Werk

Titel: Les répartitions imprimitives des n-uples dans le groupe symétrique de degré n.

Autor: Bays, S.

Jahr: 1952

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?358147735_0026|log9

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Les répartitions imprimitives des n-uples dans le groupe symétrique de degré n

Par S. BAYS

Introduction

Dans deux travaux antérieurs[1]) nous avons considéré l'imprimitivité des groupes de substitutions par rapport *aux i-uples*, $i > 1$; jusqu'ici à notre connaissance cette imprimitivité n'avait jamais été considérée que par rapport *aux éléments*, $i = 1$. La condition nécessaire et suffisante pour l'imprimitivité par rapport aux i-uples, $1 \leqq i \leqq n$, d'un groupe de substitutions G de degré n transitif par rapport aux i-uples, est la présence dans le groupe G d'un sous-groupe propre intermédiaire K entre G et son diviseur H qui laisse en place l'un des i-uples des n éléments[2]).

Le seul groupe de substitutions de degré n transitif par rapport aux n-uples est le groupe symétrique des n éléments ; son diviseur H qui laisse en place l'un des n-uples des n éléments est l'identité. Donc à chaque diviseur propre du groupe symétrique G de degré n correspond une répartition imprimitive particulière des n-uples, dans le sens attribué jusqu'ici à ce mot „répartition imprimitive" et qui est celui de l'imprimitivité par rapport aux éléments. Ce sens est le suivant : la répartition des i-uples en systèmes, $1 \leqq i \leqq n$, a la propriété de rester invariante à l'ordre près des systèmes, quand on effectue sur elle une substitution quelconque du groupe G.

Mais nous allons montrer que effectivement à chaque diviseur propre K du groupe symétrique G correspondent *deux* répartitions différentes des n-uples en systèmes, ayant des propriétés correspondantes ; nous les appellerons respectivement répartition *imprimitive à droite* et répartition *imprimitive à gauche* relatives à K. Lorsque le diviseur K est normal

---

[1]) *S. Bays :* Sur la transitivité et la primitivité des groupes de substitutions, Comment. Math. Helv., vol. 22, fasc. 1, 1949, p. 17 à 30.

S. Bays : Sur l'imprimitivité des groupes de substitutions par rapport aux i-uples, Comment. Math. Helv., vol. 25, fasc. 4, p. 298—310.

[2]) Voir en particulier le second mémoire, § 2.

en G, ces deux répartitions n'en font qu'*une* qui jouit dans ce cas des propriétés des deux répartitions. Enfin dans les deux derniers paragraphes, nous étudions l'implication de ces répartitions imprimitives des n-uples, correspondantes aux deux diviseurs propres H et K de G, lorsque H est contenu dans K.

§ 1. Soit le groupe symétrique G des n éléments $1, 2, \ldots, n$. A chaque substitution g du groupe G correspond la permutation, c'est-à-dire le n-uple-arrangement qui provient de $1\,2 \ldots n$ en y effectuant la substitution des éléments produite par g. Autrement dit, si g remplace l'élément i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ par a_i $(a_i = 1, 2, \ldots, n)$, le n-uple correspondant à la substitution g est $a_1 a_2 \ldots a_n$. Ainsi à l'ensemble des $n!$ substitutions de G correspond d'une manière *univoque* l'ensemble des $n!$ n-uples des éléments $1\,2 \ldots n$.

Soit maintenant la substitution h de G. Sur la substitution g précédente, je peux faire avec h deux opérations différentes, la multiplication de g par h avant ou après, soit hg ou gh, et la transformation de g par h, soit $h^{-1}gh$; le résultat de la première de ces opérations est la composition ou le produit hg ou gh ; le résultat de la seconde est la substitution semblable à g qui provient de g en effectuant dans ses cycles la substitution des éléments produite par h.

Par contre sur le n-uple $\bar{g} = a_1 a_2 \ldots a_n$ correspondant à g, je ne peux faire avec h que l'opération qui consiste à effectuer sur ses éléments a_i la substitution produite par h. Nous appellerons également cette opération la *transformation* de $\bar{g}$ par h. Si h remplace l'élément a_i $(a_i = 1, 2, \ldots, n)$, par b_i $(b_i = 1, 2, \ldots, n)$, le n-uple transformé de $\bar{g}$ par h est donc $b_1 b_2 \ldots b_n$. Il est ainsi le n-uple correspondant à la substitution gh. D'autre part la substitution transformée de g par h est $h^{-1}gh$; h remplace par cette opération dans les cycles de g l'élément a_i par b_i. Ainsi, en résumé, h transforme la substitution g dans la substitution $h^{-1}gh$ et le n-uple de g dans le n-uple de gh.

§ 2. Soit un sous-groupe propre quelconque K du groupe G et les deux décompositions *à droite* et *à gauche* de G par rapport à K :

$$G = K + Kg_2 + Kg_3 + \cdots + Kg_l \ , \tag{1}$$

$$G = K + g_2'K + g_3'K + \cdots + g_l'K \ , \tag{2}$$

les g_i et g_i' étant des substitutions de G et l l'indice de K dans G. Si k est l'ordre de K on a $kl = n!$. Soit h une substitution quelconque de G. Si nous multiplions la décomposition (1) *à droite* par h et la décompo-

sition (2) *à gauche* par h, on sait que ces deux décompositions sont absolues, c'est-à-dire que les complexes Kg_i et $g_i'K$ aux seconds membres par cette multiplication ne font que permuter entre eux.

Qu'en est-il par contre dans la multiplication en sens contraire ? Nous allons montrer que la multiplication *à gauche* de (1) par h donne la décomposition *à droite* de G relative au transformé $hKh^{-1} = \overline{K}$ de K par h^{-1} et que la multiplication *à droite* de (2) par h donne la décomposition *à gauche* de G relative au transformé $h^{-1}Kh = \underline{K}$ de K par h. En effet soit la multiplication à gauche de (1) par h :

$$hG = hK + hKg_2 + \cdots + hKg_l \ .$$

Par la transformation des deux membres de (1) par la substitution h^{-1} :

$$hGh^{-1} = hKh^{-1} + hKg_2h^{-1} + \cdots + hKg_lh^{-1} \tag{3}$$

j'ai évidemment la décomposition à droite de G relative au groupe transformé $\overline{K} = hKh^{-1}$. Maintenant si je multiplie à droite cette décomposition par h j'obtiens l'égalité précédente ; d'autre part, par cette multiplication je ne fais que permuter les complexes de la décomposition (3). Donc l'égalité $G = hK + hKg_2 + \cdots + hKg_l$ est bien la décomposition à droite de G par rapport à $\overline{K}$.

Soit ensuite la multiplication à droite de (2) par h :

$$Gh = Kh + g_2'Kh + \cdots + g_l'Kh \ .$$

La démonstration est la même en effectuant la transformation des deux membres de (2) par la substitution h :

$$h^{-1}Gh = h^{-1}Kh + h^{-1}g_2'Kh + \cdots + h^{-1}g_l'Kh \tag{4}$$

et en multipliant à gauche par h. L'égalité (4) est la décomposition à gauche de G relative au groupe transformé $\underline{K} = h^{-1}Kh$ et cette égalité est à l'ordre près des complexes du second membre l'égalité précédente.

§ 3. Soit maintenant le tableau des n-uples correspondant à la décomposition (1). Pour être plus clair, nous prendrons un exemple concret : pour G le groupe symétrique de degré 4 et pour K le groupe cyclique engendré par $s = (1\ 2\ 3\ 4)$. Le tableau de la décomposition (1) est :

$$\begin{array}{cccccc} J & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 \\ s & s\,g_2 & s\,g_3 & s\,g_4 & s\,g_5 & s\,g_6 \\ s^2 & s^2\,g_2 & s^2\,g_3 & s^2\,g_4 & s^2\,g_5 & s^2\,g_6 \\ s^3 & s^3\,g_2 & s^3\,g_3 & s^3\,g_4 & s^3\,g_5 & s^3\,g_6 \end{array} \tag{1}$$

On peut prendre $g_2 = (23)$, $g_3 = (34)$, $g_4 = (24)$, $g_5 = (234)$, $g_6 = (243)$.

Le tableau des quadruples correspondants est :

$$\begin{array}{cccccc} 1\,2\,3\,4 & 1\,3\,2\,4 & 1\,2\,4\,3 & 1\,4\,3\,2 & 1\,3\,4\,2 & 1\,4\,2\,3 \\ 2\,3\,4\,1 & 3\,2\,4\,1 & 2\,4\,3\,1 & 4\,3\,2\,1 & 3\,4\,2\,1 & 4\,2\,3\,1 \\ 3\,4\,1\,2 & 2\,4\,1\,3 & 4\,3\,1\,2 & 3\,2\,1\,4 & 4\,2\,1\,3 & 2\,3\,1\,4 \\ 4\,1\,2\,3 & 4\,1\,3\,2 & 3\,1\,2\,4 & 2\,1\,4\,3 & 2\,1\,3\,4 & 3\,1\,4\,2 \end{array} \qquad (1')$$

Le tableau de la décomposition (2), pour laquelle nous pouvons prendre pour les g_i' les g_i ci-dessus, est :

$$\begin{array}{cccccc} J & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 \\ s & g_2 s & g_3 s & g_4 s & g_5 s & g_6 s \\ s^2 & g_2 s^2 & g_3 s^2 & g_4 s^2 & g_5 s^2 & g_6 s^2 \\ s^3 & g_2 s^3 & g_3 s^3 & g_4 s^3 & g_5 s^3 & g_6 s^3 \end{array} \qquad (2)$$

Le tableau des quadruples correspondants est :

$$\begin{array}{cccccc} 1\,2\,3\,4 & 1\,3\,2\,4 & 1\,2\,4\,3 & 1\,4\,3\,2 & 1\,3\,4\,2 & 1\,4\,2\,3 \\ 2\,3\,4\,1 & 2\,4\,3\,1 & 2\,3\,1\,4 & 2\,1\,4\,3 & 2\,4\,1\,3 & 2\,1\,3\,4 \\ 3\,4\,1\,2 & 3\,1\,4\,2 & 3\,4\,2\,1 & 3\,2\,1\,4 & 3\,1\,2\,4 & 3\,2\,4\,1 \\ 4\,1\,2\,3 & 4\,2\,1\,3 & 4\,1\,3\,2 & 4\,3\,2\,1 & 4\,2\,3\,1 & 4\,3\,1\,2 \end{array} \qquad (2')$$

Le fait qui fait appeler *imprimitive* la répartition (1′) est, comme nous le savons, le fait suivant : la transformation des quadruples par une *substitution quelconque* h de G ne peut que permuter entre elles les colonnes de quatre quadruples ; autrement dit le tableau (1′) reste invariant à l'ordre près de ses colonnes. Cela résulte immédiatement des deux faits donnés aux § 1 et 2 : h transforme le n-uple de g dans le n-uple de gh et la multiplication à droite par h de la décomposition (1) ne peut que permuter entre eux les complexes Kg_i.

Mais alors la répartition (2′) a une propriété analogue : la transformation d'un *quadruple quelconque* $\overline{h}$, correspondant à la substitution h, par les substitutions de la décomposition (2) redonne le tableau (2′) à l'ordre près de ses colonnes. En effet la multiplication à gauche par h de la décomposition (2) ne peut que permuter entre eux les complexes $g_i K$ et cette multiplication revient à la transformation de $\overline{h}$ par les substitutions de (2).

En raison de l'analogie de leurs propriétés, nous appellerons les deux répartitions (1′) et (2′) des quadruples, respectivement répartitions *imprimitives à droite* et *à gauche* des quadruples relatives au sous-groupe K. La première a la propriété de rester invariante à l'ordre près de ses

colonnes pour toute transformation par une substitution quelconque de G ; la seconde a la propriété de rester invariante à l'ordre près de ses colonnes lorsque je transforme un quadruple quelconque par les substitutions de la décomposition (2).

§ 4. Les répartitions (1′) et (2′) sont les transformations d'un même quadruple *de base* 1 2 3 4 par les substitutions des décompositions respectives (1) et (2). Dans ce sens la propriété de la répartition imprimitive à gauche (2′) peut s'exprimer plus simplement : à l'ordre de ses colonnes près, la répartition (2′) est *indépendante* du quadruple de base que je prends pour la constituer.

Nous allons considérer maintenant les deux autres cas de transformation des tableaux (1′) et (2′) correspondants aux multiplications en sens contraire des décompositions (1) et (2) envisagées au § 2. La multiplication à gauche de (1) par h donne la décomposition à droite de G par rapport au transformé $\overline{K}$ de K par h^{-1}. Pour le tableau (1′) ce fait signifie : la transformation du quadruple quelconque $\overline{h}$ par les substitutions de la décomposition (1) donne la répartition imprimitive à droite relative au sous-groupe $\overline{K}$ transformé de K par h^{-1}. Autrement dit : si nous prenons au lieu de 1 2 3 4 le quadruple quelconque $\overline{h}$ comme quadruple de base de la répartition (1′), elle devient la répartition imprimitive à droite par rapport à $\overline{K}$.

La multiplication à droite de (2) par h donne la décomposition à gauche de G par rapport au transformé $\underline{K}$ de K par h. Pour le tableau (2′) ce fait signifie : la transformation des quadruples de la répartition (2′) par la substitution quelconque h donne la répartition imprimitive à gauche relative au sous-groupe $\underline{K}$ transformé de K par h. Autrement dit : la substitution quelconque h transforme le tableau (2′) dans celui de la répartition imprimitive à gauche par rapport à $\underline{K}$.

§ 5. Nous pouvons maintenant résumer les faits que nous venons d'établir de la façon suivante en les exprimant d'une manière générale.

Conformément à ce qui a été dit déjà aux § 3 et 4 nous appelons donc :

répartition imprimitive des n-uples *à droite* relative au diviseur K celle qui provient de la transformation du n-uple *de base* $1\,2\ldots n$ par les substitutions de la décomposition à droite de G par rapport à K.

répartition imprimitive des n-uples *à gauche* relative au diviseur K celle qui provient de la transformation du n-uple *de base* $1\,2\ldots n$ par les substitutions de la décomposition à gauche de G par rapport à K.

A l'ordre près de leurs colonnes ces deux répartitions imprimitives restent *invariantes*, la première lorsque je la transforme par une substitution quelconque de G, la seconde lorsque je lui donne un n-uple de base quelconque au lieu de $1\,2\ldots n$.

A l'ordre près des colonnes, ces deux répartitions deviennent respectivement les répartitions imprimitives *de même sens* (à droite et à gauche) relatives aux transformés de K, $\overline{K}$ par h^{-1} et $\underline{K}$ par h, la première lorsque je lui donne le n-uple de base quelconque $\overline{h}$ au lieu de $1\,2\ldots n$, la seconde lorsque je la transforme par la substitution quelconque h de G.

Si maintenant K est diviseur *normal* dans G, les transformés $\overline{K}$ et $\underline{K}$ sont identiques à K, les répartitions imprimitives $(1')$ et $(2')$ n'en font qu'une et cette répartition imprimitive unique a les deux propriétés ci-dessus : elle reste *invariante* à l'ordre près de ses colonnes, soit lorsque je la transforme par une substitution quelconque de G, soit lorsque je lui donne un n-uple de base quelconque au lieu de $1\,2\ldots n$. Nous appellerons cette répartition la répartition *imprimitive* tout court correspondante au diviseur *normal* K ; elle est donc indépendante de son n-uple de base et de la transformation qu'on lui fait subir.

Ainsi à chaque diviseur propre K de G correspondent deux répartitions imprimitives à droite et à gauche des n-uples de nature différente. La répartition imprimitive à droite est celle qui a le sens attribué jusqu'ici au mot répartition *imprimitive :* les systèmes de la répartition sont changés entre eux par une substitution quelconque de G. Mais la répartition imprimitive à gauche a également son intérêt : les systèmes de la répartition ne font que permuter entre eux lorsqu'on change le n-uple de base. Ainsi le nombre des répartitions imprimitives des n-uples de chaque sorte est le même ; *il est exactement le nombre des diviseurs propres de* G. Celles de la même sorte qui correspondent aux diviseurs *conjugués* de K peuvent être appelées aussi *conjuguées* entre elles ; les conjuguées à droite s'obtiennent l'une de l'autre en changeant le n-uple de base ; les conjuguées à gauche proviennent l'une de l'autre par transformation par une substitution quelconque comme les diviseurs eux-mêmes.

§ 6. Soit maintenant H et K deux diviseurs propres de G, H étant *contenu* dans K. Soit les décompositions à droite de G par rapport à K et de K par rapport à H :

$$G = K + K g_2 + \cdots + K g_l \ , \tag{5}$$

$$K = H + H t_2 + \cdots + H t_m \ . \tag{6}$$

Ainsi la décomposition à droite de G par rapport à H peut s'écrire :

$$G = (H + H\,t_2 + \cdots + H\,t_m) + (H\,g_2 + H\,t_2\,g_2 + \cdots + H\,t_m\,g_2) + \cdots + (H\,g_l + H\,t_2\,g_l + \cdots + H\,t_m\,g_l)\ . \tag{7}$$

Si p est l'ordre de H, l'ordre de K est mp et l'ordre de G, lmp. Ainsi les systèmes de la répartition imprimitive à droite des n-uples relative à K sont constitués chacun de m *sous-systèmes* de la répartition imprimitive à droite correspondante à H. Une substitution quelconque de G transforme la répartition relative à K en elle-même, à l'ordre près des systèmes et la répartition correspondante à H en elle-même aussi, à l'ordre près des sous-systèmes. Mais du fait de la première transformation, la seconde a moins de liberté que la première ; elle est soumise à la restriction que deux sous-systèmes de H qui appartiennent à un même système de K doivent rester par la transformation dans le même système de K.

Par contre l'opération faite sur les répartitions imprimitives correspondantes à la multiplication *à gauche* des décompositions ci-dessus par une substitution quelconque h de G a l'effet suivant. Par cette multiplication à gauche les décompositions (5), (6), (7) deviennent les décompositions à droite correspondantes relatives aux transformés $\overline{K}$ et $\overline{H}$ de K et H par h^{-1} :

$$G = \overline{K} + \overline{K}\,g'_2 + \cdots + \overline{K}\,g'_l\ , \tag{5'}$$

$$\overline{K} = \overline{H} + \overline{H}\,t'_2 + \cdots + \overline{H}\,t'_m\ . \tag{6'}$$

$$G = (\overline{H} + \overline{H}\,t'_2 + \cdots + \overline{H}\,t'_m) + (\overline{H}\,g'_2 + \overline{H}\,t'_2\,g'_2 + \cdots + \overline{H}\,t'_m\,g'_2) + \cdots + (\overline{H}\,g'_l + \overline{H}\,t'_2\,g'_l + \cdots + \overline{H}\,t'_m\,g'_l)\ . \tag{7'}$$

Donc en donnant aux répartitions imprimitives à droite relatives à K et H, le n-uple *de base* quelconque $\overline{h}$ au lieu de $1\ 2 \ldots n$, nous obtenons les répartitions imprimitives à droite relatives aux transformés $\overline{K}$ et $\overline{H}$ de K et H par h^{-1}, avec la même implication que pour K et H.

Maintenant nous pouvons avoir sans doute les trois cas particuliers : de H et K, l'un est diviseur normal en G et pas l'autre ou les deux sont diviseurs normaux en G. Dans le groupe symétrique de degré 4 il y a un exemple des deux premiers cas. Pour trouver un exemple du troisième cas il faudrait chercher dans un groupe symétrique de degré plus élevé. Si H est diviseur normal en G et pas K, en changeant le n-uple de base,

la répartition imprimitive à droite relative à H reste invariante à l'ordre près des sous-systèmes, tandis que la répartition relative à K devient celle par rapport au transformé $\overline{K}$ différent de K. Autrement dit le *contenu* des systèmes change tandis que le contenu des sous-systèmes impliqués dans les systèmes ne change pas à l'ordre près des sous-systèmes. Par contre si K est diviseur normal en G et pas H, en changeant le n-uple de base, la répartition imprimitive à droite relative à K reste invariante à l'ordre près des systèmes, tandis que la répartition relative à H devient celle par rapport au transformé $\overline{H}$ différent de H. Autrement dit le *contenu* des sous-systèmes change, tandis que le contenu des systèmes constitués des sous-systèmes ne change pas à l'ordre près de ces systèmes. Ces deux faits paraissant à première vue difficiles à comprendre, nous donnons l'exemple auquel il est fait allusion ci-dessus.

Le groupe symétrique G de degré 4 a 25 diviseurs propres ; un seul d'entre eux est diviseur normal en G, le groupe d'ordre 4 : $\{J, (1\,2)\,(3\,4), (13)\,(24), (1\,4)\,(2\,3)\}$. Ce groupe a les trois diviseurs propres d'ordre 2 conjugués entre eux : $\{J, (1\,2)\,(3\,4)\}$, $\{J, (1\,3)\,(2\,4)\}$, $\{J, (1\,4)\,(2\,3)\}$ et il est lui-même diviseur propre dans les trois groupes suivants d'ordre 8 également conjugués entre eux :

$$\{J, (1\,2\,3\,4), (1\,3)\,(2\,4), (1\,4\,3\,2), (1\,3), (2\,4), (1\,2)\,(3\,4), (1\,4)\,(2\,3)\},$$
$$\{J, (1\,2\,4\,3), (1\,4)\,(2\,3), (1\,3\,4\,2), (1\,4), (2\,3), (1\,3)\,(2\,4), (1\,2)\,(3\,4)\},$$
$$\{J, (1\,3\,2\,4), (1\,2)\,(3\,4), (1\,4\,2\,3), (1\,2), (3\,4), (1\,3)\,(2\,4), (1\,4)\,(2\,3)\}.$$

Si nous prenons pour H le groupe $\{J, (1\,2)\,(3\,4)\}$ et pour K le groupe d'ordre 4, K est diviseur normal en G et pas H ; nous avons un exemple du second cas ci-dessus. La répartition imprimitive à droite correspondante à K est, en disposant les systèmes en colonnes comme nous l'avons déjà fait précédemment (§ 3) :

$$\begin{array}{cccccc} 1\,2\,3\,4 & 2\,1\,3\,4 & 3\,2\,1\,4 & 4\,2\,3\,1 & 2\,3\,1\,4 & 3\,1\,2\,4 \\ 2\,1\,4\,3 & 1\,2\,4\,3 & 2\,3\,4\,1 & 2\,4\,1\,3 & 3\,2\,4\,1 & 1\,3\,4\,2 \\ 3\,4\,1\,2 & 3\,4\,2\,1 & 1\,4\,3\,2 & 3\,1\,4\,2 & 1\,4\,2\,3 & 2\,4\,3\,1 \\ 4\,3\,2\,1 & 4\,3\,1\,2 & 4\,1\,2\,3 & 1\,3\,2\,4 & 4\,1\,3\,2 & 4\,2\,1\,3 \end{array} \qquad (8)$$

Prenons au lieu de 1 2 3 4 un quadruple *de base* quelconque, soit 2 4 1 3 $= \overline{h}$, c'est-à-dire effectuons sur ce quadruple $\overline{h}$ les substitutions de la décomposition à droite de G par rapport à K ; le tableau précédent vient remplacé par celui-ci :

2 4 1 3	1 4 2 3	2 4 3 1	2 1 4 3	3 4 2 1	1 4 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 1 2 4	4 3 2 1	2 1 3 4	3 2 1 4
4 2 3 1	4 1 3 2	4 2 1 3	1 2 3 4	4 3 1 2	4 1 2 3
3 1 4 2	3 2 4 1	1 3 4 2	3 4 1 2	1 2 4 3	2 3 4 1

(8′)

Le contenu de ces colonnes est le même que celui des colonnes du tableau (8), à leur ordre près : la première de (8) est la quatrième de (8′), etc.

La répartition imprimitive à droite correspondante à H est, en disposant toujours en colonnes les sous-systèmes et en n'écrivant que les 6 premiers, faute de place :

1 2 3 4	3 4 1 2	2 1 3 4	3 4 2 1	3 2 1 4	1 4 3 2	...
2 1 4 3	4 3 2 1	1 2 4 3	4 3 1 2	2 3 4 1	4 1 2 3	...

(9)

Ces sous-systèmes sont le fractionnement en deux tronçons des colonnes de (8) ci-dessus ; pour en voir immédiatement la raison il faut naturellement écrire la décomposition à droite de G relative à H. En changeant le quadruple de base 1 2 3 4 en 2 4 1 3, cette répartition imprimitive devient évidemment :

2 4 1 3	4 2 3 1	...	2 1 4 3	1 2 3 4	...
1 3 2 4	3 1 4 2	...	4 3 2 1	3 4 1 2	...

(9′)

c'est-à-dire le même fractionnement des colonnes de (8′) en deux tronçons. Cette répartition doit être la répartition imprimitive à droite relative au transformé $\overline{H} = \{J, (1\,3)\,(2\,4)\}$ de H par $h^{-1} = (1\,3\,4\,2)$. On le vérifie aisément, mais notre but est seulement de faire constater ici que le contenu des sous-systèmes a changé ; en effet les deux premiers sous-systèmes de (9) qui constituent la première colonne de (8) : 1 2 3 4, 2 1 4 3 et 3 4 1 2, 4 3 2 1, et dont l'ensemble reste la quatrième colonne de (8′), deviennent respectivement : 2 1 4 3, 4 3 2 1 et 1 2 3 4, 3 4 1 2, qui sont les deux tronçons de la quatrième colonne de (8′) ; or ces deux tronçons n'ont pas le même contenu que les deux premiers.

Faute de place, nous laissons au lecteur le soin de faire la vérification de l'autre possibilité qui est un exemple du premier cas ci-dessus : prendre pour H le groupe d'ordre 4 et pour K l'un des trois groupes d'ordre 8 ; ainsi H est diviseur normal en G et pas K. On trouve bien en changeant le quadruple de base, que le contenu des sous-systèmes ne change pas à leur ordre près, tandis que le contenu des systèmes change.

Enfin dans le troisième cas où H et K sont les deux diviseurs normaux en G, à leur ordre près, ni le contenu des systèmes, ni celui des sous-systèmes ne doit changer en changeant le n-uple de base.

§ 7. Nous venons d'étudier l'effet sur les répartitions imprimitives *à droite* relatives à H et K, H étant *contenu* dans K, des multiplications à droite et à gauche des décompositions correspondantes par une substitution quelconque de G. Il est inutile maintenant de répéter cette étude pour les répartitions imprimitives *à gauche*; l'effet comme on l'a vu est exactement le même, seulement pris en sens contraire : c'est la multiplication à gauche, c'est-à-dire le changement du n-uple de base qui laisse invariants les systèmes et les sous-systèmes et la multiplication à droite, c'est-à-dire la transformation directe qui donne les répartitions relatives aux conjugués $\overline{H}$ et $\overline{K}$.

Par conséquent si nous reprenons les trois cas particuliers envisagés au paragraphe précédent, nous pouvons encore exprimer les conclusions suivantes, au moins pour l'un d'eux. Si H est diviseur normal en G et pas K, les deux répartitions imprimitives à droite et à gauche *en sous-systèmes* sont la même répartition ; elle reste invariante en la transformant par une substitution quelconque et en changeant d'une manière quelconque son n-uple de base. Par contre les deux répartitions *en systèmes* sont différentes ; celle à droite ne change pas en la transformant par une substitution quelconque, celle à gauche en lui donnant un n-uple de base quelconque. Les conclusions pour les deux autres cas sont alors immédiates.

(Reçu le 4 juin 1951.)