Werk

Titel: Beitrag zur Lösung eines Randwertproblems der Variationsrechnung.

Autor: Bieri, Hans

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?358147735_0019|log17

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beitrag zur Lösung eines Randwertproblems der Variationsrechnung

Von Hans Bieri, Bern

Das Randwertproblem der Variationsrechnung besteht im einfachsten Falle darin, durch zwei beliebige Punkte eines euklidischen n-dimensionalen Raumes eine Extremale zu legen, d. h. eine reguläre Kurve, so daß ein vorgegebenes Kurvenintegral ein relatives starkes Minimum wird.

Mehrere Probleme, die für die Entwicklung der Variationsrechnung von großer Bedeutung waren, gehören zum Typus

$$\int \sqrt{\Phi}\,\sqrt{\dot{\mathfrak{x}}^2}\,dt = \text{Min.} \qquad \text{mit} \qquad \Phi = a_{ik}x_i x_k + 4b_l x_l + c \;^{1)}\;. \qquad (i,\ k = 1\ldots n)$$

Deutet man für $n = 2$ die x_λ als Flächenparameter u_λ, so liegt das fundamentale Abstandsproblem auf Raumflächen vor. Neu dürfte folgende Auffassung sein:

Eine Flächenfamilie sei durch ihre 1. Hauptform $I \equiv e^{\mathfrak{P}_4(u_1, u_2)}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2)$ gegeben, wo $\mathfrak{P}_4$ ein Polynom von maximalem Grad 4 bedeutet. Dann handelt es sich um das biegungsinvariante Variationsproblem $\int \sqrt{K}\,\sqrt{I}\,dt = \text{Min.}$, wo K die Gaußsche Krümmung ist. Diese Betrachtungsweise hat gewisse Vorteile, bedingt doch das Verschwinden des Integranden keineswegs eine Entartung des Linienelementes der Fläche [2]).

Meines Wissens ist das Randwertproblem, sofern der Ausdruck $\Phi \cdot \dot{\mathfrak{x}}^2$ beide Koordinaten explizite enthält, bis jetzt noch nicht gelöst worden. Wo liegt die Schwierigkeit? Die Eulerschen Differentialgleichungen lauten:

$$\ddot{\mathfrak{x}} = \tfrac{1}{2}\operatorname{grad}\Phi \quad ; \qquad \dot{\mathfrak{x}}^2 = \Phi \;^{3)}\;. \tag{1}$$

Für unser Φ resultiert ein lineares System, und die Integration kann leicht vollzogen werden. Ferner ist im Gebiet $\Phi > 0$ die Legendresche

---

[1]) Über doppelt auftretende Indizes wird summiert. $\cdot = \dfrac{d}{dt}$.

[2]) Für $n = 3$ hat das Problem reale physikalische Bedeutung. Die Extremalen sind nämlich Bahnkurven von Elektronen im elektrostatischen Feld mit dem Potential $\Phi = \Phi(x, y, z)$.

[3]) Die Integration wird, sofern Φ vom Liouvillschen Typus ist, auf eine Quadratur reduziert.

Bedingung erfüllt, und die Weierstrassche $\mathcal{E}$-Funktion, im wesentlichen proportional zu $+\sqrt{\Phi}$, ist positiv definit. Also ist die hinreichende Bedingung für das starke Minimum im Felde erfüllt. Die Konstruktion eines ausgezeichneten Feldes durch einen beliebig gewählten Punkt $P(x_0, y_0)$ aber war nicht zu bewerkstelligen. Zwar gelingt es gerade noch, die Gleichung $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\tau, \varkappa)} = 0$ aufzulösen; die nicht zu umgehende Diskussion der Extremalenenveloppe jedoch ist auf gewöhnlichem Wege nur in Ausnahmefällen geglückt und hat erhebliche Schwierigkeiten verursacht[4]).

In der vorliegenden Arbeit wird die Lösung des in Frage stehenden Randwertproblems für $n = 2$ so weit gefördert, als es ohne Spezialisierung von Φ möglich ist[5]). Die Einführung der dritten Dimension erscheint paradox, wird aber durch die entscheidende Vereinfachung der Enveloppenbedingung gerechtfertigt. Dieser Kunstgriff gestattet die explizite Darstellung der Enveloppenfläche eines räumlichen Problems, welches das zu behandelnde als Spezialfall umfaßt. Der Aufstieg in höhere Dimensionen kann ohne Bedenken erfolgen. In meiner Dissertation benützte ich einen Satz über die topologische Abbildung zweier einfach-zusammenhängender Bereiche aufeinander[6]). Wie sich seither herausstellte, gilt dieser Satz für beliebig viele Dimensionen[7]). Kernstück der Arbeit ist die Herleitung der Enveloppenbedingung in modifizierter Form und die Bereitstellung einer neuen Methode der Kurvendiskussion.

Frühere Publikationen haben diese Arbeit vorbereitet[8]). Die Bezeichnung habe ich aus meiner Dissertation übernommen und erweitert. Der Aufbau bedarf keiner Erläuterung.

I. Grundformeln des ebenen Problems.

Der Ausdruck $\Phi = a_{ik} x_i x_k + 4 b_l x_l + c$ wird unter Ausnützung der Invarianz von $\dot{\mathfrak{x}}^2$ gegenüber Schiebung und Drehung auf seine kanonischen Formen transformiert. Wir unterscheiden:

---

[4]) Vergleiche: *H. Bieri*, Beispiele zum Randwertproblem, Dissert. 1941. — *H. Bieri*, Ein Beispiel zum Randwertproblem, Commentarii, vol. 17, f. quartus.

[5]) Schließt man die elementaren Fälle aus, so handelt es sich um nicht weniger als 9 Probleme.

[6]) Satz und Beweis von W. Scherrer, Bern.

[7]) *E. Jacobsthal:* Über die eineindeutige Abbildung zweier Bereiche aufeinander bei nicht verschwindender Funktionaldeterminante, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs, Forhandlinger BD XIII 1940, Trondheim.

[8]) „Räumliche Beispiele zum Randwertproblem der Variationsrechnung", Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern, 1943. — „Anwendung eines Abbildungssatzes auf das Randwertproblem", Verhandlungen der Schweizer. Naturforschenden Gesellschaft, Sils 1944.

a) Hauptfall: $\Phi = a x^2 + b y^2 + c$
b) Nebenfall: $\Phi = a x^2 + 4 b y$. [9]

Für den Hauptfall, mit dem wir uns zunächst beschäftigen, liefert die Integration nach einigen zweckmäßigen Vereinfachungen[3]:

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{x} = \bar{x}_0 \cdot \dot{\varphi}_1(t) + \sin \varkappa \cdot \varphi_1(t) \qquad {}^{10)} \\ &\bar{y} = \bar{y}_0 \cdot \dot{\varphi}_2(t) - \cos \varkappa \cdot \varphi_2(t) \\ &\Phi(x_0, y_0) > 0 \ ; \ \bar{x}_i = \frac{x_i}{\sqrt{\Phi_0}} \\ &\varphi_1(t) = \frac{e^{\sqrt{a}t} - e^{-\sqrt{a}t}}{2\sqrt{a}} \ ; \quad \varphi_2(t) = \frac{e^{\sqrt{b}t} - e^{-\sqrt{b}t}}{2\sqrt{b}} \\ &t \geqslant 0 \ ; \ t_0 = 0 \ ; \ \bar{x}_0 \geqslant 0 \ , \ \bar{y}_0 \geqslant 0 \ ; \ 0 \leqslant \varkappa < 2\pi \end{aligned}} \tag{2}$$

Die Größe $\Delta = \dfrac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(t, \varkappa)}$ berechnet sich zu

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta &= t \cdot \Delta_1 \ ; \qquad {}^{11)} \\ t \cdot \Delta_1 &= \cos^2 \varkappa (\varphi_1 \dot{\varphi}_2 - \varphi_2 \dot{\varphi}_1) - \bar{y}_0 \cdot \cos \varkappa \cdot \varphi_1 \ddot{\varphi}_2 \\ &\quad + \bar{x}_0 \cdot \sin \varkappa \cdot \ddot{\varphi}_1 \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 \varphi_2 \end{aligned}} \tag{3}$$

Sieht man von gewissen Spezialfällen ab, so sind die Gleichungen $\Delta_1 = 0$ in bezug auf t transzendent, bezüglich $\cos \varkappa$ oder $\sin \varkappa$ aber algebraisch vom 4. Grad[12]. Auflösung nach den letztgenannten Größen ist also prinzipiell möglich. Dieser Umstand genügt aber nicht, um das Randwertproblem zu lösen; denn die Enveloppe wird so kompliziert, daß eine direkte Kurvendiskussion aussichtslos erscheint und auch indirekte Methoden auf große Schwierigkeiten führen[13].

---

[9]) a) $\Phi = x^2 + \lambda^2 y^2 + 1$, $x^2 + \lambda^2 y^2$, $x^2 + \lambda^2 y^2 - 1$, $1 - x^2 - \lambda^2 y^2$, $x^2 - \lambda^2 y^2$, $x^2 - \lambda^2 y^2 + 1$, $x - \lambda^2 y^2 - 1$.
b) $\Phi = x^2 + 4by$, $-x^2 + 4by$.

[10]) $\varkappa$ ist Richtungsparameter (vergleiche Diss. S. 14).

[11]) Oder: $\sin^2 \varkappa (\varphi_2 \dot{\varphi}_1 - \varphi_1 \dot{\varphi}_2) - \bar{y}_0 \cdot \cos \varkappa \cdot \varphi_1 \ddot{\varphi}_2 + \bar{x}_0 \cdot \sin \varkappa \cdot \ddot{\varphi}_1 \varphi_2 + \varphi_1 \dot{\varphi}_2$.

[12]) Für $\Phi = x^2 + 4y^2 + 1$, $x^2 + 4y^2$, $x^2 + 4y^2 - 1$, $1 - x^2 - 4y^2$ wird $\Delta = 0$ eine quadratische Gleichung für $\mathfrak{Tg}\, \tau$ oder $\operatorname{tg} \tau$.

[13]) Vergleiche Fußnote 27, 28.

Der Nebenfall ist, was die Auswertung der Enveloppenbedingung betrifft, nicht einfacher. Die Analoga von 2), 3) sind:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}_0 \cdot \dot{\varphi}_1(t) + \sin \varkappa \cdot \varphi_1(t) \;; \\ \bar{y} &= \bar{y}_0 - \cos \varkappa \cdot t + \bar{b} \cdot t^2 \\ \bar{b} &= \frac{b}{\sqrt{\Phi_0}} \end{aligned}} \tag{2a}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta &= t \cdot \Delta_1 \\ t \cdot \Delta_1 &= \cos^2 \varkappa (\varphi_1 - t \cdot \dot{\varphi}_1) - 2\bar{b} \cdot \cos \varkappa \cdot t \cdot \varphi_1 \\ &\quad + \bar{x}_0 \cdot \sin \varkappa \cdot \ddot{\varphi}_1 \cdot t + \dot{\varphi}_1 \cdot t \end{aligned}} \tag{3a}$$

Durch denÜbergang in den Raum wird nun ein grundlegender Fortschritt erzielt.

2. *Grundformeln des spezialisierten räumlichen Problems.*

Eine zu weitgehende Verallgemeinerung des ebenen Problems führt zu nichts. Vielmehr wählen wir als Grundlage der weitern Betrachtungen die speziellen räumlichen Variationsprobleme

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \int \sqrt{ax^2 + by^2 + c}\, \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \text{Min.} \\ &\text{b)} \quad \int \sqrt{ax^2 + 4by}\, \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \text{Min.} \end{aligned} \tag{4}$$

Der Hauptfall wird nun repräsentiert durch

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}_0 \cdot \dot{\varphi}_1 + \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_2 \cdot \varphi_1 \qquad {}^{14)} \\ \bar{y} &= \bar{y}_0 \cdot \dot{\varphi}_2 - \cos \varkappa_1 \cdot \varphi_2 \\ \bar{z} &= \sin \varkappa_1 \sin \varkappa_2 \cdot t \\ \bar{x}_0 &\geqslant 0 \;, \quad \bar{y}_0 \geqslant 0 \;; \quad t \geqslant 0 \;; \quad 0 \leqslant \varkappa_1 \leqslant \pi \;; \quad 0 \leqslant \varkappa_2 \leqslant \pi \end{aligned}} \tag{5}$$

[14]) $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind Richtungsparameter. $\varkappa_1$ mißt die Abweichung des Tangentenvektors im Knotenpunkt von der y-Achse, $\varkappa_2$ die Steigung der Tangentenprojektion in der (x, z)-Ebene ebendaselbst.

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta &= \sin \varkappa_1 \cdot t^2 \cdot \Delta_1 \;; \qquad {}^{15)} \\ t^2 \cdot \Delta_1 &= \sin^2 \varkappa_1 \cos^2 \varkappa_2 (t \cdot \dot{\varphi}_1 \varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2) \\ &\quad + \bar{x}_0 \cdot \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_2 \cdot t \cdot \ddot{\varphi}_1 \varphi_2 - \bar{y}_0 \cdot \cos \varkappa_1 \cdot t \cdot \varphi_1 \ddot{\varphi}_2 \\ &\quad + \{ \cos^2 \varkappa_1 (t \cdot \varphi_1 \dot{\varphi}_2 - \varphi_1 \varphi_2) + \varphi_1 \varphi_2 \} \end{aligned}} \tag{6}$$

Der Nebenfall aber führt auf die Formeln

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}_0 \cdot \dot{\varphi}_1 + \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_2 \cdot \varphi_1 \\ \bar{y} &= \bar{y}_0 - \cos \varkappa_1 \cdot t + \bar{b} \cdot t^2 \\ \bar{z} &= \sin \varkappa_1 \sin \varkappa_2 \cdot t \\ \bar{x}_0 &\geqslant 0 \end{aligned}} \tag{5a}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta &= \sin \varkappa_1 \cdot t^2 \cdot \Delta_1 \;; \qquad {}^{16)} \\ t^2 \cdot \Delta_1 &= \sin^2 \varkappa_1 \cos^2 \varkappa_2 (t \cdot \dot{\varphi}_1 - \varphi_1) \\ &\quad + \bar{x}_0 \cdot \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_2 \cdot t \cdot \ddot{\varphi}_1 \\ &\quad + \varphi_1 (1 - 2\bar{b} \cdot \cos \varkappa \cdot t) \end{aligned}} \tag{6a}$$

Man beachte die eingetretene Vereinfachung. Die Gleichungen $\Delta_1 = 0$ sind gemäß (6), (6a) nur noch quadratisch bezüglich $\sin \varkappa_1 \cos \varkappa_2$. Das Aufstellen der expliziten Enveloppenflächengleichung wird deshalb keine Schwierigkeiten verursachen.

3. *Diskussion der Enveloppenbedingung im Parameterraum.*

Δ verschwindet für $t = 0$ und für $\sin \varkappa_1 = 0$. Dies scheint im Hinblick auf die beabsichtigte Anwendung des Abbildungssatzes bedenklich, ist es aber nicht; denn durch Einführung „kartesischer Parameter"

$$\bar{\xi} = t \cdot \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_2 \;; \qquad \bar{\eta} = t \cdot \cos \varkappa_1 \;; \qquad \bar{\zeta} = t \cdot \sin \varkappa_1 \sin \varkappa_2 \tag{7}$$

wird diese Schwierigkeit wegen

---

[15]) $\cos^2 \varkappa_1$ kann durch $\sin^2 \varkappa_1$ ausgedrückt werden, aber nur im letzten Term.

[16]) Siehe Fußnote 15.

$$\Delta(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) = \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})} = \frac{1}{t^2 \cdot \sin \varkappa_1} \cdot \Delta(t, \varkappa_1, \varkappa_2)$$

glatt aus dem Wege geräumt. Es verbleibt mithin die Untersuchung von $\Delta_1 = 0$ [17]).

(6) schreiben wir in der Form

$$\sin^2 \varkappa_1 \cos^2 \varkappa_2 \left(t \cdot \frac{\dot{\varphi}_1}{\varphi_1} - 1\right) + \cos^2 \varkappa_1 \left(t \cdot \frac{\dot{\varphi}_2}{\varphi_2} - 1\right) + \\ + 1 = t(\mp a\bar{x}_0 \cdot \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_2 \pm b\bar{y}_0 \cos \varkappa_1)$$

(6a) entsprechend

$$\sin^2 \varkappa_1 \cos^2 \varkappa_2 \left(t \cdot \frac{\dot{\varphi}_1}{\varphi_1} - 1\right) + \\ + 1 = t(\mp a\bar{x}_0 \cdot \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_2 + 2\bar{b} \cdot \cos \varkappa_1) \quad ^{18})$$

Es ist ausreichend, für feste Werte von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Anzahl der Wurzeln $t = \tau$ festzustellen.

Dies geschieht mit Hilfe der graphischen Darstellung. Auf Einzelheiten muß verzichtet werden[18]). Es sei bloß festgehalten, daß τ im allgemeinen keine eindeutige Funktion der Parameter ist. Vielmehr gibt es Extremalen, welche die Enveloppenfläche mehrmals, ja unendlich oft berühren[19]). Nach der allgemeinen Theorie hört das Minimum fast durchwegs mit der ersten Berührung auf. Also ist die Extremale daselbst abzuschneiden, d. h. von den Werten $t = \tau$ ist jeweilen nur der kleinste gültig.

4. *Die explizite Enveloppengleichung.*

Was beim ebenen Problem nicht möglich war, glückt hier ohne weiteres. Wir legen aus Gründen der Platzersparnis Haupt- und Nebenfall zusammen, schreiben (6), (6a) in der Form

$$A(\tau) \cdot \sin^2 \varkappa_1 \cos^2 \varkappa_2 + B(\tau) \cdot \bar{x}_0 \cdot \sin \varkappa_1 \cos \varkappa_2 + C(\tau, \varkappa_1) = 0 \qquad (8)$$

und lösen auf;

$$\cos \varkappa_2 = \frac{-B \cdot \bar{x}_0 \pm \sqrt{D}}{2A \cdot \sin \varkappa_1} \quad ; \quad D = B^2 \cdot \bar{x}_0^2 - 4AC \,. \quad ^{20})$$

---

[17]) $\Delta_1(0) \neq 0$.

[18]) Die obern Vorzeichen gelten für hyperbolische, die untern für Kreisfunktionen (vergleiche (2). [18]) Vergleiche Diss. S. 11, c, S. 15 ff.

[19]) Vergleiche Diss. S. 34, 35.

[20]) Analyse von D gestattet, die Existenz einer untern Schranke von τ zu beweisen, was beim ebenen Problem viel schwieriger wäre.

Man benötigt noch

$$\sin^2 \varkappa_2 = \frac{4A^2 \cdot \sin^2 \varkappa_1 - (B^2 \cdot \bar{x}_0^2 + D \mp 2B \cdot \bar{x}_0 \sqrt{D}}{4A^2 \cdot \sin^2 \varkappa_1} .$$

Diese Werte werden in (2), (2a) eingesetzt, und man erhält:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}_0 \cdot \dot{\varphi}_1(\tau) + \varphi_1(\tau) \left\{ \frac{-B \cdot \bar{x}_0 \pm \sqrt{D}}{2A} \right\} \\ \bar{y} &= \bar{y}_0 \cdot \dot{\varphi}_2(\tau) - \cos \varkappa_1 \cdot \varphi_2(\tau) \; ; \quad \bar{y} = \bar{y}_0 - \cos \varkappa_1 \cdot \tau + \bar{b} \cdot \tau^2 \\ \bar{z} &= \frac{\tau}{2A} \left\{ 4A^2 \cdot \sin^2 \varkappa_1 - (B^2 \cdot \bar{x}_0^2 + D \mp 2B \cdot \bar{x}_0 \sqrt{D} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}} \tag{9}$$

Die gefundene Fläche ist auf Einfachheit im Sinne der geometrischen Mengenlehre zu prüfen.

5. *Diskussion der Enveloppenfläche.*

Bei Flächen ist es ungleich schwieriger als bei Kurven, Doppelpunkte festzustellen. Mit direkten Methoden, welche notwendige Bedingungen benützen, ist in der Regel nichts zu erreichen. Hinreichend für Doppelpunktfreiheit ist hier folgender Tatbestand:

„Das Gebilde (9) wird mit einem zweiparametrigen, den ganzen Raum füllenden Feld von Parallelen zum Schnitt gebracht. Pro Gerade gibt es höchstens zwei Durchstoßpunkte.“ [21])

Als solches Feld wählt man mit größtem Vorteil die Lote auf die Symmetrieebene $z \equiv 0$. Die Koordinaten x, y spielen dann die Rolle von Parametern. Dieselben variieren nicht gänzlich unbeschränkt. Wir setzen

$$\bar{x} = m\bar{x}_0 \; ; \quad \bar{y} = n\bar{y}_0 (\bar{y} - \bar{y}_0 = \nabla)$$

und lösen (5), (5a) unter Verwendung neuer Bezeichnungen nach den Winkelgrößen auf:

$$X = \bar{x}_0 \left(\frac{m - \dot{\varphi}_1}{\varphi_1} \right) \; ; \quad Y = \bar{y}_0 \left(\frac{\dot{\varphi}_2 - n}{\varphi_2} \right) \; ; \quad Y_0 = \frac{\bar{b} \cdot t^2 - \nabla}{t} \; ; \quad Z = \frac{\bar{z}}{t} . \tag{10}$$

[21]) Dem Umstand, daß gewisse Extremalen die Enveloppe mehrfach berühren, ist größte Aufmerksamkeit zu schenken, könnten doch Doppelpunkte vorgetäuscht werden!

Einsetzen in die Enveloppenbedingung liefert für Haupt- und Nebenfall die Gleichungssysteme

$$\boxed{\begin{aligned} &X^2(\tau\cdot\dot{\varphi}_1\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2) + Y^2\cdot\tau\cdot\varphi_1\dot{\varphi}_2 + \\ &\qquad + \bar{x}_0 X\cdot\tau\cdot\ddot{\varphi}_1\varphi_2 - \bar{y}_0\, Y\cdot\tau\cdot\varphi_1\ddot{\varphi}_2 + \varphi_1\varphi_2 = 0 \\ &X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned}&(11)\\&(12)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &X^2(\tau\dot{\varphi}_1 - \varphi_1) + \bar{x}_0 X\cdot\tau\ddot{\varphi}_1 - 2\bar{b}\, Y_0\cdot\tau\varphi_1 + \varphi_1 = 0 \\ &X^2 + Y_0^2 + Z^2 = 1 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned}&(11\,\mathrm{a})\\&(12\,\mathrm{a})\end{aligned}$$

Die Lösung des Randwertproblems ist also aufs engste mit den Gleichungen (11), (11a) verknüpft. Wie können dieselben diskutiert werden?

Die Aussichten auf Lösung stehen günstig, ganz besonders für den Nebenfall. Irrationalitäten fehlen, die Größen (10) sind eindeutige Funktionen von τ, und man hat es in der Hand, passende Faktoren mit bekannten Nullstellen abzuspalten. Es kommen zwei Methoden in Betracht, die im Bedarfsfalle miteinander verknüpft werden:

(α) Wie im 3. Abschnitt verteilt man die Terme passend auf beide Seiten des Gleichheitszeichens und diskutiert jede Seite für sich.

(β) Die Gleichungen (11), (11a) sind von der Form

$$W = \frac{\Phi_1(\tau, \bar{x}_0, \bar{y}_0, m, n)}{\Phi_2(\tau, \bar{x}_0, \bar{y}_0, m, n)} \quad .$$

Man benützt die implizite Funktion $h(\tau, \bar{x}_0, \bar{y}_0, m, n) = \Phi_1 - W\cdot\Phi_2$, betrachtet W als Parameter, τ als unabhängige Variable und h als Funktion. Es wird in einer (τ, h)-Ebene operiert. Wir nehmen an, der Verlauf der Kurve $h = h(\tau, \bar{x}_0, \bar{y}_0, m, n)$ bei konstanten, aber beliebigen Parameterwerten sei ermittelt worden. Jetzt ist noch $\frac{\partial h}{\partial W} = -\Phi_2(\tau)$ zu berücksichtigen. Die Bewegung des Kurvenschnittpunktes mit der τ-Achse gibt dann, vorerst allerdings nur bei konstanten Werten von $\bar{x}_0, \bar{y}_0, m, n$, den gewünschten Aufschluß über das Verhalten von W' und weiter von W[22]). Ist einmal eine einzelne Kurve h genau bekannt, so prüft man in

[22]) Das Definitionsintervall von τ das von 9) 10) beeinflußt wird, ist genau zu beachten.

gleicher Weise die Abhängigkeit derselben von der Lage des Knotenpunktes und von den Parametern m, n[23]).

Beide Methoden verlangen natürlich genaueste Kenntnis der Größen (10). Die vorzunehmenden Schritte sind elementar, so daß auf die Wiedergabe verzichtet werden darf[24]). Es sei nur mitgeteilt, daß Monotonie in bezug auf τ nicht durchwegs vorhanden und daß der Einfluß von m, n entscheidend ist.

Sobald es gelungen ist, den Nachweis zu erbringen, daß die Enveloppe einfach ist, steht der Verwendung des Abbildungssatzes nichts mehr im Wege[25]). Die noch verbleibenden Schwierigkeiten reichen nicht an die bewältigten heran, so daß die Lösung des Randwertproblems gesichert ist.

6. *Ergänzungen.*

Die verwendete Methode bleibt für beliebig großes n wirksam. Zwar wächst die Zahl der Parameter, aber unüberwindliche Schwierigkeiten treten nicht auf. Zur Lösung des räumlichen Problems zieht man die 4. Dimension heran und ist sodann in der Lage, die explizite Enveloppengleichung aufzustellen. Ferner ist vorauszusehen, daß die Lösung vieler ebener Probleme entscheidend vereinfacht wird.

Zum Abschluß sei noch erwähnt, daß man versuchen kann, Y bzw. Y_0 in die Enveloppengleichung einzuführen und bei festem $\bar{y}_0$ $\bar{x}$ und $\bar{z}$ auf Monotonie zu prüfen. Sind beide Koordinaten monotone Funktionen von τ, oder ist wenigstens $\bar{x}$ monoton und besitzt $\bar{z}$ höchstens zwei Nullstellen, so ist die Enveloppe ebenfalls einfach[26]) [27]) [28]).

---

[23]) Daß die Lage des Knotenpunktes eine Rolle spielt, ist für Randwertprobleme charakteristisch. Vergleiche Diss. S. 17 ff. Man kann wieder zu x, y, b übergehen und die Quadratwurzel aus Φ durch Einführung zweier Parameter rational machen.

[24]) Am einfachsten ist Y_0 zu diskutieren. Der Ansatz $|a| = 1$, $b \to \lambda$ bedeutet keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit.

[25]) Gewisse Beispiele besitzen einen sich ins Unendliche erstreckenden Existenzbereich. Dieser Umstand ist unschädlich, weil das Kurvenintegral für $t \to \infty$ divergiert.

[26]) So kann man den Spezialfall $\bar{x}_0 = 0$ bequem bearbeiten. Im allgemeinen Fall ist der rationale Anteil von $\bar{x}$ leicht zu diskutieren. Ob man durchdringt, hängt davon ab, ob D und $D:A^2$ monoton sind.

[27]) Schließlich wäre noch zu versuchen, nur in der Ebene zu operieren. Man würde 2), 2a) nach den Winkelgrößen auflösen und in 3), 3a) einsetzen. Jetzt aber müßte einmal quadriert werden, oder aber es läge das Problem vor, die Schnittpunkte zweier Kurven zu bestimmen, deren eine geschlossen und doppelpunktfrei ist.

[28]) Will man den Versuch machen, 3) bzw. 3a) direkt zu diskutieren, so kann eine gewisse Vereinfachung erzielt werden, indem man $\operatorname{tg}(\varkappa/2)$ einführt. Es entsteht eine Gleichung 4. Grades mit nicht zu komplizierten Koeffizienten in t.

(Eingegangen den 1. August 1946.)