Werk

Titel: Über ein Typenproblem.

Autor: Blatter, Christian

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?358147735_0037|log19

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über ein Typenproblem[1])

von CHRISTIAN BLATTER, Basel

1. Einleitung und Ergebnisse

1.1. Es bezeichne S den Halbstreifen

$$S = \{z = x + iy \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$

der z-Ebene, und es sei $\mathfrak{T}$ die Gesamtheit der Funktionen

$$T(x) = x + t(x) \qquad (x \geqslant 0)$$

mit den Eigenschaften

$$t(x) > 0,\ T'(x) = 1 + t'(x) > 0,\ T(x) \in C^2 \ (x \geqslant 0)\,.$$

Jedes $T \in \mathfrak{T}$ ist insbesondere ein Homöomorphismus von $\mathbf{R}^+ = [0, \infty[$ mit $[T(0), \infty[$.

1.2. Führt man in S für ein $T \in \mathfrak{T}$ die Äquivalenzrelation («*Verheftungsvorschrift*»)

$$z = x \sim z = T(x) + i \qquad (x \geqslant 0) \tag{1.1}$$

ein, so ist der Faktorraum S_T nach dem Satz über implizite Funktionen eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und besitzt sogar fast überall eine konforme Struktur, in den Ausnahmepunkten jedenfalls noch eine Winkelmessung. Damit läßt sich S_T in natürlicher Weise zu einer RIEMANNschen Fläche machen[2]), die wir wiederum mit S_T bezeichnen. Diese Fläche ist ersichtlich zweifach zusammenhängend und besitzt eine Randkomponente, die aus den Segmenten $z = iy$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$ und $z = x + i$ $(0 \leqslant x \leqslant T(0))$ besteht.

Nach dem Uniformisierungssatz gibt es daher einen Kreisring

$$W = \{w = u + iv \mid 1 < |w| < e^{2\pi M} \leqslant \infty\}\,, \tag{1.2}$$

der eineindeutig und konform auf das Innere von S_T bezogen werden kann. Wir nennen die Funktion T *hyperbolisch*, falls $M < \infty$, und *parabolisch*, falls $M = \infty$. Die Menge $\mathfrak{T}$ zerfällt hiernach in zwei disjunkte Teilmengen, die wir beziehungsweise mit $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{P}$ bezeichnen.

1.3. Es stellt sich damit das Problem, für ein vorgelegtes $T \in \mathfrak{T}$ zu entscheiden, ob es zu $\mathfrak{H}$ oder zu $\mathfrak{P}$ gehört. Diese Frage wurde schon verschiedentlich untersucht[3]); wir notieren hier den im wesentlichen auf NEVANLINNA [5] zurückgehenden

---

[1]) Diese Untersuchungen wurden ermöglicht durch ein Nachwuchs-Stipendium des Schweizerischen Nationalfonds.

[2]) Vgl. VOLKOVYSKIJ [8], ferner PFLUGER [6].

[3]) Siehe das Literaturverzeichnis am Schluß dieser Arbeit.

Satz 1. Ist $T \in \mathsf{T}$ und divergiert das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2(x)} \frac{dx + d(T(x))}{1 + |\log T'(x)|},$$

so ist $T \in \mathsf{P}$.

Allgemeine, das heißt auf jedes $T \in \mathsf{T}$ anwendbare Kriterien für $T \in \mathsf{H}$ anzugeben, erscheint schwieriger; auf ein derartiges Kriterium von JENKINS [4] werden wir zurückkommen. Insbesondere ist es ein ungelöstes Problem, ob ein $T \in \mathsf{H}$ mit beschränktem $t(x)$ existiert; Satz 1 zeigt, daß hiezu jedenfalls ein sehr pathologisches Verhalten von $T'(x)$ notwendig ist.

1.4. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich nun um Kriterien, die sich zwar nur auf eine wohlbestimmte Teilmenge $\tilde{\mathsf{T}} \subset \mathsf{T}$ beziehen, dafür aber scharf sind, das heißt für jedes $T \in \tilde{\mathsf{T}}$ effektiv entscheiden, ob T hyperbolisch oder parabolisch ist. Wir beweisen nämlich

Satz A. Ist $T \in \mathsf{T}$ und $t'(x)$ von beschränkter totaler Variation, so ist $T \in \mathsf{H}$, wenn das Integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{t^2(x)}$$

konvergiert, und $T \in \mathsf{P}$, wenn dieses Integral divergiert.

Hierin ist ein Ergebnis von VOLKOVYSKIJ [8] — WIRTH [9] reichlich enthalten[4]). Als Beispiel diene der

Satz 2. Ist $0 < \sigma < 1$ und gelten für weitere Konstanten α, β die Ungleichungen

$$0 < \alpha < \sigma < \alpha + \beta < \alpha + 2\beta < 1,$$

so ist

$$T\colon\ t(x) = x^\sigma + x^\alpha \sin(x^\beta) \quad (x \geqslant 1) \tag{1.3}$$

hyperbolisch, wenn $\sigma > \frac{1}{2}$, und parabolisch, wenn $\sigma \leqslant \frac{1}{2}$.

Beweis. Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$|t''(x)| = O(x^{\alpha+2\beta-2})$$

wegen $\alpha + 2\beta < 1$ ist daher $t'(x)$ von beschränkter totaler Variation. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus Satz A; denn es ist $x^\alpha = o(x^\sigma)$.

Bemerkung. Das Beispiel (1.3) fällt weder unter das Vergleichskriterium von BLANC [2], da die «Störfunktion» $x^\alpha \sin(x^\beta)$ unbeschränkt ist, noch unter das angeführte Kriterium von VOLKOVYSKIJ-WIRTH; denn

$$t'(x) = \beta x^{\alpha+\beta-1}(\cos(x^\beta) + o(1))$$

ändert unendlich oft das Vorzeichen.

[4]) Es wird dort, ceteris paribus, vorausgesetzt, daß $t'(x) > 0$ monoton fallend nach 0 konvergiert.

1.5. Zur Herleitung von Satz A betrachten wir die Gesamtheit T^* der in beiden Richtungen zweimal stetig differenzierbaren Homöomorphismen

$$x = \tau(\nu) \qquad (\nu \geqslant 0)$$

von $\mathbf{R}_\nu^+$ mit $\mathbf{R}_x^+$. Jedes $\tau \in T^*$ definiert vermöge

$$z = \tau(\nu) \sim z = \tau(\nu + 1) + i \qquad (\nu \geqslant 0) \tag{1.4}$$

eine Verheftungsvorschrift für den Halbstreifen S. Bezeichnet

$$\nu = \tau^*(x),\ \tau^* \in C^2,$$

die zu $\tau(\nu)$ inverse Funktion, so ist offenbar (1.4) gleichwertig mit der Relation

$$z = x \sim z = \tau(\tau^*(x) + 1) + i \qquad (x \geqslant 0)\,, \tag{1.5}$$

die nunmehr die Gestalt (1.1) besitzt; man bemerkt, daß

$$\tau(\tau^*(x) + 1) \in T\,.$$

Somit legt jedes $\tau \in T^*$ ein wohlbestimmtes $T \in \mathsf{T}$, nämlich

$$T(x) = \tau(\tau^*(x) + 1) \tag{1.6}$$

und damit vermöge (1.5) ein Ringgebiet S_T im Sinne von 1.2 fest. Daß umgekehrt jedes S_T, $T \in \mathsf{T}$, auf diese Weise erhalten werden kann, ergibt sich aus dem folgenden

Lemma. Jedes $T \in \mathsf{T}$ läßt sich mit Hilfe eines explizit angebbaren $\tau \in T^*$ in der Form (1.6) darstellen.

1.6. Hiernach bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir nun Kriterien für Verheftungsvorschriften der Gestalt (1.4) angeben. Dabei bezeichnet immer T die zu dem betrachteten $\tau \in T^*$ gehörige Funktion (1.6). Wir beweisen:

Satz 3. Ist $\tau \in T^*$ und divergiert das Integral

$$J = \int_0^\infty \frac{d\nu}{\int_0^1 (\tau'(\nu + \eta) + 1/\tau'(\nu + \eta))\, d\eta}\,, \tag{1.7}$$

so ist $T \in \mathsf{P}$.

Satz 4. Ist $\tau \in T^*$ und konvergiert das Integral

$$\int_0^\infty \frac{d\nu}{\tau'(\nu)}\,, \tag{1.8}$$

so ist $T \in \mathsf{H}$.

1.7. Aus Satz 3 und Satz 4 folgt nun durch eine einfache Überlegung (Hilfssatz 5) das folgende scharfe Kriterium:

Satz B. Ist $\tau \in T^*$ und gilt für ein $\varepsilon > 0$:

$$\frac{\tau'(\nu + \eta)}{\tau'(\nu)} \geqq \varepsilon \quad (0 \leqq \eta \leqq 1,\ \nu \geqq 0)\,, \tag{1.9}$$

so ist $T \in H$, wenn das Integral (1.8) konvergiert, und $T \in P$, wenn dieses Integral divergiert.

Bemerkung. Die Bedingung (1.9) ist insbesondere erfüllt, wenn

$$\inf_{\nu \geqq 0} \frac{\tau''(\nu)}{\tau'(\nu)} > -\infty\,.$$

Da die in Satz B zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen $\tau \in T^*$ einer recht schwachen Bedingung genügen müssen, läßt sich Satz A mit Hilfe eines ziemlich groben Übertragungsverfahrens aus Satz B gewinnen; dabei wird die Darstellung eines zu vorgegebenem $T \in T$ gehörigen $\tau \in T^*$ wesentlich benutzt.

1.8. Die den Beweis von Satz 4 vorbereitenden Hilfssätze liefern ferner den

Satz 5. Ist $\tau \in T^*$ und gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\tau'(\nu + j)} \leqq C \quad (\nu \in A) \tag{1.10}$$

auf einer Menge $A \subset [0, 1]$ positiven Maßes, so ist $T \in H$.

Dies ist eine andere Formulierung des Kriteriums von JENKINS [4], das anstelle von $\tau(\nu)$ die Iterierten T^n der Funktion $T(x)$ benutzt. Aus Satz 5 folgt insbesondere

Satz 6. Ist $T \in T$ und

$$t'(x) \geqq \varepsilon > 0 \quad (x \geqq x_0)\,, \tag{1.11}$$

so ist $T \in H$.

Beweis. Nach dem Lemma gibt es ein $\tau \in T^*$, so daß (1.6) gilt. Ersetzt man in (1.6) x wieder durch $\tau(\nu)$, so folgt

$$T(\tau(\nu)) = \tau(\nu + 1)$$

und hieraus

$$T'(\tau(\nu))\,\tau'(\nu) = \tau'(\nu + 1)\,,$$

wegen (1.11) daher

$$\frac{\tau'(\nu + 1)}{\tau'(\nu)} = T'(\tau(\nu)) \geqq 1 + \varepsilon \quad (\nu \geqq \nu_0)\,.$$

Die Reihe (1.10) konvergiert somit gleichmäßig in $[0, 1]$.

Satz 6 enthält reichlich ein Kriterium von BLANC [1].

2. Beweis der Sätze 1 und 3

2.1. Hilfssatz 1 (NEVANLINNA [5]). Sei R ein Ringgebiet[5]) mit lokalen konformen Koordinaten $z = x + iy$, und es sei die Zyklenschar $\Gamma = \{\gamma_\nu\}_{0<\nu<\infty}$ schlicht und nichttrivial in R eingebettet. Die γ_ν, $0 < \nu < \infty$, seien so auf einen Parameter η bezogen,

$$\gamma_\nu\colon\ z = x(\nu, \eta) + iy(\nu, \eta) \qquad (0 \leqslant \eta \leqslant 1)\,,$$

daß die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\nu, \eta)}$$

fast überall existiert und positiv ist. Dann gilt für den Modul M von R:

$$M \geqslant \int_0^\infty \frac{d\nu}{\int_0^1 \left|\frac{\partial z}{\partial \eta}\right|^2 \frac{d\eta}{\Delta}}\,. \tag{2.1}$$

2.2. *Beweis.* Der Ausdruck (2.1) ist ersichtlich gegen Änderung der lokalen konformen Koordinaten z invariant. Wir können daher annehmen, daß z die Fläche R uniformisiert: Das Gebiet

$$B_M = \{z \mid 0 < \Re z < M\}$$

der z-Ebene sei universelle Überlagerung von R und

$$\pi\colon\ z \to z + i$$

eine erzeugende Decktransformation. Dann gilt

$$1 \leqslant \Big(\int_{\gamma_\nu} |dz|\Big)^2 = \Big(\int_0^1 \left|\frac{\partial z}{\partial \eta}\right| \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \cdot \sqrt{\Delta}\, d\eta\Big)^2 \leqslant \int_0^1 \left|\frac{\partial z}{\partial \eta}\right|^2 \frac{d\eta}{\Delta} \cdot \int_0^1 \Delta\, d\eta \quad (0 < \nu < \infty)$$

und somit

$$\frac{1}{\int_0^1 \left|\frac{\partial z}{\partial \eta}\right|^2 \frac{d\eta}{\Delta}} \leqslant \int_0^1 \Delta d\eta \quad (0 < \nu < \infty)\,.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\int_0^\infty \frac{d\nu}{\int_0^1 \left|\frac{\partial z}{\partial \eta}\right|^2 \frac{d\eta}{\Delta}} \leqslant \int_0^\infty \int_0^1 \Delta\, d\eta d\nu\,.$$

[5]) Unter einem *Ringgebiet* verstehen wir hier und im folgenden immer eine RIEMANNsche Fläche, die einem Kreisring (1.2) konform äquivalent ist.

Anderseits ist trivialerweise

$$\int_0^\infty \int_0^1 \Delta \, d\eta dv \leqslant M \, ;$$

denn die linke Seite dieser Ungleichung stellt gerade den Flächeninhalt des von Γ bedeckten Teils der Fläche $R = B_M/\pi$ dar.

2.3. *Beweis von Satz 1.* Die Kurvenschar $\Sigma = \{\sigma_\xi\}_{0<\xi<\infty}$,

$$\sigma_\xi \colon \; z = \xi + \eta t(\xi) + i\eta \quad (0 \leqslant \eta \leqslant 1)$$

in S genügt, als Kurvenschar in S_T aufgefaßt, den Voraussetzungen von Hilfssatz 1: Σ ist die Gesamtheit der Verbindungsstrecken äquivalenter Punkte in S. Nun gilt

$$\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = 1 + \eta t'(\xi), \quad \left|\frac{\partial z}{\partial \eta}\right|^2 = 1 + t^2(\xi) \, ;$$

somit folgt

$$M \geqslant \int_0^\infty \frac{d\xi}{\int_0^1 (1 + t^2(\xi)) \frac{d\eta}{1 + \eta t'(\xi)}} = \int_0^\infty \frac{t'(\xi)}{\log(1 + t'(\xi))} \cdot \frac{d\xi}{1 + t^2(\xi)} \, .$$

Erweitert man hier den Integranden rechter Hand mit

$$(1 + T'(\xi)) \; (1 + |\log T'(\xi)|) \, ,$$

so ergibt sich

$$M \geqslant \int_0^\infty \frac{T'(\xi) - 1}{T'(\xi) + 1} \cdot \frac{1 + |\log T'(\xi)|}{\log T'(\xi)} \cdot \frac{1}{1 + t^2(\xi)} \cdot \frac{(1 + T'(\xi)) \, d\xi}{1 + |\log T'(\xi)|} \, . \tag{2.2}$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß für ein geeignetes $C > 1$ die Relation

$$\frac{1}{C} \leqslant \frac{p - 1}{p + 1} \frac{1 + |\log p|}{\log p} \leqslant C \quad (0 < p < \infty)$$

gilt. Wendet man dies mit $p = T'(\xi)$ auf (2.2) an, so folgt insbesondere

$$M \geqslant \frac{1}{C} \int_0^\infty \frac{1}{1 + t^2(\xi)} \cdot \frac{d\xi + d(T(\xi))}{1 + |\log T'(\xi)|} \, .$$

2.4. *Beweis von Satz 3.* Die Kurvenschar $\Gamma = \{\gamma_\nu\}_{0<\nu<\infty}$,

$$\gamma_\nu \colon \; z = \tau(\nu + \eta) + i\eta \quad (0 \leqslant \eta \leqslant 1)$$

in S genügt, als Kurvenschar in S_T aufgefaßt, den Voraussetzungen von Hilfssatz 1: Jedes γ_ν verbindet zwei äquivalente Punkte in S. Ferner folgt aus $\tau(\nu_1 + \eta_1) + i\eta_1 = \tau(\nu_2 + \eta_2) + i\eta_2$ zunächst $\eta_1 = \eta_2$ und dann wegen der Monotonie von $\tau(\nu)$: $\nu_1 = \nu_2$.

Nun gilt

$$\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\nu, \eta)} = \tau'(\nu + \eta), \quad \left|\frac{\partial z}{\partial \eta}\right|^2 = \tau'^2(\nu + \eta) + 1 ,$$

woraus durch Einsetzen in (2.1) die Behauptung unmittelbar folgt.

3. Beweis der Sätze 4 und 5

3.1. Hilfssatz 2. Sind $u_0(x)$ und $u_1(x)$ für $x \geqslant 0$ definiert und C^1, existieren ferner die Integrale

$$\int_0^\infty u_i'^2(x)dx \quad (i = 0, 1), \quad \int_0^\infty (u_1(x) - u_0(x))^2 dx ,$$

so gibt es in dem Halbstreifen S eine Funktion $u(x, y) \in C^1$ mit endlichem Dirichletintegral, die auf den Halbgeraden $z = x (x \geqslant 0)$ und $z = x + i (x \geqslant 0)$ beziehungsweise die Randwerte $u_0(x)$ und $u_1(x)$ annimmt.

Beweis. Setzt man

$$u(x, y) = (1 - y)\, u_0(x) + y\, u_1(x) \quad (z \in S) ,$$

so erfüllt $u(x, y)$ die Randbedingungen und ist C^1; ferner gilt

$$u_x^2 + u_y^2 = (1 - y)^2 u_0'^2 + y^2 u_1'^2 + (u_1 - u_0)^2$$

und somit

$$D(u) = \tfrac{1}{3} \int_0^\infty (u_0'^2 + u_1'^2)dx + \int_0^\infty (u_1 - u_0)^2 dx < \infty .$$

3.2. Hilfssatz 3 (HUBER [3]). Sei R ein Ringgebiet und ω ein stückweise stetiges geschlossenes, das heißt lokal integrierbares Differential auf R mit der Periode 1 in bezug auf einen erzeugenden Zyklus. Dann gilt für den Modul M von R:

$$M \leqslant \| \omega \|^2 ,$$

wo $\| \omega \|^2$ das Dirichletintegral von ω bezeichnet.

Beweis. Wir können wiederum annehmen, daß R auf einen uniformisierenden Parameter z bezogen ist: $R = B_M/\pi$; dabei haben B_M und π die in 2.2 erklärte Bedeutung. Ist nun

$$\omega = P dx + Q dy \ (z \in B_M) ,$$

so folgt nach unserer Voraussetzung über ω:

$$1 \leqslant \left(\int_0^1 Q dy\right)^2 \leqslant \int_0^1 Q^2 dy \leqslant \int_0^1 (P^2 + Q^2) dy \quad (0 < x < M)$$

und somit durch Integration

$$M \leqslant \int_0^M \int_0^1 (P^2 + Q^2) dy dx = ||\omega||^2 .$$

3.3. Hilfssatz 4. Es sei $\tau \in T^*$ und T die zugehörige Funktion (1.6). Gibt es dann eine meßbare Funktion $\varphi(v)$ $(v \geqslant 0)$,

$$\int_0^v \varphi(v) dv = \Phi(v) ,$$

für die die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\varphi^2(v)}{\tau'(v)} dv , \quad \int_1^\infty \frac{\varphi^2(v-1)}{\tau'(v)} dv , \tag{3.1}$$

$$\int_1^\infty (\Phi(v) - \Phi(v-1) - 1)^2 \tau'(v) dv \tag{3.2}$$

konvergieren, so ist $T \in H$.

Beweis.

3.4. Nach Voraussetzung ist $\varphi(v)$ insbesondere lokal quadratisch integrierbar. Es gibt daher eine Folge von trigonometrischen Polynomen

$$P_n(v) = \sum_{k=1}^{k_0(n)} a_k^{(n)} \sin(k\pi v) \qquad (n = 0, 1, \ldots) ,$$

so daß die Größen

$$\varrho_n = \int_n^{n+1} (\varphi(v) - P_n(v))^2 dv \tag{3.3}$$

den Ungleichungen

$$\varrho_n \max_{n \leqslant v \leqslant n+2} \left(\tau'(v) + \frac{1}{\tau'(v)} \right) < \frac{1}{2^n} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{3.4}$$

genügen. Definieren wir nun die Funktion $\tilde{\varphi}(v)$ $(v \geqslant 0)$ durch

$$\tilde{\varphi}(v) = P_n(v) \quad (n \leqslant v \leqslant n+1;\ n = 0, 1, \ldots) , \tag{3.5}$$

so ist ersichtlich $\tilde{\varphi}(v) \in C$ $(v \geqslant 0)$.

Wir zeigen ferner: Die Integrale (3.1) und (3.2) konvergieren auch mit $\tilde{\varphi}(v)$, $\tilde{\Phi}(v)$ an Stelle von $\varphi(v)$, $\Phi(v)$.

3.5. *Beweis.* Nach (3.3) und (3.4) gilt

$$\int_n^{n+1} \frac{(\varphi(v) - P_n(v))^2}{\tau'(v)} dv \leqslant \varrho_n \max_{n \leqslant v \leqslant n+1} \frac{1}{\tau'(v)} < \frac{1}{2^n} . \tag{3.6}$$

Aus (3.5) folgt jetzt wegen $(a-b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ und (3.6):

$$\int_n^{n+1} \frac{\tilde{\varphi}^2(\nu)}{\tau'(\nu)}\,d\nu \leqslant \int_n^{n+1} \frac{2\varphi^2(\nu)}{\tau'(\nu)}\,d\nu + \int_n^{n+1} \frac{2(\varphi(\nu)-P_n(\nu))^2}{\tau'(\nu)}\,d\nu$$

$$< 2\int_n^{n+1} \frac{\varphi^2(\nu)}{\tau'(\nu)}\,d\nu + \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n=0,1,\ldots).$$

Dies beweist die Konvergenz des ersten Integrals (3.1) bezüglich $\tilde{\varphi}(\nu)$; analog schließt man für das zweite.

Weiter gilt für die Funktion

$$\delta(\nu) = (\Phi(\nu) - \Phi(\nu-1) - 1) - (\tilde{\Phi}(\nu) - \tilde{\Phi}(\nu-1) - 1) = \int_{\nu-1}^{\nu} (\varphi(\nu) - \tilde{\varphi}(\nu))\,d\nu$$

und $n \leqslant \nu \leqslant n+1$ die Abschätzung

$$\delta(\nu)^2 \leqslant \int_{\nu-1}^{\nu} (\varphi(\nu) - \tilde{\varphi}(\nu))^2\,d\nu \leqslant \int_{n-1}^{n} (\varphi(\nu) - P_{n-1}(\nu))^2\,d\nu + \int_n^{n+1} (\varphi(\nu) - P_n(\nu))^2\,d\nu$$

$$= \varrho_{n-1} + \varrho_n .$$

Hieraus folgt mit (3.4)

$$\int_n^{n+1} 2\delta^2(\nu)\tau'(\nu)\,d\nu \leqslant 2(\varrho_{n-1}+\varrho_n) \max_{n\leqq\nu\leqq n+1} \tau'(\nu) < 2\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\right),$$

$$\int_n^{n+1} 2\delta^2(\nu)\tau'(\nu)\,d\nu < \frac{3}{2^{n-1}} \quad (n=1,\ldots). \tag{3.7}$$

Mit (3.7) ergibt sich nunmehr wie oben

$$\int_n^{n+1} (\tilde{\Phi}(\nu)-\tilde{\Phi}(\nu-1)-1)^2\tau'(\nu)\,d\nu \leqslant \int_n^{n+1} 2(\Phi(\nu)-\Phi(\nu-1)-1)^2\tau'(\nu)\,d\nu + \int_n^{n+1} 2\delta^2(\nu)\tau'(\nu)\,d\nu$$

$$< \int_n^{n+1} 2(\Phi(\nu)-\Phi(\nu-1)-1)^2\tau'(\nu)\,d\nu + \frac{3}{2^{n-1}} \quad (n=1,\ldots)$$

und damit die Konvergenz des Integrals (3.2) bezüglich $\tilde{\Phi}(\nu)$.

3.6. Wir können daher im folgenden o.B.d.A. $\varphi(\nu) \in C$ voraussetzen. Wir zeigen zunächst: Die Funktionen $u_0(x)$ und $u_1(x)$,

$$\left.\begin{aligned} u_0(\tau(\nu)) &= \Phi(\nu) && (\nu \geqslant 0) \\ u_1(\tau(\nu)) &= \begin{cases} 1 & (0 \leqslant \nu \leqslant 1) \\ \Phi(\nu-1)+1 & (\nu \geqslant 1), \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

genügen den Voraussetzungen von Hilfssatz 2.

Beweis. Schreibt man die Gleichungen (3.8) mit Hilfe von $\nu = \tau^*(x)$ auf x um, so ergibt sich

$$\left.\begin{array}{lll} u_0(x) = & \Phi(\tau^*(x)) & (x \geqslant 0) \\ u_1(x) = & \left\{\begin{array}{ll} 1 & (0 \leqslant x \leqslant \tau(1)) \\ \Phi(\tau^*(x) - 1) + 1 & (x \geqslant \tau(1)) \,. \end{array}\right. & \end{array}\right\} \tag{3.9}$$

Beide Funktionen sind ersichtlich für $x \geqslant 0$ definiert und C^1. Man hat ferner

$$\int_0^\infty u_0'^2(x)dx = \int_0^\infty \varphi^2(\tau^*(x))\,\tau^{*\prime 2}(x)dx = \int_0^\infty \varphi^2(\nu)\frac{1}{\tau'^2(\nu)}\tau'(\nu)d\nu\,,$$

$$\int_0^\infty u_1'^2(x)dx = \int_{\tau(1)}^\infty \varphi^2(\tau^*(x) - 1)\tau^{*\prime 2}(x)dx = \int_1^\infty \varphi^2(\nu - 1)\frac{1}{\tau'^2(\nu)}\tau'(\nu)d\nu\,,$$

$$\int_{\tau(1)}^\infty (u_0(x) - u_1(x))^2 dx = \int_{\tau(1)}^\infty (\Phi(\tau^*(x)) - \Phi(\tau^*(x) - 1) - 1)^2 dx$$

$$= \int_1^\infty (\Phi(\nu) - \Phi(\nu - 1) - 1)^2\,\tau'(\nu)d\nu\,.$$

3.7. Nach Hilfssatz 2 gibt es in S eine Funktion $u(x, y) \in C^1$ mit endlichem Dirichletintegral, die auf den Halbgeraden $z = x\ (x \geqslant 0)$ und $z = x + i$ $(x \geqslant 0)$ beziehungsweise die Randwerte (3.9) annimmt. Aus den zu (3.9) äquivalenten Gleichungen (3.8) folgt insbesondere

$$u_1(\tau(\nu + 1)) = u_0(\tau(\nu)) + 1 \quad (\nu \geqslant 0)\,. \tag{3.10}$$

Mit Rücksicht auf (1.4) induziert daher $u(x, y)$ in natürlicher Weise eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Abbildung

$$\Omega\colon S_T \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$$

durch die Festsetzung

$$\Omega(x, y) \equiv u(x, y) \pmod 1 \quad (z \in S)\,. \tag{3.11}$$

3.8. Das Differential

$$\omega = d\Omega$$

auf S_T ist hiernach geschlossen und stückweise stetig. Wegen (3.11) gilt im Innern von S, aufgefaßt als Gebiet auf S_T:

$$\omega = du \ \ (z \in \operatorname{int} S)\,. \tag{3.12}$$

Hieraus folgt wegen (3.10) und der Stetigkeit von Ω, daß ω auf S_T die Periode 1 besitzt. Somit genügt ω den Voraussetzungen von Hilfssatz 3.

Nun ist $S_T - \operatorname{int} S$ eine Nullmenge; aus (3.12) folgt daher weiter

$$||\omega||^2 = D(u)\,.$$

Wegen $D(u) < \infty$ ergibt sich hieraus mit Hilfssatz 3 die Behauptung.

3.9. *Beweis von Satz 4.* Konvergiert das Integral (1.8), so genügt $\varphi(\nu) \equiv 1$ $(\nu \geqslant 0)$ den Voraussetzungen von Hilfssatz 4.

3.10. *Beweis von Satz 5.* Es sei

$$\tilde{A} = \{\nu \geqslant 0 \mid \nu - [\nu] \in A\}$$

und $\chi(\nu)$ die charakteristische Funktion von $\tilde{A}$; $\chi(\nu)$ ist für $\nu \geqslant 0$ periodisch mit der Periode 1. Setzt man dann

$$\varphi(\nu) = \frac{1}{|A|}\chi(\nu) \quad (\nu \geqslant 0)\,,$$

so genügt $\varphi(\nu)$ den Voraussetzungen von Hilfssatz 4.

Beweis. Aus der Meßbarkeit von A folgt diejenige von $\varphi(\nu)$. Ferner gilt nach Voraussetzung des Satzes für positive ganze N:

$$\begin{aligned}\int_0^N \frac{\varphi^2(\nu)}{\tau'(\nu)}\,d\nu &= \frac{1}{|A|^2}\int_0^N \frac{\chi(\nu)}{\tau'(\nu)}\,d\nu = \frac{1}{|A|^2}\sum_{j=0}^{N-1}\int_j^{j+1}\frac{\chi(\nu)}{\tau'(\nu)}\,d\nu \\ &= \frac{1}{|A|^2}\sum_{j=0}^{N-1}\int_0^1 \frac{\chi(\nu+j)}{\tau'(\nu+j)}\,d\nu = \frac{1}{|A|^2}\int_0^1 \chi(\nu)\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{\tau'(\nu+j)}\,d\nu \\ &\leqslant \frac{C}{|A|}\,.\end{aligned}$$

Dies beweist wegen $\varphi(\nu) = \varphi(\nu - 1)$ die Konvergenz der Integrale (3.1). Endlich gilt

$$\Phi(\nu) - \Phi(\nu - 1) = \int_{\nu-1}^{\nu}\varphi(\nu)\,d\nu = \frac{1}{|A|}\int_{\nu-1}^{\nu}\chi(\nu)\,d\nu \equiv 1 \quad (\nu \geqslant 1)\,;$$

(3.2) konvergiert somit trivialerweise.

4. Beweis von Satz B

4.1. Wegen Satz 4 bedarf nur die zweite Behauptung von Satz B eines Beweises, und zwar genügt es wegen Satz 3, zu zeigen, daß unter der angegebenen Voraussetzung die Divergenz des Integrals (1.8) diejenige des Integrals (1.7) nach sich zieht. Dies leistet nun der folgende Hilfssatz 5. Wir bemerken dazu, daß wir in (1.9) insbesondere $0 < \varepsilon < 1$ annehmen können.

4.2. Hilfssatz 5. Es sei $\tau \in T^*$ und das Integral (1.7) konvergent. Ferner gelte für ein ε, $0 < \varepsilon < 1$, die Relation

$$\frac{\tau'(\nu+\eta)}{\tau'(\nu)} \geqslant \varepsilon \quad (0 \leqslant \eta \leqslant 1,\ \nu \geqslant 0)\,. \tag{4.1}$$

Dann konvergiert auch das Integral (1.8).

4.3. *Beweis.* Wegen (4.1) ist

$$\tau'(\nu+\eta)+\frac{1}{\tau'(\nu+\eta)}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\left(\tau'(\nu+1)+\frac{1}{\tau'(\nu)}\right),$$

so daß für beliebiges $N>0$ folgt

$$J\geqslant\int_0^N\frac{d\nu}{\int_0^1(\tau'(\nu+\eta)+1/\tau'(\nu+\eta))\,d\eta}\geqslant\varepsilon\int_0^N\frac{d\nu}{\tau'(\nu+1)+1/\tau'(\nu)}. \tag{4.2}$$

Wie man sich leicht überlegt, genügt $\tau'(\nu)$ wenigstens einer der folgenden Bedingungen:

(I) Es gibt ein $\nu_1\geqslant 0$ mit

$$\tau'(\nu)\geqslant\varepsilon\quad(\nu\geqslant\nu_1).$$

(II) Es gibt ein $\nu_2\geqslant 0$ mit

$$\tau'(\nu)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\quad(\nu\geqslant\nu_2).$$

(III) Es gibt eine unendliche Folge paarweise fremder Intervalle

$$[\lambda_k,\mu_k]\quad(k=1,2,\ldots)$$

mit

$$\tau'(\lambda_k)=\frac{1}{\varepsilon},\quad\tau'(\mu_k)=\varepsilon\quad(k=1,2,\ldots), \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\geqslant\tau'(\nu)\geqslant\varepsilon\quad(\lambda_k\leqslant\nu\leqslant\mu_k;\ k=1,2,\ldots). \tag{4.4}$$

4.4. Im Fall (I) gilt

$$\frac{1}{\tau'(\nu)}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\tau'(\mu)\quad(\nu,\mu\geqslant\nu_1)$$

und somit für $N>\nu_1$:

$$\int_{\nu_1}^N\frac{d\nu}{\tau'(\nu+1)+1/\tau'(\nu)}\geqslant\int_{\nu_1}^N\frac{d\nu}{\left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\tau'(\nu+1)}=\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\int_{\nu_1+1}^{N+1}\frac{d\nu}{\tau'(\nu)}.$$

Zusammen mit (4.2) folgt hieraus die Behauptung.

Im Fall (II) gilt

$$\tau'(\mu)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2\tau'(\nu)}\quad(\nu,\mu\geqslant\nu_2)$$

und somit für $N>\nu_2$:

$$\int_{\nu_2}^N\frac{d\nu}{\tau'(\nu+1)+1/\tau'(\nu)}\geqslant\int_{\nu_2}^N\frac{d\nu}{\left(\frac{1}{\varepsilon^2}+1\right)\frac{1}{\tau'(\nu)}}=\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\int_{\nu_2}^N\tau'(\nu)\,d\nu$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}(\tau(N)-\tau(\nu_2)).$$

Hier ist aber die linke Seite nach (4.2) und Voraussetzung beschränkt, während anderseits $\tau(N) \to \infty$ $(N \to \infty)$ gilt. Somit kann Fall (II) nicht eintreten.

Im Fall (III) endlich folgt aus (4.1) und (4.3):

$$\mu_k \geqslant \lambda_k + 2 \quad (k = 1, 2, \ldots) .$$

Damit ergibt sich wegen (4.4)

$$\int_{\lambda_k}^{\lambda_k+1} \frac{dv}{\tau'(v+1) + 1/\tau'(v)} \geqslant \int_{\lambda_k}^{\lambda_k+1} \frac{dv}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{2} \; (k = 1, 2, \ldots) .$$

Hieraus folgt aber wiederum ein Widerspruch zu der Tatsache, daß das Integral rechter Hand in (4.2) beschränkt ist. Damit ist auch Fall (III) ausgeschlossen.

5. Beweis des Lemmas

5.1. Es sei $T \in \mathcal{T}$, und es bezeichne $T^n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ die n-malige Anwendung von T auf x. Die im übrigen willkürliche Funktion

$$g(t) \; (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

genüge den Relationen

$$g'(t) > 0, \; g(t) \in C^2 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) ;$$

$$g(0) = 0, \; g'(0) = 1, \; g''(0) = 0 ; \tag{5.1}$$

$$g(1) = T(0), \; g'(1) = T'(0), \; g''(1) = T''(0) . \tag{5.2}$$

Mit diesen Festsetzungen definieren wir

$$\tau_T(v) = T^{[v]}(g(v - [v])) \quad (v \geqslant 0) ; \tag{5.3}$$

man überlegt sich, daß der Ausdruck rechter Hand für jedes $v \geqslant 0$ erklärt ist.

Wegen $[v + 1] = [v] + 1$ folgt aus (5.3)

$$\tau_T(v + 1) = T^{[v]+1}(g(v - [v])) \quad (v \geqslant 0)$$

und somit durch nochmalige Anwendung von (5.3) die Rekursion

$$\tau_T(v + 1) = T(\tau_T(v)) \quad (v \geqslant 0) . \tag{5.4}$$

5.3. Wir zeigen zunächst: $\tau_T \in \mathcal{T}^*$.

Beweis. $\mathcal{T}^*$ enthält nach 1.5 genau die Funktionen

$$x = \tau(v) \quad (v \geqslant 0)$$

mit den Eigenschaften

$$\tau(0) = 0, \; \lim_{v \to \infty} \tau(v) = \infty; \; \tau'(v) > 0, \; \tau(v) \in C^2 \; (v \geqslant 0) .$$

Wir werden diese Eigenschaften bei $\tau_T(\nu)$ in der umgekehrten Reihenfolge nachweisen.

Die in der Definition (5.3) von $\tau_T(\nu)$ auftretenden Funktionen $T(x), g(t)$ und $[\nu]$ sind C^2, ausgenommen die letzte für die Übergänge $\nu \uparrow n (n = 1, 2, \ldots)$. Zum Beweis von $\tau_T \in C^2$ genügt es daher, diese Übergänge zu betrachten; wegen (5.4) kann man sich dabei auf $\nu \uparrow 1$ beschränken. Nach (5.3) gilt für $0 \leqq \nu < 1$:

$$\tau_T(\nu) = g(\nu) \quad (0 \leqq \nu < 1) ; \tag{5.5}$$

somit ergibt sich wegen (5.2):

$$\tau_T(1 - 0) = T(0), \ \tau_T'(1 - 0) = T'(0), \ \tau_T''(1 - 0) = T''(0) . \tag{5.6}$$

Anderseits liefert (5.3) für $1 \leqq \nu < 2$ nacheinander

$$\left.\begin{aligned} \tau_T(\nu) &= T\ (g(\nu - 1)) \\ \tau_T'(\nu) &= T'(g(\nu - 1))\, g'(\nu - 1) \\ \tau_T''(\nu) &= T''(g(\nu - 1))\, g'^2(\nu - 1) + T'(g(\nu - 1))\, g''(\nu - 1) \end{aligned}\right\} \quad (1 \leqq \nu < 2) .$$

Setzt man in diesen drei Gleichungen $\nu = 1$, so folgt mit (5.1):

$$\tau_T(1) = T(0), \ \tau_T'(1) = T'(0), \ \tau_T''(1) = T''(0) .$$

Der Vergleich dieser Zeile mit (5.6) beweist nach den obigen Bemerkungen $\tau_T \in C^2$.

5.4. Aus (5.4) ergibt sich nun

$$\tau_T'(\nu + 1) = T'(\tau_T(\nu))\, \tau_T'(\nu) \quad (\nu \geqq 0) \tag{5.7}$$

und hieraus wegen $T'(x) > 0 \ (x \geqq 0)$ und $g'(t) > 0 \ (0 \leqq t \leqq 1)$ mit vollständiger Induktion

$$\tau_T'(\nu) > 0 \quad (\nu \geqq 0) .$$

Dies zeigt ferner die Existenz des

$$\lim_{\nu \to \infty} \tau_T(\nu) = x_0 \leqq \infty .$$

Aus $x_0 < \infty$ ergäbe sich aber wegen (5.4): $x_0 = T(x_0)$, gegen die Voraussetzung $T(x) > x (x \geqq 0)$. Endlich folgt aus (5.5) und (5.1): $\tau_T(0) = 0$.

5.5. Insbesondere existiert nun die zu $\tau_T(\nu)$ inverse Funktion

$$\nu = \tau_T^*(x), \ \tau_T^* \in C^2.$$

Führt man dies in (5.4) ein, so erhält man in der Tat

$$T(x) = \tau_T(\tau_T^*(x) + 1), \ \tau_T \in T^* .$$

6. Beweis von Satz A

6.1. Hilfssatz 6. Es sei $T \in \mathcal{T}$ und $t'(x)$ von beschränkter totaler Variation. Gehört dann $\tau \in \mathcal{T}^*$ zu T im Sinne des Lemmas, so gibt es ein ε, $0 < \varepsilon < 1$, mit

$$\varepsilon \leqslant \frac{\tau'(\nu+\eta)}{\tau'(\nu)} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \quad (0 \leqslant \eta \leqslant 1, \nu \geqslant 0)\,. \tag{6.1}$$

6.2. *Beweis.* Nach (5.7) gilt

$$\frac{\tau'(\nu+\eta)}{\tau'(\nu)} = \frac{T'(\tau(\nu+\eta-1))}{T'(\tau(\nu-1))}\,\frac{\tau'(\nu+\eta-1)}{\tau'(\nu-1)} \quad (0 \leqslant \eta \leqslant 1,\ \nu \geqslant 1)\,;$$

somit genügt die Funktion

$$K_\eta(\nu) = \log \frac{\tau'(\nu+\eta)}{\tau'(\nu)} \tag{6.2}$$

der Rekursion

$$K_\eta(\nu) = \log \frac{T'(\tau(\nu+\eta-1))}{T'(\tau(\nu-1))} + K_\eta(\nu-1)\,.$$

Dies liefert

$$|K_\eta(\nu) - K_\eta(\nu-1)| = \left| \int_{\tau(\nu-1)}^{\tau(\nu+\eta-1)} \frac{T''(x)}{T'(x)}\,dx \right| \leqslant \int_{\tau(\nu-1)}^{\tau(\nu)} \left| \frac{T''(x)}{T'(x)} \right| dx \quad (\nu \geqslant 1)$$

und damit

$$|K_\eta(\nu+n) - K_\eta(\nu)| \leqslant \int_{\tau(\nu)}^{\tau(\nu+n)} \left| \frac{T''(x)}{T'(x)} \right| dx \quad (\nu \geqslant 0;\ n = 0, 1, \ldots)\,. \tag{6.3}$$

6.3. Nun existiert nach Voraussetzung über $t'(x)$ der

$$\lim_{x\to\infty} t'(x) = a\,,$$

und zwar ist $a \geqslant 0$, wenn anders

$$t(x) = t(0) + \int_0^x t'(\xi)\,d\xi > 0 \quad (x \geqslant 0)$$

gelten soll. Daher gibt es ein $\nu_0 \geqslant 0$ mit

$$T'(x) = 1 + t'(x) \geqslant \tfrac{1}{2} \quad (x > \tau(\nu_0))\,;$$

und aus (6.3) folgt weiter

$$|K_\eta(\nu+n) - K_\eta(\nu)| \leqslant 2 \int_{\tau(\nu)}^{\tau(\nu+n)} |T''(x)|\,dx \leqslant 2 \int_{\tau(\nu_0)}^{\infty} |T''(x)|\,dx \quad (\nu \geqslant \nu_0)\,.$$

Hier hat der Ausdruck rechter Hand nach Voraussetzung einen endlichen Wert $c_1 \geqslant 0$; somit ergibt sich

$$|K_\eta(\nu+n)| \leqslant |K_\eta(\nu)| + c_1 \quad (\nu \geqslant \nu_0)$$

und daher insbesondere für $\nu_0 \leqslant \nu' \leqslant \nu_0 + 1$:

$$|K_\eta(\nu' + n)| \leqslant \max_{\nu_0 \leqslant \nu \leqslant \nu_0+1} |K_\eta(\nu)| + c_1 = c_2 \ (n = 0, 1, \ldots). \tag{6.4}$$

Da sich nun jedes $\nu \geqslant \nu_0$ in der Form

$$\nu = \nu' + n, \quad \nu_0 \leqslant \nu' \leqslant \nu_0 + 1, \ n \in \{0, 1, \ldots\}$$

darstellen läßt, folgt aus (6.4)

$$|K_\eta(\nu)| \leqslant c_2 \quad (\nu \geqslant \nu_0)$$

und damit nach Definition (6.2) von $K_\eta^*(\nu)$ die Behauptung (6.1).

6.4. *Beweis von Satz A.* Es gehöre $\tau \in T^*$ zu T im Sinne des Lemmas. Nach Hilfssatz 6 genügt $\tau(\nu)$ insbesondere der Voraussetzung von Satz B. Nun gilt mit $x = \tau(\nu)$ und nach (5.4):

$$t(x) = T(x) - x = \tau(\nu + 1) - \tau(\nu) = \int_0^1 \tau'(\nu + \eta) d\eta;$$

wir erhalten daher

$$\int_0^\infty \frac{dx}{t^2(x)} = \int_0^\infty \frac{\tau'(\nu) d\nu}{\left(\int_0^1 \tau'(\nu + \eta) d\eta\right)^2} = \int_0^\infty \left[\frac{\tau'(\nu)}{\int_0^1 \tau'(\nu + \eta) d\eta}\right]^2 \frac{d\nu}{\tau'(\nu)}.$$

Durch nochmalige Anwendung von Hilfssatz 6 folgt, daß das letzte Integral gleichzeitig mit dem Integral (1.8) von Satz B konvergiert, beziehungsweise divergiert. Damit ist Satz A bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Ch. Blanc, *Les surfaces de* Riemann *des fonctions méromorphes.* Comm. Math. Helv. *9*, 193 bis 216 und 335–368 (1936/37).

[2] Ch. Blanc, *Les demi-surfaces de* Riemann. *Application au problème du type.* Comm. Math. Helv. *11*, 130–150 (1938/39).

[3] H. Huber, Riemannsche *Flächen von hyperbolischem Typus im euklidischen Raum.* Math. Annalen *139*, 140–146 (1959).

[4] J. A. Jenkins, *On a Type Problem.* Can. J. Math. *11*, 427–431 (1959).

[5] R. Nevanlinna, *Über die Polygondarstellung einer* Riemannschen *Fläche.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A, I 122 (1952).

[6] A. Pfluger, *Über die Konstruktion* Riemannscher *Flächen durch Verheftung.* J. Indian Math. Soc. *24*, 401–412 (1960).

[7] L. I. Volkovyskij, *On the Problem of Type of Simply-connected* Riemann *Surfaces* (Russian, English Summary). Mat. Sbornik N. S. *18/60*, 185–212 (1946). (MR *8*, 326; Math. Zbl. *60*, 232.)

[8] L. I. Volkovyskij, *Quasikonforme Abbildungen und Aufgaben über das konforme Zusammenheften* (*Russisch*). Ukrain. Math. Z. *3*, 39–52 (1951). (MR *14*, 862; Math. Zbl. *45*, 191.)

[9] E. M. Wirth, *Über die Bestimmung des Typus einer* Riemannschen *Fläche.* Comm. Math. Helv. *31*, 90–107 (1956/57).

(Eingegangen 29. 5. 1962)