Comment. Math. Helvetici 39 (**51**) 411–433 Birkhäuser Verlag, Basel

Théorie de Galois pour une W^*-Algèbre

P.-L. Aubert

Introduction

Soient M une W^*-algèbre et G un groupe d'automorphismes de M. Peut-on décrire la sous-algèbre M^G des points fixes de M par G? Existe-t-il entre les sous-groupes de G et les sous-algèbres de M contenant M^G une correspondance galoisienne? M. Nakamura et Z. Takeda [1] ont obtenu une réponse affirmative lorsque M est un facteur de type II_1 et G un groupe fini d'automorphismes extérieurs. Nous avons cherché à étendre leurs résultats en assouplissant les conditions sur M et sur G.

Le produit croisé $W^*(M, G)$ joue ici un rôle important. Au chapitre I, nous en donnons une construction nouvelle, sans passer par une représentation de M comme algèbre de von Neumann dans un espace de Hilbert; à l'aide de la norme réduite sur $L^1(G, M)$, nous définissions directement le prédual de $W^*(M, G)$. L'étude des représentations de $W^*(M, G)$ permet alors de retrouver la définition classique.

Le résultat de Nakamura et Takeda repose sur le fait que le commutant de M^G peut s'identifier à un produit croisé. Pour généraliser ce résultat nous devions pouvoir prolonger aux W^*-algèbres un isomorphisme défini entre des sous-algèbres involutives σ-denses. Pearcy et Ringrose [1] ont obtenu, pour des W^*-algèbres finies, un résultat permettant de prolonger les isomorphismes qui conservent les applications $\natural$. Enomoto et Tamaki [1] ont généralisé ce résultat, mais ils gardent une condition de finitude. Au chapitre II, nous obtenons un résultat plus fort: on peut prolonger les isomorphismes qui conservent des projections positives normales fidèles. On peut alors utiliser ce théorème pour la correspondance galoisienne: il nous permet d'obtenir, sous certaines hypothèses, l'injectivité de l'application "sous-groupe $\mapsto$ sous-algèbre".

En algèbre, S. U. Chase, D. K. Harrison et A. Rosenberg [1] ont obtenu une théorie de Galois pour les anneaux commutatifs. En essayant d'appliquer les méthodes algébriques à l'étude d'un groupe fini G d'automorphismes d'une W^*-algèbre M, nous avons vu que la notion importante était celle d'action presque libre de G sur M. Au chapitre III, sous cette seule hypothèse, nous démontrons le "théorème fondamental de la théorie de Galois" qui établit une correspondence biunivoque entre les sous-groupes de G et certaines sous-algèbres, dites G-libres, de M. On peut considérer ce résultat comme complémentaire de celui de Nakamura et Takeda: leurs automorphismes sont extérieurs sur un facteur alors que les nôtres ont une action importante sur le centre de M.

Ce travail est extrait de la thèse que j'ai soutenue à l'Université de Neuchâtel.† Je tiens à remercier ici M. R. Bader qui m'a aidé et encouragé pendant son élaboration.

I. Une Construction Intrinsèque du W^*-Produit Croisé

I.1. *Produit croisé réduit* (cf. Zeller-Meier [1] §4)

Soient A une C^*-algèbre à élément unité, G un groupe discret et $\sigma: G \to \mathrm{Aut}(A)$ un homomorphisme. Le produit croisé réduit $B = C_r^*(G, A)$ est le complété de l'algèbre normée involutive $L^1(G, A)$ des fonctions sommables f de G dans A, la structure algébrique étant donnée par

$$(fg)(s) = \sum_{t \in G} f(t)\sigma_t[g(t^{-1}s)]$$

$$f^*(s) = \sigma_s[f(s^{-1})^*]$$

et la norme $\|f\|$ étant la norme réduite. Il n'est pas difficile de voir que la norme réduite est la plus petite C^*-norme sur $L^1(G, A)$ qui rende continues les formes linéaires $\tilde{\varphi}: f \in L^1(G, A) \mapsto \varphi(f(e)) \in \mathbb{C}$ où φ parcourt A^*. B est une C^*-algèbre contenant A comme sous-C^*-algèbre et $K(G, A)$ (= l'ensemble des fonctions de G dans A à support fini) comme sous-algèbre involutive dense. B peut être considérée comme une algèbre de fonctions de G dans A, le produit et l'involution étant définis comme dans $L^1(G, A)$; les applications $f \in B \mapsto f(s) \in A$ sont linéaires et diminuent les normes; de plus l'application

$$\phi: f \in B \mapsto f(e) \in A \quad .$$

est positive fidèle. Enfin pour $\varphi \in A^{*+}$ et $f \in B$ on a $\tilde{\varphi}(f) = \varphi(f(e))$.

Pour tout $s \in G$ nous noterons u_s l'élément de $K(G, A)$ défini par $u_s(t) = 0$ si $s \neq t$ et $u_s(s) = 1$; on a $u_s a u_s^* = \sigma_s(a)$ pour tout $a \in A$. A toute représentation π de A dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ on associe une représentation $\tilde{\pi} = \mathrm{Ind}\, \pi$ de B

† polycopié de l'Institut de mathématiques, Neuchâtel.

dans $\tilde{\mathscr{H}} = L^2(G, \mathscr{H})$ définie, pour $f \in B$, $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathscr{H}}$ et $t \in G$, par

$$[\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}](t) = \sum_{s \in G} \pi[\sigma_{t^{-1}}(f(s))]\tilde{\xi}(s^{-1}t).$$

Pour $\xi \in \mathscr{H}$ et $s \in G$ nous noterons $\tilde{\xi}_s$ l'élément de $\tilde{\mathscr{H}}$ défini par $\tilde{\xi}_s(t) = 0$ si $t \neq s$, $\tilde{\xi}_s(s) = \xi$. Si $\xi \in \mathscr{H}$ est totalisateur pour π alors $\tilde{\xi}_e$ est totalisateur pour $\tilde{\pi}$; si π et ξ définissent la forme positive φ sur A alors $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\xi}_e$ définissent $\tilde{\varphi}$. Nous dirons que G opère *quasi librement* sur A si pour tout $s \in G$, $s \neq e$, on a l'implication suivante:

$$a \in A,\ ab = \sigma_s(b)a \text{ pour tout } b \in A \Rightarrow a = 0.$$

Si A est un facteur cela revient à dire que tout σ_s, $s \neq e$, est un automorphisme extérieur et si A est abélienne on retrouve la notion de "free action" de von Neumann (tout projecteur $\neq 0$ de A majore un projecteur $\neq 0$ de A qui est orthogonal à son image par σ_s). Notons que si G opère *presque librement* sur A (i.e. opère quasi librement sur $Z(A)$, voir Zeller-Meier [1], définition 1.13) alors G opère quasi librement sur A. L'intérêt de la notion d'action quasi libre est qu'elle englobe le cas des automorphismes extérieurs d'un facteur. Pour tout cela voir Kallman [1].

I.2. *W^*-produit croisé.*

Conservons les notations du paragraphe 1 mais supposons maintenant que A est une W^*-algèbre; nous noterons A_* [resp. A_*^+] son prédual [resp. la partie positive de son prédual].

Soit E la fermeture en norme dans B^* du sous-espace engendré par les formes linéaires

$$\omega_{g,\varphi} : f \in B \mapsto \tilde{\varphi}(g^*fg) \in \mathbb{C}$$

où $g \in K(G, A)$ et $\varphi \in A_*^+$. E est un espace de Banach.

Pour $h \in B$ et $\omega \in B^*$ les translatés à gauche et à droite $L_h\omega$ et $R_h\omega$ sont définis par

$$\langle L_h\omega, f\rangle = \langle \omega, hf\rangle \quad \text{et} \quad \langle R_h\omega, f\rangle = \langle \omega, fh\rangle$$

pour tout $f \in B$.

LEMME 1. *E est stable par les translations à gauche et à droite.*

Démonstration. Il faut voir que si $\omega \in E$ on a $L_h\omega \in E$, $R_h\omega \in E$, quel que soit $h \in B$. Par continuité (pour la norme) et linéarité des applications L_h et R_h, il suffit de le démontrer pour un ω de la forme $\omega_{g,\varphi}(g \in K(G, A), \varphi \in A_*^+)$. Soient alors π et ξ la représentation de A et le vecteur de $\mathcal{H}_\pi$ définis par φ; on sait que $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\xi}_e$ sont définis (à isomorphisme près) par $\tilde{\varphi}$, donc pour tout $f \in B$

$$\begin{aligned}\langle L_h\omega_{g,\varphi}, f\rangle &= \langle \omega_{g,\varphi}, hf\rangle = \tilde{\varphi}(g^*hfg)\\ &= \tilde{\varphi}((h^*g)^*fg) = (\tilde{\pi}((h^*g)^*fg)\tilde{\xi}_e \mid \tilde{\xi}_e)\\ &= (\tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)\tilde{\xi}_e \mid \tilde{\pi}(h^*g)\tilde{\xi}_e).\end{aligned}$$

Posons $\tilde{\eta} = \tilde{\pi}(g)\tilde{\xi}_e$ et $\tilde{\zeta} = \tilde{\pi}(h^*g)\tilde{\xi}_e$; on a

$$\begin{aligned}\langle L_h\omega_{g,\varphi}, f\rangle &= (\tilde{\pi}(f)\tilde{\eta} \mid \tilde{\zeta})\\ &= \tfrac{1}{4}\{(\tilde{\pi}(f)(\tilde{\eta}+\tilde{\zeta}) \mid \tilde{\eta}+\tilde{\zeta}) - (\tilde{\pi}(f)(\tilde{\eta}-\tilde{\zeta}) \mid \tilde{\eta}-\tilde{\zeta})\\ &\quad + i(\tilde{\pi}(f)(\tilde{\eta}+i\tilde{\zeta}) \mid \tilde{\eta}+i\tilde{\zeta}) - i(\tilde{\pi}(f)(\tilde{\eta}-i\tilde{\zeta}) \mid \tilde{\eta}-i\tilde{\zeta})\}.\end{aligned}$$

Ainsi $L_h\omega_{g,\varphi}$ est combinaison linéaire de quatre formes associées à $\tilde{\pi}$; mais ces dernières sont toutes limites en norme de $\omega_{k,\varphi}$, $k \in K(G, A)$, (cf. Dixmier [1] Prop. 2.4.8.) donc appartiennent à E. Donc on a bien $L_h\omega_{g,\varphi} \in E$; de même pour $R_h\omega_{g,\varphi}$.

On sait que B^{**} est une W^*-algèbre; soit E^0 le polaire de E dans B^{**} i.e.

$E^0 = \{x \in B^{**} \mid \langle \omega, x\rangle = 0, \forall \omega \in E\}$.

LEMME 2. *E^0 est un idéal bilatère $\sigma(B^{**}; B^*)$-fermé de B^{**}.*

Démonstration. Soit $x \in E^0$. Pour tout $h \in B$ et tout $\omega \in E$ on a vu que $L_h\omega \in E$ et $R_h\omega \in E$, donc

$$\langle hx, \omega\rangle = \langle x, L_h\omega\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle xh, \omega\rangle = \langle x, R_h\omega\rangle = 0,$$

d'où $hx \in E^0$ et $xh \in E^0$. Si maintenant $y \in B^{**}$ il existe une suite généralisée $\{h_\alpha\}$ d'éléments de B telle que $h_\alpha \to x$ pour la topologie $\sigma(B^{**}, B^*)$. Comme E^0 est $\sigma(B^{**}, B^*)$-fermé et que la multiplication par un élément fixe dans B^{**} est $\sigma(B^{**}, B^*)$-continue, on a

$$yx = \lim_\alpha h_\alpha x \in E^0 \quad \text{et} \quad xy = \lim_\alpha xh_\alpha \in E^0$$

d'où le résultat.

E^0 étant un idéal bilatère uniformément fermé de B^{**}, le quotient B^{**}/E^0 est une C^*-algèbre; comme $B^{**}/E^0 = E^*$ avec E espace de Banach, B^{**}/E^0 est une W^*-algèbre, de prédual E. Posons $M = B^{**}/E^0$ et $M_* = E$.

LEMME 3. *B est une sous-C^*-algèbre $\sigma(M, M_*)$-dense de M.*

Démonstration. On a un homomorphisme (d'algèbres involutives) canonique $f \in B \mapsto [f] \in M$; il suffit de montrer qu'il est injectif (il sera alors isométrique et on pourra identifier B à son image dans M). Soit donc $f \in B$ tel que $[f] = 0$ i.e. $f \in E^0$; on a $\langle \omega, f \rangle = 0$ pour tout $\omega \in E$. Prenons en particulier $\omega = R_h \tilde{\varphi}$ où $\varphi \in A_*^+$ et $h = u_s \in B$; on a alors

$$0 = \langle \omega, f \rangle = \langle R_h \tilde{\varphi}, f \rangle = \langle \tilde{\varphi}, f u_s \rangle = \langle \varphi, (f u_s)(e) \rangle$$

Mais

$$(f u_s)(e) = \sum_{t \in G} f(t) \sigma_t[u_s(t^{-1} e)] = f(s^{-1}),$$

donc $\langle \varphi, f(s^{-1}) \rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $\varphi \in A_*^+$ et tout $s \in G$ on a $f = 0$. La σ-densité de B dans M provient de la σ-densité de B dans B^{**} et de la σ-continuité de l'application canonique de B^{**} sur M.

DÉFINITION. La W^*-algèbre $M = B^{**}/E^0$ sera appelée W^*-produit croisé de A par G selon σ et notée $W^*(A, G, \sigma)$.

I.3. *Représentations de $W^*(A, G, \sigma)$*

Nous conservons les notations A, G, σ, B, E, et $M = W^*(A, G, \sigma)$ du paragraphe 2. Rappelons qu'une W^*-représentation π de A dans $\mathcal{H}$ est une représentation de A dans $\mathcal{H}$ continue pour les topologies $\sigma(A, A_*)$ et $\sigma(L(\mathcal{H}), L(\mathcal{H})_*)$.

THÉORÈME I.1. *Soient π une W^*-représentation de A dans $\mathcal{H}$ et $\tilde{\pi}$ la représentation de B dans $\tilde{\mathcal{H}}$ associée à π.*

(1) *$\tilde{\pi}$ se prolonge de facon unique en une W^*-représentation (notée encore $\tilde{\pi}$) de M dans $\tilde{\mathcal{H}}$.*

(2) *Si π est injective sur A alors $\tilde{\pi}$ est injective sur M.*

Démonstration. (1) Nous supposerons d'abord que π possède un vecteur totalisateur $\xi \in \mathcal{H}$; la forme positive φ définie par π et ξ appartient à A_*^+. On sait alors que $\tilde{\xi}_e$ est totalisateur pour $\tilde{\pi}$ et que $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\xi}_e$ définissent $\tilde{\varphi}$, et on peut admettre que $\tilde{\pi}$ est la représentation définie par $\tilde{\varphi}$; les formes linéaires

$$f \in B \mapsto (\tilde{\pi}(f)\tilde{\eta} \mid \tilde{\zeta}) \in \mathbb{C} \qquad \tilde{\eta}, \tilde{\zeta} \in \tilde{\mathscr{H}}$$

sont donc des limites en norme de combinaisons linéaires de $\omega_{g,\varphi}$, $g \in K(G, A)$, donc appartiennent à E. La représentation $\tilde{\pi}: B \to L(\tilde{\mathscr{H}})$ est continue (pour la norme); soit

$$\tilde{\pi}^*: L(\tilde{\mathscr{H}})^* \to B^*$$

son adjointe. Montrons que $\tilde{\pi}^*(L(\tilde{\mathscr{H}})_*) \subset E$: si $\omega \in L(\tilde{\mathscr{H}})_*$ il existe $\tilde{\eta}_i \in \tilde{\mathscr{H}}$, $\tilde{\zeta}_i \in \tilde{\mathscr{H}}$, $i = 1, 2, \ldots$ avec

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\tilde{\eta}_i\|^2 < \infty, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \|\tilde{\zeta}_i\|^2 < \infty \quad \text{et} \quad \omega(T) = \sum_{i=1}^{\infty} (T\tilde{\eta}_i \mid \tilde{\zeta}_i),$$

pour tout $T \in L(\tilde{\mathscr{H}})$; on a donc

$$\langle \tilde{\pi}^*(\omega), f \rangle = \langle \omega \circ \tilde{\pi}, f \rangle = \langle \omega, \tilde{\pi}(f) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(f)\tilde{\eta}_i \mid \tilde{\zeta}_i),$$

pour tout $f \in B$. Par ce qui précède on voit donc que $\tilde{\pi}^*(\omega) \in E$. Notons $\tilde{\pi}_0^*$ la restriction de $\tilde{\pi}^*$ à $L(\tilde{\mathscr{H}})_*$ et $\hat{\pi}$ l'adjoint de $\tilde{\pi}_0^*$; $\hat{\pi}$ est donc une application linéaire continue (pour la norme) de $E^* = M$ dans $L(\tilde{\mathscr{H}})_*^* = L(\tilde{\mathscr{H}})$; $\hat{\pi}$ est également continue pour les topologies $\sigma(M, M_*)$ et $\sigma(L(\tilde{\mathscr{H}}), L(\tilde{\mathscr{H}})_*)$. Si $f \in B$, $\hat{\pi}(f)$ est défini par

$$\langle \hat{\pi}(f), \omega \rangle = \langle f, \tilde{\pi}_0^*(\omega) \rangle = \langle \tilde{\pi}(f), \omega \rangle$$

pour tout $\omega \in L(\tilde{\mathscr{H}})_*$, donc $\hat{\pi} = \tilde{\pi}$ sur B i.e. $\hat{\pi}$ prolonge $\tilde{\pi}$. On en déduit alors que $\hat{\pi}$ est un homomorphisme (d'algèbres involutives) de M dans $L(\tilde{\mathscr{H}})$, donc une W^*-représentation. En effet si x, $y \in M$ il existe deux suites généralisées $\{f_\alpha\}$ et $\{g_\beta\}$ d'éléments de B telles que $f_\alpha \to x$ et $g_\beta \to y$ pour la topologie $\sigma(M, M_*)$; on a donc

$$\begin{aligned}
\hat{\pi}(xy) &= \hat{\pi}\left(x \lim_\beta g_\beta\right) = \hat{\pi}\left(\lim_\beta x g_\beta\right) = \lim_\beta \hat{\pi}(x g_\beta) \\
&= \lim_\beta \hat{\pi}\left(\left(\lim_\alpha f_\alpha\right) g_b\right) = \lim_\beta \hat{\pi}\left(\lim_\alpha f_\alpha\, g_\beta\right) \\
&= \lim_\beta \lim_\alpha \tilde{\pi}(f_\alpha g_\beta) = \lim_\alpha \tilde{\pi}(f_\alpha) \lim_\beta \tilde{\pi}(g_\beta) \\
&= \hat{\pi}(x)\hat{\pi}(y)
\end{aligned}$$

et de même pout $\hat{\pi}(x^*) = \hat{\pi}(x)^*$.

Le cas d'une W^*-représentation quelconque π se ramène au cas précédent; on peut supposer π non dégénérée et alors $\pi = \bigoplus \pi_i$ où chaque π_i est une W^*-représentation possédant un vecteur totalisateur; on a $\tilde{\pi} = \bigoplus \tilde{\pi}_i$ et en posant $\hat{\pi} = \bigoplus \hat{\pi}_i$ on obtient la W^*-représentation de M dans $\tilde{\mathcal{H}}$ cherchée.

L'unicité de prolongement $\hat{\pi}$ provient de la σ-densité de B dans M et de la σ-continuité de $\hat{\pi}$. Dans la suite, nous noterons simplement $\tilde{\pi}$ pour $\hat{\pi}$.

(2) Soit π une W^*-représentation injective de A. On peut supposer π non dégénérée; $\pi(A)$ est alors une algèbre de von Neumann dans $\mathcal{H}$. Soit $\varphi \in A_*^+$; comme π^{-1} est σ-continu on a $\varphi \circ \pi^{-1} \in \pi(A)_*^+$: il existe alors $\xi_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, \ldots$ tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\xi_i\|^2 < \infty \quad \text{et} \quad \varphi \circ \pi^{-1}(T) = \sum_{i=1}^{\infty} (T\xi_i \mid \xi_i)$$

pour tout $T \in \pi(A)$, donc

$$\varphi(a) = \sum_{i=1}^{\infty} (\pi(a)\xi_i \mid \xi_i)$$

pour tout $a \in A$. Passons à $\tilde{\varphi}$; on a $\tilde{\varphi} \in E = M_*$ et, pour tout $f \in B$,

$$\tilde{\varphi}(f) = \varphi(f(e)) = \sum_{i=1}^{\infty} (\pi(f(e))\xi_i \mid \xi_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(f)(\tilde{\xi}_i)_e \mid (\tilde{\xi}_i)_e),$$

la dernière égalité provenant de

$$(\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}_e \mid \tilde{\xi}_e) = \sum_{t \in G} ([\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}_e](t) \mid \tilde{\xi}_e(t)) = ([\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}_e](e) \mid \xi)$$

et de

$$[\tilde{\pi}(f)\tilde{\xi}_e](e) = \sum_{s \in G} \pi[\sigma_{e^{-1}}(f(s))]\tilde{\xi}_e(s^{-1}e) = \pi(f(e))\xi.$$

Quel que soit $g \in K(G, A)$, on a, pour tout $f \in B$,

$$\begin{aligned}\omega_{g,\varphi}(f) = \tilde{\varphi}(g^*fg) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(g^*fg)(\tilde{\xi}_i)_e \mid (\tilde{\xi}_i)_e) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(f)\tilde{\pi}(g)(\tilde{\xi}_i)_e \mid \tilde{\pi}(g)(\tilde{\xi}_i)_e) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(f)\tilde{\eta}_i \mid \tilde{\eta}_i)\end{aligned}$$

en posant $\tilde{\eta}_i = \tilde{\pi}(g)(\tilde{\xi}_i)_e$; on a $\sum_{i=1}^{\infty} \|\tilde{\eta}_i\|^2 < \infty$. Par σ-continuité on en déduit

$$\omega_{g,\varphi}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\pi}(x)\tilde{\eta}_i \mid \tilde{\eta}_i)$$

pour tout $x \in M$. L'injectivité de $\tilde{\pi}$ en découle: si $\tilde{\pi}(x) = 0$ on a $\omega_{g,\varphi}(x) = 0$ pour tout $g \in K(G, A)$ et tout $\varphi \in A_*^+$, donc $\omega(x) = 0$ pour tout $\omega \in E = M_*$, d'où $x = 0$. Le théorème est ainsi démontré.

Remarque I.1. Ce résultat montre que notre définition du produit croisé coïncide avec la définition classique lorsque A est une algèbre de von Neumann dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et $s \mapsto U_s$ une représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}$, telle que $\sigma_s(a) = U_s a U_s^*$ pour tout $s \in G$ et tout $a \in A$. En effet désignons par π la représentation identité de A dans $\mathcal{H}$; alors $M = W^*(A, G, \sigma)$ est isomorphe a $\tilde{\pi}(M)$, qui est l'algèbre de von Neumann dans $\tilde{\mathcal{H}}$ engendrée par $\tilde{\pi}(K(G, A))$. Soit W l'opérateur unitaire sur $\tilde{\mathcal{H}}$ défini par

$$(W\tilde{\xi})(s) = U_s\tilde{\xi}(s)$$

pour tout $\tilde{\xi} \in \tilde{\mathcal{H}}$ et tout $s \in G$. Par un simple calcul on obtient alors

$$\begin{aligned}&[W\tilde{\pi}(a)W^*\tilde{\xi}](s) = a\tilde{\xi}(s), \\ &[WV_tW^*\tilde{\xi}](s) = u_t \cdot \tilde{\xi}(t^{-1}s),\end{aligned}$$

ce qui montre que le produit croisé (classique) de A par G (selon la représentation U) est l'algèbre de von Neumann engendrée par $W\tilde{\pi}(K(G, A))W^*$ (Dixmier [2] p. 130, Suzuki [1]), donc $W\tilde{\pi}(M)W^*$, qui est bien isomorphe à M.

I.4. *Structure A-préhilbertienne sur $W^*(A, G, \sigma)$*

La représentation matricielle des éléments de $M = W^*(A, G, \sigma)$ (identifié au produit croisé habituel) est bien connue. On obtient un résultat plus intrinsèque, du même type que celui de Suzuki [1] (voir aussi Zeller–Meier [1], Remarque 8.17), en introduisant une topologie adéquate sur M. Les démonstrations sont laissées au lecteur.

On montre tout d'abord que l'application $\phi : B \to A$ se prolonge en une projection (toujours notée ϕ) de M sur A, σ et s-continue, positive et fidèle. Pour x, $y \in M$ on pose $(x \mid y) = \phi(xy^*)$; les propriétés de ce "produit scalaire à valeurs dans A" découlent des propriétés de ϕ:

(1) sesquilinéarité;

(2) $(ax \mid y) = a(x \mid y)$ et $(x \mid ay) = (x \mid y)a^*$ pour $x, y \in M$, $a \in A$;

(3) $(y \mid x) = (x \mid y)^*$ pour x, $y \in M$;

(4) $(x \mid x) \geqslant 0$ pour tout $x \in M$ et $(x \mid x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Pour tout $\varphi \in A_*^+$, nous noterons β_φ la semi-norme sur M définie par $\beta_\varphi(x) = \varphi(\phi(xx^*))^{1/2} = \tilde{\varphi}(xx^*)^{1/2}$ pour tout $x \in M$ (β_φ est la semi-norme $\alpha_{\tilde{\varphi}}^*$ de Sakai [1], page 20), puis τ la topologie d'espace localement convexe séparé définie sur M par les β_φ, $\varphi \in A_*^+$ (cf. D. Bures [1]). On montre facilement que pour tout $y \in M$, tout $a \in A$ et tout $s \in G$ les applications $x \in M \mapsto xy \in M$, $x \in M \mapsto ax \in M$ et $x \in M \mapsto u_s x \in M$ sont continues pour τ; l'application $(x, y) \in M \times M \mapsto (x \mid y) \in A$ est continue si M est muni de la topologie τ et A de la topologie $\sigma(A, A_*)$. Puis on obtient:

THÉORÈME I.2. (1) *Pour tout $x \in M$, la famille $\{(x \mid u_s)u_s\}_{s \in G}$ est sommable pour la topologie τ et $x = \sum_{s \in G} (x \mid u_s) u_s$.*

(2) *Si $x = \sum_{s \in G} a_s u_s$ avec $a_s \in A$ et sommabilité pour τ, alors $a_s = (x \mid u_s)$ pour tout $s \in G$.*

Identifiant alors x à l'application $s \in G \mapsto (x \mid u_s) \in A$ on voit que l'adjoint et le produit sont donnés par les mêmes égalités que dans $L^1(G, A)$ (dans l'égalité définissant le produit, la somme converge pour la topologie $\sigma(A, A_*)$).

II. Un Théorème de Prolongement et ses Applications

II.1. *Prolongement de certains isomorphismes.*

Soient M [resp. $\tilde{M}$] une W^*-algèbre, N [resp. $\tilde{N}$] une sous-W^*-algèbre de M [resp. $\tilde{M}$] contenant l'élément unité de M [resp. $\tilde{M}$], et ϕ [resp. $\tilde{\phi}$] une projection positive normale et fidèle de M sur N [resp. de $\tilde{M}$ sur $\tilde{N}$]. Soient M_0 [resp. $\tilde{M}_0$] une sous-algèbre involutive de M [resp. $\tilde{M}$], contenant N [resp. $\tilde{N}$] et σ-dense dans M [resp. $\tilde{M}$] et Λ_0 un isomorphisme (d'algèbres involutives) de M_0 sur $\tilde{M}_0$ qui vérifie les deux conditions suivantes:

(1) $\Lambda_0(N)=\tilde{N}$; on notera Λ la restriction de Λ_0 à N;

(2) $\tilde{\phi}\circ\Lambda_0=\Lambda\circ(\phi\mid M_0)$.

On peut illustrer cette situation par le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
M & \tilde{M} \\
\cup & \cup \\
M_0 \arrow[r, "\Lambda_0"] \arrow[d, "\phi"'] & \tilde{M}_0 \arrow[d, "\tilde{\phi}"] \\
N \arrow[r, "\Lambda"'] & \tilde{N}
\end{tikzcd}$$

THÉORÈME II.1. *Dans ces conditions Λ_0 se prolonge de manière unique en un isomorphisme $\bar{\Lambda}$ de M sur $\tilde{M}$, qui vérifie*

$$\tilde{\phi}\circ\bar{\Lambda}=\Lambda\circ\phi$$

Démonstration.

(a) Soit $\omega\in N_*^+$; on a $\omega\circ\phi\in M_*^+$. L'ensemble $I_\omega=\{x\in M\mid\omega\circ\phi(x^*x)=0\}$ est un idéal à gauche fermé pour la norme et M/I_ω est un espace préhilbertien pour le produit scalaire $(x_\omega\mid y_\omega)_\omega=\omega\circ\phi(y^*x)$ [x_ω désigne la classe de $x\in M$ dans M/I_ω]. Soit $\mathcal{H}_\omega$ l'espace de Hilbert complété de M/I_ω.

Montrons que $M_0/M_0\cap I_\omega$ est dense dans $\mathcal{H}_\omega$. Pour cela il suffit de voir que $M_0/M_0\cap I_\omega$ est dense dans M/I_ω; soient $x\in M$ et $\varepsilon>0$; comme M_0 est $s(M, M_*)$-dense dans M, il existe un $x_0\in M_0$ tel que $\omega\circ\phi[(x-x_0)^*(x-x_0)]\leq\varepsilon$; mais $\omega\circ\phi[(x-x_0)^*(x-x_0)]=\|x_\omega-(x_0)_\omega\|_\omega^2$ d'où l'affirmation.

D'autre part à ω correspond un $\tilde{\omega}\in\tilde{N}_*^+$ unique par la relation $\omega=\tilde{\omega}\circ\Lambda$ [$\Lambda: N\to\tilde{N}$ étant un isomorphisme est σ-bicontinu]. On construit comme ci-dessus les objets $\tilde{\omega}\circ\tilde{\phi}$, $\tilde{I}_{\tilde{\omega}}$, $\tilde{M}/\tilde{I}_{\tilde{\omega}}$ et $\mathcal{H}_{\tilde{\omega}}$. Montrons que $\Lambda_0(M_0\cap I_\omega)=\tilde{M}_0\cap\tilde{I}_{\tilde{\omega}}$. Pour tout $x\in M_0$ on a

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}\circ\tilde{\phi}[\Lambda_0(x)^*\Lambda_0(x)]&=\tilde{\omega}\circ\tilde{\phi}\circ\Lambda_0(x^*x)\\&=\omega\circ\Lambda^{-1}\circ\Lambda\circ\phi(x^*x)\\&=\omega\circ\phi(x^*x)\end{aligned}$$

d'où l'affirmation.

Donc Λ_0 induit une application linéaire biunivoque

$$u_\omega : M_0/M_0 \cap I_\omega \to \tilde{M}_0/\tilde{M}_0 \cap \tilde{I}_{\tilde{\omega}}$$

définie par $u_\omega(x_\omega) = (\Lambda_0(x))_{\tilde{\omega}}$. L'égalité ci-dessus s'écrit encore

$$\|u_\omega(x_\omega)\|_{\tilde{\omega}}^2 = \|x_\omega\|_\omega^2$$

donc u_ω se prolonge en une isométrie, notée encore u_ω, entre $\mathscr{H}_\omega$ et $\tilde{\mathscr{H}}_{\tilde{\omega}}$.

(b) Soit maintenant $\pi_\omega : M \to L(\mathscr{H}_\omega)$ la représentation associée à $\omega \circ \phi$ [i.e. pour tout $x \in M$, $\pi_\omega(x)$ est le prolongé à $\mathscr{H}_\omega$ de l'opérateur $y_\omega \mapsto (xy)_\omega$]; on construit de même $\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}} : \tilde{M} \to L(\tilde{\mathscr{H}}_{\tilde{\omega}})$. Montrons que, pour tout $x \in M_0$, on a

$$u_\omega \circ \pi_\omega(x) = \tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\Lambda_0(x)) \circ u_\omega \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{H}_\omega \arrow[r, "u_\omega"] \arrow[d, "\pi_\omega(x)"'] & \tilde{\mathscr{H}}_{\tilde{\omega}} \arrow[d, "\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\Lambda_0(x))"] \\ \mathscr{H}_\omega \arrow[r, "u_\omega"'] & \tilde{\mathscr{H}}_{\tilde{\omega}} \end{tikzcd}.$$

Il suffit de vérifier cette égalité sur $M_0/M_0 \cap I_\omega$; or, pour tout $y_\omega \in M_0/M_0 \cap I_\omega$, on a

$$[u_\omega \circ \pi_\omega(x)]y_\omega = u_\omega(xy)_\omega = (\Lambda_0(xy))_{\tilde{\omega}}$$

et

$$[\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\Lambda_0(x))u_\omega]y_\omega = \tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\Lambda_0(x))(\Lambda_0(y))_{\tilde{\omega}} = (\Lambda_0(x)\Lambda_0(y))_{\tilde{\omega}}$$

d'où l'égalité cherchée.

Donc l'isomorphisme spatial

$$T \in L(\mathscr{H}_\omega) \mapsto u_\omega \circ T \circ u_\omega^{-1} \in L(\tilde{\mathscr{H}}_{\tilde{\omega}})$$

envoie $\pi_\omega(M_0)$ sur $\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\tilde{M}_0)$. Comme π_ω et $\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}$ sont des W^*-représentations, $\pi_\omega(M_0)$ et $\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\tilde{M}_0)$ sont ultrafaiblement denses dans $\pi_\omega(M)$ et $\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\tilde{M})$ respectivement, et l'isomorphisme ci-dessus envoie $\pi_\omega(M)$ sur $\tilde{\pi}_{\tilde{\omega}}(\tilde{M})$.

(c) Considérons enfin l'espace de Hilbert $\mathscr{H} = \oplus \mathscr{H}_\omega (\omega \in N_*^+)$ et la W^*-représentation $\pi = \oplus \pi_\omega (\omega \in N_*^+)$ de M dans $L(\mathscr{H})$; $\pi(M)$ est une W^*-algèbre et comme ϕ est fidèle, π est un isomorphisme de M sur $\pi(M)$. On construit de même $\tilde{\mathscr{H}} = \oplus \tilde{\mathscr{H}}_{\tilde{\omega}}$ $(\omega \in N_*^+)$ et $\tilde{\pi} = \oplus \tilde{\pi}_{\tilde{\omega}} (\omega \in N_*^+)$ et on a le même résultat. Soit u l'isométrie de $\mathscr{H}$ sur $\tilde{\mathscr{H}}$ définie par $u(\xi_\omega) = (u_\omega \xi_\omega)$; il est clair que l'isomorphisme spatial

$$T \in L(\mathcal{H}) \mapsto u \circ T \circ u^{-1} \in L(\tilde{\mathcal{H}})$$

envoie $\pi(M)$ sur $\tilde{\pi}(\tilde{M})$. Alors en posant, pour tout $x \in M$,

$$\bar{\Lambda}(x) = \tilde{\pi}^{-1}(u\pi(x)u^{-1})$$

on a défini le prolongement cherché. L'unicité étant évidente, le théorème est démontré.

Le corollaire suivant est une généralisation d'un théorème de C. Pearcy et J. R. Ringrose [1] ainsi que de son extension par M. Enomoto et K. Tamaki [1].

COROLLAIRE. *Soient M une W^*-algèbre, N une sous-W^*-algèbre de M contenant l'élément unité de M et ϕ une projection positive normale et fidèle de M sur N. Soient A et B deux sous-algèbres involutives de M dont les éléments commutent avec ceux de N. Notons $\hat{A}$ et $\hat{B}$ les W^*-algèbres engendrées par A et N, B et N respectivement. Si un isomorphisme Ψ de A sur B vérifie la condition $\phi(\Psi(x)) = \phi(x)$ pour tout $x \in A$, il se prolonge en un isomorphisme $\hat{\Psi}$ de $\hat{A}$ sur $\hat{B}$ tel que*

(1) *$\hat{\Psi}(a) = \Psi(a)$ pour tout $a \in A$,*
(2) *$\hat{\Psi}(x) = x$ pour tout $x \in N$,*
(3) *$\phi(\hat{\Psi}(x)) = \phi(x)$ pour tout $x \in \hat{A}$,*
(4) *$\hat{\Psi}(\bar{A}) = \bar{B}[\bar{A}, \bar{B}$: σ-fermetures de A, $B]$.*

Démonstration. Notons A_0 [resp. B_0] les sous-algèbres involutives de M engendrées par A et N [resp. B et N]. Comme les éléments de A et N commutent, A_0 est l'ensemble des sommes finies $x_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$ avec $a_i \in A$ et $x_i \in N$. De même pour B_0. On aimerait prolonger Ψ à A_0 en posant

$$\Psi_0\left(x_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = x_0 + \sum_{i=1}^n \Psi(a_i) x_i.$$

Pour que cette relation définisse Ψ_0 il suffit que

$$x_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$$

soit équivalent à

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n} \Psi(a_i)x_i = 0.$$

Or en utilisant les propriétés algébriques de ϕ, on voit facilement que

$$\phi[(x_0 + \sum a_i x_i)^*(x_0 + \sum a_i x_i)] = \phi[(x_0 + \sum \Psi(a_i)x_i)^*(x_0 + \sum \Psi(a_i)x_i)]$$

ce qui, compte tenu de la fidélité de ϕ, établit l'équivalance ci-dessus; Ψ_0 est donc bien défini. Il est alors facile de voir que Ψ_0 est un isomorphisme d'algèbres involutives de A_0 sur B_0, que $\Psi_0(a) = \Psi(a)$ pour tout $a \in A$, $\Psi_0(x) = x$ pour tout $x \in N$ et $\phi \circ \Psi_0(x) = \phi(x)$ pour tout $x \in A_0$. Le théorème II.1. affirme alors qu'on peut prolonger Ψ_0 en un isomorphisme de $\hat{A}$ ($= \sigma$-fermeture de A_0) sur $\hat{B}$ ($= \sigma$-fermeture de B_0) qui vérifie (1) (2) (3) et (4).

Remarque II.1. Ajoutons aux hypothèses du théorème II.1. les conditions $N = \tilde{N}$ et $\Lambda = id_N$ et considérons sur M [resp. $\tilde{M}$] la structure "N-préhilbertienne" définie par ϕ [resp. $\tilde{\phi}$] (voir §I.4.). Λ_0 est alors un homomorphisme de N-modules et la condition $\tilde{\phi} \circ \Lambda_0 = \phi \mid M_0$ est équivalente à

$$(\Lambda_0(x) \mid \Lambda_0(y)) = (x \mid y)$$

pour x, $y \in M_0$ i.e. Λ_0 conserve le "produit scalaire".

II.2. *Application 1: Compléments sur le produit croisé.*

(1) Soit $M = W^*(A, G, \sigma)$ le produit croisé d'une W^*-algèbre A par un groupe G selon la représentation σ. Si H est un sous-groupe de G on peut considérer l'homomorphisme σ_H, restriction de σ à H, et le produit croisé $W^*(A, H, \sigma_H)$.

PROPOSITION II.1. *$W^*(A, H, \sigma_H)$ est canoniquement isomorphe à la sous-W^*-algèbre N de $M = W^*(A, G, \sigma)$ formée des $x \in M$ tels que $(x \mid u_s) = 0$ pour tout $s \in G \backslash H$.*

Démonstration. On voit facilement que N est une algèbre involutive (pour le produit et l'involution voir le § I.4.); elle est σ-fermée dans M car égale à l'intersection des ensembles σ-fermés $\{x \in M \mid (x \mid u_s) = 0\}$ pour $s \in G \backslash H$. D'autre part la sous-algèbre involutive N_0 des sommes finies $\sum_{s\in H} a_s u_s$, $a_s \in \Lambda$, est σ-dense dans N car si $x \in N$ et J est une partie finie de G, on a

$$\sum_{s\in J} (x \mid u_s) u_s = \sum_{s\in J\cap H} (x \mid u_s) u_s \in N_0$$

Soit maintenant, pour tout $s \in H$, $v_s : H \to A$ la fonction caractéristique de s. On sait, par construction du produit croisé, que l'algèbre involutive P_o des sommes finies $\sum_{s\in H} a_s v_s$ est σ-dense dans $W^*(A, H, \sigma_H)$. L'application $\Lambda_0 : \sum a_s v_s \in P_0 \mapsto \sum a_s u_s \in N_0$ est un isomorphisme d'algèbres involutives tels que $\Lambda_0 \mid A = id_A$. Les projections canoniques $\phi : W^*(A, G, \sigma) \to A$ et $\Psi : W^*(A, H, \sigma_H) \to A$ vérifient $\phi \circ \Lambda_0 = \Psi \mid P_0$. Par le théorème II.1. Λ_0 se prolonge de manière unique en un isomorphisme Λ de $W^*(A, H, \sigma_H)$ sur N.

(2) Notons M_0 l'algèbre involutive des sommes finies $\sum_{s\in G} a_s u_s$, $a_s \in A$; M_0 est σ-dense dans M. Soit α un automorphisme de G. L'application $\Lambda_0 : \sum a_s u_s \mapsto \sum a_s u_{\alpha(s)}$ est un automorphisme de M_0 (pour la structure d'algèbre involutive); on a $\Lambda_0 \mid A = id_A$ et $\phi \circ \Lambda_0 = \phi \mid M_0$, donc par le théorème II.1. Λ_0 se prolonge en un automorphisme Λ_α de M. Kallman [1] a étudié certaines propriétés de ces automorphismes dans le cas où $A = \mathbb{C}$ et G est un groupe ICC (i.e. les classes d'éléments conjugués des éléments $\neq e$ sont infinies). Nous généralisons ici un de ses résultats:

PROPOSITION II.2. *Supposons que A soit G-finie. Une condition suffisante pour que Λ_α opère quasi librement sur M est que, pour tout $s \in G$, l'ensemble $\{\alpha(t)^{-1} st \mid t \in G\}$ soit infini.*

Démonstration. Soit $x \in M$ *tel que* $xy = \Lambda_\alpha(y)x$ pour tout $y \in M$. Posons $(x \mid u_s) = a_s$ pour tout $s \in G$; en égalant les coefficients de u_s dans l'égalité $xu_t = \Lambda_\alpha(u_t)x = u_{\alpha(t)}x$, on obtient $a_s = \sigma_{\alpha(t)}(a_{\alpha(t)^{-1}st})$, d'où

$$(*) \qquad a_s a_s^* = \sigma_{\alpha(t)}[a_{\alpha(t)^{-1}st} a^*_{\alpha(t)^{-1}st}]$$

pour s, $t \in G$. Pour sommabilité pour la topologie $\sigma(A, A_*)$ de $\phi(xx^*) = \sum s_s a_s^*$ implique, pour tout $\varphi \in A_*^+$, la sommabilité de $\sum \varphi(a_s a_s^*)$. La condition "$\{\alpha(t^{-1})st \mid t \in G\}$ est infini pour tout $s \in G$" et la relation $(*)$ impliquent alors que $\varphi(a_s a_s^*) = 0$ pour tout $s \in G$ et toute forme G-invariante $\varphi \in A_*^+$. Comme A est G-finie on a $a_s = 0$ pour tout $s \in G$, donc $x = 0$ et Λ_α opère quasi librement.

Il n'est pas difficile de trouver un exemple qui montre qûe l'hypohtèse "A est G-finie" est essentielle. On peut étendre sans restriction un autre résultat de Kallman:

PROPOSITION II.2'. *Pour que Λ_α ne laisse que les éléments de A fixes il faut et il suffit que pour tout $s \in G$, $s \neq e$, l'ensemble $\{\alpha^n(s) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ soit infini.*

Démonstration. Soit $x \in M$; posons $a_s = (x \mid u_s)$ pour tout $s \in G$. Si $\Lambda_\alpha(x) = x$ on voit facilement que, pour tout $s \in G$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $a_s = a_{\alpha^n(s)}$, donc pour tout $\varphi \in A_*$, $\varphi[a_s a_s^*] = \varphi[a_{\alpha^n(s)} a_{\alpha^n(s)}^*]$; la sommabilité de $\sum \varphi(a_s a_s^*)$ montre alors que la condition est suffisante. Inversément s'il existe $s \neq e$ tel que $F = \{\alpha^n(s) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ soit fini, alors l'élément $x = \sum_{t \in F} u_t \in M$ vérifie $x \notin A$ et $\Lambda_\alpha(x) = x$.

II.3. *Application 2: Sous-algèbre des invariants par un groupe d'automorphismes.*

Soient M une W^*-algèbre, G un groupe discret et $\sigma : s \in G \mapsto \sigma_s \in \operatorname{Aut} M$ un homomorphisme. En appliquant le théorème I.1. on voit qu'il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, une W^*-représentation (non dégénérée) fidèle π de M dans $\mathcal{H}$ et une représentation unitaire V de G dans $\mathcal{H}$ tels que, pour tout $s \in G$ et tout $x \in M$, on ait

$$\pi(\sigma_s(x)) = V_s \pi(x) V_s^*.$$

Dans ce paragraphe, pour simplifier les notations, nous identifierons M et $\pi(M)$ de sorte que nous sommes placés dans les conditions suivantes: *M est une algèbre de von Neumann dans $\mathcal{H}$ et V une représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}$ telle que pour tout $s \in G$, $V_s M V_s^* = M$; nous posons $\sigma_s(x) = V_s x V_s^*$ pour tout $s \in G$ et $V_G = \{V_s \mid s \in G\}$.*

Soit $N = M^G$ la sous-algèbre de von Neumann de M formée des éléments $x \in M$ qui sont laissés fixes par G; on a $N = M \cap V_G'$ (V_G' = commutant de V_G dans $L(\mathcal{H})$), donc N' est l'algèbre de von Neumann engendrée par M' et V_G. Constatons d'autre part que G opère par automorphismes dans M'; en effet, si $x' \in M'$ et $s \in G$ on a, pour tout $x \in M$,

$$\begin{aligned} V_s x' V_s^* x &= V_s x' \sigma_{s^{-1}}(x) V_s^* = V_s \sigma_{s^{-1}}(x) x' V_s^* \\ &= x V_s x' V_s^*, \end{aligned}$$

donc $V_s x' V_s^* \in M'$. Posons $\sigma_s'(x') = V_s x' V_s^*$; σ' est un homomorphisme de G dans

Aut (M'). On voit donc que

$$(N')_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i' V_{s_i} \mid x_i' \in M' \right\}$$

est une algèbre involutive dont la fermeture faible est N'. Nous allons chercher à identifier N' et le produit croisé $W^*(M', G, \sigma')$. Nous aurons besoin de la remarque suivante:

LEMME. *Si l'action σ de G dans M est quasi libre, il en est de même de l'action σ' de G dans M'.*

Démonstration. Soient $s \neq e$ et $x' \in M'$ tel que $x'y' = \sigma_s'(y')x'$ pour tout $y' \in M'$; il faut voir que $x' = 0$. On a $x'y' = V_s y' V_s^* x'$, donc $V_s^* x' y' = y' V_s^* x'$, pour tout $y' \in M'$; d'où $V_s^* x' \in M$ et

$$V_s^* x' y = V_s^* y x' = \sigma_{s^{-1}}(y) V_s^* x'$$

pour tout $y \in M$. Comme l'action σ de G dans M est quasi libre on a $V_s^* x' = 0$, $x' = 0$.

Nous traiterons d'abord le cas particulier où G est un groupe fini.

1^er^ *cas. G est un groupe fini.*

Lorsque G est fini on a $W^*(M', G, \sigma') = K(G, M')$ et tout élément s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{s \in G} x_s' u_s$ (somme finie). On définit donc une application

$$\Lambda : W^*(M', G, \sigma') \to N'$$

en posant $\Lambda(\sum x_s' u_s) = \sum x_s' V_s$. Comme les relations qui lient l'action σ' de G dans M' et les représentations unitaires u et V sont les mêmes [i.e.

$$\sigma_s'(x') = u_s x' u_s^* = V_s x' V_s^*$$

pour tout $x' \in M'$ et tout $s \in G$] on voit que Λ est un homomorphisme d'algèbres involutives. Montrons que Λ est σ-continu: soient π la représentation identité de M' dans $\mathcal{H}$ et $\tilde{\pi}$ la représentation de $W^*(M', G, \sigma')$ dans $\tilde{\mathcal{H}} = L^2(G, \mathcal{H})$ qui lui est associée; l'image $P = \tilde{\pi}(W^*(M', G, \sigma'))$ est une algèbre de von

Neumann et $\tilde{\pi}$ un isomorphisme (théorème I.1.); il nous suffit donc de démontrer que l'homomorphisme $\Lambda \circ \tilde{\pi}^{-1}: P \to N'$ est ultrafaiblement continu; étant donné ξ, $\eta \in \mathcal{H}$, définissons $\tilde{\xi}$, $\hat{\eta} \in \tilde{\mathcal{H}}$ par

$$\tilde{\xi}(s) = \begin{cases} \xi & \text{si} \quad s = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \qquad \hat{\eta}(s) = V_s^* \eta \qquad \text{pour tout } s \in G;$$

si $y = \sum x'_s u_s \in W^*(M', G, \sigma')$, on a, pour tout $t \in G$,

$$(\tilde{\pi}(y)\tilde{\xi})(t) = \sum_s \sigma'_{t^{-1}}(x'_s)\tilde{\xi}(s^{-1}t) = \sigma'_{t^{-1}}(x'_t)\xi$$

et

$$\begin{aligned}(\tilde{\pi}(y)\tilde{\xi} \mid \hat{\eta}) &= \sum_t (\sigma'_{t^{-1}}(x'_t)\xi \mid V_t^* \eta) \\ &= \sum_t (x'_t V_t \xi \mid \eta) \\ &= (\Lambda(y)\xi \mid \eta),\end{aligned}$$

d'où on déduit la continuité ultrafailble de Λ. On voit ainsi que Λ est surjectif (Λ(P) est une algèbre de von Neumann qui contient $(N')_0$) et que son noyau est un idéal bilatère σ-fermé. On a démontré:

PROPOSITION II.3. *Λ est un homomorphisme σ-continu de $W^*(M', G, \sigma')$ sur N'; il existe un projecteur p du centre de $W^*(M', G, \sigma')$ tel que Λ induise un isomorphisme de $pW^*(M', G, \sigma')$ sur N'.*

COROLLAIRE. *Soient M un facteur et G un groupe fini opérant par automorphismes extérieurs dans M. Alors $N = M^G$ est un facteur, $M \cap N' = \mathbb{C}1$ et toute sous-W^*-algèbre L telle que $N \subset L \subset M$ est un facteur. Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de G tels que $M^{H_1} = M^{H_2}$ alors $H_1 = H_2$.*

Démonstration. En effet, dans ces conditions $W^*(M', G, \sigma')$ est un facteur et Λ un isomorphisme de $W^*(M', G, \sigma')$ sur N'; les deux premières affirmations découlent alors de résultats connus. Enfin L est un facteur car $L \cap L' \subset M \cap N' = \mathbb{C}1$ et si H est un sous-groupe de G, $(M^H)'$ est l'image par Λ de la sous-algèbre $\{y \in W^*(M', G, \sigma') \mid (y \mid u_s) = 0 \text{ pour tout } s \notin H\}$ isomorphe à $W^*(M', H, \sigma'_H)$.

Remarque II.2. Lorsque M est un facteur II_1, ce corollaire se trouve dans un article de M. Nakamura et Z. Takeda [1], dont nous avons ici quelque peu généralisé la méthode. En utilisant des propriétés attachées plus étroitement aux facteurs II_1 (la trace finie ou la simplicité algébrique) les auteurs montrent que toute sous-algèbre de M contenant N est de la forme M^H où H est un sous-groupe de G, établissant ainsi une correspondance galoisienne entre les sous-groupes de G et les sous-algèbres de M contenant N. Nous n'avons pas pu établir, pour un facteur quelconque, la surjectivité de l'application $H \mapsto M^H$.

Remarque II.3. Les hypothèses faites par Nakamura et Takeda [1] leur interdisaient de considérer des groupes G infinis. Nous pouvons affaiblir ces hypothèses et établir un isomorphisme Λ entre N' et $W^*(M', G, \sigma')$ sans restriction sur G.

2^ème^ cas: G groupe quelconque.

Nous ne supposerons plus que G est fini mais nous ferons les deux hypothèses suivantes:

(h_1): G opère quasi librement (par σ) dans M;

(h_2): il existe une projection positive normale fidèle Ψ de N' sur M'.

Considérons sur $W^*(M', G, \sigma')$ et sur N' les structures "M'-préhilbertiennes" définies par ϕ et Ψ respectivement (ϕ désigne la projection positive normale fidèle de $W^*(M', G, \sigma')$ sur M'; voir § I.4.); nous noterons τ_ϕ et τ_Ψ les topologies associées. Notons que $\{V_s\}$ est un système orthonormé dans N'; en effet, pour tout $x' \in M'$ et tout $s \in G$, $s \neq e$, on a

$$\Psi(V_s)x' = \Psi(V_s x') = \Psi(\sigma_s(x')V_s) = \sigma_s(x')\Psi(V_s)$$

d'où $\Psi(V_s) = 0$ à cause de l'hypothèse (h_1); on a donc $(V_s \mid V_t) = \Psi(V_s V_t^*) = \Psi(V_{st^{-1}}) = 0$ si $s \neq t$ et $(V_s \mid V_s) = \Psi(1) = 1$. Considérons les sous-algèbres involutives σ-denses $K(G, M')$ et $(N')_0$ de $W^*(M', G, \sigma')$ et N' respectivement; on définit un homomorphisme d'algèbres involutives Λ_0 de $K(G, M')$ sur $(N')_0$ en posant

$$\Lambda_0\Big(\sum_{s \in G} x'_s u_s\Big) = \sum_{s \in G} x'_s V_s \qquad \text{(somme finie)}$$

on voit immédiatement que $\Lambda_0 \mid M' = id_{M'}$ et $\Psi \circ \Lambda_0 = \phi \mid K(G, M')$ d'où, pour y_1, $y_2 \in K(G, M')$, l'égalité

$$(\Lambda_0(y_1) \mid \Lambda_0(y_2)) = (y_1 \mid y_2);$$

Λ_0 est donc injectif et se prolonge de façon unique en un isomorphisme Λ de $W^*(M', G, \sigma')$ sur N', qui vérifie $\Psi \circ \Lambda = \phi$. On a démontré:

PROPOSITION II.4. *Avec les hypothèses* (h_1) *et* (h_2) *ci-dessus il existe un isomorphisme*

$$\Lambda : W^*(M', G, \sigma') \to N'$$

tel que

$$\Lambda\Big(\sum_{s\in G} x'_s u_s\Big) = \sum_{s\in G} x'_s V_s$$

(les sommes convergent pour les topologies τ_ϕ et τ_ψ respectivement).

On en déduit, comme pour la proposition II.3., le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Dans les conditions ci-dessus on a $M \cap N' = Z(M)$, $Z(N) = Z(M)^G$ donc N est un facteur si et seulement si G opère ergodiquement dans $Z(M)$. Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes de G tels que $M^{H_1} = M^{H_2}$ alors $H_1 = H_2$.*

III. Une Correspondance Galoisienne

Dans toute la suite M désignera une W^*-algèbre, Z le centre de M et G un groupe fini d'automorphismes de M. Rappelons que G opère presque librement dans M si, pour tout $\sigma \in G$, $\sigma \neq 1$, et tout projecteur $p \in Z$, $p \neq 0$, il existe un projecteur $q \in Z$ tel que $0 < q \leq p$ et $\sigma(q)q = 0$.

DÉFINITION. Une sous-W^*-algèbre L de M sera dite *G-libre* si pour tout $\sigma \in G$, ou bien $\sigma \mid L = 1$, ou bien, pour tout projecteur $p \in Z \cap L$, $p \neq 0$, il existe un projecteur $q \in Z \cap L$ tel que $0 < q \leq p$ et $\sigma(q)q = 0$.

PROPOSITION III.1. *Soit L une sous-W^*-algèbre G-libre de M. Il existe une famille $\{q_i\}_{i\in I}$ de projecteurs de $Z \cap L$, orthogonaux deux à deux et de somme* 1, *telle que, si $\sigma \in G$ et $\sigma \mid L \neq 1$, on ait $\sigma(q_i)q_i = 0$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration. Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ les éléments de G dont la restriction à L n'est pas l'identité. Il suffit de voir que tout projecteur $p \neq 0$ de $Z \cap L$ majore un projecteur $q \neq 0$ de $Z \cap L$ tel que $\sigma_i(q)q = 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$.Or, L étant

G-libre, il existe une suite de projecteurs $\neq 0$ de $Z \cap L$ telle que $p \geqslant f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_s > 0$ et $\sigma_i(f_i)f_i = 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, s$. Le projecteur $q = f_s$ répond alors à la question car $\sigma_i(q)q = \sigma_i(f_i q)f_i q = \sigma_i(f_i)f_i\ \sigma_i(q)q = 0$.

COROLLAIRE. *Si G opère presque librement dans M, il existe une famille $\{p_i\}_{i \in I}$ de projecteurs de Z, orthogonaux deux à deux et de somme* 1, *telle que, pour tout $i \in I$ on ait*

$$\sigma(p_i)p_i = \begin{cases} p_i & si \quad \sigma = 1 \\ 0 & si \quad \sigma \neq 1 \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le "théorème fondamental de la théorie de Galois"; nous noterons $N = M^G$ la sous-W^*-algèbre des points fixes de M par G.

THÉORÈME III.1. *Supposons que G opère presque librement dans M. Il y a correspondance biunivoque entre les sous-groupes H de G et les sous-W^*-algèbres G-libres L de M qui contiennent N. Cette correspondance est donnée par*

$$H \mapsto M^H = \{x \in M \mid \sigma(x) = x,\ \forall \sigma \in H\}$$

$$L \mapsto G_L = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x,\ \forall x \in L\}.$$

Démonstration.

(a) Soit L une sous-W^*-algèbre G-libre de M, contenant N. Posons $H = G_L = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x,\ \forall x \in L\}$; H est un sous-groupe de G. Montrons que $M^H = L$. Il est clair que $L \subset M^H$. Comme L est G-libre il existe (Proposition III.1.) une famille $\{q_j\}_{j \in J}$ de projecteurs de $Z \cap L$, orthogonaux deux à deux et de somme 1, telle que,

$$\sigma(q_j)q_j = \begin{cases} q_j & \text{si} \quad \sigma \in H \\ 0 & \text{si} \quad \sigma \notin H \end{cases}$$

pour tout $j \in J$. Soit $x \in M^H$, on a $x = 1/|H| \sum_{i \in H} \tau(x)$, où $|H|$ désigne le nombre d'éléments de H. Donc, pour tout $j \in J$, on a

$$xq_j = \frac{1}{|H|} \sum_{\tau \in H} \tau(x)q_j = \frac{1}{|H|} \sum_{\tau \in H} \tau(x)\tau(q_j)q_j$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in G} \sigma(x)\sigma(q_j)q_j = \frac{1}{|H|} \sum_{\sigma \in G} \sigma(xq_j)q_j.$$

Mais $1/|H|\sum_{\sigma\in G}\sigma(xq_j)$ appartient à $N = M^G$, donc $xq_j \in L$. Comme $x = \sum_{j\in J} xq_j$ on a $x \in L$. Donc $M^H \subset L$.

(b) Soit H un sous-groupe de G. Posons $L = M^H$ et $H' = G_L = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x, \forall x \in L\}$. Montrons que $H = H'$ et que L est G-libre. Tout d'abord il est clair que $H \subset H'$ et que $M^{H'} = M^H = L$. Considérons les deux applications suivantes:

$$\phi : M \to M^H = L \text{ définie par } \phi(x) = \frac{1}{|H|}\sum_{\tau\in H}\tau(x)$$

et

$$\phi' : M \to M^{H'} = L \text{ définie par } \phi'(x) = \frac{1}{|H'|}\sum_{\rho\in H'}\rho(x).$$

ϕ [resp. ϕ'] est une projection H-invariante [resp. H'-invariante] de M sur L. Comme $H \subset H'$, ϕ' est H-invariante et on a, pour tout $x \in M$,

$$\phi'(\phi(x)) = \phi'\left(\frac{1}{|H|}\sum_{\tau\in H}\tau(x)\right) = \phi'(x).$$

D'autre part $\phi'(\phi(x)) = \phi(x)$ car $\phi(x) \in L$, donc on a $\phi = \phi'$. Soit p un des projecteurs de la famille $\{p_i\}$ définie dans le corollaire de la proposition III.1; on a

$$\phi(p)p = \phi'(p)p;$$

mais d'autre part:

$$\phi(p)p = \frac{1}{|H|}\sum_{\tau\in H}\tau(p)p = \frac{1}{|H|}p,$$

$$\phi'(p)p = \frac{1}{|H'|}\sum_{\rho\in H'}\rho(p)p = \frac{1}{|H'|}p,$$

d'où $|H| = |H'|$ et donc $H = H'$.

Montrons maintenant que L est G-libre. Soit $\{p_i\}_{i\in I}$ la famille de projecteurs de Z définie dans le corollaire de la proposition III.1. Posons, pour tout $i \in I$,

$$p_i' = \sum_{\tau\in H}\tau(p_i);$$

p'_i appartient à $Z \cap M^H = Z \cap L$ et comme

$$\sigma_1(p_i)\sigma_2(p_i) = \sigma_2[\sigma_2^{-1}\sigma_1(p_i)p_i] = 0$$

si $\sigma_1, \sigma_2 \in G$, $\sigma_1 \neq \sigma_2$, on voit que p'_i est un projecteur. Pour tout $\sigma \in G$, on a

$$\sigma(p'_i)p'_i = \sum_{\tau \in H} \sigma\tau(p_i) \sum_{\rho \in H} \rho(p_i)$$

$$= \sum_{\tau, \rho \in H} \sigma\tau(p_i)\rho(p_i);$$

mais $\sigma\tau(p_i)\rho(p_i) = 0$ sauf si $\sigma\tau = \rho$. On voit donc que

$$\sigma(p'_i)p'_i = \begin{cases} p'_i & \text{si} \quad \sigma \in H \\ 0 & \text{si} \quad \sigma \notin H \end{cases}.$$

Soient $\sigma \in G$ tel que $\sigma \mid L \neq 1$ et $e \in Z \cap L$ un projecteur non nul. Il faut trouver un projecteur $f \in Z \cap L$ tel que $0 < f \leq e$ et $\sigma(f)f = 0$. Comme $e \neq 0$, il existe $i \in I$ tel que $ep_i \neq 0$; on a aussi $ep'_i \neq 0$ car $p_i \leq p'_i$. Posons $f = ep'_i$; f est un projecteur de $Z \cap L$, $0 < f \leq e$ et

$$\sigma(f)f = \sigma(ep'_i)ep'_i = \sigma(e)e\sigma(p'_i)p'_i = 0$$

car $\sigma \mid L \neq 1$ est équivalent à $\sigma \notin H$. Ainsi L est G-libre et le théorème est démontré.

Le cas des sous-groupes distingués est réglé par la proposition suivante, dont la démonstration est facile:

PROPOSITION III.2. *Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème* III.1. *Pour qu'un sous-groupe H de G soit distingué il faut et il suffit que $L = M^H$ soit globalement fixe par G. Alors G/H peut être considéré comme un groupe d'automorphismes de L; G/H opère presque librement sur L et $L^{G/H} = N$.*

Remarque. Les résultats de ce chapitre restent valables si on prend pour M une *AW^*-algèbre.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] BURES, D. *Abelian subalgebras of von Neumann algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. *110* (1971).
[1] CHASE, S. U., HARRISON, D. K. and ROSENBERG, A. *Galois theory and Galois cohomology of commutative rings*, Mem. Amer. Math. Soc. *52* (1965).

[1] ENOMOTO, M. and TAMAKI, K. *On a theorem of Pearcy and Ringrose*, Math. Japon. *18* (1973) 253–256.
[1] DIXMIER, J. Les C^*-algebres et leurs représentations. Gauthier-Villars, Paris, 1969.
[2] —— Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
[1] GUICHARDET, A. Systèmes dynamiques non commutatifs. Collection astérisque No. 13–14, Paris, 1974.
[1] KALLMAN, R. *A generalisation of free action*, Duke Math. J. *36* (1969) 781–789.
[1] NAKAMURA, M. and TAKEDA, Z. *On the fundamental theorem of the Galois theory of finite factors*, Proc. Japan Acad. *36* (1960) 313–318.
[2] —— *On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras*, Proc. Japan Acad. *34* (1958) 489–494.
[1] PEARCY, C. and RINGROSE, J. R. *Trace-preserving isomorphisms in finite operator algebras*, Amer. J. Math. *90* (1968) 444–455.
[1] SAKAI, S. C^*-algebras and W^*-algebras. Springer, Berlin, 1971.
[1] SUZUKI, N. *Crossed products of rings of operators.* Tôhoku Math. J. *11* (1959), 113–124.
[1] ZELLER-MEIER, G. *Produits croisés d'une C^*-algèbre par un groupe d'automorphismes.* J. Math. pures et appl. *47* (1968) 101–239.

Institut de mathématiques
Université de Neuchâtel
Chantemerle 20
CH-2000 *Neuchâtel*

Reçu en septembre 1975