Werk

Titel: Un théorème de dualité.

Autor: Serre, Jean-Pierre

Jahr: 1955

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?358147735_0029|log5

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Un théorème de dualité

Herrn H. Hopf zum sechzigsten Geburtstag gewidmet

par JEAN-PIERRE SERRE

Introduction

Soit X une variété analytique complexe, de dimension complexe n, et soit V un espace fibré analytique de base X dont la fibre est un espace vectoriel de dimension r sur $\boldsymbol{C}$. Le faisceau $\mathsf{S}(V)$ des germes de sections holomorphes de V est un faisceau analytique cohérent sur X, et les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathsf{S}(V))$ jouent un rôle important dans diverses questions ; en particulier, si X est une variété algébrique projective, et V l'espace fibré associé à une classe D de diviseurs de X (auquel cas $r = 1$), les dimensions des espaces vectoriels $H^q(X, \mathsf{S}(V))$ coïncident avec les „superabondances" qui interviennent dans le théorème général de Riemann-Roch (voir là-dessus les Notes publiées en 1953 et 1954 aux Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. par K. Kodaira, D. C. Spencer et F. Hirzebruch).

Or l'on sait que les classes de diviseurs D et $K - D$ (K étant la classe canonique) jouent un rôle dual dans le théorème de Riemann-Roch. Nous nous proposons ici de préciser ce résultat et de l'étendre au cas d'un espace fibré V quelconque en montrant que, sous des hypothèses très larges, les espaces vectoriels $H^q(X, \mathsf{S}(V))$ et $H_*^{n-q}(X, \mathsf{S}(\tilde{V}))$ sont en dualité, $\tilde{V}$ désignant un espace fibré dont la construction généralise celle de $K - D$. Un cas particulier de ce théorème avait d'ailleurs été déjà obtenu par H. Cartan et L. Schwartz ([10], théorème 4) et la démonstration du cas général n'est qu'une extension facile de la leur.

§ 1. Préliminaires

1. Produit tensoriel de deux faisceaux de modules. Soient X un espace topologique, et $\mathsf{A} = \bigcup_{x \in X} \mathsf{A}_x$ un faisceau d'anneaux sur X (pour toutes les définitions relatives aux faisceaux, nous renvoyons à [2] et [4]) ; nous supposons que les A_x sont commutatifs et possèdent un élément

unité variant continûment avec x. On dit qu'un faisceau M est un *faisceau de* A*-modules* si, pour tout $x \in X$, M_x est muni d'une structure de module unitaire sur A_x telle que l'application $(a, m) \to a \cdot m$, définie sur l'ensemble G des couples (a, m) tels qu'il existe $x \in X$ avec $a \in \mathsf{A}_x$ et $m \in \mathsf{M}_x$, soit une application continue de $\mathsf{G} \subset \mathsf{A} \times \mathsf{M}$ dans M.

Soient maintenant M et N deux faisceaux de A-modules. Si U est un ouvert de X, soient A_U, M_U, N_U les groupes formés par les sections de A, M, N sur U ; il est clair que A_U est un anneau commutatif à élément unité, et que M_U et N_U sont des modules unitaires sur A_U. Posons $P_U = M_U \otimes N_U$, le produit tensoriel étant pris sur A_U ; si $V \subset U$, on a des homomorphismes canoniques :

$$A_U \to A_V \ , \qquad M_U \to M_V \ , \qquad N_U \to N_V \ ,$$

qui définissent, par passage au produit tensoriel, un homomorphisme de P_U dans P_V. La collection des modules P_U et des homomorphismes $P_U \to P_V$ définit un faisceau P (cf. [2], XIV—3) ; le module ponctuel P_x est la limite inductive (pour $x \in U$) des modules P_U. Comme l'on a :

$$\mathsf{A}_x = \lim_{x \in U} A_U \ , \qquad \mathsf{M}_x = \lim_{x \in U} M_U \ , \qquad \mathsf{N}_x = \lim_{x \in U} N_U \ ,$$

il en résulte[1]) que P_x est isomorphe à $\mathsf{M}_x \otimes \mathsf{N}_x$, le produit tensoriel étant pris sur A_x. Pour cette raison, le faisceau P est appelé le *produit tensoriel* des faisceaux M et N et on le note $\mathsf{M} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{N}$. Du fait que A est commutatif, c'est un faisceau de A-modules ; lorsque A est un faisceau constant, on retrouve la notion définie dans [2], XIV—10.

Les propriétés de $\mathsf{M} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{N}$ sont tout à fait semblables à celles du produit tensoriel de deux modules :

1.1. Si M' et N' sont deux autres faisceaux de A-modules, et si φ (resp. ψ) est un homomorphisme A-linéaire de M dans M' (resp. de N dans N'), le produit tensoriel $\varphi \otimes \psi$ est un homomorphisme A-linéaire de $\mathsf{M} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{N}$ dans $\mathsf{M}' \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{N}'$.

1.2. Toute suite exacte d'homomorphismes A-linéaires :

$$\mathsf{N} \to \mathsf{N}' \to \mathsf{N}'' \to 0 \ ,$$

donne naissance à une suite exacte :

$$\mathsf{M} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{N} \to \mathsf{M} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{N}' \to \mathsf{M} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{N}'' \to 0 \ .$$

---

[1]) A cause de la commutation du produit tensoriel avec les limites inductives.

1.3. On a des isomorphismes canoniques :

$$(\mathsf{M} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{N}) \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{Q} \approx \mathsf{M} \otimes_{\mathsf{A}} (\mathsf{N} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{Q}), \quad \mathsf{M} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{N} \approx \mathsf{N} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{M}, \quad \mathsf{M} \otimes_{\mathsf{A}} \mathsf{A} \approx \mathsf{M}, \text{ etc.}$$

Si X est une variété analytique complexe, et si l'on prend pour A le faisceau O des germes de fonctions holomorphes sur X, la notion de faisceau de O-modules coincide avec celle de faisceau analytique, définie dans [4], n° 5. En outre les propriétés 1.2 et 1.3 entraînent immédiatement que le produit tensoriel de deux faisceaux analytiques cohérents est un faisceau analytique cohérent.

Signalons enfin que l'on peut définir de façon analogue les faisceaux $\mathrm{Tor}_p^{\mathsf{A}}(\mathsf{M}, \mathsf{N}) = \bigcup_{x \in X} \mathrm{Tor}_p^{\mathsf{A}_x}(\mathsf{M}_x, \mathsf{N}_x)$ pour tout $p \geqslant 0$ (pour la définition de Tor_p, voir [5], Chap. VI, § 1). Par contre, la définition de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{A}}(\mathsf{M}, \mathsf{N})$ est plus délicate, et ne peut se faire sans hypothèses restrictives sur M. Nous n'insistons pas là-dessus, car nous n'utiliserons dans toute la suite que le produit tensoriel.

2. Cohomologie d'un espace à coefficients dans un faisceau. (Dans ce numéro, nous supposerons que l'espace X est paracompact.)

Soit Φ une famille de parties de X vérifiant les conditions suivantes :

2.1. Tout ensemble de Φ est fermé.

2.2. Tout sous-ensemble fermé d'un ensemble de Φ appartient à Φ.

2.3. Toute réunion finie d'ensembles de Φ appartient à Φ.

2.4. Tout ensemble de Φ possède un voisinage qui appartient à Φ.

Si F est un faisceau sur X, on définit alors (cf. [2]) les groupes de cohomologie de X à coefficients dans F et à supports dans Φ, notés $H_\Phi^q(X, \mathsf{F})$, $q = 0, 1, \ldots$ Rappelons leurs propriétés essentielles :

2.5. $H_\Phi^0(X, \mathsf{F})$ est égal au groupe des sections de F dont le support appartient à Φ.

2.6. $H_\Phi^q(X, \mathsf{F}) = 0$ pour $q > 0$ si F est *fin*.

2.7. Toute suite exacte de faisceaux $0 \to \mathsf{A} \to \mathsf{B} \to \mathsf{C} \to 0$ donne naissance à une suite exacte de cohomologie :

$$\ldots \to H_\Phi^q(X, \mathsf{A}) \to H_\Phi^q(X, \mathsf{B}) \to H_\Phi^q(X, \mathsf{C}) \to H_\Phi^{q+1}(X, \mathsf{A}) \to \cdots .$$

Des propriétés précédentes on tire facilement (cf. [2], XVI, XIX ou encore [10], n° 2) :

2.8. Soit $0 \to \mathsf{F} \to \mathsf{C}^0 \xrightarrow{\delta} \mathsf{C}^1 \xrightarrow{\delta} \mathsf{C}^2 \xrightarrow{\delta} \cdots$ une suite exacte de faisceaux, et supposons que tous les $H_\Phi^p(X, \mathsf{C}^q)$ soient nuls pour $p > 0$

(ce qui sera notamment le cas si les faisceaux C^q sont fins). Dans ces conditions, la somme directe $\Sigma_{q \geqslant 0} H^0_\Phi(X, \mathsf{C}^q)$, munie de l'opérateur cobord défini par δ, est un complexe gradué dont le q-ième groupe de cohomologie est isomorphe à $H^q_\Phi(X, \mathsf{F})$.

Lorsque Φ est la famille de tous les sous-ensembles fermés (resp. compacts) de X, on écrit $H^q(X, \mathsf{F})$ (resp. $H^q_*(X, \mathsf{F})$) à la place de $H^q_\Phi(X, \mathsf{F})$. Ces deux familles, de beaucoup les plus importantes dans les applications, sont les seules qui interviendront dans les §§ 3 et 4.

§ 2. Généralisation d'un théorème de Dolbeault

Nous supposons à partir de maintenant que X est une variété analytique complexe, dénombrable à l'infini (donc paracompacte), et de dimension complexe n.

3. Faisceaux de formes différentielles sur X. Nous aurons à considérer les faisceaux suivants sur la variété X :

O faisceau des germes de fonctions holomorphes.

Ω^p faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré p.

$\mathsf{A}^{p,q}$ faisceau des germes de formes différentielles de type (p, q) à coefficients indéfiniment différentiables.

$\mathsf{K}^{p,q}$ faisceau des germes de formes différentielles de type (p, q) à coefficients distributions[2]).

Tous ces faisceaux sont des faisceaux de O-modules, de façon évidente. On a $\Omega^0 = \mathsf{O}$, $\Omega^p \subset \mathsf{A}^{p,0}$, $\mathsf{A}^{p,q} \subset \mathsf{K}^{p,q}$. Les sections de $\mathsf{K}^{p,q}$ sont les *courants* de type (p, q) cf. [8].

On sait que, si ω est une forme de type (p, q), $d\omega$ est la somme d'une forme de type $(p+1, q)$ et d'une forme de type $(p, q+1)$ que nous noterons respectivement $d'\omega$ et $d''\omega$; l'opérateur différentiel d'' définit donc un homomorphisme de $\mathsf{A}^{p,q}$ dans $\mathsf{A}^{p,q+1}$ et un homomorphisme de $\mathsf{K}^{p,q}$ dans $\mathsf{K}^{p,q+1}$. On observera que ces homomorphismes sont O-linéaires puisque $d''(f) = 0$ si f est une fonction holomorphe.

Si ω est une forme différentielle de type $(p, 0)$, à coefficients différentiables, la condition $d''\omega = 0$ équivaut visiblement à dire que ω est

[2]) Sur une variété orientée de dimension réelle m, nous appelons „distribution" un courant de degré 0, c'est-à-dire un élément du dual de l'espace des formes différentielles à supports compacts de degré m (cf. [8]). Cette définition est nécessaire si l'on veut qu'une fonction soit une distribution particulière.

holomorphe ; le même résultat vaut pour les courants, comme il résulte par exemple de [9], Chap. VI, §§ 6—7. Par ailleurs, d'après un résultat de Grothendieck (cité dans [7]), toute forme ω, à coefficients différentiables ou distributions, de type (p, q) avec $q \geqslant 1$, et telle que $d''\omega = 0$, est localement égale à $d''\alpha$, avec α de type $(p, q-1)$. En d'autres termes (cf. [7]) :

Proposition 1. *Les suites d'homomorphismes de faisceaux :*

$$0 \to \Omega^p \to \mathsf{A}^{p,0} \xrightarrow{d''} \mathsf{A}^{p,1} \xrightarrow{d''} \dots \to \mathsf{A}^{p,n} \to 0$$

et

$$0 \to \Omega^p \to \mathsf{K}^{p,0} \xrightarrow{d''} \mathsf{K}^{p,1} \xrightarrow{d''} \dots \to \mathsf{K}^{p,n} \to 0$$

sont des suites exactes.

4. Espaces fibrés analytiques à fibres vectorielles. Soit P un espace fibré principal analytique complexe, de base X, et de groupe structural G le groupe linéaire complexe $\boldsymbol{GL}_r(\boldsymbol{C})$. Prenons pour fibre type F l'espace $\boldsymbol{C}^r$ sur lequel G opère de façon évidente, et soit $V = P \times_G F$ l'espace fibré associé à P et de fibre type F (rappelons que V est l'espace quotient de $P \times F$ par la relation d'équivalence $(p \cdot g, f) \equiv (p, g \cdot f)$ pour $p \in P$, $g \in G$, $f \in F$). Puisque les opérations de G conservent la structure vectorielle de $\boldsymbol{C}^r$, chaque fibre V_x de V $(x \in X)$ est munie d'une structure d'espace vectoriel complexe de dimension r. Un tel espace fibré V est dit *espace fibré analytique à fibre vectorielle.* Il est localement isomorphe à $X \times \boldsymbol{C}^r$, les changement de cartes se faisant au moyen de matrices holomorphes inversibles de degré r.

Si $s(x)$ est une section holomorphe de V au-dessus d'un ouvert U de X, et si $f(x)$ est une fonction holomorphe sur U, le produit $f(x) \cdot s(x)$ est une section holomorphe de V sur U ; en outre, la somme de deux sections holomorphes est encore une section holomorphe. Il en résulte que le faisceau $\mathsf{S}(V)$ des germes de sections holomorphes de V est muni d'une structure de faisceau analytique ; puisque V est localement isomorphe à $X \times \boldsymbol{C}^r$, ce faisceau est localement isomorphe à O^r et c'est en particulier un faisceau analytique cohérent.

Inversement, soit F un faisceau analytique localement isomorphe à O^r. Il existe donc un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ de X et, pour chaque α, un isomorphe φ_α de O^r sur la restriction de F à U_α ; $\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha$ est un automorphisme de O^r au-dessus de $U_\alpha \cap U_\beta$, donc est défini par une matrice holomorphe inversible $M^{\alpha\beta}$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$; les $M^{\alpha\beta}$ définissent un espace

fibré V à fibre vectorielle tel que $\mathsf{S}(V)$ soit isomorphe à F, et l'on voit facilement que cette propriété caractérise V, à un isomorphisme près.

Il y a donc une correspondance biunivoque entre faisceaux analytiques localement libres de rang r (i. e. localement isomorphes à O^r), et espaces fibrés analytiques à fibres vectorielles de dimension r [3]).

5. Formes différentielles à coefficients dans un espace fibré analytique à fibre vectorielle. Soit V un espace fibré analytique à fibre vectorielle de base X. Nous allons attacher à V les faisceaux suivants :

$$\Omega^p(V) = \mathsf{S}(V) \otimes_{\mathsf{O}} \Omega^p \ , \qquad \mathsf{A}^{p,q}(V) = \mathsf{S}(V) \otimes_{\mathsf{O}} \mathsf{A}^{p,q} \ ,$$
$$\mathsf{K}^{p,q}(V) = \mathsf{S}(V) \otimes_{\mathsf{O}} \mathsf{K}^{p,q} \ .$$

On a $\Omega^0(V) = \mathsf{S}(V)$, $\Omega^p(V) \subset \mathsf{A}^{p,0}(V)$, $\mathsf{A}^{p,q}(V) \subset \mathsf{K}^{p,q}(V)$. Une section de $\mathsf{A}^{p,q}(V)$ sera appelée une forme différentielle de type (p, q) à coefficients dans V ; comme $\mathsf{S}(V)$ est localement isomorphe à O^r, une telle forme peut être localement identifiée à un système de r formes différentielles de type (p, q), au sens usuel.

Puisque d'' est un homomorphisme O-linéaire de $\mathsf{A}^{p,q}$ dans $\mathsf{A}^{p,q+1}$, on peut définir l'homomorphisme

$$1 \otimes d'' : \mathsf{S}(V) \otimes_{\mathsf{O}} \mathsf{A}^{p,q} \to \mathsf{S}(V) \otimes_{\mathsf{O}} \mathsf{A}^{p,q+1} \ ,$$

et l'on obtient ainsi un homomorphisme de $\mathsf{A}^{p,q}(V)$ dans $\mathsf{A}^{p,q+1}(V)$ que nous noterons encore d''. Définition analogue pour $\mathsf{K}^{p,q}(V)$.

Proposition 2. *Les suites d'homomorphismes de faisceaux :*

$$0 \to \Omega^p(V) \to \mathsf{A}^{p,0}(V) \xrightarrow{d''} \mathsf{A}^{p,1}(V) \xrightarrow{d''} \ldots \to \mathsf{A}^{p,n}(V) \to 0$$

et

$$0 \to \Omega^p(V) \to \mathsf{K}^{p,0}(V) \xrightarrow{d''} \mathsf{K}^{p,1}(V) \xrightarrow{d''} \ldots \to \mathsf{K}^{p,n}(V) \to 0$$

sont des suites exactes.

En effet, elles se déduisent des suites exactes de la proposition 1 par produit tensoriel avec $\mathsf{S}(V)$ qui est localement libre.

Proposition 3. *Les faisceaux* $\mathsf{A}^{p,q}(V)$ *et* $\mathsf{K}^{p,q}(V)$ *sont fins.*

En effet, si g est une fonction différentiable sur X, l'application $\omega \to g \cdot \omega$ est un homomorphisme O-linéaire de $\mathsf{A}^{p,q}$ dans lui-même, donc définit un homomorphisme de $\mathsf{A}^{p,q}(V)$ dans lui-même ; en considérant alors une partition de l'unité $\{g_\alpha\}$, on voit que $\mathsf{A}^{p,q}(V)$ est fin, et de même pour $\mathsf{K}^{p,q}(V)$.

---

[3]) Bien entendu, un résultat analogue vaut pour les espaces fibrés topologiques (resp. différentiables, analytiques réels, algébriques, ...) à fibres vectorielles.

6. Groupes de cohomologie de X à coefficients dans $\Omega^p(V)$.

Posons $A_\Phi^{p,q}(V) = H_\Phi^0(X, \mathsf{A}^{p,q}(V))$, espace des formes différentielles de type (p, q), à coefficients dans V, et à supports dans une famille Φ vérifiant les conditions 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4. L'opérateur différentiel d'' applique $A_\Phi^{p,q}(V)$ dans $A_\Phi^{p,q+1}(V)$ et l'on a $d'' \circ d'' = 0$. Posons alors $A_\Phi(V) = \Sigma_{p,q} A_\Phi^{p,q}(V)$; muni de l'opérateur d'', $A_\Phi(V)$ est un complexe bigradué dont nous désignerons le groupe de cohomologie de bidegré (p, q) par $H^{p,q}(A_\Phi(V))$. Si Φ est la famille de tous les sous-ensembles fermés (resp. compacts) de X, on écrira $A^{p,q}(V)$ et $A(V)$ (resp. $A_*^{p,q}(V)$ et $A_*(V)$) à la place de $A_\Phi^{p,q}(V)$ et $A_\Phi(V)$.

On définit de même $K_\Phi^{p,q}(V)$ et $K_\Phi(V) = \Sigma_{p,q} K_\Phi^{p,q}(V)$.

En appliquant 2.8 aux suites exactes de la proposition 2 (ce qui est licite, vu la proposition 3), on obtient le théorème suivant, qui généralise celui de [7] :

Théorème 1. *Soient X une variété analytique complexe dénombrable à l'infini, V un espace fibré analytique à fibre vectorielle de base X et Φ une famille de parties de X vérifiant les conditions* 2.1, 2.2, 2.3 *et* 2.4. *Le groupe $H_\Phi^q(X, \Omega^p(V))$ est isomorphe à $H^{p,q}(A_\Phi(V))$ ainsi qu'à $H^{p,q}(K_\Phi(V))$.*

(En outre, les trois groupes en question sont munis de structures vectorielles complexes, et les isomorphismes du théorème 1 respectent ces structures.)

Corollaire 1. *Le groupe $H_\Phi^q(X, \mathsf{S}(V))$ est isomorphe à $H^{0,q}(A_\Phi(V))$ ainsi qu'à $H^{0,q}(K_\Phi(V))$.*

Inversement, le corollaire 1 permet de retrouver le théorème 1 : puisque le faisceau $\Omega^p(V)$ est localement libre, il existe un espace fibré à fibre vectorielle W tel que $\mathsf{S}(W)$ soit isomorphe à $\Omega^p(V)$; il est d'ailleurs facile de voir que la fibre W_x de W en $x \in X$ est canoniquement isomorphe à $V_x \otimes_C \overset{p}{\wedge} D_x$, où D_x désigne le dual de l'espace tangent à X en x. En appliquant le corollaire 1 à W, on voit que

$$H_\Phi^q(X, \Omega^p(V)) = H_\Phi^q(X, \mathsf{S}(W))$$

est isomorphe à $H^{0,q}(A_\Phi(W))$; pour retrouver le théorème 1, il suffit alors de vérifier que $\mathsf{A}^{0,q}(W)$ est isomorphe à $\mathsf{A}^{p,q}(V)$, ce qui ne présente pas de difficultés.

Corollaire 2. $H_\Phi^q(X, \Omega^p(V)) = 0$ *pour* $q > n$, *si n est la dimension complexe de X.*

7. **Remarque.** Si F est un faisceau analytique quelconque, on peut encore former la suite :

$$0 \to \mathsf{F} \to \mathsf{F} \otimes_{\mathsf{O}} \mathsf{A}^{0,0} \xrightarrow{d''} \mathsf{F} \otimes_{\mathsf{O}} \mathsf{A}^{0,1} \to \ldots \to \mathsf{F} \otimes_{\mathsf{O}} \mathsf{A}^{0,n} \to 0 \ .$$

Si l'on pouvait montrer que cette suite est exacte, on aurait ainsi obtenu une résolution de F par des faisceaux fins (cf. 2.8) et le théorème 1 ainsi que ses corollaires seraient ainsi étendus à tout faisceau analytique. Malheureusement, il n'est nullement évident que cette suite soit exacte ; on pourrait penser à le démontrer en prouvant que $\mathrm{Tor}_p^{\mathsf{O}_x}(\mathsf{F}_x, \mathsf{A}_x^{0,0}) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$, mais la question parait difficile.

§ 3. Le théorème de dualité

8. **Topologie sur l'espace** $A^{p,q}(V)$. Nous allons définir une famille de semi-normes [4]) sur l'espace $A^{p,q}(V)$ des sections de $\mathsf{A}^{p,q}(V)$.

Considérons les systèmes (K, φ, ψ, k) qui vérifient les conditions suivantes :

8.1. K est un compact de X.

8.2. φ est un homéomorphisme analytique d'un voisinage U de K sur un ouvert de $\boldsymbol{C}^n$.

8.3. ψ est un isomorphisme de $\pi^{-1}(U)$ sur $U \times \boldsymbol{C}^r$, π désignant la projection de V sur X.

8.4. k est une suite de $2n$ entiers $\geqslant 0$: $r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n$.

Si ω est un élément de $A^{p,q}(V)$, la restriction de ω à U peut être identifiée (au moyen de ψ) à un système de r formes différentielles de type (p, q) sur U, système qui peut lui-même être identifié (au moyen de φ) à un système de $r \cdot \binom{n}{p} \cdot \binom{n}{q} = N$ fonctions différentiables sur $\varphi(U)$; nous noterons ces fonctions $\omega_{i,\varphi,\psi}$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Soit D^k l'opérateur différentiel $\dfrac{\partial^{r_1+\ldots+r_n+s_1+\ldots+s_n}}{\partial z_1^{r_1} \ldots \partial z_n^{r_n} \partial \bar{z}_1^{s_1} \ldots \partial \bar{z}_n^{s_n}}$. Nous poserons :

$$p_{K,\varphi,\psi,k}(\omega) = \operatorname*{Sup}_{z \in \varphi(K)} \ \operatorname*{Sup}_{1 \leqslant i \leqslant N} \ | D^k \omega_{i,\varphi,\psi}(z) | \ . \tag{8.5}$$

Les fonctions $p_{K,\varphi,\psi,k}$ sont des semi-normes ; lorsque (K, φ, ψ, k) varie de toutes les façons possibles, ces semi-normes définissent une topologie sur $A^{p,q}(V)$ qui est visiblement séparée. On voit aisément

[4]) Cf. [1], auquel nous renvoyons pour tout ce qui concerne les espaces vectoriels topologiques.

que cette topologie ne change pas si l'on se borne à considérer une famille de compacts K_α dont les intérieurs recouvrent X, et, pour chacun d'eux, un couple $(\varphi_\alpha, \psi_\alpha)$ vérifiant 8.2 et 8.3. La topologie de $A^{p,q}(V)$ peut donc être définie par une famille dénombrable de semi-normes : c'est une topologie métrisable.

Une suite ω^n d'éléments de $A^{p,q}(V)$ tend vers 0 au sens de la topologie précédente si, au voisinage de tout point de X, les N fonctions qui représentent localement ω^n tendent uniformément vers 0 ainsi que chacune de leurs dérivées partielles. On peut donc dire que la topologie de $A^{p,q}(V)$ est celle de la *convergence uniforme locale* (ou sur tout compact, cela revient au même) *de chaque dérivée*. L'espace $A^{p,q}(V)$ est tout à fait analogue à l'espace E de Schwartz ([9], p. 88) ; on vérifie, comme pour E, qu'il est complet, autrement dit que c'est un *espace de Fréchet*.

9. Dual topologique de $A^{p,q}(V)$. On sait que le dual topologique de E peut être identifié à l'espace des distributions à supports compacts (cf. [9], p. 89, théorème XXV). Nous allons étendre ce résultat à $A^{p,q}(V)$.

Soit V^* l'espace fibré dual de V : si V est défini au moyen de l'espace fibré principal P, on peut définir V^* comme espace associé à P, de fibre type $\boldsymbol{C}^r$ sur lequel $\boldsymbol{GL}_r(\boldsymbol{C})$ opère par la représentation contragrédiente de la représentation usuelle ; ou encore, si V est défini par des changements de cartes qui sont des matrices holomorphes inversibles $M^{\alpha\beta}$, on peut définir V^* au moyen des matrices contragrédientes $\check{M}^{\alpha\beta} = {}^t(M^{\alpha\beta})^{-1}$.

Pour tout $x \in X$, il existe une forme bilinéaire canonique sur $V_x \times V_x^*$ qui met ces deux espaces en dualité (d'où le nom d'espace fibré „dual") ; elle définit un homomorphisme O-linéaire de $\mathsf{S}(V) \otimes_{\mathsf{O}} \mathsf{S}(V^*)$ dans O ; d'autre part, l'opération de produit extérieur définit un homomorphisme O-linéaire de $\mathsf{A}^{p,q} \otimes_{\mathsf{O}} \mathsf{K}^{p',q'}$ dans $\mathsf{K}^{p+p',q+q'}$, q et q' étant des entiers $\geqslant 0$ quelconques. D'où, en passant au produit tensoriel un homomorphisme O-linéaire

$$\varepsilon : \mathsf{A}^{p,q}(V) \otimes_{\mathsf{O}} \mathsf{K}^{p',q'}(V^*) \to \mathsf{K}^{p+p',q+q'} .$$

Si $\omega \in A^{p,q}(V)$ et $T \in \underset{*}{K}^{p',q'}(V^*)$, l'image de $\omega \otimes T$ par ε sera notée $\omega \wedge T$; c'est un élément de $\underset{*}{K}^{p+p',q+q'}$, c'est-à-dire un courant à support compact de type $(p+p', q+q')$. Si l'on prend une carte locale de V et la carte correspondante de V^*, la forme ω s'identifie à r formes ω_i, le courant T à r courants T_i, et $\omega \wedge T$ est égal à $\Sigma_{i=1}^{i=r} \omega_i \wedge T_i$.

Prenons en particulier $p' = n - p$, $q' = n - q$. Alors $\omega \wedge T$ est un courant à support compact de type (n, n), que l'on peut donc intégrer sur X (X étant orientée de façon naturelle par sa structure complexe). Nous poserons :

$$\langle \omega, T \rangle = \int_X \omega \wedge T \ .$$

Pour T fixé, l'application $\omega \to \langle \omega, T \rangle$ est une forme linéaire sur $A^{p,q}(V)$ que nous désignerons par L_T.

Proposition 4. *L'application $T \to L_T$ est un isomorphisme de $K_*^{n-p,\, n-q}(V^*)$ sur le dual topologique de $A^{p,q}(V)$.* [5])

Il est immédiat que $L_T = 0$ entraîne $T = 0$. Il nous faut donc montrer : a) que L_T est continue, b) que toute forme linéaire continue L sur $A^{p,q}(V)$ est égale à une forme L_T.

Choisissons un recouvrement ouvert localement fini $\{U_\alpha\}$ de X assez fin pour que V soit trivial au-dessus de chaque U_α et que U_α soit relativement compact. Soit $\{\theta_\alpha\}$ une partition différentiable de l'unité subordonnée à $\{U_\alpha\}$.

Montrons d'abord la continuité de L_T. Soit ω^n une suite d'éléments de $A^{p,q}(V)$ tendant vers 0. Pour tout α, la suite $\theta_\alpha \omega^n$ tend vers 0, et les supports de ces formes restent contenus dans un compact fixe intérieur à U_α ; l'expression locale de $\theta_\alpha \omega^n \wedge T$ écrite plus haut montre alors que $\langle \theta_\alpha \omega^n, T \rangle$ tend vers 0. D'autre part, l'ensemble H des indices α tels que U_α rencontre le support de T est fini, puisque ce support est compact. Il en résulte que $\langle \omega^n, T \rangle = \Sigma_{\alpha \in H} \langle \theta_\alpha \omega^n, T \rangle$ tend vers 0, et L_T est bien une forme linéaire continue.

Soit inversement L une forme linéaire continue sur $A^{p,q}(V)$. Soit ω^n une suite d'éléments de $A^{p,q}(V)$, tendant vers 0, et telle que le support de ω^n soit contenu dans un compact fixe intérieur à U_α. Evidemment $L(\omega^n)$ tend vers 0. Or chaque ω^n est défini sur U_α par un système de r formes différentielles de type (p, q) à supports compacts, et l'on sait que le dual topologique de l'espace des formes différentielles à supports compacts de type (p, q) (muni de la topologie précédente, analogue à celle de l'espace D de Schwartz) est l'espace des courants de type $(n - p, n - q)$ (cf. [8], où ceci est pris comme définition des

---

[5]) Cette proposition est un cas particulier d'un résultat valable pour tout espace fibré différentiable V: le dual de l'espace des sections différentiables de V est isomorphe à l'espace des courants de degré maximum, à coefficients dans l'espace fibré dual de V, et à supports compacts.

courants). Il s'ensuit qu'il existe, pour chaque α, une section T_α de $\mathsf{K}^{n-p,\,n-q}(V^*)$ au-dessus de U_α, telle que $\int_{U_\alpha} \omega \wedge T_\alpha = L(\omega)$ pour tout $\omega \in A^{p,q}(V)$ dont le support est contenu dans U_α. Il est clair que $T_\alpha = T_\beta$ dans $U_\alpha \cap U_\beta$, autrement dit que T_α est la restriction à U_α d'une section T de $\mathsf{K}^{n-p,\,n-q}(V^*)$ au-dessus de X ; la continuité de L montre en outre que $T_\alpha = 0$ pour tous les α sauf un nombre fini d'entre eux, c'est-à-dire que le support de T est compact. Enfin, pour tout $\omega \in A^{p,q}(V)$, on a :

$$L(\omega) = \sum_\alpha L(\theta_\alpha \omega) = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \theta_\alpha \omega \wedge T_\alpha = \int_X \omega \wedge T = L_T(\omega) \ ,$$

c. q. f. d.

A partir de maintenant, nous identifierons $K_*^{n-p,\,n-q}(V^*)$ avec le dual topologique de $A^{p,q}(V)$ au moyen de l'application $T \to L_T$.

Proposition 5. *L'application linéaire* $d'' : A^{p,q}(V) \to A^{p,q+1}(V)$ *est continue et sa transposée est* $(-1)^{p+q+1} d'' : K_*^{n-p,\,n-q-1}(V^*) \to K_*^{n-p,\,n-q}(V^*)$.

Soient $\omega \in A^{p,q}(V)$ et $T \in K_*^{n-p,\,n-q-1}(V^*)$. On a :

$$d(\omega \wedge T) = d''(\omega \wedge T) = d''(\omega) \wedge T + (-1)^{p+q} \omega \wedge d''(T) \ ,$$

et comme $\int_X d(\omega \wedge T) = 0$, on en déduit

$$\langle d''(\omega), T \rangle + (-1)^{p+q} \langle \omega, d''(T) \rangle = 0 \ ,$$

ce qui démontre la proposition (la continuité de d'' étant évidente).

10. Démonstration du théorème de dualité. Les propositions 4 et 5 signifient que le dual topologique du complexe $A(V)$ est isomorphe au complexe $K_*(V^*)$. Pour passer de là aux groupes de cohomologie de ces complexes, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1. *Soient* L, M, N *trois espaces de Fréchet, et* $u : L \to M$, $v : M \to N$, *deux homomorphismes* [6]) *linéaires tels que* $v \circ u = 0$. *Soient* L^*, M^*, N^* *les duals topologiques de* L, M, N, *et* ${}^t u$, ${}^t v$ *les applications transposées de* u, v. *Posons* $C = v^{-1}(0)$, $B = u(L)$, $H = C/B$, *et* $C' = {}^t u^{-1}(0)$, $B' = {}^t v(N^*)$, $H' = C'/B'$.

Alors H *est un espace de Fréchet dont le dual topologique est isomorphe à* H'.

Puisque u est un homomorphisme, $B = u(L)$ est complet, donc fermé, et H est un espace de Fréchet (cf. [1], p. 34).

---

[6]) Cf. *N. Bourbaki*, Top. Gén., Chap. III, § 2.

Soit d'autre part $c' \in C'$, et soit h' l'élément de H' défini par c'. Par définition, c' est une forme linéaire continue sur M, nulle sur B, donc définit une forme linéaire continue sur H qui ne dépend que de h'. Si cette forme linéaire est nulle, c' est nulle sur C, donc appartient à ${}^t v(N^*) = B'$, puisque v est un homomorphisme, autrement dit $h' = 0$.

Inversement, toute forme linéaire λ continue sur H, peut être identifiée à une forme linéaire continue sur C qui est nulle sur B ; d'après le théorème de Hahn-Banach ([1], p. 111) on peut la prolonger à M ; on obtient ainsi un élément c' de C', donc un élément h' de H', et il est immédiat que la forme linéaire définie par h' sur H n'est autre que λ, ce qui achève de démontrer que H' est isomorphe au dual topologique de H.

Nous allons appliquer le lemme précédent avec $L = A^{p,q-1}(V)$, $M = A^{p,q}(V)$, $N = A^{p,q+1}(V)$, et $u = d''$, $v = d''$. D'après la proposition 4, on a:

$$L^* = K_*^{n-p,n-q+1}(V^*), \quad M^* = K_*^{n-q,n-q}(V^*), \quad N^* = K_*^{n-p,n-q-1}(V^*),$$

et d'après la proposition 5, ${}^t u = (-1)^{p+q} d''$, ${}^t v = (-1)^{p+q+1} d''$. D'autre part, le théorème 1 montre que

$$H = H^q\big(X, \Omega^p(V)\big) \quad \text{et} \quad H' = H_*^{n-q}\big(X, \Omega^{n-p}(V^*)\big) .$$

D'où, en appliquant le lemme 1 :

Théorème 2. *Soit X une variété analytique complexe, dénombrable à l'infini, de dimension complexe n, et soit V un espace fibré analytique à fibre vectorielle de base X. Supposons que les deux applications linéaires :*

$$A^{p,q-1}(V) \xrightarrow{d''} A^{p,q}(V) \xrightarrow{d''} A^{p,q+1}(V)$$

soient des homomorphismes. Alors le dual topologique de l'espace de Fréchet $H^q\big(X, \Omega^p(V)\big)$ est canoniquement isomorphe à $H_*^{n-q}\big(X, \Omega^{n-p}(V^*)\big)$.

Pour $p = 0$ (cas auquel on peut toujours se ramener, comme on l'a vu au n° 6), le théorème 2 montre que $H^q\big(X, \mathsf{S}(V)\big)$ est en dualité avec $H_*^{n-q}\big(X, \Omega^n(V^*)\big)$. Or $\Omega^n(V^*)$ est localement libre, donc est isomorphe à $\mathsf{S}(\tilde{V})$, où $\tilde{V}$ désigne un espace fibré à fibre vectorielle dont la fibre $\tilde{V}_x$ en un point $x \in X$ est canoniquement isomorphe à $V_x^* \otimes_C \overset{n}{\wedge} D_x$, avec les notations du n° 6. On observera que $\tilde{\tilde{V}} = V$.

On peut donc énoncer :

Corollaire. *Supposons que les deux applications linéaires*

$$A^{0,q-1}(V) \xrightarrow{d''} A^{0,q}(V) \xrightarrow{d''} A^{0,q+1}(V)$$

soient des homomorphismes. Alors le dual topologique de l'espace de Fréchet $H^q(X, \mathsf{S}(V))$ *est canoniquement isomorphe à* $H_*^{n-q}(X, \mathsf{S}(\tilde{V}))$.

11. Un critère. Pour appliquer le théorème de dualité, il est nécessaire de démontrer que d'' est un homomorphisme. Voici un critère permettant d'affirmer qu'il en est bien ainsi :

Proposition 6. *Si la dimension de* $H^q(X, \Omega^p(V))$ *est finie, l'application* $d'' : A^{p,q-1}(V) \to A^{p,q}(V)$ *est un homomorphisme.*

Soit $C^{p,q}(V)$ le noyau de $d'' : A^{p,q}(V) \to A^{p,q+1}(V)$; puisque d'' est continue, $C^{p,q}(V)$ est fermé, donc est un espace de Fréchet. Comme l'hypothèse faite équivaut à dire que $d''(A^{p,q-1}(V))$ est un sous-espace de codimension finie de $C^{p,q}(V)$, on voit que la proposition 6 est un cas particulier du résultat suivant :

Lemme 2. *Soit u une application linéaire continue d'un espace de Fréchet L dans un espace de Fréchet M. Si $u(L)$ est un sous-espace de codimension finie de M, l'application u est un homomorphisme.*

Démonstration[7]) : Soit P un supplémentaire algébrique de $u(L)$ dans M, et soit v l'application de $L \times P$ dans M définie par :

$$v(x, y) = u(x) + y \quad \text{si} \quad x \in L, \ y \in P .$$

L'application v est une application linéaire continue de $L \times P$ sur M ; or P est un espace séparé de dimension finie, donc $L \times P$ est un espace de Fréchet. Le théorème de Banach ([1], p. 34) montre alors que v est un homomorphisme, d'où il résulte immédiatement que u est un homomorphisme.

12. Application aux variétés de Stein.

Théorème 3. *Soit X une variété de Stein, de dimension complexe n, et soit V un espace fibré analytique à fibre vectorielle, de base X. On a* $H_*^q(X, \Omega^p(V)) = 0$ *pour* $q \neq n$, *et* $H_*^n(X, \Omega^p(V))$ *est isomorphe au dual topologique de* $H^0(X, \Omega^{n-p}(V^*))$.

(Lorsque V est l'espace fibré trivial $X \times \mathbf{C}$, on retrouve le théorème 4 de [10]).

En effet, d'après le théorème B des variétés de Stein (cf. [3], [4]), on a $H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*)) = 0$ pour $q \neq n$, ce qui montre (proposition 6) que d'' est toujours un homomorphisme. En appliquant le théorème 2,

---

[7]) Cette démonstration est due à *L. Schwartz.*

avec V^* et $n-p$ à la place de V et de p respectivement, on obtient le résultat énoncé.

On notera que la topologie de $H^0(X, \Omega^{n-p}(V^*))$ est celle de la *convergence compacte.*

Corollaire. *Soient K une partie compacte de X et s une section holomorphe de V au-dessus de $X-K$. Si $n \geqslant 2$, il existe une section holomorphe de V au-dessus de X tout entier qui coincide avec s en dehors d'un compact $K' \supset K$.*

La démonstration est identique à celle donnée dans [10], n° 13, dans le cas où V est trivial.

13. Application aux variétés compactes. Lorsque X est une variété analytique complexe compacte, on sait (cf. [6]) que la dimension de $H^q(X, \mathsf{F})$ est finie quel que soit le faisceau analytique cohérent F. On peut donc appliquer le critère de la proposition 6, et l'on obtient ainsi (compte tenu de ce que $H^q_*(X, \mathsf{F}) = H^q(X, \mathsf{F})$ puisque X est compacte) :

Théorème 4. *Soit X une variété analytique complexe compacte, de dimension complexe n, et soit V un espace fibré analytique à fibre vectorielle, de base X. Alors les espaces vectoriels*

$$H^q(X, \Omega^p(V)) \quad \textit{et} \quad H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(V^*))$$

sont en dualité ; en particulier, ces espaces ont même dimension.

Pour $p = 0$:

Corollaire. $H^q(X, \mathsf{S}(V))$ *et* $H^{n-q}(X, \mathsf{S}(V))$ *ont même dimension.*

14. Un exemple où d'' n'est pas un homomorphisme. Soit $Y = \boldsymbol{C}^2$, et soit F un sous-ensemble fermé, connexe, et non compact de Y. Posons $X = Y - F$. En appliquant la suite exacte de cohomologie (cf. [2], XVII—4), on obtient la suite exacte :

$$H^0_*(F, \mathsf{O}) \to H^1_*(X, \mathsf{O}) \to H^1_*(Y, \mathsf{O}) \ .$$

D'après le théorème 4 de [10] (ou le théorème 3 ci-dessus),

$$H^1_*(Y, \mathsf{O}) = 0 \ ,$$

et d'après l'hypothèse faite sur F, $H^0_*(F, \mathsf{O}) = 0$. Donc $H^1_*(X, \mathsf{O}) = 0$. Choisissons F de telle sorte que X ne soit pas un domaine d'holomorphie (il suffit de prendre pour F une droite réelle, par exemple). D'après un résultat de H. Cartan (cf. [10], p. 65, note 7), on a $H^1(X, \mathsf{O}) \neq 0$, et

d'autre part $H^1_*(X, \Omega^2) = H^1_*(X, \mathsf{O}) = 0$, nous venons de le voir. Le théorème 2 montre alors que d'' n'est pas un homomorphisme.

Le comportement de l'opérateur d'' est donc assez différent de celui de d, puisque d est toujours un homomorphisme (en effet, le sous-espace des cobords est caractérisé par l'annulation des périodes, donc fermé).

15. Interprétation de la dualité entre $H^q(X, \Omega^p(V))$ et $H^{n-q}_*(X, \Omega^{n-p}(V^*))$. Nous allons donner une interprétation purement cohomologique de la forme bilinéaire définie par le produit scalaire $\langle \omega, T \rangle$ sur

$$H^q(X, \Omega^p)) \times H^{n-q}_*(X, \Omega^{n-p}(V^*)).$$

La dualité entre V et V^* définit (cf. n° 9) un homomorphisme O-linéaire : $\mathsf{S}(V) \otimes_{\mathsf{O}} \mathsf{S}(V^*) \to \mathsf{O}$; d'autre part, l'opération de produit extérieur définit un homomorphisme O-linéaire : $\Omega^p \otimes_{\mathsf{O}} \Omega^{n-p} \to \Omega^n$; par passage au produit tensoriel, on obtient ainsi un homomorphisme O-linéaire : $\Omega^p(V) \otimes_{\mathsf{O}} \Omega^{n-p}(V^*) \to \Omega^n$, d'où un homomorphisme O-linéaire : $\Omega^p(V) \otimes_{\mathsf{O}} \Omega^{n-p}(V^*) \to \mathsf{Z}^n$, Z^n désignant le faisceau des germes de formes différentielles fermées de degré n.

Or un tel homomorphisme donne naissance à un cup-produit (cf. [2], XVII—9) qui est ici une application bilinéaire de

$$H^q(X, \Omega^p(V)) \times H^{n-q}_*(X, \Omega^{n-p}(V^*)) \quad \text{dans} \quad H^n_*(X, \mathsf{Z}^n) .$$

Comme $H^n_*(X, \mathsf{Z}^n) = H^{2n}_*(X, \boldsymbol{C})$ (cf. la démonstration du théorème de de Rham donnée dans [10]), qui est lui-même isomorphe à $\boldsymbol{C}$ si X est connexe (ce que l'on peut supposer), on a bien ainsi obtenu une forme bilinéaire à valeurs complexes sur $H^q(X, \Omega^p(V)) \times H^{n-q}_*(X, \Omega^{n-p}(V^*))$, et il n'est pas difficile de montrer qu'elle coincide avec celle définie plus haut.

§ 4. Application aux diviseurs

16. Espace fibré associé à un diviseur. Soit D un diviseur de la variété X. En un point $x \in X$, D est égal au diviseur d'une fonction g_x, méromorphe en x, non identiquement nulle, et définie à la multiplication près par un élément inversible de O_x. Soit $\mathsf{L}(D)_x$ l'ensemble des fonctions f, méromorphes au voisinage de x, et telles que $g_x . f$ soit holomorphe en x. La réunion des $\mathsf{L}(D)_x$ forme un sous-faisceau $\mathsf{L}(D)$ du faisceau des germes de fonctions méromorphes sur X. Ce faisceau est localement isomorphe à O, donc est isomorphe à $\mathsf{S}(V_D)$, où V_D est un

espace fibré analytique à fibre vectorielle de dimension 1, de base X. On vérifie tout de suite que, si D et D' sont linéairement équivalents (c'est-à-dire si $D - D'$ est égal au diviseur (f) d'une fonction f méromorphe sur X tout entier), alors $\mathsf{L}(D)$ et $\mathsf{L}(D')$ sont isomorphes, donc aussi V_D et $V_{D'}$; réciproquement, si V_D et $V_{D'}$ sont isomorphes, D et D' sont linéairement équivalents. Enfin V_{-D} est isomorphe à V_D^*, et $V_{D+D'}$ est isomorphe à $V_D \otimes V_{D'}$ [8]).

Soit de même $\Omega^p(D)_x$ l'ensemble des formes différentielles ω, de degré p, méromorphes au voisinage de x, et telles que $g_x \cdot \omega$ soit holomorphe en x. La réunion des $\Omega^p(D)_x$ forme un sous-faisceau du faisceau des germes de formes différentielles méromorphes de degré p sur X. On a $\Omega^p(D) = \mathsf{L}(D) \otimes_{\mathsf{O}} \Omega^p = \mathsf{S}(V_D) \otimes_{\mathsf{O}} \Omega^p = \Omega^p(V_D)$. D'où, en appliquant le théorème 4 à l'espace fibré V_D:

Théorème 5. *Soit X une variété analytique complexe compacte, de dimension complexe n, et soit D un diviseur de X. Alors les espaces vectoriels $H^q(X, \Omega^p(D))$ et $H^{n-q}(X, \Omega^{n-p}(-D))$ sont en dualité.*

Pour $p = 0$, il y a donc dualité entre

$$H^q(X, \mathsf{L}(D)) \quad \text{et} \quad H^{n-q}(X, \Omega^n(-D)) .$$

En particulier, $H^n(X, \mathsf{L}(D))$ est isomorphe au dual de $H^0(X, \Omega^n(-D))$, espace des formes différentielles méromorphes de degré n dont le diviseur est $\geqslant D$.

S'il existe des formes différentielles méromorphes ω de degré n non identiquement nulles (ce qui est toujours le cas si X est algébrique, par exemple), leurs diviseurs (ω) sont linéairement équivalents et leur classe K est appelée la *classe canonique* de X. On a alors $\mathsf{L}(K) = \Omega^n$, d'où $\mathsf{L}(K - D) = \Omega^n(-D)$ (ce qui peut aussi s'écrire $\tilde{V}_D = V_{K-D}$), et l'on obtient ainsi:

Corollaire. *Si la classe canonique K est définie, les espaces vectoriels $H^q(X, \mathsf{L}(D))$ et $H^{n-q}(X, \mathsf{L}(K - D))$ sont en dualité.*

17. Application: théorème de Riemann-Roch sur une courbe. Soit X une variété analytique complexe compacte, connexe, de dimension 1. Soit $D = \sum_{P \in X} n_P \cdot P$ un diviseur de X, les n_P étant des entiers nuls sauf un nombre fini d'entre eux. Nous poserons:

$$h^0(D) = \dim H^0(X, \mathsf{L}(D)), \quad h^1(D) = \dim H^1(X, \mathsf{L}(D)), \quad \deg(D) = \sum_{P \in X} n_P .$$

[8]) Cette correspondance entre espaces fibrés et diviseurs est due à *A. Weil*; cf. [11], par exemple.

Lemme 3. *L'entier* $h^0(D) - h^1(D) - \deg(D)$ *ne dépend pas de* D. Il suffit de montrer que cet entier ne change pas lorsqu'on remplace D par $D + P$, où P est un point quelconque de X. Or $\mathsf{L}(D)$ est un sous-faisceau de $\mathsf{L}(D + P)$; soit Q le faisceau quotient $\mathsf{L}(D + P)/\mathsf{L}(D)$. On a $\mathsf{Q}_x = 0$ si $x \neq P$, et $\mathsf{Q}_x = \boldsymbol{C}$ si $x = P$, comme on le voit tout de suite. Donc $H^0(X, \mathsf{Q}) = \boldsymbol{C}$, et $H^q(X, \mathsf{Q}) = 0$ pour $q > 0$. La suite exacte de faisceaux : $0 \to \mathsf{L}(D) \to \mathsf{L}(D + P) \to \mathsf{Q} \to 0$ donne naissance à la suite exacte de cohomologie :

$$0 \to H^0\big(X, \mathsf{L}(D)\big) \to H^0\big(X, \mathsf{L}(D + P)\big) \to \boldsymbol{C} \to H^1\big(X, \mathsf{L}(D)\big) \\ \to H^1\big(X, \mathsf{L}(D + P)\big) \to 0 .$$

D'où, en formant la somme alternée des dimensions :

$$h^0(D) - h^0(D + P) + 1 - h^1(D) + h^1(D + P) = 0 ,$$

ce qui entraîne évidemment :

$$h^0(D) - h^1(D) - \deg(D) = h^0(D + P) - h^1(D + P) - \deg(D + P),$$

c. q. f. d.

Pour $D = 0$, $\mathsf{L}(D) = \mathsf{O}$, d'où $h^0(D) = 1$, puisque X est connexe. Nous poserons $h^1(0) = g$, c'est le *genre* de X. Le lemme 3 peut donc s'écrire sous la forme équivalente :

Lemme 4. $h^0(D) - h^1(D) = \deg(D) + 1 - g$.

Or $H^0\big(X, \mathsf{L}(D)\big)$ est l'espace vectoriel des fonctions méromorphes f telles que $(f) \geqslant -D$; donc $h^0(D)$ coincide avec l'entier noté d'ordinaire $l(D)$.

D'autre part, le théorème 5 montre que $h^1(D)$ est égal à la dimension $i(D)$ de $H^0\big(X, \Omega^1(-D)\big)$, espace des formes différentielles méromorphes ω telles que $(\omega) \geqslant D$.

En portant ces expressions dans le lemme 4, on obtient :

Théorème de Riemann-Roch. $l(D) - i(D) = \deg(D) + 1 - g$.

Remarques. 1) Il résulte, comme on sait, du théorème de Riemann-Roch que X possède „assez" de fonctions et de formes méromorphes ; en particulier, la classe canonique K de X est définie, et l'on a $i(D) = l(K - D)$, d'où la formule usuelle :

$$l(D) - l(K - D) = \deg(D) + 1 - g .$$

2) Le genre g a été défini comme $h^1(0) = i(0)$, c'est-à-dire comme dimension de l'espace vectoriel des formes différentielles holomorphes.

Il n'est pas difficile de montrer qu'il est égal à la moitié du premier nombre de Betti de X : cela résulte, soit de la théorie des formes harmoniques, soit, plus simplement, de la suite exacte de cohomologie définie par la suite exacte de faisceaux $0 \to \boldsymbol{C} \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \to 0$ (on fait une somme alternée de dimensions, et l'on trouve que $2 - 2g$ est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de X, d'où le résultat cherché).

BIBLIOGRAPHIE

[1] *N. Bourbaki,* Livre V. Espaces vectoriels topologiques. Chap. I—II. Paris, Hermann, 1953.

[2] *H. Cartan,* Séminaire E. N. S. 1950—1951.

[3] *H. Cartan,* Séminaire E. N. S. 1951—1952.

[4] *H. Cartan,* Variétés analytiques complexes et cohomologie, Colloque de Bruxelles, 1953, p. 41—55.

[5] *H. Cartan and S. Eilenberg,* Homological Algebra. Princeton Math. Ser., n°. 19.

[6] *H. Cartan et J.-P. Serre,* Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, C.-R. Acad. Sci. Paris **237** (1953), p. 128—130.

[7] *P. Dolbeault,* Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes, C.-R. Acad. Sci. Paris **236** (1953), p. 175—177.

[8] *G. de Rham and K. Kodaira,* Harmonic Integrals. Institute for Advanced Study, 1950.

[9] *L. Schwartz,* Théorie des distributions, I—II. Paris, Hermann, 1950—1951.

[10] *J.-P. Serre,* Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein. Colloque de Bruxelles, 1953, p. 57—68.

[11] *A. Weil,* Fibre spaces in algebraic geometry (Notes by A. Wallace). University of Chicago 1952.

(Reçu le 29 avril 1954)