Werk

Titel: Sur les structures homographiques d'une surface de RIEMANN.

Autor: Teleman, C.

Jahr: 1959

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?358147735_0033|log19

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Sur les structures homographiques d'une surface de RIEMANN

par C. TELEMAN

Introduction

Soit R une surface de RIEMANN. Nous considérons des systèmes de $p+1$ fonctions analytiques sur R, $u_1, \ldots, u_{p+1}$, satisfaisant aux conditions suivantes:

1. Si l'on prolonge analytiquement le système $u = (u_1, \ldots, u_{p+1})$, le long d'un chemin fermé de R, les fonctions u_i subissent une transformation homographique

$$\varrho \overline{u}_i = c_i^1 u_1 + \ldots + c_i^{p+1} u_{p+1}, \; (i = 1, \ldots, p+1) \tag{1}$$

c_j^i étant des constantes complexes et ϱ une fonction analytique.

2. Le wronskien des fonctions u_i:

$$W = \begin{vmatrix} u_1^{(p)} & \ldots & u_1' & u_1 \\ u_2^{(p)} & \ldots & u_2' & u_2 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ u_{p+1}^{(p)} & \ldots & u_{p+1}' & u_{p+1} \end{vmatrix} \tag{2}$$

n'est nul en aucun point de R (on a désigné par $u^{(h)}$ les dérivées de u par rapport à un uniformisateur local z de R. La condition $W \neq 0$ ne dépend pas du choix de cet uniformisateur).

3. Les fonctions u_i n'ont pas d'autres singularités que des pôles.

Au point de vue géométrique, ces conditions nous disent que les fonctions u_i associent à tout domaine simplement connexe de R une courbe de l'espace projectif complexe à p dimensions, et cette courbe a en chaque point une tangente et un hyperplan osculateur déterminés.

Convenons de dire que deux tels systèmes u, $\overline{u}$ sont équivalents si entre une détermination $u_1, \ldots, u_{p+1}$ du premier et une détermination $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{p+1}$ du second, dans un domaine simplement connexe de R, existe une relation de la forme (1). Nous appellerons *structure homographique d'ordre* p de R toute classe H de tels systèmes contenant tous les systèmes équivalents à l'un d'eux.

Dans un autre travail [1] nous avons considéré le cas $p = 1$ et nous avons obtenu le résultat suivant:

Les structures homographiques d'ordre 1 d'une surface R sont en correspondance biunivoque avec les formes différentielles, quadratiques et régulières de R.

Nous rappellerons brièvement la démonstration de ce théorème et nous le généraliserons ensuite pour $p > 1$.

Nous remercions M. le Prof. GEORGES DE RHAM pour les précieuses indications données.

1. Considérons le cas $p = 1$. Au système $u = (u_1, u_2)$ on peut associer la fonction analytique

$$h = \frac{u_1}{u_2}$$

qui a les propriétés suivantes:

a) Par prolongement analytique, la fonction h subit une transformation homographique.

b) Les dérivées de h et $1/h$ ne s'annulent en aucun point de R; donc h n'a pas d'autres singularités que des pôles simples.

Sur toute surface R on peut trouver une telle fonction. Par exemple, on peut considérer la fonction w qui fournit la représentation conforme de la surface universelle de recouvrement $\tilde{R}$ de R, sur le cercle unité $|w| < 1$ ou sur le plan w, complété ou non par le point à l'infini, suivant que R est du type hyperbolique, elliptique ou parabolique.

Supposons qu'on ait deux fonctions h, k satisfaisant aux conditions a), b). Soit q un point de R et Δ un domaine simplement connexe contenant q. Les déterminations h_i, k_i des fonctions h, k dans Δ se déduisent de deux déterminations particulières, h_0, k_0, par des transformations homographiques

$$h_i = \frac{a_i h_0 + b_i}{c_i h_0 + d_i}, \quad k_i = \frac{\alpha_i k_0 + \beta_i}{\gamma_i k_0 + \delta_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

a_i, b_i, c_i, d_i, α_i, β_i, γ_i, δ_i étant des constantes complexes à déterminants $a_i d_i - b_i c_i, \alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i$ non nuls. On peut couvrir la surface R par une famille de domaines Δ, de manière que chacune des déterminations h_i, k_i puisse être prise comme coordonnée complexe dans tout Δ. Pour toute paire d'indices i, j on peut considérer le schwarzien

$$\{h_i\}_{k_j} = \frac{d^2}{dk_j^2}\left(\log \frac{dh_i}{dk_j}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dk_j}\left(\log \frac{dh_i}{dk_j}\right)\right]^2. \tag{4}$$

L'expression (4) ne dépend pas de la détermination h_i de h; on peut donc la désigner par $\{h\}_{k_j}$. En formant le schwarzien de h par rapport à une autre détermination k_l de k, on obtient la relation de CAYLEY [2, p. 57]

$$\{h\}_{k_l} = \left(\frac{dk_j}{dk_l}\right)^2 [\{h\}_{k_j} - \{k_l\}_{k_j}].$$

Mais en vertu de (3) on a $\{k_l\}_{k_j} = 0$, donc

$$\{h\}_{k_l} dk_l^2 = \{h\}_{k_j} dk_j^2 .$$

Il en résulte qu'aux fonctions h, k on peut associer une forme différentielle quadratique

$$\omega_2 = \{h\}_k dk^2 = - \{k\}_h dh^2 \tag{5}$$

qui ne dépend pas des déterminations choisies pour h, k; c'est donc une forme uniforme sur la surface R et en tenant compte de la propriété de régularité b), on montre facilement que la forme (5) est partout régulière.

En fixant la fonction k, on en déduit qu'à toute fonction h on peut associer une forme différentielle, quadratique et régulière ω_2 et cette forme ω_2 détermine la fonction h à une homographie près.

En tenant compte de la définition des structures homographiques donnée dans l'Introduction, on peut énoncer le théorème suivant:

Les structures homographiques d'ordre 1 d'une surface de RIEMANN *sont en correspondance biunivoque avec les formes différentielles, quadratiques et régulières de cette surface.*

2. Considérons maintenant le cas $p > 1$. Associons au système $u = (u_1, \ldots, u_{p+1})$ satisfaisant aux conditions 1°, 2° et 3°, l'équation différentielle, linéaire et homogène, d'ordre $p + 1$, ayant les fonctions u_i comme solutions linéairement indépendantes:

$$\begin{vmatrix} \theta^{(p+1)} & \ldots & \theta' & \theta \\ u_1^{(p+1)} & \ldots & u_1' & u_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ u_{p+1}^{(p+1)} & \ldots & u_{p+1}' & u_{p+1} \end{vmatrix} = 0 . \tag{6}$$

Cette équation est déterminée dans chaque domaine simplement connexe Δ de R, dès qu'on connaît la détermination du système u et la coordonnée complexe z. Ecrivons l'équation (6) sous la forme

$$\theta^{(p+1)} + \binom{p+1}{1} q_1 \theta^{(p)} + \ldots + \binom{p+1}{p} q_p \theta' + q_{p+1} \theta = 0; \tag{7}$$

les coefficients $q_1, \ldots, q_{p+1}$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine Δ.

Les invariants de l'équation (7), par rapport aux transformations du paramètre z et par rapport aux transformations

$$\theta = \lambda \bar{\theta} \quad (\lambda = \text{fonction holomorphe dans } \Delta)$$

sont évidement des invariants du système u et même des systèmes équivalents à u. De plus, la donnée de l'équation (7) nous permet de déterminer le système u à une transformation (1) près.

Donc l'étude des structures homographiques de R se réduit à l'étude des invariants des équations (7) par rapport aux transformations

$$\bar{z} = \bar{z}(z) , \qquad \theta = \lambda \bar{\theta} . \tag{8}$$

Cette dernière étude a été faite par LAGUERRE et FORSYGHT [2] et nous allons appliquer leurs résultats.

On sait que dans tout domaine Δ de R on peut trouver une coordonnée $\bar{z} = h$ et une fonction λ telles que l'équation (7) se transforme en une équation ayant $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = 0$. Les fonctions h, λ sont données par les équations [2, p. 26]

$$\{h\}_z = \frac{\sigma}{p+2}(q_2 - q_1^2 - q_1') ,$$

$$\lambda = \left(\frac{dh}{dz}\right)^{-\frac{p}{2}} e^{-\int q_1 dz} .$$

Il s'ensuit que la coordonnée h est déterminée à une homographie près:

$$\bar{h} = \frac{\alpha h + \beta}{\gamma h + \delta} \tag{9}$$

et pour une telle transformation, λ est donnée par

$$\lambda = (\gamma h + \delta)^p . \tag{10}$$

Les coordonnées h définissent donc une structure homographique d'ordre 1 sur R.

Nous avons donc un premier résultat:

A toute structure homographique H d'ordre p on peut associer une structure d'ordre 1. On peut donc associer à H une forme différentielle quadratique ω_2.

Supposons qu'on a choisi dans chaque domaine simplement connexe Δ de R, comme coordonnée, une détermination d'une des fonctions h associées à la structure H. Cette structure sera définie, dans chaque Δ, par une équation différentielle

$$\theta^{(p+1)} + \binom{p+1}{3} q_3 \theta^{p-2} + \ldots + q_{p+1}\theta = 0 . \tag{11}$$

La théorie de LAGUERRE et FORSYGHT nous donne les invariants de l'équation (11) par rapport aux transformations (9), (10): pour chaque $m (3 \leqslant m \leqslant p+1)$ on peut construire l'expression [2, p. 32]

$$\omega_m = \left[\sum_{s=0}^{m-3} (-1)^s \frac{(m-2)!\, m!\, (2m-s-2)!}{(m-s-1)!\, (m-s)!\, (2m-3)!\, s!} q_{m-s}^{(s)}\right] dh^m , \tag{12}$$

qui est un invariant par rapport aux transformations (9), (10), donc

$$\bar{\omega}_m = \omega_m, \ (m = 3, \ldots, p+1) .$$

Donc:

Etant donnée une structure homographique H d'ordre p sur une surface de RIEMANN *R, on peut lui associer p formes différentielles régulières $\omega_2, \ldots \omega_{p+1}$ d'ordres $2, \ldots, p+1$.*

On sait que les invariants $\omega_2, \ldots, \omega_{p+1}$ définissent complètement l'équation différentielle (7), car la connaissance de ω_2 nous permet de réduire l'équation (7) à la forme (11), dont les coefficients $q_3, \ldots, q_{p+1}$ peuvent être déduits des formules (12).

Donc:

Les structures homographiques d'ordre p d'une surface R sont en correspondance biunivoque avec les systèmes $(\omega_2, \ldots, \omega_{p+1})$ de p formes différentielles, régulières d'ordres $2, 3, \ldots, p+1$ de R.

4. Si nous considérons des systèmes u satisfaisant seulement aux conditions 1°, 3°, alors les zéros du wronskien (2) seront des pôles d'ordres m pour les formes ω_m.

Supposons qu'on a par exemple une surface R fermée et soit C une courbe algébrique plane ayant R pour type conforme. Si u_1, u_2, u_3 sont des coordonnées homogènes d'un point de C, alors $u = (u_1, u_2, u_3)$ est un système qui satisfait aux conditions 1°, 3°, mais le wronskien (2) s'annule aux points d'inflexion et de rebroussement de C. Si le genre de C n'est pas nul, alors ce système ne peut jamais satisfaire à la condition 2°, car une courbe de genre $g \neq 0$ a au moins un point d'inflexion ou un point de rebroussement.

5. Supposons la surface R fermée et de genre $g > 1$. Soit A une différentielle abélienne de première espèce de R. On peut représenter toute forme différentielle, régulière ω_m, d'ordre m, sous la forme

$$\omega_m = \varphi_m A^m ,$$

où φ_m est une fonction rationnelle sur R, ayant des pôles d'ordre m au plus dans les $2(g-1)$ zéros de A. D'après le théorème de RIEMANN-ROCH, la fonction φ_m dépend de

$$2(g-1)m - g + 1 = (2m-1)(g-1)$$

constantes complexes arbitraires.

Donc les structures homographiques H d'ordre p d'une surface fermée de genre $g > 1$ dépendent de

$$(g-1)\sum_{m=2}^{p+1}(2m-1) = (p^2+2p)(g-1)$$

constantes complexes arbitraires.

Pour $g = 1$, les fonctions φ_m doivent être des constantes, donc les structures H dépendent de p constantes arbitraires.

Pour $g = 0$, on n'a pas d'autres formes ω_m régulières que celles identiquement nulles. Dans le cas $\omega_m = 0$, l'équation (11) s'écrit

$$\theta^{(p+1)} = 0$$

et possède les solutions linéairement indépendantes $1, h, h^2, \ldots, h^p$; ces fonctions sont uniformes sur R et définissent une application de R dans l'espace projectif complexe à $p + 1$ dimensions, l'image de R étant la courbe normale bien connue.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. TELEMAN, *O clasă de functii multiforme pe o suprafată riemanniană.* Studii şi Cercetări Matematice, Nr. 1–2, 1957.

[2] E. J. WILCZYNSKI, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces.* Leipzig 1906.

(Reçu le 25 juin 1958)