Werk

Titel: Die unwesentlichen Singularitäten der regulären Funktionen einer Quaternionenvari...

Autor: Nef, Walter

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?358147735_0016|log25

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Die unwesentlichen Singularitäten der regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln

Von Walter Nef, Zürich

Einleitung

In dieser Arbeit wird eine Vermutung von Herrn *Rud. Fueter* über die außerwesentlichen Singularitäten der regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln bewiesen und damit bestätigt.

In seiner Arbeit über die vierfachperiodischen Funktionen[1]) hat Herr *Fueter* bei gegebenen Perioden $\omega_1, \ldots, \omega_4$ ein System von zugleich rechts- und linksregulären Funktionen $\mathfrak{p}_{n_1 n_2 n_3}(z)$ $(n_1 + n_2 + n_3 = n = 0, 1, 2, \ldots)$ konstruiert, welche die vorgegebenen Perioden besitzen. Sie haben als unwesentliche Singularitäten von der Ordnung $(n + 3)$ den Punkt $z = 0$ und die dazu äquivalenten Punkte. Für alle andern endlichen Werte von z sind sie regulär.

Alle rechts- oder linksregulären Funktionen, die für $z = 0$ eine unwesentliche Singularität haben, im ganzen übrigen Fundamentalbereich aber regulär sind, lassen sich in eine Reihe nach den Funktionen $\mathfrak{p}_{n_1 n_2 n_3}(z)$ entwickeln. Nun stellt sich die Frage, ob bei singulären Kurven oder Flächen (welch letztere natürlich im Fall der vierfachperiodischen Funktionen zweier komplexer Veränderlicher von besonderem Interesse sind) ganz neuartige Singularitäten auftreten, oder ob sie sich aus den obigen zusammensetzen lassen. Herr *Fueter* hat die Vermutung ausgesprochen, daß sie sich in der Form

$$\sum_{n} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{S}} d\left[a_{n_1 n_2 n_3}(c)\right] \mathfrak{p}_{n_1 n_2 n_3}(z - c)$$

durch eine Summe von *Stieltjesschen* Integralen darstellen lassen, wo $\mathfrak{S}$ das singuläre Gebilde ist.

In einem Vortrag in Münster in Westfalen im Jahre 1939 und in seinen Vorlesungen über die regulären Quaternionenfunktionen (S. S. 1940) hat Herr *Fueter* diese Vermutung in einer erweiterten Form ausgesprochen: Ist $\mathfrak{S}$ ein singuläres Gebilde irgendeiner rechtsregulären (nicht notwendig vierfachperiodischen) Funktion $f(z)$, so läßt sich $f(z)$ in der Umgebung von $\mathfrak{S}$ wie folgt darstellen:

[1]) *Rud. Fueter*, Über vierfachperiodische Funktionen. Monatshefte für Math. u. Phys. Bd. 48, S. 161.

$$f(z) = R(z) + \sum_{n} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{S}} d[\Delta_{n_1 n_2 n_3}(c)] \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c) ,$$

wo $R(z)$ eine auf $\mathfrak{S}$ rechtsreguläre Funktion ist. In der vorliegenden Arbeit wird die Existenz einer solchen Darstellung für unwesentliche Singularitäten bewiesen. (Einen Teil davon habe ich in einer früheren Arbeit bewiesen, nämlich für den Fall einer geradlinigen Strecke als Singularität[2]).) Das singuläre Gebilde darf dabei eine ganz beliebige (abgeschlossene) Punktmenge sein. Im ersten Teil der Arbeit stellen wir den notwendigen Integralbegriff auf, nämlich das über $\mathfrak{S}$ erstreckte *Stieltjessche Integral*. Es gelingt, dasselbe für jede Menge zu definieren, auf der für je zwei ihrer Elemente ein Abstand definiert ist. Im zweiten Teil beweisen wir die Richtigkeit der Vermutung des Herrn *Fueter* und konstruieren im dritten Teil alle rechtsregulären Funktionen, die im Endlichen nur unwesentliche Singularitäten haben (meromorphe Funktionen).

Die Resultate gelten natürlich sinngemäß auch für die linksregulären Funktionen.

Für die Einzelheiten aus der Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln, insbesondere über die Darstellung derselben in der Umgebung isolierter punktförmiger Singularitäten, sei auf die Arbeiten von Herrn *Fueter* verwiesen[3]).

1. TEIL

Stieltjessche Integrale in kompakten metrischen Räumen

$\mathfrak{M}$ sei ein kompakter metrischer Raum[4]). Dann existiert auf $\mathfrak{M}$ zu jeder positiven Zahl ε ein ε-Netz, d. h. eine endliche Punktmenge N auf $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ einen Abstand von

---

[2]) *Walter Nef*, Über die singulären Gebilde der regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln. Comm. Math. Helv., vol. XV, pag. 144.

[3]) *Rud. Fueter*, Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit 4 reellen Variabeln. Comm. Math. Helv., vol. 7, S. 307 (zitiert als *Fueter I*).

Rud. Fueter, Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln. Comm. Math. Helv., vol. 8, S. 371 (zitiert als *Fueter II*).

Rud. Fueter, Die Singularitäten der eindeutigen regulären Funktionen einer Quaternionenvariabeln I. Comm. Math. Helv., vol. 9, S. 320 (zitiert als *Fueter III*).

Rud. Fueter, Integralsätze für reguläre Funktionen einer Quaternionenvariabeln. Comm. Math. Helv., vol. 10, S. 306 (zitiert als *Fueter IV*).

[4]) *P. Alexandroff/H. Hopf*, Topologie, erster Band, Berlin 1935, S. 28 und S. 84.

N hat, der $\leqq \varepsilon$ ist[5]). Daraus folgt, daß bei beliebigem $\varepsilon > 0$ der Raum $\mathfrak{M}$ in eine endliche Anzahl von punktfremden Teilmengen zerlegt werden kann, deren Durchmesser $\leqq \varepsilon$ sind. Daraus wiederum folgt, daß auf $\mathfrak{M}$ ein System Σ von Teilmengen existiert, das den folgenden Bedingungen genügt:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \text{Wenn die abzählbar vielen Teilmengen } \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \text{ von } \mathfrak{M} \text{ zu} \\ \quad \Sigma \text{ gehören, so gehört auch ihre Vereinigungsmenge zu } \Sigma. \\ 2.\ \text{Ist } \mu \text{ irgendeine Menge aus } \mathfrak{M} \text{ oder gleich dem ganzen Raum } \mathfrak{M}, \\ \quad \text{und ist } \delta \text{ irgendeine positive Zahl, so läßt sich } \mu \text{ als Vereinigungs-} \\ \quad \text{menge von abzählbar vielen zu } \Sigma \text{ gehörigen Mengen darstellen,} \\ \quad \text{die paarweise punktfremd und deren Durchmesser } \leqq \delta \text{ sind.} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Es bedeute nämlich $\{\varepsilon_j\}$ eine Folge von positiven Zahlen mit $\lim\limits_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$. $\Sigma_j (j = 1,2,3,\ldots)$ sei ein System von punktfremden Teilmengen auf $\mathfrak{M}$, deren Durchmesser alle $\leqq \varepsilon_j$ sind und deren Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}$ ist. Wir erhalten dann ein System Σ mit den Eigenschaften 1. und 2., indem wir alle zu irgendeinem $\Sigma_j (j = 1,2,3,\ldots)$ gehörigen Teilmengen und alle Vereinigungsmengen von abzählbar vielen solchen zusammenfassen. (Für unsere Anwendungen sei darauf hingewiesen, daß eine abgeschlossene Punktmenge in einem Zahlenraum (als Relativraum im Zahlenraum) ein kompakter metrischer Raum ist.)

Die Werte der im folgenden betrachteten Funktionen (Funktionen von beschränkter Schwankung und stetige Funktionen) mögen entweder reell oder komplex oder Quaternionen sein.

Unter einer zu einem System Σ gehörigen Mengenfunktion $\Theta(\mu)$ verstehen wir eine Mengenfunktion, die für jede Menge μ aus Σ definiert ist.

Eine zu Σ gehörige Mengenfunktion $\Theta(\mu)$ heißt *totaladditiv*, wenn für jede Zerlegung irgendeiner zu Σ gehörigen Menge μ in abzählbar viele punktfremde Teilmengen μ_j $(j = 1, 2, \ldots)$:

$$\mu = \sum_j \mu_j ,$$

gilt:

$$\Theta(\mu) = \sum_j \Theta(\mu_j) .$$

Eine totaladditive Mengenfunktion $\Theta(\mu)$ heißt *von beschränkter Schwankung* auf $\mathfrak{M}$, wenn für jede Zerlegung von $\mathfrak{M}$ in abzählbar viele elementefremde Teilmengen $\mathfrak{m}_j$ $(j = 1,2,\ldots)$, die zu Σ gehören:

---

[5]) *P. Alexandroff/H. Hopf*, Topologie, erster Band, Berlin 1935, S. 87, Hilfssatz II.

$$\mathfrak{M} = \sum_j \mathfrak{m}_j ,$$

gilt:

$$\sum_j | \Theta(\mathfrak{m}_j) | \leqslant W , \tag{2}$$

wo W eine von der Art der Zerlegung unabhängige Konstante ist. Die untere Grenze der Zahlen W, für die (2) erfüllt ist, bezeichnen wir mit $V(\Theta)$ und nennen sie die *totale Variation* von $\Theta(\mu)$.

Eine im Bereich aller Elemente P von $\mathfrak{M}$ definierte Funktion $f(P)$ heißt auf $\mathfrak{M}$ *gleichmäßig stetig*, wenn

1. Eine Konstante M von der Art existiert, daß für irgend zwei Elemente P_1 und P_2 von $\mathfrak{M}$ gilt:

$$| f(P_1) - f(P_2) | \leqslant M \cdot D(P_1, P_2) ; \tag{3}$$

($D(P_1, P_2)$ = Abstand der Elemente P_1 und P_2).

2. $f(P)$ auf $\mathfrak{M}$ beschränkt ist.

Wir gehen jetzt aus von einem kompakten metrischen Raum $\mathfrak{M}$, einem zugehörigen Teilmengensystem Σ, einer Funktion $\Theta(\mu)$, die auf $\mathfrak{M}$ von beschränkter Schwankung sei, und einer auf $\mathfrak{M}$ gleichmäßig stetigen Funktion $f(P)$.

Jeder positiven Zahl δ ordnen wir eine bestimmte Zerlegung $\mathfrak{Z}(\delta)$ von $\mathfrak{M}$ in abzählbar viele zu Σ gehörige elementefremde Teilmengen zu, deren Durchmesser alle $\leqslant \delta$ sind. Diese Zerlegung $\mathfrak{Z}(\delta)$ bezeichnen wir wie folgt:

$$\mathfrak{Z}(\delta) : \mathfrak{M} = \sum_j \mu_j(\delta) .$$

$P_j(\delta)$ sei irgendein Element aus $\mu_j(\delta)$.

Satz 1. *Der Grenzwert*

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_j \Theta(\mu_j(\delta)) \cdot f(P_j(\delta))$$

existiert und ist von der Menge der Zerlegungen $\mathfrak{Z}(\delta)$ *und von der Auswahl der Elemente* $P_j(\delta)$ *unabhängig.*

Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit

$$\int_{\mathfrak{M}} d[\Theta(\mu)] \cdot f(P)$$

und nennen ihn das über $\mathfrak{M}$ erstreckte, durch die Funktion von beschränkter Schwankung $\Theta(\mu)$ vermittelte *Stieltjessche Integral* der auf $\mathfrak{M}$ gleichmäßig stetigen Funktion $f(P)$.

Beweis von Satz 1: $\{\delta_k\}$ sei eine Folge von positiven Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$. Wir untersuchen den Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \sum_j \Theta(\mu_j(\delta_k)) \cdot f(P_j(\delta_k)) .$$

Es genügt zu beweisen, daß dieser Grenzwert für jede den Bedingungen genügende Folge $\{\delta_k\}$ existiert.

Zunächst setzen wir voraus, daß jede Zerlegung $\mathfrak{Z}(\delta_k)$ eine Verfeinerung der vorangehenden $\mathfrak{Z}(\delta_{k-1})$ ist. Es sei etwa für die beiden Indizes k und $(k+l)$: $(k, l =$ beliebige natürliche Zahlen)

$$\mu_j(\delta_k) = \sum_\lambda \mu_\lambda(\delta_{k+l})$$

wo λ diejenigen Werte durchläuft, für die $\mu_\lambda(\delta_{k+l})$ Teilmenge von $\mu_j(\delta_k)$ ist. Es ist dann wegen der Additivität von $\Theta(\mu)$ und wegen der Relation (3):

$$| \Theta(\mu_j(\delta_k)) \cdot f(P_j(\delta_k)) - \sum_\lambda \Theta(\mu_\lambda(\delta_{k+l})) \cdot f(P_\lambda(\delta_{k+l})) | \leqslant$$

$$\leqslant \sum_\lambda | \Theta(\mu_\lambda(\delta_{k+l})) | \cdot M \cdot \delta_k .$$

Also wird:

$$| \sum_j \Theta(\mu_j(\delta_k)) \cdot f(P_j(\delta_k)) - \sum_j \Theta(\mu_j(\delta_{k+l})) \cdot f(P_j(\delta_{k+l})) | \leqslant V(\Theta) \cdot M \cdot \delta_k .$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung für den Fall sukzessiver Verfeinerung der Unterteilungen. Für den Fall einer anderen Folge von Zerlegungen folgt die Behauptung durch eine bekannte Methode vermittelst der „gemeinsamen Verfeinerung" zweier Unterteilungen aus dem oben Bewiesenen.

F. Riesz hat im Reellen den Satz bewiesen[6]):

Es seien $f_k(x)$ $(k = 1,2,\ldots)$ *abzählbar viele für* $a \leqslant x \leqslant b$ *stetige Funktionen.* c_k *seien Konstanten. Das Gleichungssystem*

$$\int_a^b d[\alpha(x)]\, f_k(x) = c_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

hat dann und nur dann eine Lösung $\alpha(x)$, *die in* $a \leqslant x \leqslant b$ *von beschränkter Schwankung ist, wenn eine positive Konstante* F *existiert, so daß für jede natürliche Zahl* n *und* n *beliebige Konstanten* ϑ_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ *stets gilt:*

[6]) *F. Riesz*, Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation des fonctions continues. Comptes rendus des séances de l'académie des sciences, t. 150 (1910), p. 674.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k c_k\right| \leqq F \cdot \max \left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k f_k(x)\right| .$$

Es gibt dann eine Lösung $\alpha(x)$, *deren totale Variation* $\leqq F$ *ist.*

Satz und Beweis lassen sich auf unseren allgemeineren Integralbegriff mit komplexen Zahlen oder Quaternionen als Funktionswerte übertragen, falls $\mathfrak{M}$ eine beschränkte Punktmenge in einem Zahlenraum ist, und es gilt:

Satz 2. *Es sei* $\mathfrak{M}$ *eine abgeschlossene Punktmenge in einem Zahlenraum.* $f_k(P)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *sei eine abzählbare Menge von auf* $\mathfrak{M}$ *gleichmäßig stetigen Funktionen.* c_k *seien beliebige Konstante. Das Gleichungssystem*

$$\int_{\mathfrak{M}} d[\Theta(\mu)] \cdot f_k(P) = c_k$$

hat dann und nur dann eine Lösung $\Theta(\mu)$, *die von beschränkter Schwankung ist, wenn eine positive Konstante* F *existiert, so daß für jede natürliche Zahl* n *und* n *beliebige reelle Konstanten* ϑ_k $(k = 1, \ldots, n)$ *stets gilt:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k c_k\right| \leqq F \cdot \max \left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k f_k(P)\right| .$$

Es gibt dann eine Lösung $\Theta(\mu)$, *deren totale Variation* $\leqq F$ *ist.*

Diesen Satz 2 werde ich in einer selbständigen Arbeit beweisen. Aus Satz 2 können wir folgern:

Satz 3. *Es sei* $\mathfrak{M}$ *eine abgeschlossene Punktmenge in einem Zahlenraum.* $f_{jk}(P)$ $(j = 1, \ldots, \nu$, ν *eine feste natürliche Zahl,* $k = 1, 2, 3, \ldots)$ *seien auf* $\mathfrak{M}$ *gleichmäßig stetige Funktionen.* c_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *seien beliebige Konstante. Das Gleichungssystem*

$$\sum_{j=1}^{\nu} \int_{\mathfrak{M}} d[\Theta_j(\mu)] \cdot f_{jk}(P) = c_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

hat dann und nur dann Lösungsfunktionen

$$\Theta_1(\mu), \ldots, \Theta_\nu(\mu),$$

die auf $\mathfrak{M}$ *von beschränkter Schwankung sind, wenn eine positive Konstante* F *existiert, so daß für jede natürliche Zahl* n *und* n *beliebige reelle Konstante* $\vartheta_k (k = 1, \ldots, n)$ *stets gilt:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k c_k\right| \leqq F \cdot \max \left\{ \left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k f_{1k}(P)\right|, \ldots, \left|\sum_{k=1}^{n} \vartheta_k f_{\nu k}(P)\right| \right\} .$$

Es gibt dann Lösungen

$$\Theta_1(\mu), \ldots, \Theta_\nu(\mu) ,$$

für welche die Summe ihrer totalen Variationen $\leqq F$ *ist.*

Beweis: Die Dimension des Zahlenraumes R, in dem $\mathfrak{M}$ liegt, sei λ. S sei ein $\nu \cdot \lambda$-dimensionaler Zahlenraum. Durch einen beliebigen Punkt A von S legen wir ν unabhängige λ-dimensionale Hyperebenen $S_1, \ldots, S_\nu$. Jede derselben bilden wir durch eine eineindeutige affine Transformation auf R ab, so daß der Bildpunkt von A nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört. Durch die inversen Abbildungen entspricht $\mathfrak{M}$ in S_j eine Bildmenge $\mathfrak{S}_j$ $(j = 1, \ldots, \nu)$. Bei festem k entspricht der Funktion f_{jk} auf $\mathfrak{M}$ eine gleichmäßig stetige Funktion φ_{jk} auf $\mathfrak{S}_j$ $(j = 1, \ldots, \nu)$. Die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{S}_j$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ nennen wir $\mathfrak{S}$. Auf $\mathfrak{S}$ definieren wir die Funktionen

$$\varphi_k(P) = \begin{cases} \varphi_{1k}(P) , & \text{wenn} \quad P \subset \mathfrak{S}_1 \\ \vdots & \\ \varphi_{\nu k}(P) , & \text{wenn} \quad P \subset \mathfrak{S}_\nu \end{cases} \qquad (k = 1 , 2 , 3 , \ldots) .$$

Jetzt schreiben wir die Gleichungen auf:

$$\int_{\mathfrak{S}} d[\Theta^*(\mu)] \cdot \varphi_k(P) = c_k , \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) . \tag{4}$$

Bei beliebiger natürlicher Zahl n und beliebigen Konstanten $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ ist die Beziehung

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k c_k \right| \leqq F \cdot \max_{\text{auf } \mathfrak{S}} \left| \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k \varphi_k(P) \right|$$

erfüllt. Also existiert nach Satz 2 auf $\mathfrak{S}$ eine Funktion $\Theta^*(\mu)$, deren totale Variation auf $\mathfrak{S}$ höchstens gleich F ist und für die die Gleichungen (4) erfüllt sind.

Nun sei μ irgendeine zu Σ gehörige Menge in $\mathfrak{M}$. Ihre Bildmengen in $\mathfrak{S}_j$ seien μ_j $(j = 1, \ldots, \nu)$. Wir definieren auf $\mathfrak{M}$ die ν Mengenfunktionen

$$\Theta_j(\mu) = \Theta^*(\mu_j) \qquad (j = 1, \ldots, \nu) .$$

Statt (4) können wir dann offenbar schreiben:

$$\sum_{j=1}^{\nu} \int_{\mathfrak{M}} d[\Theta_j(\mu)] \cdot f_{jk}(P) = c_k , \quad (k = 1 , 2 , 3 , \ldots) .$$

Die Summe der totalen Variationen aller $\Theta_j(\mu)$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ ist gleich der totalen Variation von $\Theta^*(\mu)$ auf $\mathfrak{S}$, also höchstens gleich F, w.z.b.w.

2. TEIL

Darstellung regulärer Funktionen in der Umgebung singulärer Punktmengen.

Eine rechtsreguläre Funktion $f(z)$ möge auf einer geschlossenen, orientierbaren Hyperfläche R mit stetigem Normalenfeld keine singulären Punkte haben. Die Menge der innerhalb R gelegenen singulären Punkte nennen wir $\mathfrak{M}$. Da jeder Häufungspunkt von singulären Punkten selber singulär ist, ist $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene Teilmenge des Quaternionenraumes Q_4.

Zu jeder positiven Zahl ϱ definieren wir jetzt eine (nicht notwendig zusammenhängende) Hyperfläche $S^{(\varrho)}$ durch folgende Forderungen:

1. $S^{(\varrho)}$ soll geschlossen und orientierbar sein und ein stetiges Normalenfeld besitzen.
2. $\mathfrak{M}$ soll im Innern von $S^{(\varrho)}$ liegen.
3. Der Abstand jedes zu $S^{(\varrho)}$ gehörigen Punktes von $\mathfrak{M}$ soll $\geqslant \varrho$ und $\leqslant 2\,\varrho$ sein.

   Dabei verstehen wir unter dem Abstand eines Punktes von der Menge $\mathfrak{M}$ das Minimum der Abstände dieses Punktes von allen Punkten von $\mathfrak{M}$. Dieses existiert, da $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist.
4. Unter allen Flächen, die (1) — (3) erfüllen, wählen wir jetzt eine beliebige aus, jedoch so, daß bei stetiger Änderung von ϱ auch $S^{(\varrho)}$ sich stetig ändert.

ϱ_0 sei eine solche Zahl, daß für $\varrho < \varrho_0$ $S^{(\varrho)}$ im Innern von R liegt. Dann gilt, falls $\varrho < \varrho_0$ ist, für alle Werte von z, die innerhalb R und außerhalb $S^{(\varrho)}$ liegen:

$$f(z) = \frac{1}{8\pi^2}\int_R f(\zeta)\, dZ\, \Delta(\zeta - z)^{-1} + \frac{1}{8\pi^2}\int_{S^{(\varrho)}} f(\zeta)\, dZ\, \Delta(\zeta - z)^{-1}\ .\ ^{7})$$

Das erste Integral stellt eine innerhalb R rechtsreguläre Funktion $\varphi(z)$ dar. Das zweite Integral bezeichnen wir mit $g(z)$:

$$g(z) = \frac{1}{8\pi^2}\int_{S^{(\varrho)}} f(\zeta)\, dZ\, \Delta(\zeta - z)^{-1}\ .$$

---

[7]) *Fueter I*, pag. 318.

Wir ordnen jetzt jedem Punkt ζ auf $S^{(\varrho)}$ einen beliebigen Punkt $c(\zeta)$ auf $\mathfrak{M}$ zu, dessen Abstand von ζ höchstens gleich 3ϱ sein soll. Es ist dann, falls z von $\mathfrak{M}$ einen Abstand hat, der größer als 3ϱ ist:

$$g(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^{(\varrho)}} f(\zeta)\, dZ\, \Delta[(\zeta - c(\zeta)) - (z - c(\zeta))]^{-1} = \text{[8]}$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{S^{(\varrho)}} f(\zeta)\, dZ\, p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c(\zeta)) \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c(\zeta)) \,. \tag{5}$$

Denn für einen solchen Punkt z ist:

$$|\zeta - c(\zeta)| < |z - c(\zeta)| \,.$$

Ferner ordnen wir jedem 3-dimensionalen Gebiet G auf $S^{(\varrho)}$ eine Teilmenge $\mu(G)$ von $\mathfrak{M}$ zu, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

α) Die obere Grenze der Abstände je eines Punktes von G und eines Punktes von $\mu(G)$ ist höchstens gleich 3ϱ.

β) Ist $\zeta \subset G$, so ist $c(\zeta) \subset \mu(G)$.

γ) Ist $G_1, G_2, \ldots$ eine Folge von Gebieten auf $S^{(\varrho)}$, deren Durchmesser den Grenzwert 0 haben, so hat die Folge $\mu(G_1), \mu(G_2), \ldots$ dieselbe Eigenschaft.

δ) Der Vereinigungsmenge bzw. dem Durchschnitt von abzählbar vielen Gebieten auf $S^{(\varrho)}$ entspricht die Vereinigungsmenge bzw. der Durchschnitt der zugeordneten Mengen.

Ist $\mu = \mu(G)$, so setzen wir:

$$G = S^{(\varrho)}(\mu) \,.$$

Die Gesamtheit aller Mengen $\mu(G)$ bezeichnen wir mit $\Sigma'^{(\varrho)}$. $\Sigma'^{(\varrho)}$ ist wegen γ) ein den Forderungen (1) 1.—2. genügendes Teilmengensystem auf der Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}'$ aller Teilmengen $\mu(G)$. $\Sigma''^{(\varrho)}$ sei ein ebensolches Teilmengensystem auf der Restmenge $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$. Dann ist die Gesamtheit aller entweder in $\Sigma'^{(\varrho)}$ oder in $\Sigma''^{(\varrho)}$ liegenden Teilmengen sowie der Vereinigungsmengen von abzählbar vielen solchen ein System von Teilmengen auf $\mathfrak{M}$, das den Bedingungen (1) 1.—2. genügt. Wir bezeichnen es mit $\Sigma^{(\varrho)}$.

Mit den zu $\Sigma^{(\varrho)}$ gehörigen Teilmengen als Definitionsbereich definieren wir jetzt die folgenden Mengenfunktionen $\Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)$:

[8]) *Fueter II*, pag. 373.

$$\Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi^2} \displaystyle\int_{S^{(\varrho)}(\mu)} f(\zeta)\, dZ p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c(\mu)), & \text{wenn } \mu \subset \Sigma'^{(\varrho)} \\ & (c(\mu) \text{ ist irgendein Punkt auf } \mu) \\ 0, \text{ wenn } \mu \subset \Sigma''^{(\varrho)} \\ \Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu_1), \quad \text{wenn} \quad \mu = \mu_1 + \mu_2, \quad \mu_1 \subset \Sigma'^{(\varrho)}, \quad \mu_2 \subset \Sigma''^{(\varrho)}. \end{cases}$$

Aus (5) folgt dann:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c) \qquad (5\,\mathrm{a})$$

für alle z, deren Abstand von $\mathfrak{M}$ größer als 3ϱ ist, und die außerhalb einer der Hyperflächen $S^{(\varrho)}$ liegen. Also wird für alle z, die außerhalb eines $S^{(\varrho)}$ liegen:

$$g(z) = \lim_{\varrho \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c) \quad . \qquad (6)$$

Satz 4. *$r(z)$ sei auf $\mathfrak{M}$ (und somit in einer gewissen Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{M}$) linksregulär. S sei irgendeine geschlossene, orientierbare Hyperfläche mit stetigem Normalenfeld, die ganz in $\mathfrak{U}$ liegt und welche $\mathfrak{M}$ in ihrem Innern enthält. Das Minimum der Abstände der Punkte von S von den Punkten von $\mathfrak{M}$ sei gleich ϱ_1. Dann ist für $\varrho < \frac{\varrho_1}{3}$:*

$$A(r(\zeta)) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_S g(\zeta)\, dZ\, r(\zeta) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \quad . \qquad (8)$$

($A(r(\zeta))$ ist ein Funktional mit allen auf $\mathfrak{M}$ linksregulären Funktionen $r(\zeta)$ als Definitionsbereich.)

Beweis: Nach (5a) gilt für $\varrho < \frac{\varrho_1}{3}$:

$$A(r(\zeta)) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_S g(\zeta)\, dZ\, r(\zeta) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_S \left\{ \int_{\mathfrak{M}} d[\Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c) \right\} dZ\, r(\zeta) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \left\{ \int_S q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c)\, dZ\, r(\zeta) \right\}. \qquad (9)$$

Nun gilt für zwei beliebige, auf S rechts- bzw. linksreguläre Funktionen $w(z)$ und $v(z)$:

$$\int_S (w^{(k)}\, dZ\, v + w\, dZ\, v^{(k)}) = 0\,, \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

wo

$$w^{(k)}(z) = \frac{\partial w(z)}{\partial x_k}\,, \quad v^{(k)}(z) = \frac{\partial v(z)}{\partial x_k}$$

ist [9]). Wenden wir diese Formel auf die Funktionen $w(z) = q_{n_1 n_2 n_3}(z - c)$ und $v(z) = r(z)$ an, so erhalten wir:

$$\int_S q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c)\, dZ\, r(\zeta) = \int_S q_{n_1 - 1, n_2, n_3}(\zeta - c)\, dZ\, \frac{\partial r(\zeta)}{\partial \xi_1}\,,$$

und durch $(n_1 + n_2 + n_3)$-malige Anwendung derselben Formel:

$$\int_S q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c)\, dZ\, r(\zeta) = \int_S q_{000}(\zeta - c)\, dZ\, \frac{\partial^n r(\zeta)}{\partial \xi_1^{n_1}\, \partial \xi_2^{n_2}\, \partial \xi_3^{n_3}} =$$

$$= -\, 2\pi^2 \frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}}\,.$$

Setzen wir dies ein in (9), so folgt die Behauptung.

Da (8) für $\varrho < \frac{\varrho_1}{3}$ gilt, ist insbesondere:

$$A(r(\zeta)) = \lim_{\varrho \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n = n_1 + n_2 + n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)]\, \frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}}\,. \quad (10)$$

Wir definieren jetzt die *unwesentlich singulären* Mengen:

Definition 1. *Eine (abgeschlossene) Menge $\mathfrak{M}$ von Punkten des Quaternionenraumes heißt unwesentlich singulär für die rechtsreguläre Funktion $f(z)$, wenn*

1. *Jeder Punkt von $\mathfrak{M}$ ein singulärer Punkt von $f(z)$ ist*

2. *Eine Konstante M und eine natürliche Zahl N existieren, so daß*

$$|f(z)| < \frac{M}{\varrho^N J(\varrho)}$$

[9]) *Fueter IV*, pag. 309.

ist. Dabei bedeutet: ϱ *den Abstand des Punktes z von der Menge* $\mathfrak{M}$. $J(\varrho)$ *die untere Grenze der Inhalte der Hyperoberflächen aller geschlossenen orientierbaren Hyperflächen mit stetigem Normalenfeld, die* $\mathfrak{M}$ *in ihrem Innern enthalten, und deren Punkte von* $\mathfrak{M}$ *Abstände haben, die* $\geqq \varrho$ *sind. Die kleinste Zahl, die die Eigenschaft von N hat, heißt die Ordnung der unwesentlich singulären Menge.*

Ist $\mathfrak{M}$ ein Punkt oder eine rektifizierbare Kurve oder eine Fläche oder Hyperfläche mit existierender 2- bzw 3-dimensionaler Oberfläche, so kann man definieren:

$\mathfrak{M}$ *ist unwesentlich singulär, wenn eine Konstante M und eine natürliche Zahl N existieren, so daß*

$$|f(z)| < \frac{M}{\varrho^N}$$

ist. Denn in diesem Falle bleiben $\frac{J(\varrho)}{\varrho^3}$ *bzw.* $\frac{J(\varrho)}{\varrho^2}$ *bzw.* $\frac{J(\varrho)}{\varrho}$ *bzw.* $J(\varrho)$ *für* $\varrho \to 0$ *nach oben beschränkt, und es ist* $\lim\limits_{\varrho \to 0} \frac{J(\varrho)}{\varrho^3} \neq 0$, *bzw.* $\lim\limits_{\varrho \to 0} \frac{J(\varrho)}{\varrho^2} \neq 0$, *bzw.* $\lim\limits_{\varrho \to 0} \frac{J(\varrho)}{\varrho} \neq 0$, *bzw.* $\lim\limits_{\varrho \to 0} J(\varrho) \neq 0$.

Satz 5. $\mathfrak{M}$ *sei unwesentlich singulär von der Ordnung N für die rechtsreguläre Funktion* $f(z)$. *Dann ist für jede auf* $\mathfrak{M}$ *linksreguläre Funktion* $r(\zeta)$:

$$\lim_{\varrho \to 0} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d\left[\Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)\right] \frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} = 0 .$$

Beweis: Es ist, wenn $J(S^{(\varrho)}(\mu))$ die Hyperoberfläche von $S^{(\varrho)}(\mu)$ bedeutet:

$$\left|\Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)\right| = \left|\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^{(\varrho)}(\mu)} f(\zeta)\, dZ\, p_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c(\zeta))\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{8\pi^2} \cdot J(S^{(\varrho)}(\mu)) \frac{M \cdot 2^N}{\varrho^N J(\varrho)} \frac{\varrho^n}{n_1!\, n_2!\, n_3!} = \frac{2^N}{8\pi^2} M \frac{J(S^{(\varrho)}(\mu))}{J(\varrho)} \frac{\varrho^{n-N}}{n_1!\, n_2!\, n_3!} .$$ [10])

[10]) *Fueter III*, pag. 327.

Also ist:

$$\left| \lim_{\varrho \to 0} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \, \frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\varrho \to 0} \frac{2^N}{8\pi^2} M \cdot \frac{1}{J(\varrho)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[J(S^{(\varrho)}(\mu))] \, \frac{\varrho^{n-N}}{n_1!\, n_2!\, n_3!} \left| \frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \right| . \quad (11)$$

Es sei K_{ϱ_1} die Hyperkugel mit Mittelpunkt c und Radius ϱ_1 (vgl. (7)). Da $r(\zeta)$ innerhalb und auf K_{ϱ_1} regulär ist, folgt:

$$r(c) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{K_{\varrho_1}} q_{000}(\zeta - c) \, dZ \, r(\zeta) ,$$

und somit, durch Differentiation unter dem Integralzeichen:

$$\frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{K_{\varrho_1}} q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta - c) \, dZ \, r(\zeta) \ .$$

Es ist also:

$$\left| \frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \right| \leqslant \frac{1}{2\pi^2} J(K_{\varrho_1}) \cdot \max_{\text{auf } K_{\varrho_1}} |r(\zeta)| \cdot 4 \frac{(n+2)!}{\varrho_1^{n+3}} \text{ [11]}. \quad (12)$$

Aus (11) und (12) folgt:

$$\left| \lim_{\varrho \to 0} \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \, \frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant S \cdot \frac{J(S^{(\varrho)})}{J(\varrho)} \cdot \varrho \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \frac{\varrho^{n-N-1}}{n_1!\, n_2!\, n_3!} \, \frac{(n+2)!}{\varrho_1^{n+3}} \text{ [12]} ,$$

wo S eine Konstante ist, deren Wert aus dem obigen ersichtlich ist. $J(S^{(\varrho)})$ bedeutet die Hyperoberfläche der Hyperfläche $S^{(\varrho)}$. Aus der Definition der Größe $J(\varrho)$ folgt sofort, daß man die Hyperfläche $S^{(\varrho)}$ immer so wählen kann, daß

$$\frac{J(S^{(\varrho)})}{J(\varrho)} \leqslant 2$$

---

[11]) Es ist nämlich für alle z: $|q_{n_1 n_2 n_3}(z)| \leq 4 \frac{(n+2)!}{|z|^{n+3}}$.

[12]) *Fueter III*, pag. 328.

wird. Daraus folgt die Behauptung wegen der Konvergenz der auftretenden Reihe für $\varrho < \frac{\varrho_1}{3}$ und dem vor dem Summenzeichen auftretenden Faktor ϱ.

Daraus und aus der Definition (8) des Funktionals $A(r(\zeta))$ folgt:

Satz 6. *Für eine auf $\mathfrak{M}$ unwesentlich singuläre Funktion $f(z)$ von der Ordnung N ist:*

$$A(r(\zeta)) = \lim_{\varrho \to 0} \sum_{n=0}^{N} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Theta^{(\varrho)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \cdot \frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} .$$

Satz 7. *Es existiert eine Konstante F von der Art, daß für jede auf $\mathfrak{M}$ linksreguläre Funktion $r(\zeta)$ gilt:*

$$|A(r(\zeta))| \leqslant F \cdot \max_{\text{auf } \mathfrak{M}} \left[|r(\zeta)|, \ldots, \left| \frac{\partial^n r(\zeta)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \right|, \ldots \right],$$

wo in der Klammer alle Ableitungen von $r(\zeta)$ stehen, deren Ordnung $\leqslant N$ ist.

Beweis: Wäre der Satz falsch, so gäbe es eine Folge $r_1(\zeta), r_2(\zeta), \ldots$ von auf $\mathfrak{M}$ linksregulären Funktionen von der Art, daß die Folge

$$\{F_j\} = \left\{ \frac{A(r_j(\zeta))}{\max\limits_{\text{auf } \mathfrak{M}} \left[|r(\zeta)|, \ldots, \left| \frac{\partial^n r(\zeta)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \right|, \ldots \right]} \right\}$$

nicht beschränkt wäre. Es gäbe dann ein Indexsystem (ν_1, ν_2, ν_3) mit $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leqslant N$, so daß für unendlich viele Indizes $j_1, j_2, j_3, \ldots$ wäre:

$$\max_{\text{auf } \mathfrak{M}} \left[|r_{j_k}(\zeta)|, \ldots, \left| \frac{\partial^n r_{j_k}(\zeta)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \right|, \ldots \right] = \max_{\text{auf } \mathfrak{M}} \left| \frac{\partial^\nu r_{j_k}(\zeta)}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \partial x_3^{\nu_3}} \right| .$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Für die Funktionenfolge

$$\{\varrho_{j_k}(\zeta)\} = \left\{ \frac{r_{j_k}(\zeta)}{F_{j_k} \cdot \max\limits_{\text{auf } \mathfrak{M}} \left| \frac{\partial^\nu r(\zeta)}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \partial x_3^{\nu_3}} \right|} \right\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

wäre dann gleichmäßig auf $\mathfrak{M}$:

$$\lim_{k\to\infty} \max_{\text{auf } \mathfrak{M}} \left| \frac{\partial^n \varrho_{j_k}(\zeta)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \right| = 0 \qquad \begin{matrix}(n_1, n_2, n_3 = 1, \ldots, N,\\ n_1 + n_2 + n_3 \leqslant N)\end{matrix}$$

und

$$A(\varrho_{j_k}(\zeta)) = 1$$

für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$. Das steht im Widerspruch zu folgendem

Satz 8. *Ist für eine Folge von auf $\mathfrak{M}$ linksregulären Funktionen $r_i(\zeta)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$:*

$$\lim_{i\to\infty} r_i(c) = \cdots = \lim_{i\to\infty} \frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} = \cdots = 0 \; (n_1 + n_2 + n_3 \leqslant N),$$

gleichmäßig für alle Punkte c auf $\mathfrak{M}$, so ist:

$$\lim_{i\to\infty} A(r_i(\zeta)) = 0 .$$

Beweis: Man stelle $A(r_i(\zeta))$ in der Form (8) dar. Diese gilt für jeden Wert von ϱ. ε sei eine beliebige positive Zahl. Wegen Satz 5 kann man $\varrho = \varrho^*$ so wählen, daß

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Theta^{(\varrho^*)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Hierauf setze man

$$\delta = \frac{1}{V} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{P(N)}$$

(V = Maximum der totalen Variationen aller $\Theta^{(\varrho^*)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)$ für $n_1 + n_2 + n_3 \leqslant N$, $P(N)$ = Anzahl der Tripel (n_1, n_2, n_3) mit $n_1 + n_2 + n_3 \leqslant N$), und bestimme i_0 so, daß für $i \geqslant i_0$:

$$\left| \frac{\partial^n r_i(c)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \right| < \delta \qquad (0 \leqslant n_1 + n_2 + n_3 \leqslant N)$$

wird. Dann ist für $i \geqslant i_0$:

$$\left| \sum_{n=0}^{N} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Theta^{(\varrho^*)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \frac{\partial^n r_i(c)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$|A(r_i(\zeta))| < \varepsilon \quad \text{für} \quad i \geqslant i_0 .$$

Da ε beliebig war, folgt daraus die Behauptung. Eine unmittelbare Folge von Satz 8 ist

Satz 9. *Ist für eine Folge von auf $\mathfrak{M}$ linksregulären Funktionen $r_i(\zeta)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ gleichmäßig für alle c auf $\mathfrak{M}$:*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\partial^n r_i(c)}{\partial x_1^{n_1}\,\partial x_2^{n_2}\,\partial x_3^{n_3}} = \frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1}\,\partial x_2^{n_2}\,\partial x_3^{n_3}} \quad (0 \leqslant n_1 + n_2 + n_3 \leqslant N),$$

und ist $r(\zeta)$ auf $\mathfrak{M}$ linksregulär, so ist

$$\lim_{i\to\infty} A(r_i(\zeta)) = A(r(\zeta)).$$

Jetzt schreiben wir die Gleichungen auf:

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Delta_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \frac{\partial^n p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(c)}{\partial x_1^{n_1}\,\partial x_2^{n_2}\,\partial x_3^{n_3}} = A(p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\zeta)) \qquad (13)$$

$$(\nu_1, \nu_2, \nu_3 = 0, 1, 2, \ldots)$$

und fragen nach Lösungsfunktionen $\Delta_{n_1 n_2 n_3}(\mu)$ $(n_1, n_2, n_3 = 0, \ldots, N;$ $n_1 + n_2 + n_3 \leqslant N)$.

Nach Satz 3 ist für die Existenz solcher Lösungen notwendig und hinreichend die Existenz einer Konstanten F von der Art, daß für eine beliebige natürliche Zahl s und beliebige Konstanten

$$\vartheta_{\nu_1\nu_2\nu_3} \quad (\nu_1, \nu_2, \nu_3 = 1, \ldots, s; \quad \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leqslant s)$$

stets gilt:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3} A(p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\zeta)) \cdot \vartheta_{\nu_1\nu_2\nu_3} \right| \leqslant$$

$$\leqslant F \cdot \max_{\text{auf } \mathfrak{M}} \left[\left| \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3} p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\zeta) \cdot \vartheta_{\nu_1\nu_2\nu_3} \right|, \ldots, \right. \qquad (14)$$

$$\left. \left| \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3} \frac{\delta^n p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\zeta)}{\partial x_1^{n_1}\,\partial x_2^{n_2}\,\partial x_3^{n_3}} \vartheta_{\nu_1\nu_2\nu_3} \right|, \ldots \right],$$

wo in der Klammer alle Ableitungen stehen, deren Ordnung $\leqslant N$ ist. Nun ist aber

$$\sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3} p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\zeta)\ \vartheta_{\nu_1\nu_2\nu_3}$$

eine für alle ζ linksreguläre Funktion. Also ist (14) nach Satz 7 erfüllt und die Gleichungen (13) haben Lösungen

$$\Delta_{n_1 n_2 n_3}(c) \quad (n_1, n_2, n_3 = 0, \ldots, N;\ n_1 + n_2 + n_3 \leqslant N).$$

$r(\zeta)$ sei jetzt eine Funktion, die im Innern einer Hyperkugel Γ, deren Mittelpunkt der Nullpunkt ist, und die die singuläre Menge $\mathfrak{M}$ in ihrem Innern enthält, linksregulär ist. Dann gilt in Γ eine Entwicklung von der Gestalt:

$$r(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3} p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\zeta) \cdot a_{\nu_1\nu_2\nu_3} \tag{15}$$

und für beliebiges (n_1, n_2, n_3):

$$\frac{\partial^n r(\zeta)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3} \frac{\partial^n p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\zeta)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \cdot a_{\nu_1\nu_2\nu_3} \ .$$

Alle diese Reihen konvergieren gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von Γ, insbesondere also auf $\mathfrak{M}$. Deshalb ist nach Satz 9:

$$A(r(\zeta)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3} A(p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(\zeta)) \cdot a_{\nu_1\nu_2\nu_3} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Delta_{n_1n_2n_3}(\mu)] \cdot \frac{\partial^n p_{\nu_1\nu_2\nu_3}(c)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \cdot a_{\nu_1\nu_2\nu_3} \right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Delta_{n_1n_2n_3}(\mu)] \frac{\partial^n r(c)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} \ . \tag{16}$$

Wir setzen jetzt $r(\zeta) = q_{000}(z - \zeta)$. Aus (6) und (8) folgt:

$$A(q_{000}(z - \zeta)) = g(z) \ .$$

Ist jetzt z außerhalb der Hyperkugel Γ gelegen, so ist $q_{000}(z - \zeta)$ innerhalb Γ linksregulär, und es folgt nach (16):

$$g(z) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Delta_{n_1n_2n_3}(\mu)] \cdot \frac{\partial q_{000}(z - c)}{\partial x_1^{n_1}\, \partial x_2^{n_2}\, \partial x_3^{n_3}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Delta_{n_1n_2n_3}(\mu)] \cdot q_{n_1n_2n_3}(z - c) \ . \tag{17}$$

Setzen wir jetzt für alle z, die außerhalb irgendeines $S^{(\varrho)}$ liegen:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Delta_{n_1n_2n_3}(\mu)] \cdot q_{n_1n_2n_3}(z - c) \ , \tag{18}$$

so ist $h(z)$ eine überall außer auf $\mathfrak{M}$ rechtsreguläre Funktion. Denn alle Funktionen der Form $q_{n_1 n_2 n_3}(z-c)$ sind rechtsregulär. Außerhalb Γ stimmen aber die Funktionen $h(z)$ und $g(z)$ nach (17), (18) überein. Nun sind aber zwei rechtsreguläre Funktionen, die in einem 3-dimensionalen Kontinuum übereinstimmen, vollständig identisch. Also ist $h(z)$ in seinem ganzen Verlauf mit $g(z)$ identisch und es gilt für alle z, die außerhalb irgendeiner Hyperfläche $S^{(\varrho)}$ liegen:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Delta_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z-c) \ .$$

Nach (4) unterscheidet sich die Funktion $f(z)$ nur durch eine auf $\mathfrak{M}$ (und innerhalb R) rechtsreguläre Funktion $\varphi(z)$ von $g(z)$, und es gilt also:

Hauptsatz 10. *Ist eine Funktion $f(z)$ im Innern einer geschlossenen Hyperfläche rechtsregulär mit Ausnahme der Punkte einer singulären Menge $\mathfrak{M}$, die unwesentlich singulär von der Ordnung N sein möge, so gilt für alle z, die im Innern von R liegen, und die durch eine stetige Kurve, die keinen Punkt mit $\mathfrak{M}$ gemeinsam hat, mit R verbunden werden können:*

$$f(z) = \varphi(z) + \sum_{n=0}^{N} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{M}} d[\Delta_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z-c) \ .$$

Dabei ist $\varphi(z)$ eine innerhalb R, insbesondere also auf $\mathfrak{M}$ rechtsreguläre Funktion.

(Die Einschränkung: „und die durch eine stetige Kurve . . .“ ist notwendig, weil wir die Möglichkeit nicht ausschließen wollen, wo $\mathfrak{M}$ eine geschlossene orientierbare Hyperfläche [natürliche Grenze von $f(z)$] ist. An Stelle dieser Einschränkung haben wir bisher immer gesagt: „z soll außerhalb irgendeiner der Hyperflächen $S^{(\varrho)}$ liegen“.)

3. TEIL

Meromorphe reguläre Funktionen

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, alle rechtsregulären Funktionen aufzustellen, die für alle endlichen z nur unwesentliche Singularitäten haben. Dabei werden wir aber die als Singularitäten auftretenden Mengen noch einer einfachen Beschränkung unterwerfen.

$f(z)$ sei eine rechtsreguläre Funktion, die im Endlichen nur unwesentliche Singularitäten hat. $\mathfrak{R}$ sei die Menge aller im Endlichen gelegenen singulären Punkte von $f(z)$.

Definition 2. *Unter einem zusammenhängenden singulären Gebilde von $f(z)$ verstehen wir eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{R}$, die folgende Eigenschaft hat: Ist ϱ irgendeine positive Zahl, so gibt es in $\mathfrak{M}$ eine endliche Anzahl von Punkten P_i von der Art, daß die Menge der inneren Punkte aller Hyperkugeln mit den Mittelpunkten P_i und dem Radius ϱ zusammenhängend ist, d. h. daß jeder Punkt dieser Menge sich mit jedem andern durch eine in ihr verlaufende stetige Kurve verbinden läßt.*

Definition 3. *Ein zusammenhängendes singuläres Gebilde $\mathfrak{M}$ von $f(z)$ heißt isoliert, wenn eine positive Zahl ϱ existiert, so daß die Hyperkugeln vom Radius ϱ und irgendeinem Punkt von $\mathfrak{M}$ als Mittelpunkt keine singulären Punkte von $f(z)$ enthalten außer den Punkten von $\mathfrak{M}$.*

Jedes zusammenhängende isolierte singuläre Gebilde ist vollständig, d. h. durch Hinzunahme weiterer singulärer Punkte wird der Zusammenhang zerstört.

Satz 11. *Es gibt nur abzählbar viele isolierte singuläre Gebilde.*

Beweis: R sei für jedes dieser Gebilde die obere Grenze der Zahlen ϱ, welche die in Definition 3 verlangte Eigenschaft haben. Wir klassifizieren die Gebilde nach der Größe dieser Zahl R. Die erste Klasse enthält alle Gebilde, für die $R \geqslant 1$ ist. Die zweite diejenigen mit $\frac{1}{2} \leqslant R < 1 \cdots$, die n-te Klasse enthält die Gebilde mit $\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant R < \frac{1}{2^{n-2}}$. Jedes Gebilde gehört einer dieser abzählbar vielen Klassen an. Jede Klasse enthält aber abzählbar viele Gebilde. Denn es gibt nur abzählbar viele punktfremde Hyperkugeln mit gegebenem Radius.

Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß $f(z)$ nur isolierte, unwesentlich singuläre Gebilde hat.

Es sei $$R_1, R_2, R_3, \ldots$$

eine Folge von geschlossenen orientierbaren Hyperflächen mit stetigem Normalenfeld und mit folgenden Eigenschaften:

1. R_{i+1} enthält R_i in seinem Innern $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.
2. Ist z irgendein Punkt des Quaternionenraumes, so existiert ein Index $i_0(z)$, so daß für $i \geqslant i_0(z)$ z im Innern von R_i enthalten ist.
3. Die Punkte auf den Hyperflächen R_i sind reguläre Punkte von $f(z)$.

Wir numerieren nun die isolierten singulären Gebilde in irgendeiner Reihenfolge, jedoch so, daß wir zuerst die innerhalb R_1 gelegenen nehmen, dann diejenigen, welche in R_2, aber nicht in R_1 liegen usw. In dieser Reihenfolge bezeichnen wir sie mit:

$$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \ldots$$

Ihre Ordnungen seien bzw.:

$$N_1, N_2, N_3, \ldots$$

Die natürlichen Zahlen $\lambda(i)$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ seien so definiert, daß genau die $\mathfrak{S}_\lambda$ mit $\lambda \leqslant \lambda(i)$ im Innern von R_i liegen $(i = 1, 2, 3, \ldots)$.

Die Hyperflächen $S_\lambda^{(\varrho)} (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ seien bezüglich $\mathfrak{S}_\lambda$ ebenso definiert, wie im 2. Teil die Hyperflächen $S^{(\varrho)}$ bezüglich $\mathfrak{M}$. Dabei beschränken wir ϱ auf solche Werte, daß die $S_\lambda^{(\varrho)}$ keine gemeinsamen Punkte haben. Es gilt dann innerhalb R_i:

$$f(z) = \frac{1}{8\pi^2} \lim_{\varrho \to 0} \sum_{\lambda=1}^{\lambda(i)} \int_{S_\lambda^{(\varrho)}} f(\zeta)\, dZ\, \Delta(\zeta - z)^{-1} + \frac{1}{8\pi^2} \int_{R_i} f(\zeta)\, dZ\, \Delta(\zeta - z)^{-1} \quad .$$

Nach dem Resultat des 2. Teiles ist

$$\frac{1}{8\pi^2} \lim_{\varrho \to 0} \sum_{\lambda=1}^{\lambda(i)} \int_{S_\lambda^{(\varrho)}} f(\zeta)\, dZ\, \Delta(\zeta - z)^{-1} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\lambda(i)} \left[\sum_{n=0}^{N_\lambda} \sum_{n = n_1 + n_2 + n_3} \int_{\mathfrak{S}_\lambda} d[\Delta^{(\lambda)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)]\, q_{n_1 n_2 n_3}(z - c) \right]$$

und

$$\varphi_i(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{R_i} f(\zeta)\, dZ\, \Delta(\zeta - z)^{-1}$$

ist eine innerhalb R_i rechtsreguläre Funktion. Es ist somit

$$f(z) = \lim_{i \to \infty} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{\lambda(i)} \left[\sum_{n=0}^{N_\lambda} \sum_{n = n_1 + n_2 + n_3} \int_{\mathfrak{S}_\lambda} d[\Delta^{(\lambda)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c) \right] + \varphi_i(z) \right\}.$$

Nun sei K_i die größte Hyperkugel mit dem Mittelpunkt $z = 0$, deren innere Punkte innere Punkte von R_i sind. L_i sei die Hyperkugel mit $z = 0$ als Mittelpunkt und halb so großem Radius wie $K_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$. $\varphi_i(z)$ ist innerhalb R_i, also innerhalb K_i rechtsregulär, somit gilt in K_i:

$$\varphi_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \alpha^{(i)}_{n_1 n_2 n_3} \cdot p_{n_1 n_2 n_3}(z) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) .$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ sei eine Folge von positiven Zahlen mit $\lim\limits_{j \to \infty} \varepsilon_j = 0$.

Wir wählen für jedes i den Index ν_i so groß, daß innerhalb L_i:

$$| \varphi_i(z) - \sum_{n=0}^{\nu_i} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \alpha^{(i)}_{n_1 n_2 n_3} \cdot p_{n_1 n_2 n_3}(z) | < \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Setzen wir

$$\sum_{n=0}^{\nu_i} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \alpha^{(i)}_{n_1 n_2 n_3} \cdot p_{n_1 n_2 n_3}(z) = \psi_i(z) ,$$

so sind die $\psi_i(z)$ ganze rationale rechtsreguläre Funktionen, und es wird:

$$f(z) = \lim_{i \to \infty} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{\lambda(i)} \left[\sum_{n=0}^{N_\lambda} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{S}_\lambda} d[\Delta^{(\lambda)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c) \right] + \psi_i(z) \right\} .$$

Daraus folgt:

Hauptsatz 12. *Hat eine rechtsreguläre Funktion $f(z)$ im Endlichen nur isolierte unwesentlich singuläre Gebilde, so sind diese in abzählbarer Menge vorhanden. Bezeichnen wir sie mit $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \ldots$, so ist für alle z, die nicht auf einem singulären Gebilde liegen, und die sich durch eine stetige Kurve, die aus lauter regulären Punkten besteht, mit dem Punkt $z = \infty$ verbinden lassen:*

$$f(z) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{N_\lambda} \sum_{n=n_1+n_2+n_3} \int_{\mathfrak{S}_\lambda} d[\Delta^{(\lambda)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)] \cdot q_{n_1 n_2 n_3}(z - c) + \chi_\lambda(z) \right\} .$$

Dabei ist N_λ die Ordnung von $\mathfrak{S}_\lambda$, die Funktionen $\Delta^{(\lambda)}_{n_1 n_2 n_3}(\mu)$ sind auf $\mathfrak{S}_\lambda$ von beschränkter Schwankung und die $\chi_\lambda(z)$ sind ganze rationale rechtsreguläre Funktionen.

(Eingegangen den 5. Januar 1944.)