mathbf{e}(u) := e^{2\pi i u}$ $\forall u \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$)

$$\varphi(f)(x, y) := \sum_{z \in A_\lambda} \mathbf{e}(p^{-\lambda} zy) \cdot f(x, z) \qquad \forall f \in \mathbf{C}^M, (x, y) \in M.$$

Daß φ ein $\mathbf{C}$-Vektorraum-Isomorphismus ist, kann man leicht zeigen, und daß $\varphi[S] = S \cdot \varphi$ für alle $S \in \mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ ist, läßt sich mit den Erzeugenden von $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ nachprüfen.

Für jedes $\chi \in \operatorname{Car} A_\lambda^\times = \operatorname{Car} \mathfrak{U}$ (s. §2) wird der invariante Unterraum $V(\chi)$ (s. §1) durch φ abgebildet auf

$$V_\lambda(\chi) := \{g \in \mathbf{C}^M \mid g(aX) = \chi(a) \cdot g(X) \, \forall a \in A_\lambda^\times, X \in M\}$$

Die zugehörige Darstellung wird mit $D_\lambda(\chi)$ bezeichnet. Für primitive Charaktere verschwinden die Funktionen aus $V_\lambda(\chi)$ auf pM. Da andererseits $A_\lambda^\times$ auf $\tilde{M} := M - pM$ fixpunktfrei operiert, findet man für primitive Charaktere $\dim V_\lambda(\chi) = |\tilde{M}| (\operatorname{ord} A_\lambda^\times)^{-1} = (p+1)p^{\lambda-1}$.

Ziel dieses Paragraphen ist es, Hauptsatz 1 für $W(M, Q) \cong D_\lambda$ zu verifizieren, d.h. zu zeigen:

SATZ 1. *Für primitive* $\chi, \chi_1, \chi_2 \in \operatorname{Car} A_\lambda^\times$ *mit* $\chi^2, \chi_1^2, \chi_2^2 \neq 1$ *gilt:*

a) $D_\lambda(\chi)$ *ist irreduzibel und von der Stufe* λ.

b) *Es ist* $D_\lambda(\chi_1) \cong D_\lambda(\chi_2)$ *genau dann, wenn* $\chi_1 = \chi_2$ *oder* $\bar{\chi}_2$ *ist. Damit erhält man* $((p-1)^2/2)p^{\lambda-2}$ *nicht-isomorphe irreduzible Darstellungen von* $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ *vom Grad* $(p+1)p^{\lambda-1}$ *für* $\lambda > 1$, $p \neq 2$ *und* $\lambda > 3$, $p = 2$; *für* $p \neq 2$; $\lambda = 1$ *ist die entsprechende Anzahl* $(p-3)/2$.

Die Anzahl-Aussage folgt aus den Angaben über die Automorphismengruppe und die primitiven Charaktere in §2. Den Beweis von a) und b) kann man gleichzeitig führen, indem man zeigt, daß die Dimension des $\mathbf{C}$-Vektorraums $\operatorname{Hom}_{\mathbf{SL}_2(A_\lambda)}(V_\lambda(\chi_1), V_\lambda(\chi_2))$ der mit $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ verträglichen Homomorphismen von $V_\lambda(\chi_1)$ nach $V_\lambda(\chi_2)$ gleich 1 ist für $\chi_1 = \chi_2$ oder $\bar{\chi}_2$ (und $\chi_1^2 \neq 1$) und 0 andernfalls.

Jeder $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$-verträgliche Homomorphismus $[K]: V_\lambda(\chi_1) \to V_\lambda(\chi_2)$ läßt sich in der Form

$$[K]f(X) = \sum_{Y \in \tilde{M}} K(X, Y) f(Y) \qquad \forall f \in V(\chi_1), X \in \tilde{M}$$

schreiben, wobei K eine Funktion aus $\mathbf{C}^{\tilde{M} \times \tilde{M}}$ mit den Eigenschaften

1) $K(XS, YS) = K(X, Y) \qquad \forall S \in \mathbf{SL}_2(A_\lambda), X, Y \in \tilde{M}$
2) $K(sX, tY) = \chi_2(s)\chi_1^{-1}(t)K(X, Y) \qquad \forall s, t \in A_\lambda^\times, X, Y \in \tilde{M}$

ist; der $\mathbf{C}$-Vektorraum $\mathbf{K}(\chi_1, \chi_2)$ aller dieser Funktionen $K \in \mathbf{C}^{\tilde{M} \times \tilde{M}}$ ist isomorph zu $\mathrm{Hom}_{\mathbf{SL}_2(A_\lambda)}(V_\lambda(\chi_1), V_\lambda(\chi_2))$: Die Surjektivität der Abbildung $K \mapsto [K]$ ist klar, und die Injektivität überprüft man anhand einer Basis von $V_\lambda(\chi_1)$ (vgl. dazu Bem. 2) am Ende des Paragraphen). Nun können wir zeigen:

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{K}(\chi_1, \chi_2) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \chi_1 \neq \chi_2, \bar{\chi}_2 \\ 1 & \text{für} \quad \chi_1 = \chi_2 \quad \text{oder} \quad \bar{\chi}_2, \chi_1^2 \neq 1 \\ 2 & \text{für} \quad \chi_1 = \chi_2 = \bar{\chi}_2. \end{cases} \tag{1}$$

Dazu nennen wir $[X] := \{tX \mid t \in A_\lambda^\times\}$ mit $X \in \tilde{M}$ eine *Gerade* in $\tilde{M}$. Zwei Geradenpaare $([X], [Y])$ und $([X'], [Y'])$ sollen *äquivalent* heißen, wenn ein $S \in \mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ existiert und $s, t \in A_\lambda^\times$, so daß $XS = sX'$ und $YS = tY'$ ist. Wegen der Eigenschaften 1) und 2) ist es klar, daß jedes $K \in \mathbf{K}(\chi_1, \chi_2)$ eindeutig bestimmt ist durch seine Werte auf einem Repräsentantensystem der Klassen äquivalenter Geradenpaare. Ein solches Repräsentantensystem ist die Menge aller Paare $([1, 0], [a, p^r])$, wobei r die Menge $\{0, 1, \ldots, \lambda\}$ durchläuft und a die Menge

$$\left.\begin{array}{rl} \{1\} & \text{für} \quad r = 0, \lambda \\ \{1, n\} & \text{mit} \quad \left(\frac{n}{p}\right) = -1 \quad \text{sonst} \end{array}\right\} \text{für} \quad p \neq 2$$

$$\left.\begin{array}{rl} \{1\} & \text{für} \quad r \leq 1 \quad \text{oder} \quad \lambda - r \leq 1 \\ \{1, 3\} & \text{für} \quad (r = 2 \quad \text{oder} \quad \lambda - r = 2) \quad \text{und} \quad \lambda > 3 \\ \{1, 3, 5, 7\} & \text{für} \quad r \geq 3 \quad \text{und} \quad \lambda - r \geq 3 \end{array}\right\} \text{für} \quad p = 2.$$

Wenn nämlich $([x_1, x_2], [y_1, y_2])$ ein Geradenpaar ist, darf man o.B.d.A. (wenn nötig, nach einer Transformation mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$) annehmen, daß $x_1 \in A_\lambda^\times$ ist; dann kann man mit $S = \begin{pmatrix} x_1^{-1}t & -x_2 t^{-1} \\ 0 & x_1 t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, wobei $t \in A_\lambda^\times$ und $b \in A_\lambda$ geeignet

gewählt werden müssen, das Geradenpaar in ein Paar der Repräsentantenmenge überführen.

Nun untersuchen wir, welche Werte K auf diesem Repräsentantensystem annehmen kann. Sei dazu zunächst $0<r<\lambda$; setzt man $s=1+p^{\lambda-1}$ und $b\equiv -ap^{\lambda-r-1} \bmod p^{\lambda-r}$, so erhält man für $S=\begin{pmatrix} s & 0 \\ b & s^{-1}\end{pmatrix}$

$$(1,0)S=(s,0) \quad \text{und} \quad (a,p^r)S=(a,p^r),$$

also nach 1) und 2)

$$\chi_2(s)K((1,0),(a,p^r))=K((s,0),(a,p^r))=K((1,0),(a,p^r)).$$

Für primitive χ_2 gilt jedoch $\chi_2(s)\neq 1$, also ist $K((1,0),(a,p^r))=0$. Jene $S\in \mathbf{SL}_2(A_\lambda)$, welche das Geradenpaar $([1,0],[1,1])$ in sich überführen, sind notwendig von der Form $S=\begin{pmatrix} s & 0 \\ s^{-1}-s & s^{-1}\end{pmatrix}$ mit $s\in A_\lambda^\times$. Hier erhält man

$$\begin{aligned}\chi_2(s)\chi_1^{-1}(s^{-1})K((1,0),(1,1))&=K((s,0),(s^{-1},s^{-1}))\\ &=K((1,0)S,(1,1)S)=K((1,0),(1,1)).\end{aligned}$$

Das bedeutet, daß $K((1,0),(1,1))$ genau dann notwendig verschwindet, wenn $\chi_1\neq\chi_2^{-1}=\bar{\chi}_2$ ist. Ebenso schliesst man mit Hilfe der $\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1}\end{pmatrix}$ aus $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$, $s\in A_\lambda^\times$, welche das Geradenpaar $([1,0],[1,0])$ in sich überführen, daß

$$K((1,0),(1,0))=\chi_2(s)\chi_1^{-1}(s)K((1,0),(1,0))$$

ist, d.h. daß $K((1,0),(1,0))$ genau dann notwendig verschwindet, wenn $\chi_1\neq\chi_2$ ist. Daraus folgt (1) und damit die Behauptung des Satzes.

Daß schließlich die gewonnenen Darstellungen die Stufe λ haben, sieht man an der in Bemerkung 2 angegebenen Basis: Die Wirkung von $S=\begin{pmatrix} 1 & p^{\lambda-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ auf die Basisfunktion f_Y mit $Y=(1,1)$ ist nicht die Identität.

Bemerkungen. 1) Im Fall primitiver Charaktere χ mit $\chi^2=1$ entnimmt man (1), dass $D_\lambda(\chi)$ in genau zwei irreduzible Darstellungen zerfällt.

2) Eine Basis von $V_\lambda(\chi)$ verschafft man sich z.B. durch Funktionen f_Y mit

$$f_Y(X)=\begin{cases}\chi(a) & \text{für } X=aY,\ a\in A_\lambda^\times,\\ 0 & \text{für } X\notin[Y],\end{cases}$$

wobei Y ein Erzeugendensystem aller Geraden in $\tilde{M}$ durchläuft.

3) Die Darstellung $D_\lambda(\chi)$ ist von einem eindimensionalen Charakter der Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ induziert. Satz 1 könnten wir auch mit den wohlbekannten Mackeyschen Sätzen beweisen.

4. Die unverzweigte Reihe

Man kann auch für die anderen Weilschen Darstellungen den Beweis von Hauptsatz 1 so wie in §3 führen, indem man Darstellungshomomorphismen durch Funktionen $K \in \mathbf{C}^{M \times M}$ beschreibt, welche bestimmten Eigenschaften genügen müssen. Diese Eigenschaften werden jedoch in den anderen Fällen recht kompliziert, da man dort nicht mehr die natürliche Darstellung zur Verfügung hat. Hier und im folgenden Paragraphen werden wir darum eine andere Methode verwenden, welche eher auf der Analyse von Darstellungskoeffizienten beruht. Wir beginnen mit dem unverzweigten Fall (wir verwenden die Terminologie von §2 mit $t=3$ für $p=2$) und bezeichnen $W(M, Q)$ bzw. $W(M, Q, \chi)$ mit N_λ bzw. $N_\lambda(\chi)$.

SATZ 2. *Seien* χ, χ_1, χ_2 *primitive Charaktere von* $\mathfrak{U}$ *mit* χ^2, χ_1^2, $\chi_2^2 \neq 1$.

a) $N_\lambda(\chi)$ *ist irreduzibel von der Stufe* λ.

b) *Es ist* $N_\lambda(\chi_1) \cong N_\lambda(\chi_2)$ *genau dann, wenn* $\chi_1 = \chi_2$ *oder* $\bar{\chi}_2$ *ist.*

Damit erhält man $((p^2-1)/2)p^{\lambda-2}$ *nicht-isomorphe irreduzible Darstellungen von* $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ *vom Grad* $p^{\lambda-1}(p-1)$ *für* $\lambda > 1$, $p \neq 2$ *und für* $\lambda > 3$, $p=2$. *Die entsprechenden Anzahlen lauten* $(p-1)/2$ *für* $p \neq 2$ *und* $\lambda = 1$, $\begin{cases} 1 \text{ für } \lambda = 1, 2 \\ 2 \text{ für } \lambda = 3 \end{cases}$ *und* $p=2$.

Die genannte Anzahl ergibt sich aus der Anzahl der primitiven Charaktere χ mit $\chi^2 \neq 1$, und die Aussage über den Darstellungsgrad folgt aus der hier vorgenommenen Konstruktion einer Basis des zugrundeliegenden invarianten Unterraumes $V(\chi)$ von $\mathbf{C}^M$: Zunächst sei wie üblich $\delta_\xi \in \mathbf{C}^M$ durch $\delta_\xi(\eta) := \begin{cases} 1 \text{ für } \xi = \eta \in M \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$ definiert. Dann bilden die $f_\xi(\chi) := \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{U}} \chi(\varepsilon)\delta_{\varepsilon\xi}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbf{C}^M$, wenn ξ den Modul $M = \mathfrak{O}/p^\lambda\mathfrak{O}$ und χ die Charaktere von $\mathfrak{U}$ durchläuft. Für ein festes χ wird $V(\chi)$ von den $f_\xi(\chi)$ ertzeugt, so daß unter diesen nur noch ein System linear unabhängiger auszuwählen ist. Aus

$$f_{\gamma\xi}(\chi) = \chi(\gamma)^{-1} f_\xi(\chi) \quad \text{für alle} \quad \gamma \in \mathfrak{U},\ \xi \in M,\ \chi \in \operatorname{Car} \mathfrak{U} \tag{2}$$

sieht man sofort, daß $f_\xi(\chi)=0$ ist, wenn χ primitiv und $\xi\in pM$ ist. Da nun $\mathfrak{U}$ auf $M^\times=M-pM$ fixpunktfrei operiert, ist $f_\xi(\chi)\neq 0$ für alle $\xi\in M^\times$; eine Menge von Funktionen $f_\xi(\chi)$, $\xi\in\theta$, bildet also nach (2) und nach der Definition der $f_\xi(\chi)$ genau dann eine Basis von $V(\chi)$, wenn θ ein Repräsentantensystem der Bahnen von $\mathfrak{U}$ in $M^\times$ ist. Mit anderen Worten muß θ zu jedem $a\in A_\lambda^\times$ genau ein ξ mit $N(\xi)=a$ enthalten, denn $N^\times$ (s.§2) ist surjektiv und $\xi,\eta\in M^\times$ liegen genau dann in der gleichen Bahn, wenn $N(\xi)=N(\eta)$ ist. Dieses θ läßt sich also wie folgt wählen:

$p\neq 2$: $\theta=\theta_1\cup\theta_a$ mit $\theta_1:=\{n\in A_\lambda^\times \mid 1\leq n\leq\frac{1}{2}(p^\lambda-1)\}$ und $\theta_a:=\{n\cdot\eta_a \mid n\in\theta_1\}$; dabei sei $\eta_a\in M^\times$ so gewählt, daß $a=N(\eta_a)$ mit $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$ ist.
$p=2$:

$$\theta=\begin{cases}\{1\} & \text{für } \lambda=1\\ \{1,\eta_3\} & \text{für } \lambda=2\\ \theta_1\cup\theta_3\cup\theta_5\cup\theta_7 & \text{für } \lambda>2\end{cases}$$

mit $\theta_j:=\{n\cdot\eta_j \mid n=1,3,\ldots,2^{\lambda-2}-1\}$ für $j=1,3,5,7$; dabei seien die $\eta_j\in M^\times$ so gewählt, daß $N(\eta_j)=j$ ist ($\eta_1=1$).

In der so definierten Basis ist $N_\lambda(\chi)$ gegeben durch die folgenden Operationen der Erzeugenden von $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$: Für alle $\xi\in\theta$ ist

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} f_\xi(\chi)=\mathbf{e}(p^{-\lambda}N(\xi))f_\xi(\chi), \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix}a^{-1} & 0\\ 0 & a\end{bmatrix} f_\xi(\chi)=f_{a\xi}(\chi)=\chi(\gamma)^{-1}f_{\xi'}(\chi)$$

$$\forall\, a\in A_\lambda^\times,\quad \text{mit}\quad a\xi=\gamma\xi',\ \gamma\in\mathfrak{U},\ \xi'\in\theta, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} f_\xi(\chi)=p^{-\lambda}(-1)^\lambda\sum_{\eta\in\theta}\left\{\sum_{\varepsilon\in\mathfrak{U}}\chi(\varepsilon)\mathbf{e}(p^{-\lambda}\operatorname{Tr}\varepsilon\xi\bar{\eta})\right\}f_\eta(\chi). \tag{5}$$

($p^{-\lambda}\operatorname{Tr}\xi\bar{\eta}:=p^{-\lambda}(\xi\bar{\eta}+\eta\bar{\xi})$ ist die zu $p^{-\lambda}N(\xi)$ gehörige Bilinearform) Diese Formeln ergeben sich aus I (2), (11b), (13b), wenn man (2) und die Definition der $f_\xi(\chi)$ benutzt.

Zum Beweis von Aussage a): Die Restriktion von $N_\lambda(\chi)$ auf die Untergruppe $\left\{\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, b\in A_\lambda\right\}$ zerfällt in eindimensionale Unterdarstellungen, deren in-

variante Unterräume gerade von den $f_\xi(\chi)$, $\xi \in \theta$, erzeugt werden. Diese Zerlegung ist eindeutig bestimmt, denn die entstehenden Unterdarstellungen sind paarweise verschieden, wie (3) zeigt: Nach Konstruktion von θ ist $N|_\theta$ injektiv. Daraus folgt, daß ein invarianter Unterraum der Restriktion $N_\lambda(\chi)|_B$ von $N_\lambda(\chi)$ auf die Boreluntergruppe $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, a \in A_\lambda^\times, b \in A_\lambda \right\}$ ebenfalls von gewissen $f_\xi(\chi)$ erzeugt sein muß. Nach (4) gehören aber mit $f_\xi(\chi)$ auch alle $f_{a\xi}(\chi)$, $a \in A_\lambda^\times$, zu einem solchen invarianten Unterraum. Also zerfällt $N_\lambda(\chi)|_B$ in die eindeutig bestimmten invarianten Unterräume

$$V_j := \langle \{ f_\xi(\chi) \mid \xi \in \theta_j \} \rangle \quad \text{mit} \quad \begin{cases} j = 1, a & \text{für} \quad p \neq 2 \\ j = 1, 3, 5, 7 & \text{für} \quad p = 2, \lambda > 2 \end{cases}$$

(mit $\langle \cdots \rangle$ bezeichnen wir hier den von den $f_\xi(\chi)$ erzeugten linearen Unterraum von $V(\chi)$; hier und im folgenden ist es klar, wie die entsprechenden Überlegungen für $p = 2$, $\lambda \leq 2$, lauten).

Für den Irreduzibilitätsbeweis von $N_\lambda(\chi)$ genügt es daher zu zeigen, daß kein V_j bzw. kein $V_h \oplus V_j$ im Fall $p = 2$ invarianter Unterraum von $N_\lambda(\chi)$ sein kann. Wir tun dies mit Hilfe von (5), indem wir zeigen, daß für alle $j \neq 1$ ein $\xi \in \theta_1$ und ein $\eta \in \theta_j$ existieren, so daß der Darstellungskoeffizient

$$p^{-\lambda}(-1)^\lambda \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{U}} \chi(\varepsilon) \mathbf{e}(p^{-\lambda} \operatorname{Tr} \varepsilon \xi \bar{\eta}) \neq 0$$

ist. Nach Konstruktion von θ_1 und θ_j bedeutet dies: Es existiert ein $n \in A_\lambda^\times$ mit $\sum_{\varepsilon \in \mathfrak{U}} \chi(\varepsilon) \mathbf{e}(p^{-\lambda} \operatorname{Tr} \varepsilon n \bar{\eta}_j) \neq 0$. Die entsprechende Summe würde für $p \mid n$ verschwinden, denn es existiert ja, weil χ primitiv ist, ein $\gamma \in \mathfrak{U}$ mit $\chi(\gamma) \neq 1$ und $\gamma \varepsilon p \eta_j = \varepsilon p \eta_j$ für alle $\varepsilon \in \mathfrak{U}$. Angenommen, diese Summe würde für alle n verschwinden. Dann verschwindet auch folgende Linearkombination für jedes $\beta \in \mathfrak{U}$:

$$\sum_{n \in A_\lambda} \mathbf{e}(-p^{-\lambda} n \operatorname{Tr} \beta \bar{\eta}_j) \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{U}} \chi(\varepsilon) \mathbf{e}(p^{-\lambda} n \operatorname{Tr} \varepsilon \bar{\eta}_j) = p^\lambda \sum_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{U} \\ \operatorname{Tr} \varepsilon \bar{\eta}_j = \operatorname{Tr} \beta \bar{\eta}_j}} \chi(\varepsilon) = 0 \tag{6}$$

Nun beweisen wir folgendes

LEMMA 1. *Sei* $\gamma \in (\mathfrak{O}/p^\lambda \mathfrak{O})^\times$ *mit* $\gamma \not\equiv \bar{\gamma} \bmod p\mathfrak{O}$. *Das Kongruenzensystem*

$$N(\xi) \equiv N(\gamma) \bmod p^\lambda,$$

$$\operatorname{Tr} \xi \equiv \operatorname{Tr} \gamma \mod p^\lambda,$$

hat genau zwei Lösungen in $(\mathfrak{O}/p^\lambda \mathfrak{O})^\times$, *nämlich* $\xi = \gamma$ *und* $\xi = \bar{\gamma}$.

Die zweite Kongruenz läßt sich schreiben als

$$\xi+\bar{\xi}\equiv\gamma+\bar{\gamma} \bmod p^{\lambda},$$

und wegen der ersten Kongruenz ist sie äquivalent zu

$$(\xi-\gamma)(\xi-\bar{\gamma})\equiv 0 \bmod p^{\lambda}\mathfrak{O}.$$

Schreibt man $\mu=\xi-\gamma$ und $\nu=\xi-\bar{\gamma}$, so gilt

$$\mu\nu\equiv 0 \bmod p^{\lambda}\mathfrak{O} \quad \text{und} \quad \mu-\nu\equiv\bar{\gamma}-\gamma\not\equiv 0 \bmod p\mathfrak{O}.$$

Daraus folgt entweder $\mu\equiv 0 \bmod p^{\lambda}\mathfrak{O}$ oder $\nu\equiv 0 \bmod p^{\lambda}\mathfrak{O}$, also $\xi=\gamma$ oder $\bar{\gamma}$ (p ist ja in $\mathfrak{O}$ unverzweigt!).

Ist $p\neq 2$, so erfüllen alle Elemente $\gamma=\beta\bar{\eta}_a$ mit $\beta\in\mathfrak{U}$ die Bedingung von Lemma 1, denn $N(\gamma)\equiv a \bmod p^{\lambda}$ mit $\gamma\equiv\bar{\gamma} \bmod p\mathfrak{Q}$ ist für $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$ gar nicht lösbar. Aus (6) würde dann folgen

$$\chi(\varepsilon)+\chi(\bar{\varepsilon})\chi(\eta_a\bar{\eta}_a^{-1})=0 \quad \text{für alle} \quad \varepsilon\in\mathfrak{U},$$

d.h. $\chi=\chi^{-1}$, und das ist ein Widerspruch.

Ist $p=2$ (und $\lambda>2$), so kann man

$$\eta_1=1, \qquad \eta_3=2-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \qquad \eta_5=4+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \qquad \eta_7=2+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

wählen, und die Elemente $\gamma=\beta\bar{\eta}_j$ mit $\beta\in\mathfrak{U}$, erfüllen wiederum die Bedingung von Lemma 1 (siehe §2.2), also ist man auch in diesem Fall fertig.

Mit Hilfe von (3) sieht man, daß $\begin{bmatrix}1 & p^{\lambda-1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ nicht die Identität auf $V(\chi)$ ist; $N_{\lambda}(\chi)$ hat also die Stufe λ.

Zum Beweis von b) überlegt man sich zunächst anhand von (3), (4), (5), daß $\mu: f_{\xi}(\chi)\mapsto f_{\bar{\xi}}(\bar{\chi})$ (für alle $\xi\in\theta$) einen Darstellungsisomorphismus von $N_{\lambda}(\chi)$ auf $N_{\lambda}(\bar{\chi})$ erzeugt.

Sei umgekehrt ein Darstellungsisomorphismus $K: N_{\lambda}(\chi_1)\to N_{\lambda}(\chi_2)$ gegeben. Da K mit $\begin{bmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ für alle $b\in A_{\lambda}$ kommutieren muß, entnimmt man (3), daß $K(f_{\xi}(\chi_1))=c_{\xi}f_{\xi}(\chi_2)$ sein muß mit gewissen komplexen $c_{\xi}\neq 0$. Da K mit allen $\begin{bmatrix}a^{-1} & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}$, $a\in A_{\lambda}^{\times}$, kommutiert, folgt aus (4) notwendig $c_{\xi}=c_{\eta}$, wenn ξ und η im

gleichen θ_j liegen. Daraus folgt schließlich, wenn man $K \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \circ K$ beachtet und die entstehenden Darstellungskoeffizienten für geeignete $\xi, \eta \in \theta_1$ vergleicht, daß

$$\sum_{\varepsilon \in \mathfrak{U}} \chi_1(\varepsilon)\mathbf{e}(np^{-\lambda} \operatorname{Tr} \varepsilon) = \sum_{\varepsilon \in U} \chi_2(\varepsilon)\mathbf{e}(np^{-\lambda} \operatorname{Tr} \varepsilon)$$

für alle $n \in A_\lambda^\times$ ist. Durch Bildung von Linearkombinationen schließt man daraus ganz ähnlich wie eben: es gilt

$$p^\lambda \sum_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{U} \\ \operatorname{Tr}\varepsilon = \operatorname{Tr}\gamma}} (\chi_1(\varepsilon) - \chi_2(\varepsilon)) = 0 \quad \text{für alle} \quad \gamma \in \mathfrak{U},$$

d.h. für alle γ, die die Bedingung von Lemma 1 erfüllen, gilt

$$\chi_1(\gamma) + \chi_1(\bar{\gamma}) = \chi_2(\gamma) + \chi_2(\bar{\gamma}).$$

Sind ζ und α die erzeugenden Elemente von $\mathfrak{U}$ aus §2.2, so sieht man, daß ζ und $\zeta\varepsilon$ für alle $\varepsilon \in \langle\alpha\rangle$ die Bedingung von Lemma 1 erfüllen, d.h.

$$\chi_2(\zeta) = \chi_1(\zeta) \quad \text{oder} \quad \bar{\chi}_1(\zeta)$$

und

$$\chi_1(\zeta)\chi_1(\varepsilon) + \bar{\chi}_1(\zeta)\bar{\chi}_1(\varepsilon) = \chi_2(\zeta)\chi_2(\varepsilon) + \bar{\chi}_2(\zeta)\bar{\chi}_2(\varepsilon) \quad \text{für alle} \quad \varepsilon \in \langle\alpha\rangle.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Charaktere der Gruppe $\langle\alpha\rangle$ folgt sofort $\chi_2 = \chi_1$, falls $\chi_2(\zeta) = \chi_1(\zeta)$ und $\chi_2 = \bar{\chi}_1$, falls $\chi_2(\zeta) = \bar{\chi}_1(\zeta)$. Damit ist b) bewiesen.

5. Die verzweigten Reihen

Wir befassen uns hier mit den Weilschen Darstellungen $R_\lambda^\sigma(r, t)$ aus I, Definition 3 (mit $\sigma < \lambda - 2$ im Fall $p = 2$); $\mathfrak{U}$ bezeichne jeweils die in §2 beschriebene abelsche Automorphismengruppe von (M, Q), und für die nach dem ersten Zerlegungsprinzip gewonnenen Unterdarstellungen $W(M, Q, \chi)$ schreiben wir $R_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$. Für diese Fälle soll hier Hauptsatz 1 bewiesen werden:

SATZ 3. *Seien χ, χ_1, χ_2 primitive Charaktere von $\mathfrak{U}$ mit χ^2, χ_1^2, $\chi_2^2 \not\equiv 1$. Dann*

ist

a) $R_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$ *irreduzibel von der Stufe* λ,
b) $R_\lambda^\sigma(r, t, \chi_1) \cong R_\lambda^\sigma(r, t, \chi_2)$ *genau dann, wenn* $\chi_1 = \chi_2$ *oder* $\bar{\chi}_2$ *ist.*

Für $p \neq 2$ *und feste* r, t, σ, $0 < \sigma < \lambda$, *erhält man damit* $p^{\lambda-\sigma-1}(p-1)$ *nichtäquivalente irreduzible Darstellungen vom Grad* $\frac{1}{2}(p^2-1)p^{\lambda-2}$. *Die entsprechenden Aussagen für* $p = 2$ *und die dort auftretenden Äquivalenzklassen quadratischer Moduln macht die folgende Tabelle:*

σ	r	t	Anzahl der inäquivalenten irreduziblen $R_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$ für feste r, t	Grad von $R_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$
0	1; 3	1; 5	1 für $\lambda = 3, 4$; $2^{\lambda-3}$ für $\lambda > 4$	$3 \cdot 2^{\lambda-3}$
	1	3; 7	$2^{\lambda-4}$ für $\lambda > 4$	$3 \cdot 2^{\lambda-2}$
1	1; 5	1; 5	$2^{\lambda-4}$ für $\lambda > 4$	$3 \cdot 2^{\lambda-3}$
	1; 3	3; 7		
2	1; 3	1; 3; 5; 7	$2^{\lambda-5}$ für $\lambda > 5$	$3 \cdot 2^{\lambda-3}$
$3 \leq \sigma \leq \lambda - 3$	1; 3; 5; 7	1; 3; 5; 7	$2^{\lambda-\sigma-2}$	$3 \cdot 2^{\lambda-4}$

In den anderen Fällen ist $\sigma = \lambda - 2$ (*s.* §6) *oder* $\chi^2 \equiv 1$ *für alle primitiven* χ (*s.*§9).

Die Anzahlaussage ergibt sich aus der Anzahl und dem Verhalten der primitiven Charaktere (§2), die Gradaussage aus der nun folgenden Konstruktion. Wir verwenden die in §2 für diese (M, Q) eingeführte Terminologie und suchen wie in §4 eine Basis des Darstellungsraums $V(\chi)$ bzw. genauer $V_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$ von $R_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$ unter den Funktionen $f_\xi(\chi) := \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{U}} \chi(\varepsilon)\delta_{\varepsilon\xi} \in \mathbf{C}^M$. Ebenso wie dort ist (2) gültig, daher verschwinden alle $f_\xi(\chi)$ mit $\xi \in pM$, da χ primitiv sein soll. Anders als dort besteht $\tilde{M} := M - pM$ hier nicht mehr nur aus der multiplikativen Gruppe $M^\times$ von M; jedenfalls operiert $\mathfrak{U}$ aber fixpunktfrei auf $\tilde{M}$, so daß die Anzahl der Bahnen dieser Operation gerade $|\tilde{M}| \cdot (\operatorname{ord} \mathfrak{U})^{-1}$ ist. Diese Anzahl ist gleichzeitig der Darstellungsgrad, denn die Auswahl einer Basis $\{f_\xi(\chi) \mid \xi \in \theta\}$ ist gleichbedeutend mit der Auswahl eines Repräsentantensystems $\theta \subset \tilde{M}$ für diese Bahnen.

Es ist klar, daß man $\theta \cap M^\times$ wieder so zu wählen hat, daß $N|_{\theta \cap M^\times} : \theta \cap M^\times \to A_\lambda^\times$ injektiv ist. Im Fall $p \neq 2$ kann man einfach

$$\theta_1 := \theta \cap M^\times = \{n \in A_\lambda^\times \mid 1 \leq n \leq \tfrac{1}{2}(p^\lambda - 1)\}$$

nehmen. Im Fall $p = 2$ setzen wir wieder $\theta_j := \{n\eta_j \mid n = 1, 3, \ldots, 2^{\lambda-2} - 1\}$, soweit ein $\eta_j \in M^\times$ mit $N(\eta_j) = j$ existiert ($j = 1, 3, 5, 7$, insbesondere $\eta_1 = 1$). Hier kann

man dann

$$M^\times \cap \theta = \begin{cases} \theta_1 \cup \theta_5 & \text{für } \sigma = 0,\ t = 1 \text{ oder } 5 \\ \theta_1 \cup \theta_3 \cup \theta_5 \cup \theta_7 & \text{für } \sigma = 0,\ t = 3 \text{ oder } 7 \\ \theta_1 \cup \theta_3 & \text{für } \sigma = 1,\ t = 1 \text{ oder } 5 \\ \theta_1 \cup \theta_7 & \text{für } \sigma = 1,\ t = 3 \text{ oder } 7 \\ \theta_1 \cup \theta_5 & \text{für } \sigma = 2 \\ \theta_1 & \text{für } \sigma \geq 3 \end{cases}$$

wählen. Wie man die Elemente von $(\tilde{M} - M^\times) \cap \theta$ wählt, ist für den Beweis von Satz 3 gleichgültig. Es sei hier nur erwähnt, daß $N((\tilde{M} - M^\times) \cap \theta) = N(\tilde{M}) \cap pA_\lambda$ ist; wir werden in §7 darauf zurückkommen.

In der so definierten Basis ist $R_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$ gegeben durch die folgenden Operationen der Erzeugenden von $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$: Für alle $\xi \in \theta$ ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} f_\xi(\chi) = \mathbf{e}(rp^{-\lambda} N(\xi)) f_\xi(\chi), \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} f_\xi(\chi) = \Lambda(a) f_{a\xi}(\chi) = \Lambda(a)\chi(\gamma)^{-1} f_{\xi'}(\chi)$$

$$\forall\, a \in A_\lambda^\times \quad \text{und für} \quad \gamma\xi' = a\xi \quad \text{mit} \quad \gamma \in \mathfrak{U},\ \xi' \in \theta, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} f_\xi(\chi) = S_Q(-1)\,|M|^{-1/2} \sum_{\eta \in \theta} \left\{ \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{U}} \chi(\varepsilon) \mathbf{e}(rp^{-\lambda} \operatorname{Tr} \varepsilon\xi\bar{\eta}) \right\} f_\eta(\chi); \tag{9}$$

Die expliziten Werte der Zahlen $\Lambda(a)$, $S_Q(-1) \in \mathbf{C}$ findet man in I, (11c) und (13c). $rp^{-\lambda} \operatorname{Tr} \xi\bar{\eta} = B(\xi, \eta)$ ist die zu $rp^{-\lambda} N(\xi) = Q(\xi)$ gehörige Bilinearform.

Ebenso wie im Beweis von Satz 2 zeigt man nun, daß für alle vorkommenden $\theta_j \subset \tilde{M}$ der Unterraum V_j von $V_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$, erzeugt von den $f_\xi(\chi)$ mit $\xi \in \theta_j$, invariant und irreduzibel ist bezüglich der Boreluntergruppe $B \subset \mathbf{SL}_2(A_\lambda)$. Genauso läßt sich beweisen, daß der von den $f_\xi(\chi)$ mit $\xi \in \theta \cap (\tilde{M} - M^\times)$ erzeugte Unterraum V_0 invariant (jedoch i.a. nicht irreduzibel) bezüglich B ist und daß die Zerlegung $V_0 \oplus \sum_j \oplus V_j$ eindeutig bestimmt ist.

Für alle $f_\xi(\chi) \in V_0$ ist $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} f_\xi(\chi) \in \sum_j \oplus V_j$, denn für alle $\eta \in (\tilde{M} - M^\times) \cap \theta$ verschwindet der Transformationskoeffizient $\sum_{\varepsilon \in \mathfrak{U}} \chi(\varepsilon) \mathbf{e}(rp^{-\lambda} \operatorname{Tr} \varepsilon\xi\bar{\eta})$ aus

Gleichung (9): In diesem Fall ist nämlich $\xi\bar{\eta} \in pM$; es existiert darum ein $\gamma \in \mathfrak{U}$ mit $\chi(\gamma) \neq 1$ und $\gamma\xi\bar{\eta} = \xi\bar{\eta}$. Daraus sieht man, daß der einzige invariante Unterraum von $V(\chi)$, welcher $\sum_j \oplus V_j$ enthält, der ganze Raum $V(\chi)$ ist.

Im Fall $p \neq 2$ und im Fall $p = 2$, $\sigma \geq 3$, ist damit bereits bewiesen, daß $R_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$ irreduzibel ist, denn hier besteht $\sum_j \oplus V_j$ nur aus V_1, und die Restriktion auf die Borelgruppe B hat gezeigt, daß V_1 in einem irreduziblen Unterraum von $V(\chi)$ enthalten sein muß.

In den Fällen $p = 2$, $\sigma = 0, 1, 2$, ist zwar aus dem gleichen Grund jedes V_j in einem irreduziblen Unterraum von $V(\chi)$ enthalten, man muß aber zusätzlich nachweisen, daß z.B. ein irreduzibler Unterraum, der V_1 enthält, zugleich die übrigen vorkommenden V_j enthält. Wie im Beweis von Satz 2 kann dies dadurch geschehen, daß man die Existenz eines $\xi \in \theta_1$ und eines $\eta \in \theta_j$ zeigt, so daß der Transformationskoeffizient $\sum_{\varepsilon \in \mathfrak{U}} \chi(\varepsilon)\mathbf{e}(r2^{-\lambda} \operatorname{Tr} \varepsilon\xi\bar{\eta})$ aus (9) nicht verschwindet (im Fall $\sigma = 0$, $t = 3$ oder 7, geht man etwas anders vor: Man zeigt dasselbe für $\xi \in \theta_1$ und $\eta \in \theta_3$, $\eta \in \theta_7$; anschließend für $\xi \in \theta_3$ und $\eta \in \theta_5$).

Man kann den Beweis von Satz 2 fast wörtlich übernehmen, indem man für eine geeignete Linearkombination

$$\sum_{n \in A_\lambda} \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{U}} \chi(\varepsilon)\mathbf{e}(nr2^{-\lambda}(\operatorname{Tr} \xi\bar{\eta}_j - \operatorname{Tr} \beta\bar{\eta}_j)) \neq 0$$

nachweist (für $\sigma = 0$, $t = 3, 7$ ist gegebenenfalls $\bar{\eta}_j$ durch $\eta_3\bar{\eta}_5$ zu ersetzen).

Damit ist die Irreduzibilität der fraglichen Darstellungen gezeigt. Daß sie die Stufe λ besitzen, sieht man wieder mit Hilfe von (7) ein: $\begin{bmatrix} 1 & p^{\lambda-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ist nicht die Identität auf $V_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$.

Einen Isomorphismus $\mu: R_\lambda^\sigma(r, t, \chi) \to R_\lambda^\sigma(r, t, \bar{\chi})$ können wir durch $\mu(f_\xi(\chi)) = f_{\bar{\xi}}(\bar{\chi})$ definieren.

Sei andererseits ein Isomorphismus $K: R_\lambda^\sigma(r, t, \chi_1) \to R_\lambda^\sigma(r, t, \chi_2)$ gegeben, χ_1, $\chi_2 \in \operatorname{Car} \mathfrak{U}$ primitiv. Aus $K \circ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \circ K \quad \forall b \in A_\lambda$ und $K \circ \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \circ K$ folgt mit Hilfe von (7), (8), daß für alle $\xi \in \theta_j$ gilt: $K(f_\xi(\chi_1)) = c_j f_\xi(\chi_2)$ mit einem komplexen $c_j \neq 0$, und daß K den Raum V_0 auf sich abbildet. Anwendung von $K \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \circ K$ auf $f_\xi(\chi_1)$, $\xi \in \theta_1$, zeigt schließlich, daß für alle $\eta \in \theta_j \subset \theta$

$$\sum_{\varepsilon \in \mathfrak{U}} \{c_1\chi_2(\varepsilon) - c_j\chi_1(\varepsilon)\}\mathbf{e}(rp^{-\lambda} \operatorname{Tr} \varepsilon\xi\bar{\eta}) = 0$$

sein muß. Durch Bildung von Linearkombinationen dieser Ausdrücke erhält man

$$\sum_{\substack{\varepsilon \in \mathfrak{U} \\ \mathrm{Tr}\varepsilon\bar{\eta}_j = \mathrm{Tr}\beta\bar{\eta}_j}} \{c_1\chi_2(\varepsilon) - c_j\chi_1(\varepsilon)\} = 0 \tag{10}$$

für alle $\beta \in \mathfrak{U}$ und alle j.

Für $p \neq 2$ und für $p = 2$, $\sigma \geq 3$, ist notwendig $j = 1$, $c_1 = c_j$, $\bar{\eta}_j = 1$; wenn für $\beta = b_1 + b_2\sqrt{-p^\sigma t}$, die Komponente b_2 nicht durch p teilbar ist, so hat $\mathrm{Tr}\,\varepsilon = \mathrm{Tr}\,\beta$ nur die zwei Lösungen $\varepsilon = \beta$ und $\varepsilon = \bar{\beta}$. Dies ist insbesondere für $\beta = \alpha$ und $(-\alpha)$ (siehe §2.3 und 4) der Fall, also folgt aus (10), daß $\chi_2 = \chi_1$ oder $\bar{\chi}_1$ ist. Genauso kann man im Fall $p = 2$, $\sigma = 0$, $t = 1$ oder 5 vorgehen. In den anderen Fällen, d.h. $p = 2$, $\sigma = 1, 2$ oder $\sigma = 0$ mit $t = 3$ oder 7, gibt es jeweils ein $j \neq 1$, so daß für alle $\beta \in \mathfrak{U}$ entsprechend $\beta\bar{\eta}_j = x + y\sqrt{-2^\sigma t}$ mit $2 \nmid y$ ist und darum die Gleichung $\mathrm{Tr}\,\varepsilon\bar{\eta}_j = \mathrm{Tr}\,\beta\bar{\eta}_j$ nur die Lösungen $\varepsilon = \beta$, $\varepsilon = \bar{\beta}\eta_j\bar{\eta}_j^{-1}$ besitzt. Aus (10) folgt daher

$$c_1\chi_2(\beta) + c_1\chi_2^{-1}(\beta)\chi_2(\eta_j\bar{y}_j^{-1}) = c_j\chi_1(\beta) + c_j\chi_1^{-1}(\beta)\chi_1(\eta_j\bar{\eta}_j^{-1})$$

für alle $\beta \in \mathfrak{U}$. Da die c_1, c_j, $\chi_1(\eta_j\bar{\eta}_j^{-1})$ und $\chi_2(\eta_j\bar{\eta}_j^{-1})$ konstant $\neq$ sind, kann diese Gleichung nur erfüllt sein, wenn die Charaktere χ_1, χ_1^{-1}, χ_2 und χ_2^{-1} nicht paarweise verschieden sind. Damit ist auch hier Teil b) des Satzes bewiesen.

6. Die Sonderfälle $\sigma \geq \lambda - 3$

Wie in §1 bereits angedeutet wurde, kann man die vollständige Zerlegung aller Weilschen Darstellungen $W(M, Q)$ zu binären quadratischen Moduln dadurch durchführen, daß man die zweite Zerlegungsmethode (§8) verwendet, welche i.a. besagt: Alle irreduziblen Unterdarstellungen von $W(M, Q)$ sind entweder von der Form $W(M, Q, \chi)$ mit primitivem $\chi \in \mathrm{Car}\,\mathfrak{U}$, oder sie liegen bereits in Weilschen Darstellungen kleineren Grades. Dies ist jedoch falsch für kleine λ (§9) und vor allem für die Moduln $A_\lambda \oplus A_1$ bzw. A_λ, wenn $p \neq 2$, und $A_{\lambda-1} \oplus A_2$ bzw. $A_{\lambda-1} \oplus A_1$, wenn $p = 2$ ist. Für diese Sonderfälle wollen wir gewisse irreduzible Unterdarstellungen angeben, so daß wir mit Hilfe einer schwächeren Form der zweiten Zerlegungsmethode eine vollständige Zerlegung erhalten werden.

1. $p \neq 2$, $M = A_\lambda$, $Q(x) = rp^{-\lambda}x^2$, $p \nmid r$. Die Isomorphieklasse des quadratischen Moduls ist durch $\left(\frac{r}{p}\right)$ bestimmt, und es ist $\mathrm{Aut}\,(M, Q) = \{1, -1\}$. Die Weilsche Darstellung $R_\lambda(r) := W(M, Q)$ besitzt nach dem ersten Zerlegungsprinzip zwei Unterdarstellungen $R_\lambda(r, +)$ und $R_\lambda(r, -)$, deren invariante Unterräume

sind

$$V(\pm)=\{f\in\mathbf{C}^M \mid f(-x)=\pm f(x)\ \forall\ x\in M\}.$$

Beide sind für $\lambda>2$ reduzibel, es gilt jedoch

SATZ 4. *$R_\lambda(r,\pm)$ enthält genau eine irreduzible Unterdarstellung $R_\lambda(r,\pm)_1$ der Stufe λ, welche den Grad $\frac{1}{2}(p^2-1)p^{\lambda-2}$ für $\lambda>1$ und $(p\pm1)/2$ für $\lambda=1$ besitzt. Es ist*

$$R_\lambda(r,+)_1 \ncong R_\lambda(r,-)_1.$$

Eine Basis des Darstellungsraumes von $R_\lambda(r,\pm)_1$ ist $B_1(\pm)\cup B_0(\pm)$, wobei

$$B_1(\pm):=\{\delta_x\pm\delta_{-x}=:f_x(\pm)\,|x\in A_\lambda^\times,\ 1\le x\le\tfrac{1}{2}(p^\lambda-1)\},$$

$$B_0(\pm):=\left\{f_{y,k}(\pm)=\sum_{a\in A_1}\left[\mathbf{e}\left(\frac{ka}{p}\right)(\delta_{py+ap^{\lambda-1}}\pm\delta_{-py-ap^{\lambda-1}})\right]\right.$$

$$\left.\begin{matrix}0\le y\le p^{\lambda-2}-1\\ 1\le k\le\frac{1}{2}(p-1)\end{matrix}\right\}\quad\text{für}\quad\lambda>1,$$

$$\left.\begin{matrix}B_0(+):=\{\delta_0\}\\ B_0(-):=\varnothing\end{matrix}\right\}\quad\text{für}\quad\lambda=1\quad\text{ist.}$$

Man kann leicht

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}f_x(\pm)&=\mathbf{e}(rp^{-\lambda}x^2)f_x(\pm),\\ \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}f_{y,k}(\pm)&=\mathbf{e}(rp^{-\lambda+2}y^2)f_{y,k}(\pm)\end{aligned}\tag{11}$$

zeigen und entsprechende Formeln für die Erzeugenden $\begin{bmatrix}a^{-1}&0\\0&a\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ aufstellen und mit deren Hilfe analog zu Satz 3 Invarianz und Irreduzibilität von $R_\lambda(r,\pm)_1$ beweisen. Insbesondere erhält man $[-E]f_x(+)=\left(\frac{-1}{p}\right)^\lambda f_x(+)$ und $[-E]f_x(-)=-\left(\frac{-1}{p}\right)^\lambda f_x(-)$. Daraus folgt die Inäquivalenz. Die Eindeutigkeit, d.h. daß das Komplement von $R_\lambda(r,\pm)_1$ in $R_\lambda(r,\pm)$ eine kleinere Stufe besitzt, wird sich am einfachsten aus Satz 8 ergeben.

2. $p \neq 2$, $M = A_\lambda \oplus A_1$, $\lambda > 1$, $Q(x, y) = rp^{-\lambda}(x^2 + p^{\lambda-1}ty^2)$, $p \nmid r, t$. Hier können wir wieder die Terminologie von §5 bzw. §2 verwenden; die Darstellungen $R_\lambda^{\lambda-1}(r, t, \chi)$ sind für primitive χ bereits in §5 beschrieben worden, so daß wir uns hier auf die nicht-primitiven $\chi \in \operatorname{Car} \mathfrak{U}$ beschränken können. Nach §2 haben nicht-primitive Charaktere die Eigenschaft $\chi(\alpha) = 1$; es handelt sich also nur um zwei Charaktere χ_+ und χ_-, welche durch $\chi_\pm(-1) = \pm 1$, $\chi_\pm(\alpha) = 1$ vollständig bestimmt sind.

LEMMA 2. *$R_\lambda^{\lambda-1}(r, t, \chi_\pm)$ enthält genau eine irreduzible Unterdarstellung $R_\lambda^{\lambda-1}(r, t, \chi_\pm)_1$ der Stufe λ, und für diese gilt*

$$R_\lambda^{\lambda-1}(r, t, \chi_\pm)_1 \cong \begin{cases} R_\lambda(r, \pm)_1 & \text{für } \left(\frac{-1}{p}\right) = 1, \\ R_\lambda(r, \mp)_1 & \text{für } \left(\frac{-1}{p}\right) = -1. \end{cases} \tag{12}$$

Die Basis des zu $R_\lambda^{\lambda-1}(r, t, \chi_\pm)_1$ gehörigen irreduziblen Unterraums ist $B_1(\pm) \cup B_0(\pm)$ mit

$$B_1(\pm) := \{f_\xi(\chi_\pm) \mid \xi \in A_\lambda^\times, 1 \leq \xi \leq \tfrac{1}{2}(p^\lambda - 1)\},$$

$$B_0(\pm) := \left\{ f_{\eta,k}(\chi_\pm) := \sum_{a \in A_1} \mathbf{e}\left(\frac{ka}{p}\right) f_{p\eta + ap^{\lambda-1}}(\chi_\pm) \;\middle|\; 0 \leq \eta \leq p^{\lambda-2} - 1, 1 \leq k \leq \frac{p-1}{2} \right\}.$$

Zum Beweis verwendet man (7), (8), (9) und die Tatsache, daß man α so wählen kann, daß $\alpha^j \doteq 1 - \frac{1}{2}j^2 p^{\lambda-1}t + j\sqrt{-p^{\lambda-1}t}$, $j = 0, \ldots, p-1$, ist. Die Eindeutigkeit folgt wieder am einfachsten aus Satz 8, und für (12) wird sich in §7 ein einfacher Beweis ergeben.

3. $p = 2$, $M = A_{\lambda-1} \oplus A_1$, $\lambda > 4$, $Q(x, y) = r2^{-\lambda}(x^2 + 2^{\lambda-2}ty^2)$ für $r = 1, 3, 5, 7$ und $t = 1, 3$. $\mathfrak{U} = \operatorname{Aut}(M, Q)$ ist in §2 beschrieben worden; die Charaktere von $\mathfrak{U}$ sind $\chi_1 \equiv 1$ sowie die nichttrivialen Charaktere χ_{-1}, $\chi_{-\alpha}$, χ_α, deren Kerne aus 1 und jeweils -1, $-\alpha$, α bestehen. Ein Repräsentantensystem für die Bahnen von $\mathfrak{U}$ in M ist die Vereinigung der folgenden Mengen:

$$\theta_1 := \{1, 3, \ldots, 2^{\lambda-2} - 1\}, \qquad \theta_2 := \{2, 6, \ldots, 2^{\lambda-3} - 2\},$$

$$\theta_3 := \begin{cases} \{4 + \sqrt{-2^{\lambda-2}t}, 8 + \sqrt{-2^{\lambda-2}t}, \ldots, 2^{\lambda-3} - 4 + \sqrt{-2^{\lambda-2}t}\} & \text{für } \lambda > 5, \\ \varnothing \quad \text{für } \lambda = 5, \end{cases}$$

$$\theta_4 := \{\sqrt{-2^{\lambda-2}t}\}, \qquad \theta_5 := \{2^{\lambda-3} + \sqrt{-2^{\lambda-2}t}\},$$
$$\theta_6 := \{2 + \sqrt{-2^{\lambda-2}t}, 6 + \sqrt{-2^{\lambda-2}t}, \ldots, 2^{\lambda-2} - 2 + \sqrt{-2^{\lambda-2}t}\},$$
$$\theta_7 := \{4, 8, \ldots, 2^{\lambda-2} - 4\}, \qquad \theta_8 := \{0, 2^{\lambda-2}\}.$$

Es ist klar, daß eine Basis des Darstellungsraumes für die Darstellung $R_\lambda^{\lambda-2}(r, t, \chi)$ wieder unter den Funktionen $f_\xi(\chi) = \sum_{\varepsilon \in \mathfrak{U}} \chi(\varepsilon)\delta_{\varepsilon\xi}$ zu suchen ist, und zwar durchläuft ξ dabei die Menge

$$\begin{aligned}
&\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_4 && \text{für } \chi = \chi_{-1},\\
&\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_5 && \text{für } \chi = \chi_{-\alpha},\\
&\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3 \cup \theta_6 \cup \theta_7 && \text{für } \chi = \chi_{\alpha},\\
&\bigcup_{j=1}^{8} \theta_j && \text{für } \chi = \chi_1.
\end{aligned}$$

Daß $R_\lambda^{\lambda-2}(r, t, \chi_{-1})$ *und* $R_\lambda^{\lambda-2}(r, t, \chi_{-\alpha})$ *irreduzible Darstellungen* sind, beweist man wörtlich ebenso wie in Satz 3 (es handelt sich in diesem Fall um die beiden primitiven Charaktere!); *die beiden anderen Unterdarstellungen sind reduzibel, aber sie enthalten jeweils genau eine irreduzible Unterdarstellung* $R_\lambda^{\lambda-2}(r, t, \chi_\alpha)_1$ *bzw.* $R_\lambda^{\lambda-2}(r, t, \chi_1)_1$ *der Stufe* λ *vom Grad* $3 \cdot 2^{\lambda-4}$. Die zugehörigen invarianten irreduziblen Unterräume dieser Darstellungen werden erzeugt von

$$\{f_\xi(\chi_\alpha) \mid \xi \in \theta_1 \quad \text{oder} \quad \xi = 2^{\lambda-3}\} \cup \{f_\xi(\chi_\alpha) + f_{2^{\lambda-2}-\xi}(\chi_\alpha) \mid$$
$$\xi = 2 + \sqrt{-2^{\lambda-2}t}, 6 + \sqrt{-2^{\lambda-2}t}, \ldots, 2^{\lambda-3} - 2 + \sqrt{-2^{\lambda-2}t}$$
$$\text{und} \quad (\text{für } \lambda > 5) \quad 4, 8, \ldots, 2^{\lambda-3} - 4\}$$

bzw. von

$$\{f_\xi(\chi_1) \mid \xi \in \theta_1\} \cup \{f_\xi(\chi_1) - f_{2^{\lambda-2}-\xi}(\chi_1) \mid$$
$$\xi = 0, 4, \ldots, 2^{\lambda-3} - 4; 2 + \sqrt{-2^{\lambda-2}t},$$
$$6 + \sqrt{-2^{\lambda-2}t}, \ldots, 2^{\lambda-3} - 2 + \sqrt{-2^{\lambda-2}t}\}.$$

Die Beweise dazu kann man elementar mit Hilfe der Erzeugenden von $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ führen. Die Frage nach möglichen Isomorphismen zwischen diesen Darstellungen werden wir weiter unten beantworten.

4. $p=2$, $M=A_{\lambda-1}\oplus A_2$, $\lambda>5$, $Q(x,y)=r2^{-\lambda}(x^2+2^{\lambda-3}ty^2)$. Durch Satz 3 sind uns hier bereits die Darstellungen $R_\lambda^{\lambda-3}(r,t,\chi)$ für primitives χ und $\lambda>5$ bekannt (für $\lambda=5$ werden wir diese in §9 behandeln). Wir werden uns darum hier auf die nicht-primitiven Charaktere beschränken und zu diesem Zweck zunächst die Gruppe $\mathfrak{U}=\langle -1\rangle\times\langle\alpha\rangle$ noch genauer beschreiben: Es ist

$$\alpha=1-2^{\lambda-4}t-2^{2\lambda-9}+\sqrt{-2^{\lambda-3}t}\quad\text{und}\quad\alpha^2=1-2^{\lambda-2}+2\sqrt{-2^{\lambda-3}t}$$

und die nicht-primitiven Charaktere sind $\chi_1\equiv 1$ sowie jene nicht-trivialen Charaktere χ_α, χ_{-1}, $\chi_{-\alpha}$, deren Kern durch α^2 und jeweils α, -1, $-\alpha$ erzeugt wird, *Für alle diese nicht-primitiven Charaktere* χ *enthält* $R_\lambda^{\lambda-3}(r,t,\chi)$ *eine eindeutig bestimmte irreduzible Unterdarstellung* $R_\lambda^{\lambda-3}(r,t,\chi)_1$ *der Stufe* λ *vom Grad* $3\cdot 2^{\lambda-4}$, deren zugehörige Unterräume von folgenden Funktionen erzeugt werden (mit θ_1 bezeichnen wir wie in §5 die Menge $\{1,3,\dots,2^{\lambda-2}-1\}$):

Darstellung	Erzeugende des Darstellungsraumes
$R_\lambda^{\lambda-3}(r,t,\chi_{-\alpha})_1$	$f_\xi(\chi_{-\alpha})$ mit $\xi\in\theta_1$ oder $\xi=4,12,\dots,2^{\lambda-3}-4$, $\xi=8+2\sqrt{-2^{\lambda-3}t}$, $16+2\sqrt{-2^{\lambda-3}t},\dots,2^{\lambda-3}+2\sqrt{-2^{\lambda-3}t}$, $f_\xi(\chi_{-\alpha})+f_{2^{\lambda-2}-\xi}(\chi_{-\alpha})$ mit $\xi=2,6,\dots,2^{\lambda-3}-2$.
$R_\lambda^{\lambda-3}(r,t,\chi_{-1})_1$	$f_\xi(\chi_{-1})$ mit $\xi\in\theta_1$ oder $\xi=4,12,\dots,2^{\lambda-3}-4$, $\xi=2\sqrt{-2^{\lambda-3}t}$, $8+2\sqrt{-2^{\lambda-3}t},\dots,2^{\lambda-3}-8+2\sqrt{-2^{\lambda-3}t}$, $f_\xi(\chi_{-1})-f_{2^{\lambda-2}-\xi}(\chi_{-1})$ mit $\xi=2,6,\dots,2^{\lambda-3}-2$.
$R_\lambda^{\lambda-3}(r,t,\chi_\alpha)_1$	$f_\xi(\chi_\alpha)$ mit $\xi\in\theta_1$, $f_\xi(\chi_\alpha)+f_{2^{\lambda-2}-\xi}(\chi_\alpha)$ mit $\xi=2,6,\dots,2^{\lambda-3}-2$, $\xi=4+2\sqrt{-2^{\lambda-3}t}$, $12+2\sqrt{-2^{\lambda-3}t},\dots,2^{\lambda-3}-4+2\sqrt{-2^{\lambda-3}t}$, $\xi=8,16,\dots,2^{\lambda-3}$.
$R_\lambda^{\lambda-3}(r,t,\chi_1)_1$	$f_\xi(\chi_1)$ mit $\xi\in\theta_1$, $f_\xi(\chi_1)-f_{2^{\lambda-2}-\xi}(\chi_1)$ mit $\xi=2,6,\dots,2^{\lambda-3}-2$, $\xi=4+2\sqrt{-2^{\lambda-3}t}$, $12+2\sqrt{-2^{\lambda-3}t},\dots,2^{\lambda-3}-4+2\sqrt{-2^{\lambda-3}t}$, $\xi=0,8,\dots,2^{\lambda-3}-8$.

Die Beweise dazu können elementar mit Hilfe der Erzeugenden von $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ geführt werden und der Beweis der Eindeutigkeit wird sich wieder einfacher aus Satz 8 ergeben.

SATZ 5. *Für feste* $r=1,3,5,7$, $t=1,3$ *und jedes* $\lambda\geq 7$ *sind* $R_\lambda^{\lambda-2}(r,t,\chi_{-1})$, $R_\lambda^{\lambda-2}(r,t,\chi_{-\alpha})$, $R_\lambda^{\lambda-3}(r,t,\chi_1)_1$, $R_\lambda^{\lambda-3}(r,t,\chi_{-1})_1$ *vier paarweise nicht-isomorphe irreduzible Darstellungen vom Grad* $3\cdot 2^{\lambda-4}$ *und der Stufe* λ.

Zum Beweis, daß diese vier Darstellungen nicht isomorph sind, dürfen wir uns darauf beschränken, die Restriktion dieser Darstellungen auf die Borelgruppe zu

betrachten. Mit Hilfe von I, (2) bzw. zu (7) und (8) analogen Formeln stellt man leicht fest, daß für die oben konstruierten Basen der Darstellungsräume die Darstellungsmatrizen der Elemente $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $-E \in \mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ diagonal sind. Bestimmt man unter diesen Diagonalelementen jeweils die Menge der achten Einheitswurzeln, so sieht man elementar, indem man diese für die vier angegebenen Darstellungen vergleicht, daß diese nicht isomorph sein können.

Derselbe Vergleich von Darstellungsmatrizen legt die Existenz folgender Isomorphien zwischen den hier konstruierten Darstellungen nahe:

$$\left.\begin{aligned} &R_\lambda^{\lambda-3}(r, t, \chi)_1 \cong R_\lambda^{\lambda-3}(r, t+2, \chi\chi_\alpha)_1 \\ &\quad \text{für alle nicht-primitiven } \chi \\ &R_\lambda^{\lambda-2}(r, t, \chi_\alpha)_1 \cong R_\lambda^{\lambda-2}(r, t+2, \chi_1)_1 \end{aligned}\right\} \text{für} \quad \lambda > 5 \tag{13}$$

$$R_5^3(r, t, \chi_{-1}) \cong R_5^3(r, t+2, \chi_{-\alpha}) \qquad (\lambda = 5) \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} R_6^3(r, t, \chi_1)_1 &\cong \begin{cases} R_6^4(r, 3, \chi_{-\alpha}) & \text{für} \quad t = 1 \\ R_6^4(r, 3, \chi_{-1}) & \text{für} \quad t = 3 \end{cases} \\ R_6^3(r, t, \chi_{-1})_1 &\cong \begin{cases} R_6^4(r, 1, \chi_{-\alpha}) & \text{für} \quad t = 3 \\ R_6^4(r, 1, \chi_{-1}) & \text{für} \quad t = 1 \end{cases} \end{aligned}\right\} (\lambda = 6) \tag{15}$$

$$R_\lambda^{\lambda-2}(r, t, \chi_\alpha)_1 \cong \begin{cases} R_\lambda^{\lambda-3}(r, t, \chi_{-\alpha})_1 & \text{für} \quad \lambda = 7 \\ R_\lambda^{\lambda-3}(r, t, \chi_\alpha)_1 & \text{für} \quad \lambda > 7 \end{cases} \tag{16}$$

Man kann diese Isomorphismen explizit angeben; im nächsten Paragraphen bzw. (für (13) bis (15)) in §9 wird sich jedoch ein einfacherer Beweis für sie ergeben.

7. Ein Inäquivalenzsatz und seine Konsequenzen

In diesem Paragraphen wollen wir den Beweis von Hauptsatz 1 beenden und die Beschreibung der irreduziblen Darstellungen von $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ der Stufe λ für $p \neq 2$, $\lambda > 1$ und $p = 2$, $\lambda > 6$ abschließen.

SATZ 6. a) *Seien* (M_1, Q_1), (M_2, Q_2) *binäre quadratische Moduln,* χ_1 *und* χ_2 *primitive Charaktere der zugehörigen abelschen Automorphismengruppen* $\mathfrak{U}_1$ *bzw.* $\mathfrak{U}_2$. *Mit Ausnahme des Falles* $p = 2$, $\lambda = 5$, $\sigma = 3$ (*wegen* (14)) *folgt dann aus*

$W(M_1, Q_1, \chi_1) \cong W(M_2, Q_2, \chi_2)$, *daß* (M_1, Q_1) *und* (M_2, Q_2) *isomorph sind.*

b) *Die vier Darstellungen* $R_\lambda(r, \pm)_1$ *mit* $\left(\frac{r}{p}\right) = \pm 1$ *aus Satz* 4 ($p \neq 2$) *bzw. die* 16 *Darstellungen* $R_\lambda^{\lambda-3}(r, t, \chi_{-1})_1$, $R_\lambda^{\lambda-3}(r, t, \chi_{-1})_1$ ($p = 2$, $\lambda \geq 7$) *mit* $r = 1, 3, 5, 7$, $t = 1, 3$ *aus Satz* 5 *sind zu den unter a) genannten Darstellungen und untereinander paarweise nicht isomorph.*

Sei zunächst $p \neq 2$: Hier bestimmt schon der Darstellungsgrad von $W(M, Q, \chi)$, χ primitiv, den quadratischen Modul (M, Q) eindeutig bis auf Isomorphie, wenn es sich um Darstellungen der zerlegten oder der unverzweigten Reihe handelt (man beachte die Sätze 1 bis 3 sowie die Tatsache, daß wir dort alle Isomorphieklassen binärer quadratischer Moduln behandelt haben, s.I, Satz 3). Es bleibt nur zu zeigen, daß aus $R_\lambda^\sigma(r, t, \chi) \cong R_\lambda^{\sigma'}(r', t', \chi')$ notwendig $\left(\frac{r}{p}\right) = \left(\frac{r'}{p}\right)$, $\left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t'}{p}\right)$ und $\sigma = \sigma'$ folgt. Nach (7) ist die Darstellungsmatrix von $R_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$ für $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ diagonal mit den Diagonalelementen $\mathbf{e}(rp^{-\lambda}m)$, $m \in \{x^2 + p^\sigma t y^2 \mid x \in A_\lambda^\times,\ y = 0 \text{ oder } x \in pA_\lambda,\ y \in A_\lambda^\times\}$ (mit Multiplizitäten), und entsprechendes gilt mit r', t', σ' anstelle von r, t, σ im Falle der Darstellung $R_\lambda^{\sigma'}(r', t', \chi')$. Daran sieht man sofart $\left(\frac{r}{p}\right) = \left(\frac{r'}{p}\right)$. Die anderen Gleichungen $\left(\frac{t}{p}\right) = \left(\frac{t'}{p}\right)$ und $\sigma = \sigma'$ folgen aus

$$\{x^2 + p^\sigma t y^2 \mid x \in pA_\lambda,\ y \in A_\lambda^\times\} = \{x^2 + p^{\sigma'} t' y^2 \mid x \in pA_\lambda,\ y \in A_\lambda^\times\}$$

durch naheliegende zahlentheoretische Überlegungen. Ganz analog dazu gewinnt man hier auch die Aussage b) des Satzes; das Spektrum der Darstellungsmatrix von $R_\lambda(r, \pm)_1$ für $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ besteht hier (für $\lambda > 1$) einfach aus allen $\mathbf{e}(rp^{-\lambda}n^2)$, $n \in A_\lambda$.

Im Fall $p = 2$ bestimmt wieder der Darstellungsgrad eindeutig die Zugehörigkeit zur zerlegten oder zur unverzweigten Reihe. Zum Beweis von a) bleibt also nur zu zeigen, daß r, t, σ eindeutig durch $R_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$, χ primitiv, bestimmt sind, wenn r und t die in Satz 3 angegebenen Werte durchlaufen (bzw. für $\sigma = \lambda - 2$ die Werte $r = 1, 3, 5, 7$, $t = 1, 3$, wenn $\lambda \geq 5$ ist; für $\lambda < 5$ gibt es nur in den Fällen $\lambda = 3$ und $\lambda = 2$, $t = 1$ primitive Charaktere, und dort kann man die Gültigkeit des Satzes elementar überprüfen, s. auch §9). $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ besitzt auch hier

als Darstellungsmatrix eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\mathbf{e}(r2^{-\lambda}m)$, wobei für $\sigma \leq \lambda - 3$ $m \in \{(x^2 + 2^\sigma t y^2) \mid (x, y) \in M - 2M\}$ ist, und diese Menge bestimmt r, t und σ wieder eindeutig. Die entsprechenden Mengen für die 32 Darstellungen $R_\lambda^{\lambda-2}(r, t, \chi_{-1})$, $R_\lambda^{\lambda-2}(r, t, \chi_{-\alpha})$, $R_\lambda^{\lambda-3}(r, t, \chi_1)_1$, $R_\lambda^{\lambda-3}(r, t, \chi_{-1})_1$ (für $\lambda \geq 7$; für $\lambda = 6$ entfällt die letzte Darstellung wegen (15), und der Fall $\lambda = 5$ bleibt wegen (14) von der Betrachtung ganz ausgeschlossen) bestehen nur aus Elementen der Restklassen $rx^2 \bmod 2^{\lambda-2}$, $x \in A_{\lambda-2}$. Damit ist erstens klar, daß sie nicht zu Darstellungen $R_\lambda^{\sigma'}(r', t', \chi')$ mit $\sigma' < \lambda - 2$ und primitivem χ isomorph sein können. Zweitens ist $r \bmod 8$ durch sie eindeutig bestimmt. Daß sie schließlich für $\lambda > 5$ auch noch $t \bmod 4$ bestimmen bzw. (von den erwähnten Einschränkungen für $\lambda = 6$ abgesehen) untereinander nicht isomorph sind, sieht man wieder dadurch ein, daß man wie im Beweis von Satz 5 die achten Einheitswurzeln in den Darstellungsmatrizen für die Elemente $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $-E$ berechnet und vergleicht.

Satz 6a zeigt—zusammen mit den Sätzen 1 bis 3 und I, Satz 3 und 4-, daß Hauptsatz 1 richtig ist (die in Satz 6a genannte Ausnahme spielt keine Rolle, da dort $\chi_1^2 \equiv \chi_2^2 \equiv 1$ ist). Ferner folgt aus Satz 6 und aus der Tatsache, daß man die Anzahl aller irreduziblen Darstellungen auf anderem Wege berechnen kann (s. I, §4), daß die Sätze 1 bis 5 alle irreduziblen Darstellungen von $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ der Stufen $\lambda > 1$ für $p \neq 2$ und der Stufen $\lambda > 6$ für $p = 2$ beschreiben; wir haben sie in den Tabellen des §9 zusammengestellt.

Daraus erhält man folgenden einfachen Beweis für (12) und (16): Da man alle irreduziblen Darstellungen der betreffenden Stufe kennt, muß z.B. im Fall $p = 2$, $\lambda > 7$ die Darstellung $R_\lambda^{\lambda-3}(r, t, \chi_\alpha)_1$ zu einer der Darstellungen der Sätze 1, 2, 3 und 5 isomorph sein. Eine Analyse der Eigenwerte aller Darstellungsmatrizen für $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $-E \in \mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ zeigt, daß dafür nur $R_\lambda^{\lambda-2}(r, t, \chi_\alpha)$ in Frage kommt.

Ebenso sieht man auch die Gültigkeit von (13) für $\lambda > 6$ ein. In den Fällen $p = 2$, $\lambda = 5, 6$ kann man zum Beweis von (13) bis (15) ebenso vorgehen, sobald man sich (§9) auf anderem Wege die noch fehlenden irreduziblen Darstellungen dieser Stufen verschafft hat.

8. Eingebettete Weilsche Darstellungen

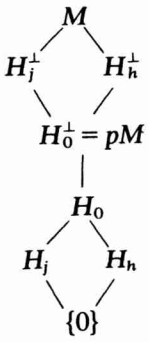
Sei $W(M, Q)$ eine Weilsche Darstellung von $\mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ zu einem binären quadratischen Modul (M, Q) von einer Stufe $\lambda > 1$. M besitzt dann $p + 1$ Untermoduln H_j, $j = 1, \ldots, p+1$, der Ordnung p. Man überzeugt sich leicht, daß $Q|_{H_j} \equiv 0$ ist für alle $j = 1, \ldots, p+1$ mit Ausnahme der in §6 diskutierten Sonderfälle $M \cong A_{\lambda-1} \oplus A_2$, $M \cong A_{\lambda-1} \oplus A_1$ für $p = 2$ und $M \cong A_\lambda \oplus A_1$ für $p \neq 2$:

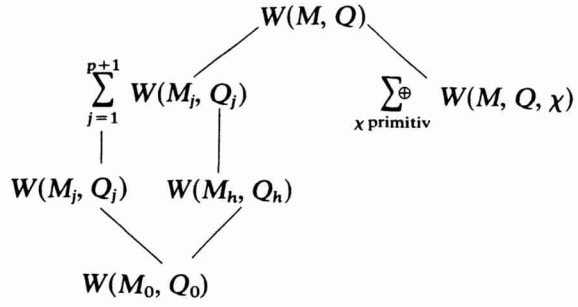
Hier besitzt jeweils nur ein H_j (o.B.d.A. H_1) diese Eigenschaft bzw. für $p=2$, $\lambda=2$ i.a. sogar keines. Analog gibt es nur ein solches $H_1=p^{\lambda-1}M$ im Fall $M\cong A_\lambda$, $p\neq 2$, $\lambda>1$. Die Eigenschaft $Q|_{H_j}\equiv 0$ hat nach I, Lemma 3 zur Folge, daß die zu H_j orthogonalen Untermoduln $H_j^\perp$ (bezüglich der zugehörigen Bilinearform B) die Eigenschaften $H_j\subset H_j^\perp$ und $[M:H_j]=p$ besitzen, und daß Q auf jedem Faktormodul $M_j:=H_j^\perp/H_j$ eine (ebenfalls nicht-entartete) quadratische Form Q_j induziert. Zu den quadratischen Moduln (M_j, Q_j) gehören nach I, Lemma 3 Weilsche Darstellungen $W(M_j, Q_j)$, welche folgendermaßen in $W(M, Q)$ eingebettet sind: Der Darstellungsraum $\mathbf{C}^{M_j}$ von $W(M_j, Q_j)$ wird identifiziert mit dem Unterraum V_j von $V=\mathbf{C}^M$, wobei

$$V_j=\left\{f\in V\;\middle|\;\begin{array}{ll} f(x)=0 & \forall\, x\notin H_j^\perp,\\ f(x)=f(y) & \forall\, x, y\in H_j^\perp \quad \text{mit} \quad x\equiv y \bmod H_j\end{array}\right\}. \tag{17}$$

Wenn dim $V=p^n$ ist, ist dim $V_j=p^{n-2}$.

Zwei solche in $W(M, Q)$ eingebettete Darstellungen $W(M_j, Q_j)$ und $W(M_h, Q_h)$, $j\neq h$, besitzen eine gemeinsame Unterdarstellung, welche man auf ähnlichem Wege gewinnt und welche nicht von j und h abhängt: Die Summe der Untermoduln H_j und H_h ist $H_0:=\{x\in M\mid px=0\}$ mit ord $H_0=p^2$. Es ist wieder $Q|_{H_0}\equiv 0$ — die in §6 diskutierten Sonderfälle bleiben bis auf weiteres ausgeschlossen — und $H_0^\perp=H_j^\perp\cap H_h^\perp=pM$ hat in M den Index p^2 und enthält H_0. Wie oben induziert Q auf $M_0:=H_0^\perp/H_0$ eine quadratische Form Q_0, und die nach I, Lemma 3 in $W(M, Q)$ eingebettete Darstellung $W(M_0, Q_0)$ vom Grad p^{n-4} ist genau die gemeinsame Unterdarstellung von je zwei verschiedenen $W(M_j, Q_j)$, $W(M_h, Q_h)$.





Wir führen in V das Skalarprodukt

$$(f, g)=\sum_{x\in M} f(x)\overline{g(x)} \quad \text{für} \quad f, g\in V$$

ein, und bezeichnen mit V_j' das orthogonale Komplement von V_0 (siehe (17)) in V_j. Die Unterräume V_j' sind $\mathbf{SL}_2$-invariant, da

$$([U]f, [U]g) = (f, g) \quad \text{für alle} \quad f, g \in V \quad \text{und} \quad U \in \mathbf{SL}_2(A_\lambda).$$

SATZ 7. *Es gilt*

$$W(M, Q) = \Big(\sum_{\chi \text{ primitiv}} \oplus\, W(M, Q, \chi) \Big) \oplus \Big(\sum_{j=1}^{p+1} W(M_j, Q_j) \Big),$$

oder genauer

$$V = \sum_{\chi \text{ primitiv}} \oplus\, V(\chi) \;\oplus \Big(\sum_{j=1}^{p+1} \Big) V_j' \;\oplus V_0. \tag{18}$$

Zum Beweis zeigen wir zuerst, daß die in (18) auftretenden Unterräume von V paarweise orthogonal sind. Daß die $V(\chi)$ (χ primitiv) unter sich und die V_j' ($j = 1, \ldots, p+1$) unter sich paarweise orthogonal sind, ist leicht zu sehen. Sei $f \in V(\chi)$ und $g \in V_j$. Wir wollen zeigen, daß $(f, g) = 0$ ist. Es existiert stets ein β aus $\mathfrak{U}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &1)\ \chi(\beta) \neq 1 \quad \text{für alle primitiven Charaktere} \quad \chi \quad \text{von} \quad \mathfrak{U}, \\ &2)\ \beta x \equiv x \bmod H_j \quad \text{für alle} \quad x \in H_j^\perp \quad \text{und} \quad \text{alle} \quad j. \end{aligned} \tag{19}$$

(Im zerlegten Falle wählt man $\beta = 1 + p^{\lambda-1}$ und in den anderen Fällen $\beta = 1 + \beta'$ mit $\mathrm{Tr}\, \beta' \equiv 0 \bmod p^\lambda$, $\beta^p = 1$ und $\beta \neq 1$, und verwendet, daß

$$H_j^\perp = \{z = ax_j + y \in M \mid a \in A_\lambda,\ y \in H_0^\perp\}$$

mit einem $x_j \in H_j^\perp$, $x_j \notin H_0^\perp$.) Es gilt

$$(f, g) = \sum_{x \in M} f(x)\overline{g(x)} = \sum_{x \in H_j^\perp} f(x)\overline{g(x)},$$

da $g(x)$ ausserhalb von $H_j^\perp$ verschwindet. Mit x durchläuft auch βx ganz $H_j^\perp$, also gilt, da $f(\beta x) = \chi(\beta) f(x)$ und $g(\beta x) = g(x)$,

$$(f, g) = \chi(\beta)(f, g).$$

Aus $\chi(\beta) \neq 1$ folgt $(f, g) = 0$. Damit ist gezeigt, dass die $V(\chi)$ und die V_j orthogonal sind. Wegen der Definition der V_j' sind also alle die in (18) auftretenden Unterräume von V paarweise orthogonal. Zum Schluß rechnet man nach, daß

gilt

$$\dim V(\chi) = |M - pM|/|\mathfrak{U}| \quad \text{(und es gibt } |\mathfrak{U}|\,(p-1)/p \text{ primitive Charaktere)},$$

$$\dim V_j' = p^{-2}\,|M| - p^{-4}\,|M| \qquad (j = 1, \ldots, p+1),$$

$$\dim V_0 = p^{-4}\,|M|,$$

$$\dim V = |M|.$$

Ein Vergleich der Dimensionen liefert die Gleichheit in (18).

Für alle binären quadratischen Moduln (M, Q) kann man die (M_j, Q_j) effektiv berechnen; da isomorphe quadratische Moduln isomorphe Weilsche Darstellungen ergeben, kann man in der Aufspaltung des Satz 7 $W(M, Q)$ und alle $W(M_j, Q_j)$ durch jene Weilschen Darstellungen ersetzen, welche hier in den §§3 bis 6 behandelt wurden. Im einzelnen erhält man:

SATZ 8. *Es sei stets* $\tilde{W}(M, Q) := \sum_{\chi \text{ primitiv}}^{\oplus} W(M, Q, \chi)$ *und* $D_0 = N_0 = R_0(r)$ *bezeichne immer die triviale Darstellung. Dann gelten folgende Charakterengleichungen (wir verwenden hier für eine Darstellung und ihren Charakter das gleiche Symbol !):*

a) $p \neq 2$ *und* $\lambda > 1$ ($n \in A_\lambda^\times$ *erfülle* $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$ *und es sei für alle* μ *aus* $\mathbf{N}$ $R_\mu^\mu(r, t) := R_\mu(r)$),

$$D_\lambda = \tilde{D}_\lambda + 2 \cdot D_{\lambda-1} + \frac{p-1}{2} \cdot R_\lambda^2(1, -1) + \frac{p-1}{2} \cdot R_\lambda^2(n, -1) - p \cdot D_{\lambda-2},$$

$$N_\lambda = \tilde{N}_\lambda + \frac{p+1}{2} \cdot R_\lambda^2(1, -n) + \frac{p+1}{2} \cdot R_\lambda^2(n, -n) - p \cdot N_{\lambda-2},$$

für $0 < \sigma < \lambda - 1$,

$$R_\lambda^\sigma(r, t) = \tilde{R}_\lambda^\sigma(r, t) + p \cdot R_\lambda^{\sigma+2}(r, t)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{ll} R_{\lambda-1}^1(rt, t) & \text{für } \sigma = 1 \\ D_{\lambda-2} & \text{für } \left(\frac{-t}{p}\right) = 1 \\ N_{\lambda-2} & \text{für } \left(\frac{-t}{p}\right) = -1 \\ R_{\lambda-2}^{\sigma-2}(r, t) & \text{für } \sigma \geq 3 \end{array} \right\} \text{und } \sigma = 2 \Bigg\} - p \cdot R_{\lambda-2}^\sigma(r, t),$$

$$R_\lambda^{\lambda-1}(r,t)=\tilde{R}_\lambda^{\lambda-1}(r,t)$$
$$+R_\lambda(r,+)_1+R_\lambda(r,-)_1+\left\{\begin{array}{ll} R_{\lambda-2}^{\lambda-3}(r,t) & \text{für } \lambda>3 \\ D_1 & \text{für } \left(\frac{-t}{p}\right)=1 \\ N_1 & \text{für } \left(\frac{-t}{p}\right)=-1 \\ R_1(rt) & \text{für } \lambda=2 \end{array}\right\}\lambda=3,$$

$$R_\lambda(r)=R_\lambda(r,+)_1+R_\lambda(r,-)_1+R_{\lambda-2}(r).$$

b) $p=2$,

für $\lambda>1$

$$D_\lambda=\tilde{D}_\lambda+2\cdot D_{\lambda-1}+R_\lambda^0(1,7)-2\cdot D_{\lambda-2},$$

für $\lambda>1$

$$N_\lambda=\tilde{N}_\lambda+3\cdot R_\lambda^0(1,3)-2\cdot N_{\lambda-2},$$

für $\lambda>3$

$$R_\lambda^0(r,t)=\tilde{R}_\lambda^0(r,t)+R_\lambda^2(r,t)+R_\lambda^2(rt,t)$$
$$+\left\{\begin{array}{ll} R_{\lambda-1}^0\left(r\frac{t+1}{2},t\right) & \text{für } t\equiv 1\ (4) \\ N_{\lambda-2} & \text{für } t\equiv 3\ (8) \\ D_{\lambda-2} & \text{für } t\equiv 7\ (8) \end{array}\right\}-2\cdot R_{\lambda-2}^0(r,t),$$

für $\lambda>4$

$$R_\lambda^1(r,t)=\tilde{R}_\lambda^1(r,t)+R_\lambda^3(r,t)+R_\lambda^3(r(1+2t),t)+R_{\lambda-1}^1(rt,t)-2\cdot R_{\lambda-2}^1(r,t),$$

für $\lambda>5$, $2\leq\sigma<\lambda-3$,

$$R_\lambda^\sigma(r,t)=\tilde{R}_\lambda^\sigma(r,t)+R_\lambda^{\sigma+2}(r,t)+R_\lambda^{\sigma+2}(r(1+2^\sigma t),t)+R_{\lambda-2}^{\sigma-2}(r,t)-2\cdot R_{\lambda-2}^\sigma(r,t),$$

für $\lambda > 5$

$$R_\lambda^{\lambda-3}(r,t) = \tilde{R}_\lambda^{\lambda-3}(r,t) + \sum_{\substack{\chi \text{ nicht} \\ \text{primitiv}}} R_\lambda^{\lambda-3}(r,t,\chi)_1 + R_{\lambda-2}^{\lambda-5}(r,t),$$

für $\lambda > 4$

$$R_\lambda^{\lambda-2}(r,t) = R_\lambda^{\lambda-2}(r,t,\chi_{-1}) + R_\lambda^{\lambda-2}(r,t,\chi_{-\alpha}) + R_\lambda^{\lambda-2}(r,t,\chi_\alpha)_1 + R_\lambda^{\lambda-2}(r,t,\chi_1)_1 + R_{\lambda-2}^{\lambda-4}(r,t).$$

Die angegebenen Isomorphien für $R_\lambda^{\lambda-1}(r,t)$, $R_\lambda(r)$ im Fall $p \neq 2$ bzw. für $R_\lambda^{\lambda-3}(r,t)$, $R_\lambda^{\lambda-2}(r,t)$ im Fall $p=2$ beruhen auf der oben erwähnten Tatsache, daß in diesen Fällen jedenfalls ein $W(M_1, Q_1)$ in $W(M,Q)$ eingebettet ist; wie die Rechnung zeigt, ist $W(M_1, Q_1)$ immer eine Weilsche Darstellung von $\mathbf{SL}_2(A_{\lambda-2})$, kann also die in §6 konstruierten irreduziblen Darstellungen $W(M,Q,\chi)$ bzw. $W(M,Q,\chi)_1$ nicht enthalten, da diese die Stufe λ besitzen. Alles andere zeigt ein Vergleich der Darstellungsgrade.

Daraus folgt außerdem, daß in diesen Fällen das Komplement von $W(M,Q,\chi)_1$ in $W(M,Q,\chi)$ höchstens die Stufe $\lambda-2$ besitzt, was die Eindeutigkeitsaussagen des §6 (z.B. in Satz 4 und im Lemma) rechtfertigt.

Am Beispiel N_λ, $p \neq 2$, soll kurz gezeigt werden, wie man die (M_j, Q_j) bestimmt: Wie in I, (10b) sei $Q(x_1,x_2) = p^{-\lambda}(x_1^2 - nx_2^2)$ mit $\left(\frac{n}{p}\right) = -1$ gewählt. Für $H_j = \{ap^{\lambda-1}(1,j) \mid a \in A_1\}$, $j = 1, \ldots, p$, ist $H_j^\perp = \{(x_1,x_2) \in M \mid x_1 - jnx_2 \equiv 0 \bmod p\}$. Dann ist $M_j = H_j^\perp / H_j$ zu $A_\lambda \oplus A_{\lambda-2}$ isomorph und läßt sich durch die Koordinaten $y_1 = (jx_1 - x_2) \in A_\lambda$ und $y_2 = p^{-1}(x_1 - jnx_2) \in A_{\lambda-2}$ beschreiben. Die von Q auf M_j induzierte quadratische Form Q_j erhält man durch $p^\lambda Q|_{H_j^\perp}(x_1,x_2) \equiv x_1^2 - nx_2^2 \equiv r(y_1^2 + p^2 t y_2^2) \equiv p^\lambda Q_j(y_1,y_2) \bmod p^\lambda$, wenn $r(j^2+t) \equiv 1$ ist, $rj(1+tn) \equiv 0$ und $r(1+j^2n^2t) \equiv -n \bmod p^\lambda$. An der zweiten Bedingung (bzw. an der ersten und dritten für $j=p$) sieht man, daß dies nur für $\left(\frac{-t}{p}\right) = -1$ möglich ist ($t \equiv -n^{-1}$). Dann wird (in A_λ) $r = (j^2 - n^{-1})^{-1}$, und es ist bekannt ([2], S.157), daß für $(p+1)/2$ der möglichen j dieses r ein quadratischer Nichtrest mod p und für die übrigen ein quadratischer Rest ist.—Schließlich bleibt noch der Fall $H_{p+1} = \{ap^{\lambda-1}(0,1) \mid a \in A_1\}$, $H_{p+1}^\perp = \{(x_1, px_2)\}$. Mit $y_1 = x_1$, $y_2 = p^{-1}x_2$ kommt man hier auf dem gleichen Wege wie oben auf das analoge Ergebnis mit $t=-n$, $r=1$.

9. Beschreibung aller irreduziblen Darstellungen von $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$

Wir wollen die irreduziblen Darstellungen von $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$ nach ihrer Stufe λ

klassifizieren. Dabei werden wir zunächst die Spezialfälle $\lambda = 0, 1$ für $p \neq 2$ und $0 \leq \lambda \leq 5$ für $p = 2$ gesondert behandeln.

Die in diesen Fällen am häufigsten vorkommende Schwierigkeit besteht darin, Darstellungen $W(M, Q, \chi)$ mit $\chi^2 \equiv 1$ zu zerlegen. Wenn $\mathrm{Aut}(M, Q)$ eine Konjugation κ enthält, kann man hier den invarianten Unterraum $V(\chi)$ in zwei invariante Unterräume $V(\chi)_+$ und $V(\chi)_-$ zerlegen:

$$V(\chi)_\pm := \{f \in V(\chi) \mid f(\kappa x) = \pm f(x) \qquad \forall\, x \in M\}.$$

Entsprechend dazu zerfällt $W(M, Q, \chi)$ in zwei Unterdarstellungen $W(M, Q, \chi)_+$ und $W(M, Q, \chi)_-$.

Für die in den folgenden Tabellen aufgeführten Darstellungen kann die Irreduzibilität, soweit sie nicht schon durch die bisher bewiesenen Sätze bekannt ist, durch (elementare) Abwandlungen des Beweises von Satz 2 bewiesen werden. Die Inäquivalenz sieht man meistens durch Analyse der Eigenwerte der Darstellungsmatrizen für $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $-E \in \mathbf{SL}_2(A_\lambda)$ ein, soweit sie nicht schon anderweitig bewiesen wurde, und die Vollständigkeit der Tabellen folgt daraus, daß man die Anzahl der zu erwartenden irreduziblen Darstellungen aus I, Satz 5 bzw. [3] kennt.

Bezeichnungen. Die genannten Charaktere gehören immer zu den in §2 beschriebenen abelschen Automorphismengruppen $\mathfrak{U}$. Wie in §6 sei stets $\chi_1 \equiv 1$. $\mathfrak{P}$ sei die Menge der primitiven Charaktere von $\mathfrak{U}$. Unter *Anzahl* verstehen wir immer die Anzahl der inäquivalenten Darstellungen des jeweils betrachteten Typs, so daß also $W(M, Q, \chi)$ und $W(M, Q, \bar{\chi})$ als eine Darstellung gezählt werden.

$\lambda = 0$. Hier definieren wir — in Übereinstimmung mit Satz 8 — $C_1 := D_0 = N_0$ als die triviale Darstellung von $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

Darstellungen der Stufe 1 $p \neq 2$		Grad	Anzahl	Bemerkungen
$D_1(\chi)$	$\chi \in \mathfrak{P}$	$p+1$	$\frac{1}{2}(p-3)$	Satz 1
$N_1(\chi)$	$\chi \in \mathfrak{P}$	$p-1$	$\frac{1}{2}(p-1)$	Satz 2
$R_1(1, \pm), R_1(n, \pm)$	$\left(\frac{n}{p}\right) = -1$	$\frac{p \pm 1}{2}$	4	Satz 4
$N_1(\chi_1)$		p	1	"Steinberg-Darstellung"

Die Zerlegung von D_1 und N_1 wird hier vervollständigt durch

$$D_1(\chi) \cong R_1(1,+) \oplus R_1(n,+) \qquad \text{für} \quad \chi \neq 1,\ \chi^2 \equiv 1,$$

$$N_1(\chi) \cong R_1(1,-) \oplus R_1(n,-) \qquad \text{für} \quad \chi \neq 1,\ \chi^2 \equiv 1,$$

$$D_1(\chi_1) \cong N_1(\chi_1) \oplus C_1 \oplus C_1.$$

Darstellungen der Stufe 1 $p=2$		Grad	Anzahl	Bemerkungen
$C_2 := N_1(\chi)$	$\chi \in \mathfrak{P}$	1	1	$C_2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = C_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = -1$
$N_1(\chi_1)$		2	1	

Die vollständige Zerlegung der Weilschen Darstellungen lautet hier

$$D_1 \cong C_1 \oplus C_1 \oplus N_1(\chi_1), \qquad N_1 \cong C_2 \oplus C_2 \oplus N_1(\chi_1).$$

Darstellungen der Stufe 2 $p=2$		Grad	Anzahl	Bemerkungen
$D_2(\chi)_+$	$\chi \neq 1$	3	1	$\cong R_2^0(1,1,\chi_1)$
$D_2(\chi)_-$	$\chi \neq 1$	3	1	$\cong R_2^0(3,1,\chi_1)$
$R_2^0(1,3)_1$		3	1	Darstellungsraum erzeugt von $\delta_1,\ \delta_{\sqrt{-3}},\ \delta_0 - \delta_{1+\sqrt{-3}}$
$* \ C_2 \otimes R_2^0(1,3)_1$		3	1	Ausnahmedarstellung (s.u.)
$N_2(\chi)$	$\chi \in \mathfrak{P},\ \chi^2 \neq 1$	2	1	Satz 2
$C_3 := R_2^0(3,1,\chi)$	$\chi \neq 1$	1	1	$\cong N_2(\psi)_-,\ \psi \in \mathfrak{P},\ \psi^2 \equiv 1$
$C_4 := R_2^0(1,1,\chi)$		1	1	$\cong N_2(\psi)_+,\ \psi \in \mathfrak{P},\ \psi^2 \equiv 1$

Dabei ist $C_3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = -i = -C_3\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $C_4\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = i = -C_4\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Mit "*" bezeichnen wir hier und im folgenden jeweils die Ausnahmedarstellungen, welche in keiner Weilschen Darstellung zu binären quadratischen Moduln enthalten sind. Die Darstellung $C_2 \otimes R_2^0(1,3)_1$ ist aber in $N_1 \otimes R_2^0(1,3)$ enthalten, d.h. in der Weilschen Darstellung $W(M,Q)$ mit $M = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$ und $Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + \frac{1}{4}(x_3^2 + 3x_4^2)$.—Die vollständige Zerlegung von D_2 und N_2 gibt Satz 8, die vollständige Zerlegung von $R_2^0(r,1)$ steht in der Tabelle, es bleibt also nur nachzutragen, daß

$$R_2^0(1,3) \cong R_2^0(1,3)_1 \oplus C_1$$

ist (das Komplement von $R_2^0(1,3)$ wird von $\delta_0+\delta_{1+\sqrt{-3}}$ erzeugt).

Darstellungen der Stufe 3 $p=2$		Grad	Anzahl	Bemerkungen
$D_3(\chi)_\pm$	$\chi\in\mathfrak{P}$	6	4	$\cong R_3^1(r,t,\chi_1)$ mit $(r,t)=(1,1),(1,3),(3,3),(5,1)$
$R_3^0(1,3,\chi_1)_1$		6	1	$\cong R_3^0(1,7,\chi_1)_1$ (s.u.)
$^*C_3\otimes R_3^0(1,3,\chi_1)_1$		6	1	
$N_3(\chi)$	$\chi\in\mathfrak{P}$, $\chi^2\neq 1$	4	2	Satz 2
$N_3(\chi)_\pm$	$\chi\in\mathfrak{P}$, $\chi^2\equiv 1$	2	4	$\cong R_3^1(r,t,\psi)$ mit $\psi\neq 1$ für $(r,t)=(1,1),(1,3),(3,3),(5,1)$
$R_3^0(r,t,\chi)$	$\chi(\alpha)=i$ $r=1,3$; $t=1,5$	3	4	Satz 3
$R_3^0(1,t,\chi)_\pm$	$\chi\neq 1$ $t=3,7$	3	4	

Dabei wird der Darstellungsraum von $R_3^0(1,t,\chi_1)_1$ für $t=3,\ 7$ erzeugt von $\delta_0-\delta_{2+2\sqrt{-1}}$, $\delta_2-\delta_{2\sqrt{-1}}$, $\delta_1+\delta_{-1}$, $\delta_{1+2\sqrt{-1}}+\delta_{-1+2\sqrt{-1}}$, $\delta_{\sqrt{-1}}+\delta_{-\sqrt{-1}}$, $\delta_{2+\sqrt{-1}}+\delta_{2-\sqrt{-1}}$, und es ist

$$R_3^0(1,t,\chi_1)\cong R_3^0(1,t,\chi_1)_1\oplus\begin{cases}D_1 & \text{für } t=7\\ N_1 & \text{für } t=3.\end{cases}$$

Zur vollständigen Zerlegung aller Weilschen Darstellungen der Stufe 3 ist im Hinblick auf Satz 8 nur nachzutragen, daß für $\chi(\alpha)=-1$ die Darstellungen $R_3^0(r,t,\chi)$, $t=1,\ 5$, in C_3 bzw. C_4 und eine der Darstellungen $R_3^0(1,3,\psi)_\pm, \psi\neq 1$, zerfallen, und daß $R_3^0(r,t,\chi_1)$, $t=1,5$, in eine der Darstellungen $R_3^0(1,7,\psi)_\pm$, $\psi\neq 1$, und eine der Darstellungen $D_2(\chi)_\pm$, $\chi\neq 1$, zerfällt.

Darstellungen der Stufe 4 $p=2$		Grad	Anzahl	Bemerkungen
$D_4(\chi)$	$\chi\in\mathfrak{P}$	24	2	Satz 1
$N_4(\chi)$	$\chi\in\mathfrak{P}$	8	6	Satz 2
$R_4^0(r,t,\chi)$	$\chi\in\mathfrak{P}$, $\chi^2\neq 1$ $r=1,3$; $t=1,5$	6	4	Satz 3
$R_4^0(r,t,\chi)_\pm$	$\chi\in\mathfrak{P}$, $\chi^2\equiv 1$ $r=1,3$; $t=1,5$	3	16	
$R_4^0(1,t,\chi)_\pm$	$\chi\in\mathfrak{P}$, $t=3,7$	6	8	
$R_4^2(r,t,\chi)$	$\chi\neq 1$ $r,t\in\{1,3\}$	6	4	$R_4^2(r,3,\chi)\cong R_4^2(r,1,\chi_1)_1$ (s.u.)
$^*C_2\otimes R_4^2(r,3,\chi)$	$\chi\neq 1$, $r=1,3$	6	2	
$R_4^2(r,3,\chi_1)_1$	$r=1,3$	6	2	(s.u.)
$^*N_3(\chi)_+\otimes R_4^0(1,7,\psi)_+$	$\psi(\alpha)=-1$, $\psi(-1)=1$, $\chi\in\mathfrak{P}$, $\chi^2\equiv 1$	12	2	

Die Darstellungsräume von $R_4^2(r, t, \chi_1)_1$ werden erzeugt von $\delta_1+\delta_{-1}$, $\delta_3+\delta_{-3}$, $\delta_{1+\sqrt{-4t}}+\delta_{-1+\sqrt{-4t}}$, $\delta_{3+\sqrt{-4t}}+\delta_{-3+\sqrt{-4t}}$, $\delta_0-\delta_4$ und $\delta_{\sqrt{-4t}}-\delta_{4+\sqrt{-4t}}$; außerdem ist

$$R_4^2(r, t, \chi_1) \cong R_4^2(r, t, \chi_1)_1 \oplus R_2^0(r, t).$$

Zur vollständigen Zerlegungen aller Weilschen Darstellungen fehlt noch die Zerlegung von $R_4^1(r, t)$, da in allen anderen Fällen Satz 8 anwendbar ist: Für primitive φ sind die $R_4^1(r, t, \varphi)_\pm$ zu Darstellungen $R_4^0(r', t', \chi)_\pm$ mit $t'=1, 5$, $r'=1, 3$, χ primitiv und $\chi^2 \equiv 1$ isomorph (und zwar treten dabei alle 16 Darstellungen vom Grad 3 genau zweimal auf); für die beiden nicht-primitiven Charaktere φ enthält $R_4^1(r, t, \varphi)$ jeweils eine irreduzible Unterdarstellung vom Typ $R_4^0(1, t', \chi)_\pm$ mit $t'=3, 7$ und primitivem χ. Das Komplement dieser Darstellungen in $R_4^1(r, t)$ ist nach der Schlußweise von §8 zu $R_3^1(rt, t)$ isomorph.

Darstellungen der Stufe 5 $p=2$		Grad	Anzahl	Bemerkungen
$D_5(\chi)$	$\chi \in \mathfrak{P}$	48	4	Satz 1
$N_5(\chi)$	$\chi \in \mathfrak{P}$	16	12	Satz 2
$R_5^0(r, t, \chi)$	$\chi \in \mathfrak{P}$ $r=1, 3;\ t=1, 5$	12	16	Satz 3
$R_5^0(1, t, \chi)$	$\chi \in \mathfrak{P};\ t=3, 7$	24	4	Satz 3
$R_5^1(r, t, \chi)$	$\chi \in \mathfrak{P}$ $r=1, 5;\ t=1, 5$ $r=1, 3;\ t=3, 7$	12	16	Satz 3
$R_5^2(r, t, \chi)_\pm$	$\chi \in \mathfrak{P};\ r=1, 3$ $t=1, 3, 5, 7$	6	32	
$R_5^2(r, 1, \chi)_1$	$\chi \notin \mathfrak{P};\ r=1, 3$	12	4	$\cong R_5^2(r, t, \varphi)_1$ (s.u.) mit $\varphi \notin \mathfrak{P}$, $\varphi=\chi$ für $t \equiv 1 \bmod 4$ $\varphi \neq \chi$ für $t \equiv 3 \bmod 4$
$* C_3 \otimes R_5^2(r, 1, \chi)_1$	$\chi \notin \mathfrak{P};\ r=1, 3$	12	4	

Für die beiden nicht-primitiven Charaktere $\chi_1 \equiv 1$ und χ_α (mit $\chi_\alpha(\alpha)=1$, $\chi_\alpha(-1)=-1$) wird der Darstellungsraum von $R_5^2(r, t, \chi)_1$ analog zu §6 erzeugt von

$$\{f_\xi(\chi) \mid \xi = 1, 3, 5, 7;\ 1+\sqrt{-4t}, \ldots, 7+\sqrt{-4t}\}$$

und

$$f_4(\chi_\alpha),\ f_{4+2\sqrt{-4t}}(\chi_\alpha),\ f_2(\chi_\alpha)+f_6(\chi_\alpha),\ f_{2+2\sqrt{-4t}}(\chi_\alpha)+f_{6+2\sqrt{-4t}}(\chi_\alpha)$$

bzw.

$$\{f_\xi(\chi_1)-f_{8-\xi}(\chi_1) \mid \xi = 2, 2+2\sqrt{-4t}, 0, 2\sqrt{-4t}\}$$

und es ist (nach der Methode von §8)

$$R_5^2(r, t) \cong \tilde{R}_5^2(r, t) \oplus R_5^2(r, t, \chi_\alpha)_1 \oplus R_5^2(r, t, \chi_1)_1 \oplus R_3^0(r, t).$$

Nach §6 und Satz 8 zerfällt $R_5^3(r, t)$ in $R_3^1(r, t)$ und vier irreduzible Darstellungen $R_5^3(r, t, \chi)$ bzw. $R_5^3(r, t, \chi)_1$ vom Grad 6 und der Stufe 5; diese sind zu gewissen Darstellungen vom Typ $R_5^2(r', t', \varphi)_\pm$ isomorph.

In den beiden letzten Tabellen bezeichnet χ ohne Index immer primitive Charaktere.

Darstellungen der Stufen $\lambda > 1$, $p \neq 2$

		Grad	Anzahl	Bemerkungen
$D_\lambda(\chi)$		$(p+1)p^{\lambda-1}$	$\frac{1}{2}p^{\lambda-2}(p-1)^2$	Satz 1
$N_\lambda(\chi)$		$(p-1)p^{\lambda-1}$	$\frac{1}{2}p^{\lambda-2}(p^2-1)$	Satz 2
$R_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$	$\sigma = 1, \ldots, \lambda-1$ $\left(\frac{r}{p}\right)\cdot\left(\frac{t}{p}\right) = \pm 1$	$\frac{1}{2}(p^2-1)p^{\lambda-2}$	$\sum_{\sigma=1}^{\lambda-1} 4(p-1)p^{\lambda-\sigma-1}$	Satz 3
$R_\lambda(r, \pm)_1$	$\left(\frac{r}{p}\right) = \pm 1$	$\frac{1}{2}(p^2-1)p^{\lambda-2}$	4	Satz 4

Darstellungen der Stufen $\lambda > 5$, $p = 2$

		Grad	Anzahl	Bemerkungen
$D_\lambda(\chi)$		$3 \cdot 2^{\lambda-1}$	$2^{\lambda-3}$	Satz 1
$N_\lambda(\chi)$		$2^{\lambda-1}$	$3 \cdot 2^{\lambda-3}$	Satz 2
$R_\lambda^0(1, t, \chi)$	$t = 3, 7$	$3 \cdot 2^{\lambda-2}$	$2^{\lambda-3}$	Satz 3
$R_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$	$\sigma = 0$; $r = 1, 3$; $t = 1, 5$	$3 \cdot 2^{\lambda-3}$	$4 \cdot 2^{\lambda-3}$	Satz 3
	$\sigma = 1$; $r = 1, 5$; $t = 1, 5$		$4 \cdot 2^{\lambda-3}$	Satz 3
	$r = 1, 3$; $t = 3, 7$			Satz 3
	$\sigma = 2$; $r = 1, 3$		$2 \cdot 2^{\lambda-3}$	Satz 3
	$t = 1, 3, 5, 7$			Satz 3
$R_\lambda^\sigma(r, t, \chi)$	$\sigma = 3, \ldots, \lambda-3$ $r, t \in \{1, 3, 5, 7\}$	$3 \cdot 2^{\lambda-4}$	$\sum_{\sigma=3}^{\lambda-3} 16 \cdot 2^{\lambda-\sigma-2}$	Satz 3
$R_\lambda^{\lambda-2}(r, t, \chi)$	$r = 1, 3, 5, 7$ $t = 1, 3$	$3 \cdot 2^{\lambda-4}$	16	Satz 5
Für $\lambda \geq 7$ $R_\lambda^{\lambda-3}(r, t, \chi_{\pm 1})_1$, für $\lambda = 6$ $R_6^4(r, t, \chi_1)_1$, $* C_2 \otimes R_6^4(r, t, \chi_1)_1$	$r = 1, 3, 5, 7$ $t = 1, 3$	$3 \cdot 2^{\lambda-4}$	16	Satz 5 Formeln (13) und (15)

Mit den vorstehenden Tabellen ist auch Hauptsatz 2 vollständig bewiesen. Daß nämlich die 18 genannten Ausnahmedarstellungen nicht in Weilschen Darstellungen zu binären quadratischen Moduln vorkommen können, sieht man an deren vollständiger Zerlegung, die i.a. in Satz 8 und in den dort nicht behandelten Fällen hier in §9 beschrieben ist.

LITERATUR

[1] W. CASSELMAN, *On the representations of* $\mathbf{SL}_2(k)$ *related to binary quadratic forms.* Am. J. Math. *94*, (1972), 810–834.
[2] H. HASSE, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (2.Aufl. 1964), Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg.
[3] H. D. KLOOSTERMAN, *The behaviour of general theta functions under the modular group and the characters of the binary modular congruence groups I, II.* Ann. Math. *47* (2.Ser.), (1946), 317–447.
[4] A. NOBS und J. WOLFART, *Darstellungen von* $\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z}/p^\lambda\mathbf{Z})$ *und Thetafunktionen I.* Math. Z. *138* (1974), 239–254.
[5] ——, ——, *Les représentations de Weil du groupe* $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_2)$. C.R. Acad. Sc. Paris, *281*, Série A, (1975), 137–140.
[6] ——, ——, *Les représentations irréductibles du groupe* $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_2)$. C.R. Acad. Sc. Paris, *281*, Série A, (1975), 261–264.
[7] A. NOBS, *Die irreduziblen Darstellungen der Gruppen* $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}_p)$ *I.* in diesem Band.
[8] S. TANAKA, *Irreducible representations of the binary modular congruence groups* mod p^λ. J. Math. Kyoto Univ. *7*, (1967), 123–132.
[9] J. WOLFART, *Darstellungen von* $\mathbf{SL}(2, \mathbf{Z}/p^\lambda\mathbf{Z})$ *und Thetafunktionen II.* Manuscripta math. *17*, (1975), 339–362.

Institute for Advanced Study
Princeton, N.J. 08540
USA

Mathematisches Institut der Universität
D-7800 Freiburg
Hebelstraße 29
Bundesrepublik Deutschland

Eingegangen, Mai 1976