Beziehungen zwischen speziellen linearen Integralgleichungen erster und zweiter Art und Lösung des Dirichletschen Problems durch das Potential einer einfachen Schicht

von Hans Blumer, Glarus

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist aus der Aufgabe entstanden, die lineare Integralgleichung 1. Art, die bei der Lösung des Dirichletschen Problems im R_3 durch ein Newtonsches Potential einfacher Schicht auftritt, auf eine lineare Integralgleichung 2. Art zu transformieren.

Hilbert hat die analoge Aufgabe in der Ebene in einer Vorlesung über Integralgleichungen (Sommersemester 1905) folgendermaßen gelöst. Wird der Rand C des einfach zusammenhängenden Gebietes G durch die reduzierte Bogenlänge s, $0 \leqslant s \leqslant 2\pi$, beschrieben und sind $f(s)$ die Randwerte der gesuchten harmonischen Funktion $u(p) = \int\limits_C g(t) \cdot \log \frac{1}{r_{pt}} \cdot dt$, $p \in G$, so ist die Dichte g der einfachen Schicht Lösung der Integralgleichung 1. Art

$$f(s) = \int\limits_C g(t) \cdot \log \frac{1}{r_{st}} \cdot dt$$

Hilbert hat festgestellt, daß der Kern $\log \frac{1}{r_{st}}$ dieselbe Singularität aufweist wie die Funktion $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(s-t)}{\pi \cdot n^{2\zeta}} \equiv H(s, t; \zeta)$ für $\zeta = \frac{1}{2}$. Der Operator

$$I^{\zeta} f \equiv \int\limits_0^{2\pi} H(s,t;\zeta) \cdot f(t) \cdot dt + \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} f(t) \cdot dt$$

ermöglicht die Überführung der Integralgleichung 1. Art

$$f(s) = \int\limits_0^{2\pi} K(s,t) \cdot g(t) \cdot dt \ , \quad K(s,t) = H(s,t;\zeta) + \text{reguläre Funktion}$$

in eine Integralgleichung 2. Art, dank den Eigenschaften

$$I^{\zeta}(I^{\zeta_1}f) = I^{\zeta+\zeta_1}f\,, \quad I^0 f = f\,, \quad \frac{d^2}{dt^2}\, I^{\zeta} f = -\, I^{\zeta-1} f + \frac{1}{2\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} f(t) \cdot dt\;.$$

Bei der Übertragung dieser Methode in den Raum kann man von der Tatsache ausgehen, daß die Eigenfunktionen sin (ns), cos (ns) des Kernes $H(s, t; \zeta)$ die periodischen Lösungen der Differentialgleichung $\varphi''(s) + \lambda \cdot \varphi(s) = 0$ $(0 \leqslant s \leqslant 2\pi,\ \ \lambda = n^2)$ sind. Man wird somit die Eigenschaften der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)}{\lambda_n^{\zeta}} \equiv H(p, q; \zeta)$ untersuchen, wobei die $\varphi_n(p)$ die überall auf dem Rande Ω eines Gebietes regulären Lösungen und die λ_n die entsprechenden Eigenwerte der Laplace-Beltramischen Differentialgleichung $\Delta\varphi + \lambda \cdot \varphi = 0$ sind (§ 2).

Eine uns während diesen Untersuchungen zur Kenntnis gekommene Arbeit von *Minakshisundaram* und *Pleijel* [4] löst im wesentlichen die uns interessierenden Probleme über die analytische Fortsetzung von $H(p, q; \zeta)$ bezüglich ζ. Für den Nachweis der Ableitungen von $H(p, q; \zeta)$ benötigen wir aber Abschätzungen für $\xi \to +\infty$ der Greenschen Funktion $G(p, q; \xi) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)}{\lambda_n + \xi}$ des Differentialausdruckes $\Delta f - \xi f$, die über die Resultate der Abhandlung [4] hinausgehen, und die wir in Anlehnung an die erwähnte Arbeit in § 1 entwickeln.

Der Operator $I^{\zeta} f \equiv \int\limits_{\Omega} H(p, q; \zeta) \cdot f(q) \cdot d\omega_q + \dfrac{1}{S} \cdot \int\limits_{\Omega} f(q) \cdot d\omega_q\,,$ $S =$ Inhalt von Ω, besitzt ähnliche Eigenschaften wie das Analogon in der Ebene (§ 3) und gestattet die Zurückführung der Integralgleichungen 1. Art, deren Kerne die gleiche Singularität wie $H(p, q; \zeta)$ aufweisen, auf Integralgleichungen 2. Art vom Fredholmschen Typus (§ 4).

Insbesondere hat der reziproke Abstand $\dfrac{1}{r_{pq}}$ der Punkte p und q $(p, q \in \Omega)$ die Singularität von $H(p, q; \frac{1}{2})$, so daß die am Anfang gestellte Frage über die Lösung des Dirichletschen Problems durch Anwendung der Resultate von § 4 in § 5 behandelt werden kann. In § 6 wird für die Einheitskugel noch ein weiteres Resultat in dieser Richtung angegeben.

E. Picard hat eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben für die Lösung des Dirichletschen Problems durch das Potential einer einfachen Schicht mit quadratisch integrierbarer Dichte. (Siehe [2], S. 478 und [6].) Es scheint aber nicht leicht zu sein, daraus Lösbarkeitsbedingungen herzuleiten, die nur Differenzierbarkeitseigenschaften der Randwerte enthalten. Unter Benützung Cauchyscher Hauptwerte hat *Bertrand*

[7] im Falle der Ebene zeigen können, daß die Existenz der zweiten Ableitung der Randwerte hinreicht, was der in unserer Arbeit gefundenen Bedingung entspricht.

§ 1 Greensche Funktion und Parametrix

Wir betrachten eine im R_3 eingebettete, endliche, geschlossene, zusammenhängende, zweidimensionale Fläche Ω. Ihre Punkte bezeichnen wir mit $p, q, t \ldots$, die geodätische Entfernung von p und q mit s_{pq}.

Wir setzen in der ganzen Arbeit voraus, daß, in bezug auf lokale Normalkoordinaten q_1, q_2, die Koeffizienten $g_{ik}(q)$ der metrischen Form $ds^2 = \sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}(q) \cdot dq_i \cdot dq_k$ 5mal stetig differenzierbar sind.

Für Funktionen f auf Ω führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$f(p) \in C^{(n)}$ oder $f(p, q) \in C^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, heißt, f besitzt ein n.stetiges Differential im betrachteten Bereiche. Wenn keiner bezeichnet ist, handelt es sich um Ω bzw. $\Omega \times \Omega$.

$f(p, q) \in C_\kappa^{(n)}$ heißt: 1) $f(p, q) \in C^{(n)}$ für $s_{pq} > 0$.

2) Es gibt zwei positive Konstanten δ und c so, daß im Bereiche $0 < s_{pq} \leqslant \delta$ von $\Omega \times \Omega$ $|f(p, q)| \leqslant c(s_{pq}^\kappa + 1)$ für $\kappa \neq 0$ und $|f(p, q)| \leqslant c\,|\log s_{pq}|$ für $\kappa = 0$ ist, und daß die absoluten Beträge der Ableitungen ν. Ordnung, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, in diesem Bereiche kleiner sind als $c(s_{pq}^{\kappa-\nu} + 1)$.

$f(p, q) \in C_\kappa^{(n)}$ für q fest, heißt, die Ableitungen und ihre Schranken brauchen nur bezüglich des Punktes p zu existieren.

Der Laplace-Beltrami-Operator auf Ω lautet

$$\Delta_q f(q) \equiv \frac{1}{\sqrt{d(q)}} \cdot \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{d(q)} \cdot \sum_{k=1}^{2} g^{ik}(q) \frac{\partial f(q)}{\partial q_k} \right), \quad q = q(q_1, q_2)$$

wobei die g^{ik} durch $\sum_{k=1}^{2} g_{ik} \cdot g^{kl} = \delta_i^l$ definiert sind. $d(q) \equiv \| g_{ik}(q) \|$.

Die einzige überall auf Ω reguläre Lösung der Differentialgleichung $\Delta_q f(q) = 0$ ist $f = \text{const.}$ Folglich existiert eine verallgemeinerte Greensche Funktion $G_0(p, q)$ des Differentialausdruckes Δf, welche für $s_{pq} \to 0$ logarithmisch singulär wird und den Beziehungen

$$\Delta_p\, G_0(p, q) = \Delta_q\, G_0(p, q) = \frac{1}{S}, \quad p \neq q, \quad S = \text{Inhalt von } \Omega,$$

genügt. Ebenso existiert ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_n(p)\}$ von Eigenfunktionen und eine Folge von reellen, nichtnegativen Eigenwerten λ_n der Differentialgleichung $\Delta\varphi + \lambda_n \cdot \varphi = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, mit den Eigenschaften $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{S}}$, $\varphi_n \in C^{(2)}$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1$, $\lambda_n \leqslant \lambda_{n+1}$, $\lambda_n \to \infty$ für $n \to \infty$. $G_0(p, q)$ ist symmetrisch und besitzt nach dem System der $\{\varphi_n(p)\}$ die formale Entwicklung

$$G_0(p, q) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)}{\lambda_n}$$

Da $G_0(p, q) \in L^2$ [1]), konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$.

Hilfssatz 1. Aus $0 < \lambda_n \leqslant \lambda_{n+1}$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} < \infty$ folgt

$$\limsup_{n \to \infty} \lambda_n (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = \infty \ .$$

Der Beweis ist elementar. Hilfssatz 1 ist scharf in dem Sinne, daß es Beispiele gibt mit

$$\limsup_{n \to \infty} \lambda_n^{\kappa} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0 \qquad \text{für} \qquad \kappa < 1 \ .$$

Nach unsern Voraussetzungen existiert für jeden komplexen Wert $\xi \neq -\lambda_n$ die Greensche Funktion $G(p, q; \xi)$ des Differentialausdruckes $\Delta f - \xi \cdot f$. $G(p, q; \xi)$ ist symmetrisch in p und q und es gilt

$$\Delta_p G(p, q; \xi) = \Delta_q G(p, q; \xi) = \xi \cdot G(p, q; \xi) \ , \qquad p \neq q \ . \tag{1}$$

Die vorher definierten Eigenfunktionen $\varphi_n(p)$ sind auch die Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Delta \varphi - \xi \cdot \varphi + \mu \cdot \varphi = 0$ mit den Eigenwerten $\mu_n = \lambda_n + \xi$. Demnach besitzt $G(p, q; \xi)$ die formale Entwicklung $G(p, q; \xi) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)}{\lambda_n + \xi}$.

Die durch die Greensche Funktion vermittelten Beziehungen zwischen den Differential- und den Integralgleichungen formulieren wir ohne Beweise im Hilfssatz 2, den wir in dieser Arbeit wesentlich benützen werden. Dabei führen wir folgende Bezeichnungen für Mittelwerte ein.

$$\bar{f} \equiv \frac{1}{S} \int f(t) \cdot d\omega_t \ , \quad \bar{f}(\cdot, q) \equiv \frac{1}{S} \int f(t, q) \cdot d\omega_t, \quad \bar{f}(p, \cdot) \equiv \frac{1}{S} \int f(p, t) \cdot d\omega_t$$ [2])

Hilfssatz 2.

Aus $f(p) \in C^{(1)}$ folgt: $\Delta_p \int G_0(p, q) \cdot f(q) \cdot d\omega_q = \bar{f} - f(p)$. (2.1)

Aus $f(p, q) \in C_{\kappa}^{(1)}$ für q fest, $\kappa > -1$, folgt für $p \neq q$:

$$\Delta_p \int G_0(p, t) \cdot f(t, q) \cdot d\omega_t = \bar{f}(\cdot, q) - f(p, q) \ . \tag{2.2}$$

---

[1]) Im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktionen f werden mit $f \in L$ bezeichnet, quadratisch integrierbare Funktionen mit $f \in L^2$.

[2]) Integrale ohne Bezeichnung der Grenzen sind über Ω zu erstrecken. dw = Flächenelement.

Aus $(\Delta_t - \xi) f_1(p, t) = f_2(p, t)$, $f_\nu(p, t) \in C_\kappa^{(2)}$, $\kappa > 0$, $\nu = 1, 2$, folgt für $\xi \neq -\lambda_n$: $f_1(p, q) = -\int G(t, q; \xi) \cdot f_2(p, t) \cdot d\omega_t$. (2.3)

Aus den Regularitätsbedingungen und der Kompaktheit von Ω folgt die Existenz einer von p unabhängigen positiven Schranke R_0, derart, daß die Umgebung $s_{pq} \leqslant R_0$ ganz im Existenzbereich jedes Normalkoordinatensystems mit Zentrum p liegt.

Um das Verhalten der Greenschen Funktion $G(p, q; \xi)$ für $\xi \to +\infty$ zu untersuchen, konstruieren wir in einem Normalkoordinatensystem mit Zentrum p die Funktion

$$K(p, q; \xi) \equiv \frac{1}{2\pi} \cdot U_0(p, q) \cdot K_0(s\sqrt{\xi}) + \frac{1}{4\pi} \cdot U_1(p, q) \cdot \frac{s}{\sqrt{\xi}} \cdot K_1(s\sqrt{\xi}),$$

$$s \equiv s_{pq}, \quad \xi \neq 0 \tag{2}$$

die im Bereiche $0 < s_{pq} \leqslant R_0$ von $\Omega \times \Omega$ eindeutig definiert ist durch die Metrik auf Ω. Die Funktionen $U_\nu(p, q)$ und $K_\nu(s \cdot \sqrt{\xi})$, $\nu = 0, 1$, sind folgendermaßen erklärt. $U_\nu(p, q)$ ist die für $q \to p$ regulär bleibende Lösung der Differentialgleichung

$$s \frac{dU_\nu(p, q)}{ds} + \frac{s}{2} \cdot \frac{d(\log\sqrt{d(q)})}{ds} \cdot U_\nu(p, q) + \nu \cdot U_\nu(p, q) \equiv \Delta_q U_{\nu-1}(p, q)$$

mit $U_{-1} \equiv 0$. $\dfrac{d}{ds}$ bedeutet Ableitung in Richtung der Geodätischen von p nach q. Es ist mit

$$U_0(p, p) = 1, \quad U_0(p, q) = \left(\frac{d(p)}{d(q)}\right)^{1/4},$$

$$U_1(p, q) = U_0(p, q) \cdot \frac{1}{s_{pq}} \cdot \int_p^q (d(t))^{1/4} \cdot \Delta_t (d(t))^{-1/4} \cdot ds_t .$$

Die Determinante d hat die Gestalt $d = 1 + s_{pq}^2 \cdot h(p, q)$ und somit gilt

$$U_0(p, q) = 1 + s_{pq}^2 \cdot h_1(p, q), \tag{3}$$

wobei h, h_1, U_0 und U_1 in $s_{pq} \leqslant R_0$ existieren und zu $C^{(4)}$ gehören. Die absoluten Beträge aller Ableitungen ν. Ordnung ($\nu \leqslant 4$) dieser Funktionen sind beschränkt im Bereiche $0 \leqslant s_{pq} \leqslant R_0$ von $\Omega \times \Omega$.

Die $K_\nu(u)$ sind modifizierte Hankelfunktionen und durch

$$K_n(u) = \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{\nu \to n} \frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}} \cdot J_{-\nu}(iu) - e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} \cdot J_\nu(iu)}{\sin(\nu\pi)},$$

$$-\pi < \arg u < \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

mit den Besselfunktionen $J_\nu(u)$ verknüpft[3]). Es gilt $K_n(u) = K_{-n}(u)$

$$K_n''(u) + \frac{1}{u} K_n'(u) = \left(1 + \frac{n^2}{u^2}\right) K_n(u)$$

$$K_{n-1}(u) + K_{n+1}(u) = -2 K_n'(u)\,, \quad K_0'(u) = -K_1(u) \tag{4}$$

$$K_0(s\sqrt{\xi}) = -\log(s\sqrt{\xi}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (s^2\xi)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (s^2\xi)^n \tag{5}$$

$$\frac{s}{\sqrt{\xi}} \cdot K_1(s\sqrt{\xi}) = \tfrac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \log(s\sqrt{\xi}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (s^2\xi)^n + \tfrac{1}{2} \cdot s^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot (s^2\xi)^n + \frac{1}{\xi}$$

$$a_n = 4^{-n}(n!)^{-2}\,, \quad b_n = a_n \cdot \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} + \log 2 - c\right), \quad c = 0{,}577\ \ldots\,,$$

$$c_n = \frac{a_n}{n+1}\,, \quad d_n = c_n \cdot \left(c - \log 2 - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \frac{1}{2(n+1)}\right)$$

$$K_n(s\sqrt{\xi}) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{s}{2\sqrt{\xi}}\right)^n \cdot \int_0^{\infty} e^{-\xi t - \frac{s^2}{4t}} \cdot t^{-n-1} \cdot dt \quad \text{für} \quad \Re\,\xi > 0\,. \tag{6}$$

Für u reell, $u \to +\infty$, benützen wir die Abschätzung

$$|\,K_n(u)\,| \leqslant \text{const} \cdot e^{-u}\,, \tag{7}$$

die nach (4) auch für die Ableitungen von $K_n(u)$ gilt.

$K(p, q\,;\,\xi)$ ist eine lokale Parametrix der Gleichung $\Delta u - \xi \cdot u = 0$, denn es gilt nach [4]:

$$\Delta_q K(p, q; \xi) - \xi \cdot K(p, q; \xi) = \frac{1}{4\pi} \cdot \Delta_q U_1(p, q) \cdot \frac{s}{\sqrt{\xi}} \cdot K_1(s\sqrt{\xi})$$

Um eine auf der ganzen Fläche Ω erklärte Parametrix $\Gamma(p, q\,;\,\xi)$ zu erhalten, wählen wir eine Konstante R, $0 < R \leqslant R_0$, und eine viermal stetig differenzierbare Funktion $\eta_R(s)$ mit den Eigenschaften $\eta_R(s) \equiv 1$ für $0 \leqslant s \leqslant \frac{R}{2}$ und $\eta_R(s) \equiv 0$ für $s \geqslant R$ und definieren nach [4]:

$$\Gamma(p, q\,;\,\xi) \equiv \eta_R(s_{pq}) \cdot K(p, q\,;\,\xi) \quad \text{für} \quad s_{pq} \leqslant R\,,$$
$$\Gamma(p, q\,;\,\xi) \equiv 0 \quad \text{für} \quad s_{pq} > R\,.$$

Nun setzen wir $\Gamma_1(p, q\,;\,\xi) \equiv \Delta_q \Gamma(p, q\,;\,\xi) - \xi \cdot \Gamma(p, q\,;\,\xi)$ und beweisen mit Hilfe von

---

[3]) Die Bezeichnungen und Formeln für Zylinderfunktionen usw. sind aus [3] übernommen.

$$\Delta_q(f(s_{pq})\cdot g(q)) = \left(\frac{d^2 f(s)}{ds^2} + \frac{1}{s}\cdot\frac{df(s)}{ds} + \frac{d(\log\sqrt{d(q)})}{ds}\cdot\frac{df(s)}{ds}\right)\cdot g(q)$$
$$+ 2\cdot\frac{df(s)}{ds}\cdot\frac{dg(q)}{ds} + f(s)\cdot\Delta_q g(q)\,, \quad s \equiv s_{pq}$$

$$\Gamma_1(p,q;\xi) = \frac{1}{4\pi}\cdot\Delta_q U_1(p,q)\cdot\frac{s}{\sqrt{\xi}}\cdot K_1(s\sqrt{\xi}) = V_0(p,q)\cdot\frac{s}{\sqrt{\xi}}\cdot K_1(s\sqrt{\xi})$$
$$\text{für } s\leqslant\frac{R}{2} \qquad (8)$$
$$\Gamma_1(p,q;\xi) = V_1(p,q)\cdot K_0(s\sqrt{\xi}) + V_2(p,q)\cdot\frac{1}{\sqrt{\xi}}\cdot K_1(s\sqrt{\xi})$$
$$+ V_3(p,q)\cdot\sqrt{\xi}\cdot K_1(s\sqrt{\xi}) + V_4(p,q)\cdot K_2(s\sqrt{\xi}) \quad \text{für } \frac{R}{2}\leqslant s\leqslant R$$

$\Gamma_1(p,q;\xi) = 0$ für $s \geqslant R$.
Die absoluten Beträge von $V_\nu(p,q)$, $\nu = 0,1,2,3,4$, und ihrer Ableitungen bis und mit der 2. Ordnung sind in den betreffenden Bereichen von $\Omega\times\Omega$ kleiner als eine Konstante $c(R)$.

$\Gamma(p,q;\xi)$ hat für $s_{pq}\to 0$ die gleiche Singularität wie eine Grundlösung von $\Delta f - \xi\cdot f$. Unter Berücksichtigung von (8) besteht die Bezeichnung Parametrix somit zu Recht. Wir setzen deshalb

$$G(p,q;\xi) \equiv \Gamma(p,q;\xi) - \gamma(p,q;\xi) \qquad (9)$$

und erhalten aus $\Gamma_1(p,q;\xi)\in C_\kappa^{(2)}$, $\gamma(p,q;\xi)\in C_\kappa^{(2)}$, $\kappa>0$, nach Hilfssatz (2.3)

$$\gamma(p,q;\xi) = -\int G(q,t;\xi)\cdot\Gamma_1(p,t;\xi)\cdot d\omega_t$$
$$= -\int\Gamma(q,t;\xi)\cdot\Gamma_1(p,t;\xi)\cdot d\omega_t + \int\gamma(q,t;\xi)\cdot\Gamma_1(p,t;\xi)\cdot d\omega_t\,. \quad (10)$$

Hilfssatz 3. (3.1): Für ξ reell, $\xi\geqslant\xi_0(R)<0$, p und q beliebig, gilt:

$$\left|\gamma(p,q;\xi)\right|\leqslant c\cdot\xi^{-2};\quad \left|\frac{\partial}{\partial p_i}\gamma(p,q;\xi)\right|\leqslant c\cdot\xi^{-3/2};\quad \left|\frac{\partial}{\partial q_i}\gamma(p,q;\xi)\right|\leqslant c\cdot\xi^{-3/2}$$
$$\left|\frac{\partial^2}{\partial p_i\,\partial p_k}\gamma(p,q;\xi)\right|\leqslant c\cdot\xi^{-1};\quad \left|\frac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial p_k}\gamma(p,q;\xi)\right|\leqslant c\cdot\xi^{-1};\quad i,k = 1,2.$$

$\frac{\partial}{\partial p_i}$ resp. $\frac{\partial}{\partial q_i}$. bedeuten hier Ableitung im Zentrum p resp. q eines Normalkoordinatensystems. Die Konstante $c = c(R,\xi_0)$ hängt nicht von der speziellen Wahl der Koordinatensysteme ab.

(3.2): Zu jeder reellen Zahl l gibt es eine Konstante $c = c(l,\delta,\xi_0)$, die nicht von der speziellen Wahl der Koordinatensysteme abhängt, so, daß im Bereiche $s_{pq}\geqslant\delta>0$ von $\Omega\times\Omega$ die absoluten Beträge von

$G(p, q; \xi)$ und ihrer Ableitungen ν. Ordnung, $\nu \leqslant 2$, kleiner sind als $c \cdot \xi^{-l}$ für $\xi \geqslant \xi_0(R) > 0$.

Beweis von (3.1). Da die diesbezüglichen Rechnungen relativ lang aber nicht sehr schwierig sind, begnügen wir uns mit der Beweisandeutung. Im Bereiche $0 < s\sqrt{\xi} < \infty$, $\xi > 1$, gelten nach (5) und (7) folgende Abschätzungen:

$$| \Gamma(p, q; \xi) | \leqslant \alpha_1(s\sqrt{\xi}) \;, \qquad | \Gamma_1(p, q; \xi) \leqslant \xi^{-1} \cdot \alpha_1(s\sqrt{\xi})$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial p_i} \Gamma_1(p, q; \xi) \right| \leqslant \xi^{-1/2} \cdot \alpha_1(s\sqrt{\xi}) \;, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial p_i \, \partial p_k} \Gamma_1(p, q; \xi) \right| \leqslant \alpha_1(s\sqrt{\xi}) \qquad (11)$$

mit $\alpha_1(u) = \text{const} \, (| \log u | + u) \cdot e^{-u}$.

$$\left| \frac{\partial}{\partial p_i} \Gamma(p, q; \xi) \right| \leqslant \xi^{1/2} \cdot \alpha_2(s\sqrt{\xi}) \quad \text{mit} \quad \alpha_2(u) = \text{const} \left(\frac{1}{u} + u \right) \cdot e^{-u} .$$

In $s_{pq} \geqslant \dfrac{R}{2}$ sind die linken Seiten der Abschätzungen (11) kleiner als $\xi^{3/2} \cdot \alpha_3(s \cdot \sqrt{\xi})$ mit $\alpha_3(u) = c(R) \cdot e^{-u}$.

Aus (10) ist durch Vertauschung von Differentiation und Integration ersichtlich, daß $\gamma(p, q; \xi)$ und die bezeichneten Ableitungen für alle p und q beschränkt sind. Das Maximum des absoluten Betrages wird in je zwei Punkten $p_0 q_0$ angenommen bei speziellen lokalen Koordinaten. Diese Punkte setzen wir in (10) ein und schätzen ab.

Um zum Beispiel die erste Ungleichung zu beweisen, setzen wir

$$M(\xi) \equiv \max | \gamma(p, q; \xi) | = | \gamma(p_0, q_0; \xi) |$$

und erhalten sofort aus (10)

$$M(\xi) \leqslant | \textstyle\int \Gamma(q_0, t : \xi) \cdot \Gamma_1(p_0, t; \xi) \cdot d\omega_t | + M(\xi) \cdot \textstyle\int | \Gamma_1(p_0, t; \xi) | \cdot | d\omega_t |,$$

woraus die Behauptung mit Hilfe der Formelgruppe (11) hergeleitet werden kann. Bei den übrigen Ungleichungen gehen wir analog vor, unter Verwendung des oben gefundenen Resultates.

Beweis von (3.2). Wir definieren für R genügend klein

$$M^{(\mu)}(\xi) \equiv \max | \gamma(p, q; \xi) | \;,$$

wobei $s_{pq} \geqslant \mu \cdot R \leqslant R_0$ ist, $\mu = 2, 3, 4 \ldots$ Der Extremalwert wird je in einem Punktepaar $p_\mu q_\mu$ angenommen, und es folgt aus (10):

$$\begin{aligned} M^{(2)}(\xi) &\leqslant | \textstyle\int \gamma(q_2, t; \xi) \cdot \Gamma_1(p_2, t; \xi) \cdot d\omega_t | \\ &\leqslant M(\xi) \cdot \textstyle\int | \Gamma_1(p_2, t; \xi) | \cdot | d\omega_t | \leqslant M(\xi) \cdot c(R) \cdot \xi^{-2} = c_2(R) \cdot \xi^{-4} . \end{aligned}$$

Induktion bezüglich μ liefert

$$M^{(\mu)}(\xi) \leqslant | \int \gamma(q_\mu, t; \xi) \cdot \Gamma_1(p_\mu, t; \xi) \cdot d\omega_t |$$
$$\leqslant M^{(\mu-1)}(\xi) \cdot \int | \Gamma_1(p_\mu, t; \xi) | \cdot | d\omega_t | \leqslant c_\mu(R) \cdot \xi^{-2\mu} .$$

Analog erhalten wir mit

$$M_p^{(\mu)}(\xi) \equiv \max \left| \frac{\partial}{\partial p_i} \gamma(p, q; \xi) \right| \quad \text{für } s_{pq} \geqslant \mu \cdot R : M_p^{(\mu)}(\xi) \leqslant c_\mu(R) \cdot (\xi \sqrt{\xi})^{-\mu}$$

$$M_{pp}^{(\mu)}(\xi) \equiv \max \left| \frac{\partial^2}{\partial p_i \, \partial p_k} \gamma(p, q; \xi) \right| \quad \text{für } s_{pq} \geqslant \mu \cdot R : M_{pp}^{(\mu)}(\xi) \leqslant c_\mu(R) \cdot \xi^{-\mu} .$$

Da $\gamma(p, q; \xi)$ in $s_{pq} \geqslant R$ symmetrisch ist, gelten die Abschätzungen auch für die Ableitungen bezüglich q, und entsprechend untersuchen wir die gemischten Ableitungen $\dfrac{\partial^2}{\partial p_i \, \partial q_k}$. Um unsere Behauptung zu beweisen, brauchen wir lediglich $\mu \geqslant l$, $R \leqslant \dfrac{1}{\mu} \cdot \min \{R_0, \delta\}$ zu wählen.

Hilfssatz 3 haben wir für Normalkoordinaten hergeleitet. Er gilt natürlich auch für andere lokale Koordinaten, die genügend regulär von den ersteren abhängen.

§2 Definition und Eigenschaften der Kerne $H(p, q; \zeta)$

Für die folgenden Rechnungen benützen wir die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)}{\lambda_n(\lambda_n + \xi)} = \int G_0(p, t) \cdot G(t, q; \xi) \cdot d\omega_t , \quad \xi \neq -\lambda_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)}{\lambda_n^2} = \int G_0(p, t) \cdot G_0(t, q) \cdot d\omega_t , \tag{12}$$

und zwar konvergieren beide Reihen absolut und gleichmäßig in $\Omega \times \Omega$ (siehe [2], Seite 452). Insbesondere gibt es eine Konstante c mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)|}{\lambda_n^2} < c < \infty .$$

Wir gehen aus von der wichtigen Beziehung

$$G(p, q; \xi) = -\xi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)}{\lambda_n(\lambda_n + \xi)} + G_0(p, q) + \frac{1}{S \cdot \xi} , \quad p \neq q , \tag{13}$$

deren Richtigkeit durch Vergleich der Entwicklungskoeffizienten nach dem vollständigen System $\{\varphi_n(p)\}$ nachgewiesen werden kann. Beide

Seiten von (13) sind stetig für $p \neq q$ und ϵL^2. Nun multiplizieren wir $G(p, q; \xi)$ mit $\frac{1}{2\pi i} \cdot e^{i\pi\zeta} \cdot \xi^{-\zeta}$, ζ = komplexer Parameter, und integrieren in der ξ-Ebene längs des geschlossenen Weges L_{R_N}, der folgendermaßen festgelegt wird. L_{R_N} läuft von $\xi = a$, $0 < a < \lambda_1$, längs der positiven reellen ξ-Achse ($\arg \xi = 0$) nach $\xi = R_N = \frac{1}{2}(\lambda_N + \lambda_{N+1})$. $\lambda_N < \lambda_{N+1}$, $N \geqslant 1$, von dort längs des Kreises $|\xi| = R_N$ im positiven Sinne wieder nach $\xi = R_N$, dann längs der reellen ξ-Achse ($\arg \xi = 2\pi$) zurück nach $\xi = a$, worauf der Kreis $|\xi| = a$, im negativen Sinne durchlaufen, zum Ausgangspunkt führt. Da $G(p, q; \xi)$ meromorph ist in ξ liefert der Residuensatz nach (13)

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)}{\lambda_n^{\zeta}} = \frac{-1}{2\pi i} \cdot e^{i\pi\zeta} \cdot \oint_{|\xi|=a} G(p, q; \xi) \cdot \xi^{-\zeta} \cdot d\xi \tag{14}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \cdot e^{i\pi\zeta} \cdot \oint_{|\xi|=R_N} G(p, q; \xi) \cdot \xi^{-\zeta} \cdot d\xi + \frac{\sin(\pi\zeta)}{\pi} \cdot \int_a^{R_N} G(p, q; \xi) \cdot \xi^{-\zeta} \cdot d\xi .$$

Die Umlaufsintegrale sind im positiven Sinne zu durchlaufen. Den Integranden über $|\xi| = R_N$ ersetzen wir durch (13) und erhalten unter Berücksichtigung der Abschätzungen

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)}{\lambda_n(\lambda_n + \xi)} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)|}{\lambda_n^2} \cdot \frac{1}{\left|1 + \frac{\xi}{\lambda_n}\right|}$$

$$\left|1 + \frac{\xi}{\lambda_n}\right| \geqslant \left|1 - \left|\frac{\xi}{\lambda_n}\right|\right| \geqslant 1 - \frac{R_N}{\lambda_{N+1}} \geqslant \frac{\lambda_N(\lambda_{N+1} - \lambda_N)}{4 R_N^2}$$

$$\left| \oint_{|\xi|=R_N} G(p, q; \xi) \cdot \xi^{-\zeta} \cdot d\xi \right| \leqslant \frac{8\pi c \cdot R_N^{4-z}}{\lambda_N(\lambda_{N+1} - \lambda_N)} + 2\pi \cdot \left| G_0(p, q) \right| \cdot R_N^{1-z} + \frac{1}{S} \cdot R_N^{-z},$$

$$z \equiv \Re\zeta \tag{15}$$

Nach Hilfssatz 1 gibt es eine monoton wachsende Folge N_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, derart, daß für alle ν $\lambda_{N_\nu}(\lambda_{N_\nu+1} - \lambda_{N_\nu}) \geqslant \delta > 0$ ist. Somit folgt aus (15)

$$\lim_{R_{N_\nu} \to \infty} \oint_{|\xi|=R_{N_\nu}} G(p, q; \xi) \cdot \xi^{-\zeta} \cdot d\xi = 0 \quad \text{für } z > 4 .$$

Die linke Seite von (14) konvergiert nach (12) absolut für $N \to \infty$ für $z \geqslant 2$. Deshalb liefert der Grenzübergang $R_{N_\nu} \to \infty$ aus (14) die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(p)\cdot\varphi_n(q)}{\lambda_n^{\zeta}} = \frac{-1}{2\pi i}\cdot e^{i\pi\zeta}\cdot \oint_{|\xi|=a} G(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta}\cdot d\xi$$
$$+\frac{\sin(\pi\zeta)}{\pi}\cdot\int_a^{\infty} G(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta}\cdot d\xi\,. \tag{16}$$

Das erste Integral in (16) ist eine ganze Funktion von ζ, das zweite ebenfalls, dank Hilfssatz (3.2). Somit ist die im Bereiche $z \geqslant 2$ durch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(p)\cdot\varphi_n(q)}{\lambda_n^{\zeta}}$ definierte holomorphe Funktion von ζ in die ganze ζ-Ebene analytisch fortsetzbar für $p \neq q$ und stellt eine ganze Funktion von ζ dar, die wir mit $H(p,q;\zeta)$ bezeichnen, also

$$H(p,q;\zeta)\equiv\frac{-1}{2\pi i}\cdot e^{i\pi\zeta}\cdot\oint_{|\xi|=a} G(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta}\cdot d\xi+\frac{\sin(\pi\zeta)}{\pi}\cdot\int_a^{\infty} G(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta}\cdot d\xi\,. \tag{17}$$

Hilfssatz 4 über Eigenschaften von $H(p,q;\zeta)$.

(4.1) Für $p \neq q$ gilt $H(p,q;\zeta) \in C^{(2)}$, $H(p,q;\zeta) = H(q,p;\zeta)$

(4.2) Für $p \neq q$ gilt $\Delta_p H(p,q;\zeta) = \Delta_q H(p,q;\zeta) = -H(p,q;\zeta-1)$

(4.3) $H(p,q;1) = G_0(p,q)$ (18)

$H(p,q;0) = -\frac{1}{S}$, $H(p,q;-n) = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

(4.4) $H(p,q;\zeta)$ ist für $z>0$ absolut integrierbar über p und q.

(4.5) Für $0<z<1$, $s_{pq} \leqslant \delta$, δ genügend klein, gilt

$H(p,q;\zeta) = \chi(\zeta)\cdot s_{pq}^{2\zeta-2} + T(p,q;\zeta)$ mit $T(p,q;\zeta) \in C_{2z}^{(2)}$ (19)

und

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{4^{\zeta}\cdot\Gamma^2(\zeta)\cdot\sin(\pi\zeta)} \neq 0$$

(4.6) $\int H(p,t;\zeta)\cdot\varphi_\mu(t)\cdot d\omega_t = \lambda_\mu^{-\zeta}\cdot\varphi_\mu(p)$, $\mu = 1, 2, 3, \ldots$, $z>0$. (20)

$\int H(p,t;\zeta)\cdot d\omega_t = 0$, $z>0$ (21)

$\int H(p,t;\zeta)\cdot H(t,q;\zeta_1)\cdot d\omega_t = H(p,q;\zeta+\zeta_1)$, $z>0$, $z_1 \equiv \Re\,\zeta_1 > 0$.

(4.7) Für $B(p,q) \in C_\kappa^{(2)}$ für $q = \text{const}$, $\kappa>0$, gilt

$\Delta_p \int H(p,t;\zeta)\cdot B(t,q)\cdot d\omega_t = \int H(p,t;\zeta)\,\Delta_t B(t,q)\cdot d\omega_t$, $z>0$.

Beweis von (4.1). Die Symmetrie folgt aus der Symmetrie von $G(p,q;\xi)$. Die Differenzierbarkeit für das erste Integral in (17) ist evident, für das zweite Integral benützen wir Hilfssatz (3.2).

Beweis von (4.2). In (17) dürfen wir nach Hilfssatz (3.2) Integral und Δ vertauschen. (1) liefert dann sofort die Behauptung.

Beweis von (4.3). In (17) ersetzen wir den Integranden über $|\xi| = a$ durch (13) und erhalten

$$H(p,q;\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \cdot e^{i\pi\zeta} \oint\limits_{|\xi|=a} \xi^{1-\zeta} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(p)\cdot\varphi_n(q)}{\lambda_n(\lambda_n+\xi)}\, d\xi - \frac{a^{-\zeta}}{S} \cdot \frac{\sin\pi\zeta}{\pi\zeta}$$
$$+ G_0(p,q)\cdot a^{1-\zeta} \cdot \frac{\sin\pi(1-\zeta)}{\pi(1-\zeta)} + \frac{\sin\pi\zeta}{\pi} \cdot \int_a^{\infty} G(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta}\cdot d\xi\ .$$

Lassen wir $\zeta \to 1$ streben, so bleibt

$$H(p,q;1) = \frac{1}{2\pi i}\, e^{i\pi\zeta} \cdot \oint\limits_{|\xi|=a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(p)\cdot\varphi_n(q)}{\lambda_n(\lambda_n+\xi)} \cdot d\xi + G_0(p,q)\ .$$

Das Integral ist aber Null, weil der Integrand in $|\xi| < \lambda_1$ holomorph ist. Die beiden andern Beziehungen von (4.3) folgen daraus durch wiederholte Anwendung von (4.2).

Beweis von (4.4). Wir ersetzen in (17) $G(p,q;\xi)$ nach (9) und erhalten, für $z > 0$

$$H(p,q;\zeta) = \frac{1}{2\pi i} e^{i\pi\zeta} \oint\limits_{|\xi|=a} \gamma(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta} d\xi - \frac{\sin\pi\zeta}{\pi} \cdot \int_a^{\infty} \gamma(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta} d\xi$$
$$- \frac{1}{2\pi i} e^{i\pi\zeta} \oint\limits_{|\xi|=a} \Gamma(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta} d\xi + \frac{\sin\pi\zeta}{\pi} \int_a^{\infty} \Gamma(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta} d\xi \quad (22)$$

Nach Hilfssatz (3.1) gehören die beiden ersten Integrale zu $C^{(2)}$, wobei die Ableitung $\dfrac{\partial^2}{\partial q_i\,\partial q_k}$ vorläufig ausgenommen ist. Da $H(p,q;\zeta)$ nach (4.1) stetig ist für $s_{pq} > 0$, genügt es, das Verhalten der beiden letzten Integrale von (22) für $s_{pq} \to 0$ zu untersuchen. Das letzte Integral schreiben wir in der Gestalt

$$\int_a^{\infty} \Gamma(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta} d\xi = \int_a^{\frac{1}{s^2}} K(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta} d\xi + \int_{\frac{1}{s^2}}^{\infty} K(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta}\cdot d\xi$$

und ersetzen $K(p,q;\xi)$ nach (2), wobei wir im ersten Integral rechts die Reihenentwicklungen (5) verwenden. Die Substitution $s\cdot\sqrt{\xi} = u$ liefert uns schließlich

$$\int_a^{\infty} \Gamma(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta}\cdot d\xi = \frac{1}{\pi}\cdot U_0(p,q)\cdot s^{2\zeta-2}\cdot\beta_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\cdot U_1(p,q)\cdot s^{2\zeta}\cdot\beta_1(\zeta)$$
$$+ \frac{1}{\pi} U_0(p,q)\, s^{2\zeta-2} \cdot \int_{s\sqrt{a}}^{1} [-\log u \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n}\cdot a_n + \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n}\cdot b_n]\cdot u^{1-2\zeta}\cdot du$$
$$+ \frac{1}{4\pi} U_1(p,q)\, s^{2\zeta} \cdot \int_{s\sqrt{a}}^{1} \left[\log u \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n}\cdot c_n + \sum_{n=0}^{\infty} u^{2n}\cdot d_n + \frac{2}{u^2}\right] \cdot u^{1-2\zeta}\cdot du\ .$$

Die Größen $\beta_0(\zeta) \equiv \int\limits_1^\infty K_0(u)\cdot u^{1-2\zeta} du$ und $\beta_1(\zeta) \equiv \int\limits_1^\infty K_1(u) u^{-2\zeta}\cdot du$ sind ganze Funktionen von ζ. Bei den Reihen dürfen wir Integration und Summation vertauschen und erhalten für $\zeta \neq 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^\infty \Gamma(p,q;\xi)\cdot \xi^{-\zeta}\cdot d\xi &= s^{2\zeta-2}\cdot U_0(p,q)\left[\frac{1}{\pi}\cdot\beta_0(\zeta)+\frac{1}{4\pi}\cdot\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{(n+1-\zeta)^2}+\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{b_n}{n+1-\zeta}\right] \\
&+ s^{2\zeta}\cdot U_1(p,q)\left[\frac{1}{2\pi}\cdot\beta_1(\zeta)-\frac{1}{16\pi}\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{c_n}{(n+1-\zeta)^2}+\frac{1}{8\pi}\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{d_n}{n+1-\zeta}-\frac{1}{4\pi\zeta}\right] \\
&+ U_0(p,q)\,a^{1-\zeta}\left[\frac{-1}{2\pi}\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{(s^2a)^n\cdot b_n}{n+1-\zeta}-\frac{1}{4\pi}\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{(s^2a)^n\cdot a_n}{(n+1-\zeta)^2}\right. \\
&\left.+\frac{1}{2\pi}\log\sqrt{a}\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{(s^2a)^n\cdot a_n}{n+1-\zeta}\right]+s^2\cdot U_1(p,q)\,a^{1-\zeta}\left[\frac{-1}{8\pi}\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{(s^2a)^n\cdot d_n}{n+1-\zeta}\right. \\
&\left.+\frac{1}{16\pi}\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{(s^2a)^n\cdot c_n}{(n+1-\zeta)^2}-\frac{1}{8\pi}\cdot\log\sqrt{a}\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{(s^2a)^n\cdot c_n}{n+1-\zeta}\right]-\frac{1}{4\pi\zeta}U_1(p,q)\cdot a^{-\zeta} \\
&+U_0(p,q)\cdot a^{1-\zeta}\cdot\log s\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{(s^2a)^n\cdot a_n}{n+1-\zeta}-U_1(p,q)\,a^{1-\zeta}\cdot s^2\log s\cdot\frac{1}{8\pi}\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{(s^2a)^n\cdot c_n}{n+1-\zeta}\,.
\end{aligned} \tag{23}$$

Um den singulären Anteil des zweitletzten Integrales von (22) zu berechnen, schreiben wir $\Gamma(p,q;\xi)$ in der Form

$$\begin{aligned}
\Gamma(p,q;\xi) &= \sum_{n=0}^\infty\left\{(s^2\xi)^n\left[-\frac{1}{2\pi}U_0(p,q)\cdot\log\sqrt{\xi}\cdot a_n+\frac{1}{2\pi}U_0(p,q)\cdot b_n\right.\right. \\
&\left.\left.+\frac{1}{8\pi}U_1(p,q)\cdot s^2\cdot\log\sqrt{\xi}\cdot c_n+\frac{1}{8\pi}U_1(p,q)\cdot s^2\cdot d_n\right]\right\}+\frac{1}{4\pi\xi}\cdot U_1(p,q) \\
&+\log s\cdot\left[\frac{1}{8\pi}\cdot U_1(p,q)\cdot s^2\cdot\sum_{n=0}^\infty(s^2\xi)^n\cdot c_n-\frac{1}{2\pi}\cdot U_0(p,q)\cdot\sum_{n=0}^\infty(s^2\xi)^n\cdot a_n\right].
\end{aligned}$$

Nur die Glieder, die den Faktor $\log s$ besitzen, können unendlich werden für $s_{pq}\to 0$, einschließlich der Ableitungen bis zur 2. Ordnung. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\cdot e^{i\pi\zeta}\oint\limits_{|\xi|=a}\Gamma(p,q;\xi)\cdot\xi^{-\zeta}\cdot d\xi &= T_3(p,q;\zeta)+\frac{\sin\pi\zeta}{\pi}\cdot\log s\left[-\frac{1}{2\pi}\cdot U_0(p,q)\cdot a^{1-\zeta}\right. \\
&\left.\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{(s^2a)^n\cdot a_n}{n+1-\zeta}+\frac{1}{8\pi}\cdot U_1(p,q)\cdot a^{1-\zeta}\cdot s^2\cdot\sum_{n=0}^\infty\frac{(s^2a)^n\cdot c_n}{n+1-\zeta}\right];\quad T_3(p,q;\zeta)\in C^{(2)}\,.
\end{aligned}\tag{24}$$

Setzen wir (23) und (24) in (22) ein, so heben sich die Glieder mit dem Faktor $\log s$ weg, und wir erhalten mit (3) die Darstellung

$$H(p,q;\zeta)=\chi(\zeta)\cdot s^{2\zeta-2}+s^{2\zeta}\cdot T_1(p,q;\zeta)+T_2(p,q.\zeta)\,,\quad |\chi(\zeta)|<\infty \tag{25}$$

$T_1(p,q;\zeta) \in C^{(2)}$, $T_2(p,q;\zeta) \in C^{(2)}$ mit Ausnahme der Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}$.

Aus (25) und (4.1) folgt somit die absolute Integrierbarkeit für $0 < z < 2$ und $\zeta \neq 1$, aber nach (18) gilt diese Eigenschaft auch für $\zeta = 1$. Für $z \geqslant 2$ liefert die absolute und gleichmäßige Konvergenz der linken Seite von (16) die Behauptung.

Beweis von (4.5). Aus (25) folgt die gesuchte Darstellung von $H(p,q;\zeta)$ mit $T(p,q;\zeta) = s^{2\zeta} \cdot T_1(p,q;\zeta) + T_2(p,q;\zeta)$. Da $T(p,q;\zeta)$ symmetrisch ist in p und q folgt aus der Existenz und den Abschätzungen für $\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_k}$ durch analoge Betrachtungen dasselbe für $\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}$. Es ist somit $T(p,q;\zeta) \in C^{(2)}_{2z}$. Ferner gilt nach unsern Entwicklungen

$$\chi(\zeta) = \lim_{s \to 0} [s^{2-2\zeta} \cdot H(p,q;\zeta)] = \frac{\sin \pi\zeta}{\pi^2} \cdot \int_0^\infty K_0(u) \cdot u^{1-2\zeta} \cdot du\,.$$

Mit Hilfe von (6) läßt sich das Integral berechnen und einige Umformungen ergeben die gewünschte Gestalt.

Beweis von (4.6) durch analytische Fortsetzung. Die Integrale (20), (21) existieren und haben die Gestalt $F(p;\zeta) = \int H(p,t;\zeta) \cdot f(t) \cdot d\omega_t$, f stetig auf Ω. Wir setzen

$$F(p;\zeta) = \lim_{R \to 0} F_R(p;\zeta) \qquad \text{mit} \qquad F_R(p;\zeta) = \int_{\Omega_R} H(p,t;\zeta) \cdot f(t) \cdot d\omega_t\;,$$

wobei Ω_R aus Ω entsteht durch Weglassen der R-Umgebung des Punktes p. In Ω_R ist der Integrand beschränkt und für feste p, t eine holomorphe Funktion von ζ. $F_R(p;\zeta)$ ist somit holomorph in ζ für $0 < z < \infty$. Ferner bleibt $F_R(p;\zeta)$ nach (4.4) in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $0 < z < \infty$ gleichmäßig beschränkt für $R \to 0$, also ist $F(p;\zeta)$ holomorph in $0 < z < \infty$.

Auf ähnliche Weise, indem wir um p und q je eine R-Umgebung ausschließen, können wir zeigen, daß $F(p,q;\zeta) = \int H(p,t;\zeta) \cdot H(t,q;\zeta_1) \cdot d\omega_t$ mit $z > 0$, $z_1 > 0$, ζ_1 fest, holomorph ist in ζ für $0 < z < \infty$, $p \neq q$. Für $z \geqslant 2$ gilt $H(p,q;\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)}{\lambda_n^\zeta}$, wobei die Konvergenz gleichmäßig ist für alle p und q. Mit dieser Formel beweisen wir (20), (21) durch Vertauschung von Summation und Integration. Durch analytische Fortsetzung folgt die Richtigkeit für $z > 0$.

Analog gilt für $z \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}\int H(p,t;\zeta) \cdot H(t,q;\zeta_1) \cdot d\omega_t &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(p)}{\lambda_n^\zeta} \cdot \int \varphi_n(t) \cdot H(t,q;\zeta_1) \cdot d\omega_t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)}{\lambda_n^{\zeta+\zeta_1}} = H(p,q;\zeta+\zeta_1)\end{aligned}$$

Durch analytische Fortsetzung folgt wiederum die Gültigkeit für $z > 0$.

Beweis von (4.7). Den Greenschen Satz für Ω schreiben wir in der Gestalt

$$\begin{aligned}&\int B_1(p,t)\cdot\Delta_t B_2(t,q)\cdot d\omega_t = \int \Delta_t B_1(p,t)\cdot B_2(t,q)\cdot d\omega_t \quad \text{für} \quad p \neq q\\ &B_\nu(p,q) \in C_\kappa^{(2)}, \quad \kappa > 0, \quad \nu = 1,2.\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort für $z > 0$

$$\begin{aligned}&\int H(p,t;\zeta+1)\,\Delta_t B(t,q)\cdot d\omega_t = \int \Delta_t H(p,t;\zeta+1)\cdot B(t,q)\cdot d\omega_t\\ &= -\int H(p,t;\zeta)\cdot B(t,q)\cdot d\omega_t\,, \qquad B(p,q) \in C_\kappa^{(2)}\,, \qquad \kappa > 0\,.\end{aligned}$$

Vom ersten Integral können wir Δ_p berechnen durch Vertauschung mit dem Integralzeichen und erhalten nach (4.2) sofort die Behauptung.

Aus dem Greenschen Satze folgt noch für $f \in C^{(2)}$

$$\int \Delta_t f(t)\cdot d\omega_t = 0\,. \tag{26}$$

§ 3 Der Integraloperator I^ζ

Um gewisse Rechnungen, die immer wieder auftreten, formal einfacher schreiben zu können, führen wir den Integraloperator I^ζ ein, der ein Analogon der von *M. Riesz* in [5] eingeführten Operatoren ist.

Wir definieren für $f \in L$, f beschränkt, $z > 0$

$$I_{pq}^\zeta f(q) \equiv I_{qp}^\zeta f(q) \equiv \int H(p,q;\zeta)\cdot f(q)\cdot d\omega_q + \bar{f}\,. \tag{27}$$

Integrationsvariable ist somit derjenige Index des Operators I_{pq}^ζ, der auch in der Funktion f vorkommt, währenddem der andere Index die neue Variable bezeichnet. Hilfssatz (4.2) liefert die Darstellung

$$I_{pq}^\zeta f(q) \equiv -\Delta_p I_{pq}^{\zeta+1} f(q) + \bar{f}\,. \tag{28}$$

In (28) existiert I^ζ für $z > -1$, falls $f \in C^{(2)}$, denn nach Hilfssatz (4.7) gilt

$$\Delta_p \int H(p,q;\zeta+1)\cdot f(q)\cdot d\omega_q = \int H(p,q;\zeta+1)\cdot \Delta_q f(q)\cdot d\omega_q\,.$$

(28) ist die analytische Fortsetzung von (27) bezüglich ζ.

Für Funktionen $B(p,q)$ von 2 Punkten führen wir die entsprechende Definition ein, wobei wir schwächere Voraussetzungen zulassen. Es sei $B(p,q) \in C_\kappa^{(0)}$, $\kappa > -2$. Dann existiert für $t \neq q$, $z > 0$

$$I_{tp}^\zeta B(p,q) \equiv \int H(t,p;\zeta)\cdot B(p,q)\cdot d\omega_p + \bar{B}(.\,,q) \in C_{\kappa+2z}^{(0)}\ ^{4)}\,. \tag{29}$$

[4]) Zur Bestimmung des Indexes $\kappa + 2z$ in $C_{\kappa+2z}^{(0)}$ siehe [2] Seite 362.

Ferner liefert Hilfssatz (4.7) für $B(p,q) \in C^{(2)}_{\kappa}$, $\kappa > 0$, wie oben die Darstellung

$$I^{\zeta}_{tp} B(p,q) \equiv -\Delta_t I^{\zeta+1}_{tp} B(p,q) + \overline{B}(.,q) \in C^{(0)}_{\kappa+2z} \text{ für } z > -1, t \neq q . \quad (30)$$

Für die Existenz von (30) ist auch die absolute Integrierbarkeit der Ableitungen 1. Ordnung von $H(t,p;1+\zeta)$ und $B(p,q)$ nach t und p hinreichend [5]), das heißt $B(p,q) \in C^{(1)}_{\kappa}$ für q fest, $\kappa > -1$, $z > -\frac{1}{2}$. $I^{\zeta}_{tp} B(p,q)$ kann über alle Schranken wachsen für $s_{tp} \to 0$, bleibt jedoch absolut integrierbar in q und t.

Die weiteren uns interessierenden Eigenschaften von I^{ζ} fassen wir im folgenden Hilfssatz zusammen:

Hilfssatz 5.

(5.1) Es ist $$I^{\zeta_1}_{pt}(I^{\zeta}_{pq} f(q)) = I^{\zeta_1+\zeta}_{tq} f(q)$$

für $z_1 > 0$, $z > 0$ und $f \in L$, f beschränkt, oder für $f \in C^{(2)}$ und $z_1 > 0$, $z > -1$ oder $z_1 > -1$, $z > 0$.

Ferner gilt $$I^{\zeta_1}_{vt}(I^{\zeta}_{tp} B(p,q)) = I^{\zeta_1+\zeta}_{vp} B(p,q)$$

für $B(p,q) \in C^{(2)}_{\kappa}$, $\kappa > 0$ und $z_1 > 0$, $z > -1$ oder $z_1 > -1$, $z > 0$ oder für $B(p,q) \in C^{(2)}_{\kappa}$ für q fest, $\kappa > -1$ und $z_1 > 0$, $z > -\frac{1}{2}$ oder $z_1 > -\frac{1}{2}$, $z > 0$.

(5.2) $I^{0}_{pq} f(q) = f(p)$ für $f \in C^{(2)}$,
$I^{0}_{tp} B(p,q) = B(t,q)$ für $B(p,q) \in C^{(1)}_{\kappa}$ für q fest, $\kappa > -1$.

(5.3) $I^{\zeta}_{pt} \int B(p,q) \cdot g(q) \cdot d\omega_q = \int I^{\zeta}_{pt} B(p,q) \cdot g(q) \cdot d\omega_q$
$\int [I^{\zeta}_{tq} B(p,q)] \cdot g(t) \cdot d\omega_t = \int B(p,q) [I^{\zeta}_{tq} g(t)] \cdot d\omega_q$
für $g \in L$, g beschränkt. B erfülle die Bedingungen von (30).

(5.4) Für $g \in L^2$, g beschränkt, $z > 0$, folgt aus $I^{\zeta}_{pq} g(q) = 0$ fast überall $g(q) = 0$.

(5.5) Wenn die beschränkten Funktionen $g_\nu(q) \in L^2$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, linear unabhängig sind, dann sind die Funktionen $h_\nu(p) = I^{\zeta}_{pq} g_\nu(q)$ für $z > 0$ stetig und ebenfalls linear unabhängig.

Beweis von (5.1). Es sei $B(p,q) \in C^{(1)}_{\kappa}$ für $q = \text{const}$, $\kappa > -1$, $z_1 > 0$, $z > -\frac{1}{2}$. $I^{\zeta}_{tp} B(p,q)$ existiert nach (30), die Existenz von $I^{\zeta_1}_{vt}(I^{\zeta}_{tp} B(p,q))$ folgt sodann aus (29). Wir ersetzen I durch seine Definitionen und erhalten

[5]) Siehe [1] Seite 317.

$$I_{vt}^{\zeta_1}\big(I_{tp}^{\zeta} B(p,q)\big) = \int H(v,t;\zeta_1)[-\Delta_t \int H(t,p;1+\zeta)\cdot B(p,q)\cdot d\omega_p]\cdot d\omega_t$$
$$+\int H(v,t;\zeta_1)\cdot d\omega_t \cdot \overline{B}(\cdot,q)$$
$$+\frac{1}{S}\int[-\Delta_t \int H(t,p;1+\zeta)\cdot B(p,q)\, d\omega_p]\, d\omega_t + \overline{B}(\cdot,q)\,.$$

Beim zweitletzten Summanden dürfen wir Δ_t mit dem äußern Integral vertauschen und erhalten dann, wie auch beim vorangehenden Summanden, auf Grund von (21) Null. Im ersten Gliede wenden wir die Hilfssätze (4.7) und (4.6) an und erhalten

$$I_{vt}^{\zeta_1}\big(I_{tp}^{\zeta} B(p,q)\big)$$
$$= -\Delta_v \int H(v,t;\zeta_1)[\int H(t,p;1+\zeta)\cdot B(p,q)\cdot d\omega_p]\cdot d\omega_t + \overline{B}(\cdot,q)$$
$$= -\Delta_v \int [\int H(v,t;\zeta_1)\cdot H(t,p;1+\zeta)\cdot d\omega_t]\cdot B(p,q)\cdot d\omega_p + \overline{B}(\cdot,q)$$
$$= -\Delta_v \int H(v,p;\zeta_1+\zeta+1)\cdot B(p,q)\cdot d\omega_p + \overline{B}(\cdot,q)\,.$$

Die andern Behauptungen von (5.1) beweisen wir ähnlich.

Beweis von (5.2). Der Beweis folgt unmittelbar aus Hilfssatz 2 unter Beachtung von (18).

Beweis von (5.3). Wir vertauschen die Reihenfolge der Integrationen.

Beweis von (5.4). Wir bilden die Entwicklungskoeffizienten von $I_{pq}^{\zeta} g(q)$ nach dem vollständigen System $\{\varphi_n(p)\}$, $n = 0, 1, 2, 3\ldots$ und erhalten mit Hilfssatz (4.6) $\lambda_n^{-\zeta}\int g(q)\cdot\varphi_n(q)\cdot d\omega_q = 0$ für $n \geqslant 1$ und $\overline{g} = 0$, das heißt alle Entwicklungskoeffizienten von g verschwinden.

Beweis von (5.5). Die Stetigkeit von $h_\nu(p)$ ist evident. Aus $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\cdot h_\nu(p) = 0$, $c_\nu = \text{const}$, folgt $I_{pq}^{\zeta}\big(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\cdot g_\nu(q)\big) = 0$, also nach (5.4) $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\cdot g_\nu(q) = 0$ fast überall. Da die g_ν linear unabhängig sind, müssen die c_ν verschwinden.

§ 4 Integralgleichungen 1. Art mit einem Kern $K(p,q) = a\cdot s_{pq}^{-\varrho} + B_1(p,q)$. Ihre Transformation in Integralgleichungen 2. Art

In diesem Abschnitt werden wir Beziehungen herleiten zwischen der linearen Integralgleichung 1. Art

$$f_1(p) = \int K(p,q)\cdot g(q)\cdot d\omega_q \tag{31}$$

und linearen Integralgleichungen 2. Art für die Funktion $g(q)$.

In diesem Paragraphen gelten nachstehende Voraussetzungen. Wir betrachten nur beschränkte Lösungen von Integralgleichungen.
$K(p, q) \in C^{(2)}_{-\varrho}$, $\varrho > 0$, so, daß für $s_{pq} \leqslant \delta$ die Darstellung

$$K(p, q) = a \cdot s_{pq}^{-\varrho} + B_1(p, q)$$

gilt, mit $B_1(p, q) \in C^{(2)}_{\kappa_1}$, wobei entweder $0 < \varrho < 2$ ist und $\kappa_1 > 0$, oder $1 < \varrho < 2$ und $\kappa_1 > -1$. $a = \text{const} \neq 0$. $f_1(p) \in C^{(2)}$.

(31) nimmt nach Multiplikation mit der Konstanten $\frac{1}{a} \cdot \chi(\zeta)$, $\zeta = 1 - \frac{\varrho}{2}$ ζ reell, unter Berücksichtigung von (19) folgende Gestalt an:

$$f(p) = I^{\zeta}_{pq} g(q) + \int B(p, q) \cdot g(q) \cdot d\omega_q \tag{32}$$

$B(p, q) \in C^{(2)}_{\kappa}$, wobei entweder $1 > \zeta > 0$ und $\kappa > 0$ ist, oder

$$\tfrac{1}{2} > \zeta > 0 \quad \text{und} \quad \kappa > -1 . \quad f(p) \in C^{(2)} .$$

Satz I: a) Jede Lösung g von (32) erfüllt die lineare Integralgleichung zweiter Art

$$\begin{aligned} I^{-\zeta}_{ut} f(t) &= g(u) + \int K_1(u, q) \cdot g(q) \cdot d\omega_q \\ K_1(u, q) &\equiv I^{-\zeta}_{ut} B(t, q) \in C^{(0)}_{\kappa - 2\zeta} \end{aligned} \tag{I}$$

fast überall. Stetige Lösungen g erfüllen (I) exakt.

b) Jede Lösung g von (I) ist stetig und befriedigt (32).

Beweis von a). Wir setzen in (32), nach Hilfssatz (5.1) und (5.2):

$$f(p) = I^{\zeta}_{pu}(I^{-\zeta}_{ut} f(t)) , \qquad B(p, q) = I^{\zeta}_{pu}(I^{-\zeta}_{ut} B(t, q))$$

ein und erhalten, unter Beachtung von (5.3)

$$\begin{aligned} &I^{\zeta}_{pu}(I^{-\zeta}_{ut} f(t)) = I^{\zeta}_{pu} g(u) + I^{\zeta}_{pu} \int I^{-\zeta}_{ut} B(t, q) \cdot g(q) \cdot d\omega_q \quad \text{oder} \\ &I^{\zeta}_{pu}[I^{-\zeta}_{ut} f(t) - g(u) - \int I^{-\zeta}_{ut} B(t, q) \cdot g(q) \cdot d\omega_q] = 0 . \end{aligned}$$

Der Klammerinhalt ist nach unsern Voraussetzungen quadratisch integrierbar. Daraus folgt nach Hilfssatz (5.4) sofort (I). Für stetige g ist auch der Klammerinhalt stetig und (I) ist überall erfüllt.

Beweis von b). Wir multiplizieren (I) mit I^{ζ}_{pu} und durchlaufen den Beweis von a) rückwärts. Daß g stetig ist, folgt nach unsern Voraussetzungen sofort aus

$$g(u) = I^{-\zeta}_{ut} f(t) - \int K_1(u, q) \cdot g(q) \cdot d\omega_q .$$

Unter einer Eigenfunktion einer linearen Integralgleichung 1. Art (31) verstehen wir eine wesentlich von Null verschiedene, beschränkte und integrierbare Lösung g für $f_1 = 0$. Unter einer Eigenfunktion der linearen Integralgleichung 2. Art

$$f(p) = g(p) + \int K(p, q) \cdot g(q) \cdot d\omega_q \tag{33}$$

verstehen wir eine von Null verschiedene Lösung g von (33) für $f = 0$. Jede solche Lösung ist stetig bei unsern Voraussetzungen.

Zusatz I. a) (I), (32) und ihre transponierten Gleichungen haben dieselbe Anzahl k linear unabhängige Eigenfunktionen. $0 \leqslant k < \infty$.

b) Die Auflösbarkeitsbedingungen für (I) lauten, für $k \geqslant 1$

$$\overline{f \cdot g'_\nu} = 0 \;, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k \;, \tag{34}$$

wobei die Funktionen g'_ν eine Basis der Eigenfunktionen von

$$0 = \int K(p, q) \cdot g'_\nu(p) \cdot d\omega_p \tag{35}$$

bilden.

Beweis von a). Wenn (I) genau k linear unabhängige Eigenfunktionen besitzt, so hat nach Satz I auch (32) diese Eigenfunktionen. Umgekehrt erfüllt jede Eigenfunktion von (32) auch (I) fast überall.

Wenn $g'(q)$ eine Eigenfunktion von (35) ist, dann ist

$$e'(u) = I^{\xi}_{up} g'(p) \tag{36}$$

eine Eigenfunktion der transponierten Gleichung von (I)

$$0 = e'(u) + \int I^{-\xi}_{qt} B(t, u) \cdot e'(q) \cdot d\omega_q \;, \tag{37}$$

denn wir erhalten beim Einsetzen von (36) unter Beachtung von Hilfssatz 5

$$\begin{aligned}
&I^{\xi}_{up} g'(p) + \int [I^{-\xi}_{qt} B(t, u)] \cdot [I^{\xi}_{qp} g'(p)] \cdot d\omega_q \\
&= I^{\xi}_{up} g'(p) + \int [I^{\xi}_{qp} (I^{-\xi}_{qt} B(t, u))] \cdot g'(p) \cdot d\omega_p \\
&= I^{\xi}_{up} g'(p) + \int B(p, u)\, g'(p) \cdot d\omega_p = \text{const.} \int K(p, q) \cdot g'(p) \cdot d\omega_p = 0 \;.
\end{aligned}$$

Wenn k' die Anzahl der linear unabhängigen Eigenfunktionen von (35) ist, dann gilt offenbar $k \geqslant k'$, weil die Transformation (36) nach Hilfssatz (5.5) die lineare Unabhängigkeit bestehen läßt. Nach unsern Voraussetzungen über den Kern $K(p, q)$ können wir dieselben Betrachtungen für den transponierten Kern von $K(p, q)$ machen und erhalten $k' \geqslant k$. Daraus folgt $k = k'$.

Beweis von b). Die Auflösbarkeitsbedingungen lauten

$$0 = \int [I_{ut}^{-\xi} f(t)] \cdot e'_\nu(u) \cdot d\omega_u = \int [I_{ut}^{-\xi} f(t)] \cdot [I_{up}^{\xi} g'_\nu(p)] \cdot d\omega_u \ .$$

Wir formen nach Hilfssatz 5 um und erhalten

$$0 = \int [I_{up}^{\xi}(I_{ut}^{-\xi} f(t))] \cdot g'_\nu(p) \cdot d\omega_p = \int f(p) \cdot g'_\nu(p) \cdot d\omega_p \ .$$

Die Methode zur Bestimmung der Eigenfunktionen von (37) führt auf eine neue Integralgleichung 2. Art, bei der $f(p)$ unverändert eingeht. Als Vorbereitung beweisen wir

Hilfssatz 6. Jede Lösung g von (I) genügt der Beziehung

$$I_{tp}^{-\xi}(I_{pu}^{\xi} g(u)) = g(t) \ .$$

Beweis. $g(u)$ erfüllt (32), somit gilt $I_{pu}^{\xi} g(u) = f(p) - \int B(p, q) \cdot d\omega_q$ Von der rechten Seite können wir $I_{tp}^{-\xi}$ bilden und erhalten nach (I) $g(t)$.

Satz II. a) Wenn g eine Lösung von (32) ist, dann ist

$$e(p) = I_{pq}^{\xi} g(q) \tag{38}$$

eine Lösung der linearen Integralgleichung 2. Art

$$\begin{aligned} f(p) &= e(p) + \int K_2(p, u) \cdot e(u) \cdot d\omega_u \ , \\ K_2(p, u) &\equiv I_{ut}^{-\xi} B(p, t) \in C_{\kappa-2\xi}^{(0)} \ . \end{aligned} \tag{II}$$

b) Wenn $e(p)$ eine Lösung von (II) ist, dann ist $I_{qp}^{-\xi} e(p)$ stetig und löst (32).

Zusatz II. (32), (II) und ihre transponierten Gleichungen haben dieselbe Anzahl k linear unabhängige Eigenfunktionen. Für die Lösbarkeit von (II) sind die Bedingungen (34) notwendig und hinreichend.

Beweis von a). Wir setzen in (32) $B(p, q) = I_{qu}^{\xi}(I_{ut}^{-\xi} B(p, t))$ ein und erhalten

$$f(p) = I_{pq}^{\xi} g(q) + \int [I_{ut}^{-\xi} B(p, t)] \cdot I_{qu}^{\xi} g(q) \cdot d\omega_u \ .$$

Die Substitution (38) liefert die gewünschte Gestalt.

Beweis von Zusatz II. Die Eigenfunktionen von (32) gehen durch (38) in Eigenfunktionen von (II) über, unter Erhaltung der linearen Unabhängigkeit. (II) hat somit mindestens k linear unabhängige Eigenfunktionen, die wir für $k \geqslant 1$ durch $e_\nu(p) = I_{pq}^{\xi} g_\nu(q)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, darstellen, wobei wir die g_ν als Basis der Eigenfunktionen von (I) stetig annehmen können. Wenn $e'(p)$ eine Eigenfunktion der transponierten Gleichung von (II) ist

$$0 = e'(p) + \int [I_{pt}^{-\zeta} B(u, t)] \cdot e'(u) \cdot d\omega_u \ , \tag{39}$$

dann erhalten wir durch Multiplikation von (39) mit I_{qp}^{ζ}

$$0 = I_{qp}^{\zeta} e'(p) + \int B(u, q) \cdot e'(u) \cdot d\omega_u \ ,$$

das heißt $e'(p)$ ist eine Eigenfunktion von (35). (II) kann somit nicht mehr als k linear unabhängige Eigenfunktionen besitzen. Als Basis der Eigenfunktionen von (39) wählen wir die $g'_\nu(p)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, woraus sofort (34) folgt.

Beweis von b). Es sei $g_0(q)$ eine Lösung von (I), also auch von (32) und $e_0(p) = I_{pq}^{\zeta} g_0(q)$ die entsprechende Lösung von (II). Dann läßt sich jede Lösung $e(p)$ von (II) darstellen als

$$e(p) = e_0(p) + \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \cdot e_\nu(p) \text{ [6]} \ , \qquad c_\nu = \text{const.} \tag{40}$$

Auf der rechten Seite von (40) können wir nach Hilfssatz 6 summandenweise $I_{pt}^{-\zeta}$ bilden und erhalten

$$I_{pt}^{-\zeta} e(p) = g_0(t) + \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \cdot g_\nu(t) \ .$$

Die in den Sätzen I und II hergeleiteten Methoden zerstören eine eventuell vorhandene Symmetrie des Kernes $K(p, q)$. Für gewisse Werte von κ läßt sich das durch folgendes Verfahren vermeiden.

Satz III. a) Wenn g eine Lösung von (32) ist, dann erfüllt

$$h(t) = I_{tq}^{\zeta/2} g(q) \tag{41}$$

die lineare Integralgleichung 2. Art, für $0 < \zeta < 1$, $\kappa > 0$,

$$\begin{aligned} I_{tp}^{-\zeta/2} f(p) &= h(t) + \int K_3(t, u) \cdot h(u) \cdot d\omega_u \\ K_3(t, u) &\equiv I_{tp}^{-\zeta/2}\left(I_{uq}^{-\zeta/2} B(p, q)\right) \in C_{\kappa-2\zeta}^{(0)} \ . \end{aligned} \tag{III}$$

$K_3(t, u)$ und $K(p, q)$ sind gleichzeitig symmetrisch.

b) Wenn $h(t)$ eine Lösung von (III) ist, dann ist $I_{ut}^{-\zeta/2} h(t)$ stetig und löst (32).

Zusatz III. (32), (III) und ihre transponierten Gleichungen haben dieselbe Anzahl k linear unabhängige Eigenfunktionen. Für die Lösbarkeit von (III) sind die Bedingungen (34) notwendig und hinreichend.

---

[6]) leere Summen (d. h. $k = 0$) sind durch Null zu ersetzen.

Beweis von a). Wir bilden

$$I^{\zeta}_{pq}\, g(q) = I^{\zeta/2}_{pt}\big(I^{\zeta/2}_{tq}\, g(q)\big) = I^{\zeta/2}_{pt} h(t) \ , \tag{42}$$

$$B(p, q) = I^{\zeta/2}_{pt} B'(t, q) \quad \text{oder} \quad B'(t, q) = I^{-\zeta/2}_{tp} B(p, q) \ . \tag{43}$$

Nach (30) gilt $B'(t, q) \in C^{(1)}_{\kappa-1}$ für t fest. Wir setzen (42) und (43) in (32) ein und erhalten

$$f(p) = I^{\zeta/2}_{pt} h(t) + \int I^{\zeta/2}_{pt} B'(t, q) \cdot g(q) \cdot d\omega_q \quad \text{oder}$$
$$I^{\zeta/2}_{pt}[I^{-\zeta/2}_{tq} f(q) - h(t) - \int B'(t, q) \cdot g(q) \cdot d\omega_q] = 0 \ .$$

Der Klammerinhalt ist stetig, somit liefert Hilfssatz (5.4)

$$I^{-\zeta/2}_{tq} f(q) = h(t) + \int B'(t, q) \cdot g(q) \cdot d\omega_q \ . \tag{44}$$

Die Eigenschaften von $B'(t, q)$ gestatten uns, nach (30), zu schreiben

$$B'(t, q) = I^{\zeta/2}_{uq} K_3(t, u) \quad \text{also} \quad K_3(t, u) = I^{-\zeta/2}_{qu} B'(t, q) \ . \tag{45}$$

Wir erhalten demnach $\int B'(t, q) \cdot g(q) \cdot d\omega_q = \int K_3(t, u) \cdot h(u) \cdot d\omega_u$, was mit (44) zusammen die gewünschte Gestalt ergibt.

Beweis von Zusatz III. Die Eigenfunktionen von (32) gehen durch (41) in Eigenfunktionen von (III) über, unter Erhaltung der linearen Unabhängigkeit. (III) hat somit mindestens k linear unabhängige Eigenfunktionen $h_\nu(t) = I^{\zeta/2}_{tq} g_\nu(q)$, $\nu = 1, 2, \ldots k$, für $k \geqslant 1$. $h'(t)$ sei eine Eigenfunktion der transponierten Gleichung von (III)

$$0 = h'(t) + \int K_3(u, t) \cdot h'(u) \cdot d\omega_u \ . \tag{46}$$

Wir multiplizieren (46) mit $I^{\zeta/2}_{tv}$ und erhalten

$$0 = I^{\zeta/2}_{tv} h'(t) + \int I^{\zeta/2}_{tv} K_3(u, t) \cdot h'(u) \cdot d\omega_u \ . \tag{47}$$

Den neuen Kern formen wir nach (45), (43) und Hilfssatz 5 um.

$I^{\zeta/2}_{tv} K_3(u, t) = B'(u, v) = I^{\zeta/2}_{ut}\big(I^{-\zeta}_{tq} B(q, v)\big)$ setzen wir in (47) ein,

$$0 = I^{\zeta/2}_{tv} h'(t) + \int [I^{-\zeta}_{tq} B(q, v)] \cdot [I^{\zeta/2}_{ut} h'(u)] \cdot d\omega_t \ ,$$

woraus uns die Substitution (41) Gleichung (37) liefert, von der wir wissen, daß sie genau k linear unabhängige Eigenfunktionen $I^{\zeta}_{vq} g'_\nu(q)$, $\nu = 1, 2, \ldots k$ für $k \geqslant 1$, hat. Somit besitzt (46) ebenfalls genau k linear unabhängige Eigenfunktionen, die wir nach den letzten Betrachtungen mit $h'_\nu(t) = I^{\zeta/2}_{tq} g'_\nu(q)$ bezeichnen können. Die Auflösbarkeitsbedingungen lauten folglich

$$\int [I^{-\zeta/2}_{tp} f(p)] \cdot [I^{\zeta/2}_{tq} g'_\nu(q)] \cdot d\omega_t = \int [I^{\zeta/2}_{tq}\big(I^{-\zeta/2}_{tp} f(p)\big)] \cdot g'_\nu(q) \cdot d\omega_q$$
$$= \int f(q) \cdot g'_\nu(q) \cdot d\omega_q = 0 \ .$$

Beweis von b). Jede Lösung von (III) läßt sich darstellen als

$$h(t) = h_0(t) + \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \cdot h_\nu(t) \,, \qquad c_\nu = \text{const.}$$

Für die partikuläre Lösung $h_0(t)$ wählen wir $I_{tq}^{\zeta/2} g_0(q)$, wobei g_0 eine Lösung von (I) und somit auch von (32) ist. Nach (44) gilt

$$h(t) = I_{tq}^{-\zeta/2} f(q) - \int I_{tp}^{-\zeta/2} B(p,q) \cdot g^*(q) \quad \text{mit} \quad g^* = g_0 + \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu \cdot g_\nu \,.$$

In dieser Darstellung von h dürfen wir rechts $I_{ut}^{-\zeta/2}$ bilden und erhalten unter Berücksichtigung von (I)

$$I_{ut}^{-\zeta/2} h(t) = g^*(u) \,.$$

§ 5 Die Lösung des Dirichletschen Problems durch das Potential einer einfachen Schicht

Im Dirichletschen Problem im R_3 ist eine Funktion $V(p)$ gesucht, die in einem beschränkten Gebiete D harmonisch ist und auf dem Rande Ω von D vorgeschriebene stetige Werte $f_1(p)$ annimmt. Ω sei zusammenhängend und besitze überall eine eindeutige Tangentialebene. In einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem mit Zentrum auf Ω, dessen x_3-Achse mit der Flächennormalen zusammenfällt, lasse sich Ω lokal durch die eindeutige Funktion $x_3 = x_3(x_1, x_2)$, $x_3 \in C^{(6)}$, darstellen. Unter diesen Voraussetzungen kann man auf Ω lokale Normalkoordinaten einführen, welche die Voraussetzungen des § 1 erfüllen. Somit gelten die in den vorangehenden Paragraphen hergeleiteten Sätze.

Das Potential einer einfachen Schicht g

$$V(p) = \int_{\Omega} \frac{1}{r_{pq}} \cdot g(q) \cdot d\omega_q \,, \tag{48}$$

r_{pq} = geradliniger Abstand der Punkte p und q, $g \in L$, g beschränkt, ist stetig im ganzen Raume und harmonisch im Innern und im Äußern von Ω. Um das Dirichletsche Problem mit dem Ansatz (48) zu lösen, haben wir somit lediglich dafür zu sorgen, daß die Randwerte angenommen werden, das heißt $g(q)$ muß der linearen Integralgleichung 1. Art

$$f_1(p) = \int_{\Omega} \frac{1}{r_{pq}} \cdot g(q) \cdot d\omega_q \,, \quad p \in \Omega \tag{49}$$

genügen. Umgekehrt erfüllt jede beschränkte und integrierbare Lösung g von (49) die gestellten Bedingungen. Nun weiß man aber, daß die Stetigkeit von f_1 im allgemeinen nicht genügt, um (49) zu lösen[7]). Um unsere Methode anwenden zu können, fordern wir $f_1 \in C^{(2)}$ und zeigen, daß (49) auf die Gestalt (32) gebracht werden kann. Wir setzen

$$f(p) = \chi(\tfrac{1}{2}) \cdot f_1(p)\,, \quad \chi(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2\pi}\,, \quad B(p,q) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_{pq}} - H(p,q;\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{S}\,.$$

Es bleibt noch nachzuweisen, daß $B(p,q)$ zu $C_\kappa^{(2)}$ gehört, mit $\kappa > 0$. Die Differenzierbarkeit von $B(p,q)$ ist für $p \neq q$ evident. Für s_{pq} genügend klein entwickeln wir die Sehne r_{pq} der geodätischen Linie von p nach q nach Potenzen der Bogenlänge s_{pq} und erhalten

$$r_{pq} = s_{pq}\left(1 - \frac{1}{24} s_{pq}^2 \cdot k^2(\sigma)\right), \quad \sigma = \sigma(p,q)$$

$k(\sigma) =$ Krümmung der Geodätischen in einem Punkte σ zwischen p und q. Daraus folgt

$$\frac{1}{r_{pq}} = \frac{1}{s_{pq}} + s_{pq} \cdot h(p,q)\,, \quad s_{pq} \cdot h(p,q) \in C_1^{(2)} \quad \text{für} \quad s_{pq} \leqslant \delta\,.$$

Unter Verwendung von Hilfssatz (4.5) erhalten wir schließlich für $s_{pq} \leqslant \delta$

$$B(p,q) = \frac{1}{2\pi} \cdot s_{pq} \cdot h(p,q) - T(p,q;\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{S} \in C_1^{(2)}\,.$$

Die Kerne der Integralgleichungen 2. Art (I), (II), (III) werden somit höchstens wie $|\log s_{pq}|$ singulär für $s_{pq} \to 0$.

Die Gleichung

$$\int_\Omega \frac{1}{r_{pq}} \cdot g(q) \cdot d\omega_q = 0$$

besitzt die einzige stetige Lösung $g = 0$[8]). Aus dem Maximumprinzip folgt nämlich aus $f(p) = 0$ sofort $V(p) = 0$ und die Sprungrelationen für die Normalableitungen von $V(p)$ ergeben $g = 0$.

Die Gleichungen (I), (II), (III) lassen sich somit eindeutig lösen für jedes $f \in C^{(2)}$, $(k = 0)$. Die gesuchte Funktion g ist stetig, und der Kern $K_3(p,q)$ ist symmetrisch.

---

[7]) siehe [1] Seite 135 und [2] Seite 479.

[8]) Im Dirichletschen Problem der Ebene treten beim Einheitskreis Eigenfunktionen auf und auch bei denjenigen Randkurven, die die Kapazität des Einheitskreises besitzen. Siehe auch [6].

§ 6 Untersuchungen für die Einheitskugel

Auf der Oberfläche der Einheitskugel besitzt die Differentialgleichung

$$\Delta_p \Phi(p) + \lambda \cdot \Phi(p) = 0$$

die überall regulären Lösungen

$\cos(m\varphi) \cdot P_{n,m}(\cos\vartheta)$, $\sin(m\varphi) \cdot P_{n,m}(\cos\vartheta)$, $\lambda_{n,m} = n^2 + n$,
$n = 0, 1, 2, \ldots$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$, $(\varphi, \vartheta) =$ Polarkoordinaten des Punktes p,

$P_{n,m}(x) =$ zugeordnte Legendresche Funktionen,

$P_{n,0}(x) = P_n(x) =$ Legendresche Polynome n. Grades.

Dieses Funktionensystem ist vollständig und orthogonal. Durch Normierung und mit Hilfe des Additionstheoremes der Kugelfunktionen finden wir

$$H(p, q; \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(p) \cdot \varphi_n(q)}{\lambda_n^{\zeta}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \cdot \frac{P_n(p, q)}{(n^2+n)^{\zeta}}, \quad P_n(p,q) \equiv P_n(\cos s_{pq}),$$

Wir stellen den Kern $H(p, q; \zeta)$ für $z > 0$ als Summe eines Kernes $H'(p, q; \zeta)$ und einer konvergenten Reihe dar, wobei $H'(p, q; \zeta)$ eine einfache Integraldarstellung besitzt[9]). Zu diesem Zwecke definieren wir

$$H'(p, q; \zeta) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \cdot \frac{P_n(p, q)}{(2n+1)^{2\zeta}} = \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(p, q)}{(2n+1)^{2\zeta-1}}. \tag{50}$$

Da $|P_n(p, q)| \leqslant 1$ ist, konvergiert die Reihe (50) für $z > 1$ absolut und gleichmäßig in p und q, und es gilt

$$H'(p, q; \zeta) = \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{P_n(p, q)}{(2n+1)^{2\zeta-1}} + R_1, \quad N = 1, 2, 3, \ldots, \quad z > 1, \tag{51}$$

$$R_1 = \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{n=N}^{\infty} \frac{P_n(p, q)}{(2n+1)^{2\zeta-1}}, \quad |R_1| \leqslant \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{n=N}^{\infty} (2n+1)^{1-2z} \to 0 \text{ für } N \to \infty.$$

In (51) setzen wir

$$(2n+1)^{1-2\zeta} = \frac{2\zeta - 1}{\Gamma(2\zeta)} \int_0^{\infty} e^{-(2n+1)\cdot t} \cdot t^{2\zeta-2} \cdot dt$$

und

$$P_n(p, q) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (\cos\gamma + i \sin\gamma \cdot \cos\varphi)^n \cdot d\varphi, \quad (\gamma \equiv s_{pq})$$

---

[9]) Integraldarstellung und analytische Fortsetzung der Kerne $H(p, q; \zeta)$ sind von *Minakshisundaram* in: Zeta-function on the sphere, J. Indian Math. Soc. 13 (1949), p. 41, untersucht worden.

ein und erhalten

$$H'(p,q;\zeta)=\frac{2\zeta-1}{4\pi\cdot\Gamma(2\zeta)}\cdot\int_0^\infty t^{2\zeta-2}\cdot e^{-t}\cdot\sum_{n=0}^{N-1}e^{-2nt}\cdot P_n(p,q)\cdot dt+R_1$$

$$=\frac{2\zeta-1}{4\pi^2\,\Gamma(2\zeta)}\cdot\int_0^\infty t^{2\zeta-2}\cdot e^{-t}\left[\int_0^\pi\sum_{n=0}^{N-1}(\cos\gamma+i\sin\gamma\cdot\cos\varphi)^n\cdot(e^{-2t})^n\cdot d\varphi\right]\cdot dt+R_1\,.$$

Für $\gamma\neq 0,\pi$; $\varphi\neq 0,\pi$; $0\leqslant t\leqslant\infty$ gilt

$$\sum_{n=0}^{N=1}(\cos\gamma+i\sin\gamma\cdot\cos\varphi)^n\cdot(e^{-2t})^n=\frac{e^{2t}}{(e^{2t}-\cos\gamma)-i\cdot\sin\gamma\cdot\cos\varphi}+R_2\,,\quad(52)$$

$$R_2=-\sum_{n=N}^\infty(\cos\gamma+i\sin\gamma\cos\varphi)^n\cdot(e^{-2t})^n;\quad|R_2|\leqslant\frac{1}{e^{2Nt}(1-e^{-2t})}\,.$$

Da die rechte Seite von (52) summandenweise absolut integrierbar ist in $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, erhalten wir, unter Berücksichtigung von

$$\int_0^\pi\frac{d\varphi}{a+b\cdot\cos\varphi}=\pi(a^2-b^2)^{-1/2}$$

$$H'(p,q;\zeta)=\frac{2\zeta-1}{4\pi\cdot\Gamma(2\zeta)}\cdot\int_0^\infty t^{2\zeta-2}\cdot e^t[(e^{2t}-\cos\gamma)^2+\sin^2\gamma]^{-1/2}\cdot dt+R_1+R_3$$

$$R_3=\frac{2\zeta-1}{4\pi^2\Gamma(2\zeta)}\cdot\int_0^\infty t^{2\zeta-2}\cdot e^{-t}\left[\int_0^\pi R_2\,d\varphi\right]\cdot dt$$

$$|R_3|\leqslant\frac{|2\zeta-1|}{4\pi\,|\Gamma(2\zeta)|}\cdot\int_0^\infty t^{2z-2}\cdot e^{-2Nt}\cdot\frac{dt}{2\cdot\mathrm{Sin}\,t}\to 0\quad\text{für } N\to\infty\,.$$

Durch genügend große Wahl von N kann $|R_1|+|R_3|$ beliebig klein gemacht werden. Somit resultiert für $z>1$; $\gamma\neq 0,\pi$; $\gamma\equiv s_{pq}$, die Darstellung

$$H'(p,q;\zeta)=\frac{2\zeta-1}{4\pi\cdot\sqrt{2}\cdot\Gamma(2\zeta)}\cdot\int_0^\infty\frac{t^{2\zeta-2}}{\sqrt{\mathrm{Cos}\,2t-\cos\gamma}}\cdot dt\,.$$

Die Vorzeichen der Wurzeln sind positiv zu wählen. Für $p\neq q$ ist $H'(p,q;\zeta)$ eine holomorphe Funktion von ζ in $z>\frac{1}{2}$. Durch partielle Integration können wir sie beliebig weit nach links fortsetzen. $H'(p,q;\zeta)$ ist somit eine ganze Funktion in ζ. Für $z>-\frac{1}{2}$, $p\neq q$, gilt zum Beispiel die Darstellung

$$H'(p,q;\zeta)=\frac{1}{4\pi\sqrt{2}\,\Gamma(2\zeta)}\cdot\int_0^\infty\frac{t^{2\zeta-1}\cdot\mathrm{Sin}\,2t}{(\mathrm{Cos}\,2t-\cos\gamma)^{3/2}}\cdot dt\,.$$

Für spezielle Werte von ζ erhalten wir

$$H'(p,q;0)=0\,,\quad H'(p,q;\tfrac{1}{2})=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r_{pq}}\,.\quad(53)$$

Die erste Beziehung folgt aus $\Gamma(0) = \infty$, die zweite aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) = (2 - 2x)^{-1/2} \quad \text{für} \quad |x| < 1 .$$

Ferner sehen wir, daß (50) für $\zeta = \frac{1}{2}$ konvergiert und in $z > \frac{1}{2}$ holomorph ist.

$H(p, q; \zeta)$ und $H'(p, q; \zeta)$ sind durch nachstehende Gleichung verknüpft,

$$H(p,q;\zeta) = \frac{-1}{4\pi} \cdot 4^\zeta + 4^\zeta \cdot H'(p,q;\zeta) + \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(p,q) \cdot h_n(\zeta)}{(2n+1)^{2\zeta+1}}, \; z > 0, \tag{54}$$

wobei die $h_n(\zeta)$ definiert sind durch

$$\frac{1}{(n^2+n)^\zeta} = \frac{4^\zeta}{(2n+1)^{2\zeta}} + \frac{h_n(\zeta)}{(2n+1)^{2\zeta+2}}, \; |h_n(\zeta)| < |\zeta| \cdot 2^{3z+1}, \; n = 1, 2, \ldots \tag{55}$$

Dank den Abschätzungen für $h_n(\zeta)$ konvergiert die Reihe in (54) absolut und gleichmäßig für $z > 0$ und ist holomorph in ζ. Die Richtigkeit von (54) ergibt sich für große z sofort durch Einsetzen der Reihenentwicklungen von $H(p, q; \zeta)$ und $H'(p, q; \zeta)$. Analytische Fortsetzung beweist die Behauptung. Um in (54) eine besser konvergente Reihe oder eine Darstellung für negative z zu erhalten, müssen wir lediglich die Entwicklung (55) von $(n^2 + n)^{-\zeta}$ nach Potenzen von $(2n + 1)^{-2}$ weiter ausführen und erhalten eine zu (54) analoge Formel.

Da die Definitionen von $H(p, q; \zeta)$ und $H'(p, q, \zeta)$ ähnlich sind, und da, wie aus (54) ersichtlich ist, $H'(p, q; \zeta)$ ebenfalls absolut integrierbar ist für $z > 0$, gelten wie in Hilfssatz (4.6) nachstehende Beziehungen

$$\begin{aligned} &\int H'(p,t;\zeta) \cdot P_n(t,q) \cdot d\omega_t = (2n+1)^{-2\zeta} \cdot P_n(p,q) , && z > 0, \; n \geqslant 0 \\ &\int H'(p,t;\zeta) \cdot H'(t,q;\zeta_1) \cdot d\omega_t = H'(p,q;\zeta + \zeta_1) , && z > 0, \; z_1 > 0 \end{aligned} \tag{56}$$

Neben den früher behandelten Lösungsmethoden des Dirichletschen Problems mit dem Potential einer einfachen Schicht, erwähnen wir für die Kugel noch folgenden Weg:

Die Gleichung

$$2\pi \cdot f(p) = \int \frac{1}{r_{pq}} \cdot g(q) \cdot d\omega_q , \quad f \in C^{(2)} \tag{57}$$

hat die Lösung

$$2\pi \cdot g(q) = -\int \left[\frac{1}{r_{pq}} + R(p,q) \right] \Delta_p f(p) \cdot d\omega_p + \pi \cdot \bar{f} \tag{58}$$

mit

$$R(p,q) = \tfrac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(p,q)}{n^2+n} = \tfrac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(p,q)}{(2n+1)^2} \cdot h_n(1) \; ; \quad |R(p,q)| \leqslant \tfrac{1}{4} .$$

Zum Beweise setzen wir (58) in (57) ein und erhalten unter Beachtung von (53), (56)

$$\int \frac{1}{r_{pq}} \cdot g(q) \cdot d\omega_q = \int 4\pi \cdot H'(p,q;\tfrac{1}{2}) \Big\{ -\frac{1}{2\pi} \int [4\pi \cdot H'(q,t;\tfrac{1}{2}) + R(q,t)] \Delta_t f(t) \cdot d\omega_t$$

$$+ \tfrac{1}{2}\overline{f} \Big\} \cdot d\omega_q = -8\pi \int \Big[\int H'(p,q;\tfrac{1}{2}) \cdot H'(q,t;\tfrac{1}{2}) \cdot d\omega_q$$

$$+ \frac{1}{16\pi} \cdot \int H'(p,q;\tfrac{1}{2}) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(t,q)}{(2n+1)^2} \cdot h_n(1) \cdot d\omega_q \Big] \Delta_t f(t) \cdot d\omega_t$$

$$+ 2\pi \overline{f} \cdot \int H'(p,q;\tfrac{1}{2}) \cdot d\omega_q = -2\pi \int \Big[4 \cdot H'(p,t;1)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(p,t)}{(2n+1)^3} \cdot h_n(1) \Big] \cdot \Delta_t f(t) \cdot d\omega_t + 2\pi \overline{f} .$$

Die Formeln (54) und (26) liefern uns schließlich

$$\int \frac{1}{r_{pq}} \cdot g(q) \cdot d\omega_q = -2\pi \cdot \int H(p,t;1) \cdot \Delta_t f(t) \cdot d\omega_t + 2\pi \overline{f}$$

und daraus erhalten wir nach (4.7), (18) und (2.1)

$$\int \frac{1}{r_{pq}} \cdot g(q)\, d\omega_q = -2\pi \cdot \Delta_p \int G_0(p,t) \cdot f(t) \cdot d\omega_t + 2\pi \overline{f} = 2\pi f(p) .$$

LITERATURVERZEICHNIS

[1] *Courant-Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik I, 2. Auflage, Berlin 1931.

[2] *Goursat*, Cours d'Analyse III, 5e édition, Paris 1942.

[3] *Magnus-Oberhettinger*, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2. Auflage, Berlin 1948.

[4] *Minakshisundaram-Pleijel*, Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-Operator on Riemannian manifolds, Canadian J. Math. 1 (1949) p. 242–256.

[5] *Riesz, M.*, L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math. 81 (1949) p. 1–223.

[6] *de la Vallée Poussin*, Le potentiel logarithmique, 1er éd., Paris 1949.

[7] *Bertrand, G.*, Le problème de Dirichlet et le potentiel de simple couche, Bull. Sci. Math. 47, sér. 2 (1923) p. 282.

(Eingegangen den 6. März 1953.)