

## Werk

**Titel:** La dynamique des pseudogroupes de rotations.

**Autor:** Levitt, Gilbert

**Jahr:** 1993

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735\\_0113|log51](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0113|log51)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

## La dynamique des pseudogroupes de rotations

**Gilbert Levitt**

Mathématique, URA CNRS 1408, Université Paul Sabatier, 118, route de Narbonne,  
F-31062 Toulouse Cedex, France

Oblatum I-1991 & 10-III-1993

**Summary.** We study dynamical systems on the circle generated by a finite number of partially defined rotations. We construct new examples with all orbits dense (this leads to non-simplicial free actions of free groups on  $\mathbb{R}$ -trees). We study the generic dynamics for these pseudogroups and their 1-parameter families. We show that, in suitable 2-parameter families, the set of pseudogroups having a dense orbit is a Sierpiński curve. We generalize results on interval exchange transformations obtained by Boshernitzan, Veech, Rips.

### Introduction

Les systèmes considérés ici sont très élémentaires: on se donne  $k$  rotations partiellement définies  $\gamma_i: I_i \rightarrow J_i$ , les  $I_i$  et  $J_i$  étant des intervalles ouverts du cercle  $C = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Les orbites du système sont les classes de la relation d'équivalence qui est engendrée par « $x \sim \gamma_i(x)$  pour  $x \in I_i$ »: deux points sont dans la même orbite si l'on peut passer de l'un à l'autre en appliquant (un nombre fini de fois) les  $\gamma_i$  et leurs inverses.

Malgré la simplicité de la définition, la dynamique de ces *pseudogroupes de rotations*, et son comportement sous perturbation, est extrêmement riche dès que  $k$  est au moins égal à 2.

Ces pseudogroupes constituent une généralisation naturelle des échanges d'intervalles, et sont intimement liés aux actions libres de groupes sur des  $\mathbb{R}$ -arbres. Géométriquement, ils correspondent à des feuilletages définis par des 1-formes différentielles fermées.

De façon générale, les pseudogroupes ont d'abord été étudiés par Lie et Cartan, sous le nom de «groupes finis» et «groupes infinis» (voir [SS]). Le mot «pseudogroupe» apparaît pour la première fois en 1932 chez Veblen et Whitehead [VW], puis chez Ehresmann [E]. En topologie, les pseudogroupes interviennent en particulier dans les feuilletages (voir par exemple Sacksteder [Sac]), et récemment on a beaucoup étudié les pseudogroupes d'isométries en relation avec les feuilletages riemanniens (Haefliger [Ha3, Ha4], Molino [Mo], Salem [Sal1, Sal2]).

Les pseudogroupes de rotations les plus intéressants, en quelque sorte ceux qui sont irréductibles, sont les minimaux: par définition, un pseudogroupe  $\Gamma$  est minimal si toute orbite est dense (ici, cela revient à dire que toute orbite est infinie, cf. I.2).

Nous construirons de nouveaux exemples de pseudogroupes minimaux, qualitativement différents de ceux auxquels on pense naturellement (i.e. action d'un groupe de rotations, ou échange d'intervalles). Ils conduisent à des actions libres non simpliciales de groupes libres sur des  $\mathbb{R}$ -arbres, et la dynamique de ces exemples «du troisième type» nous semble particulièrement fascinante.

Généralisant un résultat de Rips, nous classifions les pseudogroupes contenant un pseudogroupe minimal fixé. Nous étudierons également la nature de la dynamique pour un pseudogroupe générique, et les bifurcations qui se produisent sur un chemin générique. Nous obtiendrons aussi un résultat d'existence générique d'orbites finies pour les pseudogroupes de longueur 1 (i.e. la somme des longueurs des  $I_i$  vaut 1).

Nous verrons que la dynamique de familles à 2 paramètres fait apparaître naturellement des courbes de Sierpiński (ou tapis de Sierpiński, voir Fig. 3, page 9) dans l'espace des paramètres, comme ensemble des pseudogroupes possédant une orbite dense. Enfin nous montrerons que le «cardinal moyen des orbites» croît exponentiellement avec  $k$  (le nombre de générateurs).

Ces résultats sont obtenus en étudiant les relations entre deux types d'invariants attachés à un pseudogroupe de rotations  $\Gamma$ . D'abord des invariants algébriques, en particulier un entier  $d(\Gamma)$ . Conceptuellement, ce sont des invariants de topologie algébrique du classifiant de Haefliger  $B\Gamma$ .

Mais on a aussi des invariants métriques, tels que  $e(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{ \mu(U); U \text{ ouvert rencontrant toute orbite de } \Gamma \}$  ( $\mu$  désigne la mesure de Lebesgue). On peut penser à  $e(\Gamma)$  comme la «mesure de l'espace quotient  $C/\Gamma$ »; bien sûr  $e$  s'annule pour tout  $\Gamma$  minimal, mais pas forcément pour  $\Gamma'$  proche de  $\Gamma$ . En quelque sorte,  $d(\Gamma)$  mesure la variation infinitésimale de  $e(\Gamma)$  au voisinage de  $\Gamma$ .

De façon plus générale, il nous semble intéressant de rechercher les relations entre invariants algébriques, invariants métriques, et dynamique de l'action, dans le cadre des pseudogroupes préservant une mesure (ou une métrique) sur un espace compact quelconque.

### Enoncé des résultats et résumé de l'article

Soit  $\Gamma$  un pseudogroupe de rotations sur  $C = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , donné comme plus haut par  $k$  générateurs  $\gamma_i: I_i \rightarrow J_i (1 \leq i \leq k)$ . Une propriété d'un pseudogroupe est intéressante si elle ne dépend pas du système de générateurs  $\{\gamma_i\}$  choisi. Pour un pseudogroupe de rotations, cela revient à dire qu'elle ne dépend que des orbites de  $\Gamma$ ; nous qualifierons une telle propriété d'*intrinsèque*. Nous montrerons par exemple dans VIII que le type de croissance des orbites de  $\Gamma$  est intrinsèque (ce n'est pas immédiat!).

Rappelons que, pour  $i$  fixé,  $I_i$  et  $J_i$  sont des intervalles *ouverts* de même longueur  $\ell_i$ , et  $\gamma_i$  est la restriction d'une rotation  $x \mapsto x + \alpha_i$  (nous considérons l'angle  $\alpha_i$  comme un réel, bien défini modulo un entier; le signe + désignera indifféremment l'addition dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ).

Nous noterons  $\Gamma(x)$  l'*orbite* d'un  $x \in C$ . On remarque que, si  $y \in \Gamma(x)$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $y + t \in \Gamma(x + t)$  pour  $|t| < \varepsilon$ . Notons d'autre part l'inclusion  $\Gamma(x) \subset$

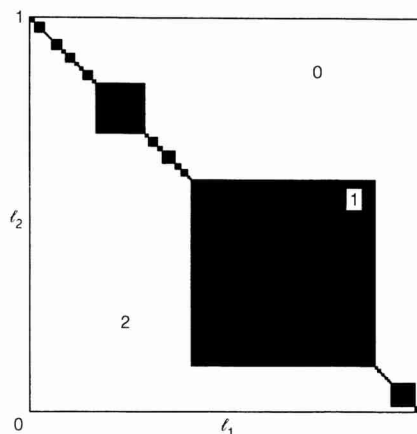


Fig. 1.

$x + P$ , où  $P$  est le sous-groupe de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  engendré par les  $\alpha_i$ . Nous considérerons également le *groupe des périodes*  $\bar{P} \subset \mathbb{R}$ , engendré par 1 et les  $\alpha_i$ .

Donnons quelques exemples extrêmes. Si tous les intervalles  $I_i, J_j$  sont disjoints, toute orbite est finie, de cardinal 1 ou 2. Si chaque  $\alpha_i$  est un rationnel  $\frac{p_i}{q_i}$ , toute orbite est finie, de cardinal  $\leq |P| = \text{ppcm}(q_i)$ .

Si par contre chaque intervalle est égal à  $C$  tout entier, et si l'un des  $\alpha_i$  est irrationnel, alors  $\Gamma$  est *minimal*: toutes les orbites sont denses. On a en fait  $\Gamma(x) = x + P$  pour tout  $x$ , et nous dirons que  $\Gamma$  est le *pseudogroupe engendré par l'action du groupe  $P$* , ou que  $\Gamma$  est *équivalent à un groupe*; en tant que pseudogroupe d'isométries,  $\Gamma$  est complet au sens de Haefliger [Ha3, Ha4].

Les *échanges d'intervalles* fournissent d'autres exemples. Supposons que chacune des familles  $\{I_i\}, \{J_i\}$  forme une «partition» de  $C$  (i.e. les intervalles sont disjoints, et leur union est  $C$  privé de  $k$  points). Alors [Ke] le pseudogroupe engendré est presque toujours minimal. Mais, en dehors de cas dégénérés, toutes les inclusions  $\Gamma(x) \subset x + P$  sont strictes. Nous dirons qu'un pseudogroupe  $\Gamma$  est *équivalent à un échange d'intervalles* s'il existe un échange d'intervalles ayant les mêmes orbites.

Rappelons que, pour les  $\Gamma$  que nous considérons, être minimal équivaut à ne pas avoir d'orbite finie (cf. I.2). Notre premier résultat affirme l'existence de pseudogroupes minimaux autres que ceux décrits ci-dessus (groupes, échanges d'intervalles). On en rencontre dans le premier cas non trivial, celui où  $k=2$ .

Considérons une *famille à deux paramètres* de pseudogroupes  $\Gamma(\ell_1, \ell_2)$ , définie pour  $0 \leq \ell_1, \ell_2 \leq 1$  par:

$$\begin{aligned} I_1 &= ]a_1, a_1 + \ell_1[ & J_1 &= ]a_1 + \alpha_1, a_1 + \ell_1 + \alpha_1[ \\ I_2 &= ]a_2, a_2 + \ell_2[ & J_2 &= ]a_2 + \alpha_2, a_2 + \ell_2 + \alpha_2[. \end{aligned}$$

Cette famille dépend essentiellement de 3 éléments de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ : les angles  $\alpha_1, \alpha_2$  et la différence  $a_2 - a_1$ . Nous imposons une seule restriction: 1,  $\alpha_1, \alpha_2$  doivent être rationnellement indépendants (i.e.  $\bar{P}$  est de rang 3).



La manière dont la dynamique de  $\Gamma(\ell_1, \ell_2)$  dépend de  $\ell_1$  et  $\ell_2$  est illustrée sur la Fig. 1. La région 1 se compose des intérieurs d'une famille (presque toujours infinie) de carrés symétriques par rapport à la diagonale  $\Delta = \{(\ell_1, \ell_2); \ell_1 + \ell_2 = 1\}$ ; les pseudogroupes correspondants possèdent à la fois des orbites finies et des orbites infinies.

En dessous des carrés et de  $\Delta$  (région 2), toutes les orbites sont finies. Au dessus des carrés et de  $\Delta$  (région 0), toute orbite est dense, et en fait  $\Gamma(\ell_1, \ell_2)$  est le pseudogroupe engendré par l'action du groupe  $P$ ; en particulier, les orbites de  $\Gamma(\ell_1, \ell_2)$  ne dépendent pas de la position de  $(\ell_1, \ell_2)$  à l'intérieur de la région 0.

Sur les bords des carrés, on observe des dynamiques de transition que nous n'explicitons pas ici. Intéressons-nous plutôt au compact  $K$  formé des points de la diagonale  $\Delta$  n'appartenant à l'intérieur d'aucun carré. Nous montrerons que  $K$ , qui n'est pas vide, est *sans point isolé*: deux carrés ne sont jamais contigus (génériquement,  $K$  est un Cantor). En particulier,  $K$  n'est pas dénombrable. Mais nous verrons que, en dehors d'un ensemble dénombrable, les points de  $K$  correspondent à des pseudogroupes minimaux. Nous aurons alors:

**Théorème 1** *Soit  $\Gamma(\ell_1, \ell_2)$  une famille à 2 paramètres de pseudogroupes comme ci-dessus, avec  $1, \alpha_1, \alpha_2$  rationnellement indépendants. Il existe une infinité non dénombrable de  $\ell \in ]0, 1[$  tels que  $\Gamma(\ell, 1-\ell)$  soit minimal. Ces  $\Gamma(\ell, 1-\ell)$  ne sont équivalents ni à un groupe ni à un échange d'intervalles (au sens ci-dessus, ou plus généralement au sens de Haefliger [Ha1]).*

Pour certaines valeurs de  $a_2 - a_1$ , il existe des  $\Gamma(\ell, 1-\ell)$  minimaux avec  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$  (voir corollaire V.5); ces  $\Gamma$  peuvent être vus comme l'*itération* de la fonction  $f: C \rightarrow C$  égale à  $x + \alpha_1$  sur  $I_1$  et à  $x + \alpha_2$  sur  $I_2$  (ou sur  $\bar{I}_2 = C - I_1$ ).

La dynamique des pseudogroupes minimaux qui ne sont pas engendrés par un groupe nous semble intéressante à étudier. Par exemple: quand sont-ils uniquement ergodiques? quelle est exactement la croissance des orbites? (elle est bien sûr majorée par un polynôme de degré  $k$ ). Nous montrerons (voir VIII) que, plus il y a de mesures ergodiques invariantes, plus la croissance des orbites doit être faible, et nous généraliserons les résultats d'unique ergodicité de Boshernitzan et Veech [Ve2, Bo].

Un  $\Gamma(\ell, 1-\ell)$  minimal comme dans le théorème 1 donne naissance à une action libre non simpliciale sur un  $\mathbb{R}$ -arbre (voir remarque III.3). On peut en particulier obtenir un ensemble non dénombrable d'actions de  $F_3$ , le groupe libre de rang 3. Cette construction est décrite en détail dans [Le5], en termes de feuilletages à singularités de Morse sur des variétés. Voici une approche équivalente, utilisant des feuilletages sur des 2-complexes.

A  $\Gamma(\ell, 1-\ell)$  on associe un 2-complexe  $Y$  en collant à  $C$  deux bandes  $I_1 \times [0, 1]$  et  $I_2 \times [0, 1]$ , munies du feuilletage  $\{\text{point}\} \times [0, 1]$ ; le recollement identifie  $(x, 0) \in I_i \times [0, 1]$  à  $x$ , et  $(x, 1) \in I_i \times [0, 1]$  à  $x + \alpha_i \in J_i$ . On considère l'action de  $\pi_1 Y \simeq F_3$  sur l'espace des feuilles  $T(\tilde{Y})$  du feuilletage induit sur le revêtement universel  $\tilde{Y}$ .

Lorsque  $\Gamma(\ell, 1-\ell)$  est minimal et que  $\ell$  n'est congru ni à 0 ni à  $a_2 - a_1$  modulo  $\tilde{P}$  (ce qui n'exclut qu'un ensemble dénombrable de valeurs de  $\ell$ ), on peut montrer que  $T(\tilde{Y})$  est un  $\mathbb{R}$ -arbre sur lequel  $\pi_1 Y$  agit *librement*. Ceci fournit beaucoup d'actions libres de  $F_3$ , mais de manière non explicite. La remarque V.10 donne explicitement une infinité dénombrable d'exemples (pour lesquels  $a_1 = a_2 = 0$  et  $\ell_1 = \ell_2 = \frac{1}{2}$ ).

Indiquons maintenant brièvement comment on obtient la Fig. 1. On considère le *groupe fondamental de l'espace des orbites*  $\pi_1(C/\Gamma)$ , que nous avons étudié dans le cadre des feuilletages [Le4]. Nous en donnerons une présentation directe en I.5, et nous traduirons en termes de pseudogroupes certains résultats de [Le4].

En particulier,  $\pi_1(C/\Gamma)$  est toujours un *produit libre*  $\prod_{j=0}^d \mathbb{Z}^{n_j}$  de groupes abéliens libres, avec  $1 \leq \sum_{j=0}^d n_j \leq k+1$ . En gros, les facteurs de rang  $n_j \geq 2$  représentent la contribution des orbites infinies, et ceux de rang  $n_j = 1$  proviennent des orbites finies. De plus  $\pi_1(C/\Gamma)$  admet le groupe des périodes  $\tilde{P}$  comme quotient.

Le nombre de facteurs du produit libre, diminué de 1, est l'invariant (intrinsèque)  $d = d(\Gamma)$ . Par exemple,  $d = 0$  si et seulement si  $\Gamma$  est équivalent à un groupe. Le nombre  $d(\Gamma)$  se calcule à partir des orbites formées par les extrémités des intervalles  $I_i, J_i$  (cf. I.5). Le théorème 2 et le corollaire VIII.4 fourniront d'autres définitions de  $d$ .

Pour étudier comment  $d$  dépend de  $\Gamma$ , il convient de *fixer un  $k$ -uplet d'angles*  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in T^k$ . L'ensemble  $\mathcal{P}(k)$  des pseudogroupes à  $k$  générateurs est une variété, difféomorphe à  $T^{2k} \times ]0, 1[^k$ ; nous imposons  $0 < \ell_i < 1$  de manière à avoir une vraie variété, sans coins. L'application qui à  $\Gamma$  associe les angles  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  est une fibration (triviale) de  $\mathcal{P}(k)$  sur  $T^k$ , et nous noterons  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  la fibre au-dessus de  $\alpha \in T^k$ .

Sur  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  est défini un *ordre partiel*:  $\Gamma \leq \Gamma'$  si  $I_i \subset I'_i \forall i$ , c'est-à-dire si  $\Gamma$  est une restriction de  $\Gamma'$ . Pour cet ordre,  $d$  est *décroissant*. On en déduit que les changements de  $d$  dans  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  se produisent le long d'*hypersurfaces lipschitziennes*  $S_m = S_m(k, \alpha)$  ( $1 \leq m \leq k$ ), définies comme l'ensemble des  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  tels que  $\liminf_{\Gamma' \rightarrow \Gamma} d(\Gamma') < m \leq d(\Gamma)$  (la *lim inf* est prise pour  $\Gamma' \rightarrow \Gamma$  dans  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ ); on montre d'autre part que  $d$  est semi-continu supérieurement sur  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ . Ces hypersurfaces de bifurcation ne sont pas forcément disjointes; elles contiennent tous les pseudogroupes au voisinage desquels la dynamique change qualitativement [Le4, I.B].

Pour la famille  $\Gamma(\ell_1, \ell_2)$ , les traces des ces hypersurfaces donnent dans le carré deux courbes  $S_1$  et  $S_2$ , qui sont des graphes lipschitziens sur  $\Delta$ . Elles séparent le carré en régions 0, 1 et 2, selon la valeur de  $d$ . Pour voir que la dynamique dans ces régions est comme indiqué ci-dessus, on note simplement que  $\pi_1(C/\Gamma)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^3, \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}$ , ou  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$  selon que  $d$  vaut 0, 1 ou 2.

Tout ceci découle assez facilement des résultats de [Le4]. Reste maintenant à déterminer l'allure des courbes  $S_1$  et  $S_2$ .

Pour cela, on introduit  $e(\Gamma) = \inf\{\mu(U); U \text{ ouvert rencontrant toute orbite de } \Gamma\}$  ( $\mu$  est la mesure de Lebesgue). Comme  $d(\Gamma)$ , c'est un *invariant intrinsèque*, ne dépendant que des orbites de  $\Gamma$ .

On voit facilement que la fonction  $e$  est décroissante et continue sur chaque  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ . Si  $k = 1$ , on vérifie que  $e(\Gamma) = 1 - \ell_1$  si  $\alpha_1$  est irrationnel, et

$$e(\Gamma) = \max\left(1 - \ell_1, \frac{1}{q}\right) \text{ si } \alpha_1 = \frac{p}{q}.$$

Dans un  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  fixé, un pseudogroupe  $\Gamma$  est déterminé par les intervalles  $I_i = ]a_i, b_i[$ . Pour représenter un voisinage de  $\Gamma$ , on considère les  $\Gamma_{x,y}$  définis

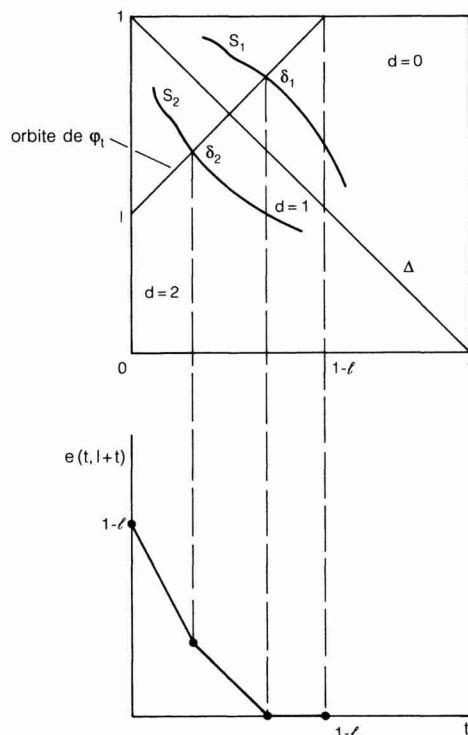


Fig. 2

par  $I_i = ]a_i - y_i, b_i + x_i[$ , les points  $x = (x_1, \dots, x_k)$  et  $y = (y_1, \dots, y_k)$  étant proches de 0 dans  $\mathbb{R}^k$ .

Etant donné  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  et  $t \in \mathbb{R}$ , nous noterons  $\varphi_t \Gamma$  le pseudogroupe de  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  déterminé par  $I_i = ]a_i, b_i + t[$ , si cela a un sens. On vérifie (cf. I.1) que le flot  $\varphi_t$ , qui n'est que partiellement défini, est intrinsèque pour  $t \geq 0$ : les orbites du pseudogroupe  $\varphi_t \Gamma$  ne dépendent que de celles de  $\Gamma$  si  $t \geq 0$ . Le théorème ci-dessous interprète  $d$  comme l'opposé de la dérivée de  $e$  le long des orbites de  $\varphi_t$ , reliant ainsi l'invariant algébrique  $d$  et l'invariant métrique  $e$ .

**Théorème 2** Pour tout  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$ , la fonction  $t \mapsto e(\varphi_t \Gamma)$  est linéaire par morceaux, de dérivée à gauche  $-d(\varphi_t \Gamma)$ . De plus, si  $\Gamma$  n'appartient à aucun  $S_m$  (i.e. si  $d$  est constant sur un voisinage de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ ), la fonction  $e$  est linéaire par morceaux au voisinage de  $\Gamma$ : pour  $x, y$  assez proches de 0 dans  $\mathbb{R}^k$ , on a

$$e(\Gamma_{x,y}) = e(\Gamma) - \sum_{h=1}^d x_{\sigma(h)} - \sum_{h=1}^d y_{\tau(h)}, \quad \text{où } d = d(\Gamma), \text{ et } \sigma \text{ (resp. } \tau) \text{ est une injection}$$

de  $\{1, \dots, d\}$  dans  $\{1, \dots, k\}$  ne dépendant que des valeurs relatives des  $x_i$  (resp. des  $y_i$ ).

En particulier:

**Corollaire.** Pour tout  $\Gamma$ , on a:  $d(\Gamma) = \frac{e(\varphi_{-\delta} \Gamma) - e(\Gamma)}{\delta}$  pour  $\delta > 0$  assez petit.

Illustrons ce théorème sur la famille  $\Gamma(\ell_1, \ell_2)$  (voir Fig. 2), en écrivant abusivement  $e(\ell_1, \ell_2)$  pour  $e(\Gamma(\ell_1, \ell_2))$ .

Les orbites de  $\varphi_t$  sont perpendiculaires à la diagonale  $\Delta$ , et la fonction  $t \mapsto e(t, \ell + t)$ , définie sur  $[0, 1 - \ell]$ , est linéaire par morceaux de pentes successives  $-2, -1, 0$ , les coins correspondant aux intersections  $\delta_1$  et  $\delta_2$  de l'orbite avec  $S_1$  et  $S_2$ .

Cette fonction vaut 0 pour  $t = 1 - \ell$ , et  $1 - \ell$  pour  $t = 0$ . On en déduit facilement que le milieu de  $\delta_1$  et  $\delta_2$  se trouve sur  $\Delta$ : les courbes  $S_1$  et  $S_2$  sont *symétriques par rapport à  $\Delta$* .

Puisque  $e(\ell_1, \ell_2)$  vaut 0 si  $d$  vaut 0, la valeur de  $e$  en un point de  $\Delta$  est proportionnelle à la distance dont il faut se déplacer vers le nord-est (le long de l'orbite de  $\varphi_t$ ) avant de rencontrer  $S_1$ . L'expression pour  $e$  donnée par le théorème 2 détermine donc la forme de  $S_1$ . C'est ainsi que l'on obtient les carrés représentés sur la Fig. 1.

Nous reviendrons plus loin sur le cas  $k=2$ . Pour l'instant, notons que les raisonnements ci-dessus peuvent être tenus dans le cas général. Nous aurons par exemple:

**Corollaire 1** Dans chaque  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ , les  $S'_m = S_m - \bigcup_{n+m} S_n$  sont linéaires par morceaux.

Appelons *longueur* de  $\Gamma$  la somme  $\ell(\Gamma) = \sum_{i=1}^k \ell_i$  des longueurs des  $I_i$ ; contrairement à  $e$ , ce n'est pas un invariant intrinsèque.

**Corollaire 2** Si une orbite de  $\varphi_t$  rencontre chaque  $S_1, \dots, S_k$ , la moyenne des valeurs de  $\ell$  aux  $k$  points d'intersection est égale à  $1 - \frac{1}{|P|}$  (bien sûr  $\frac{1}{|P|} = 0$  dès qu'un des  $\alpha_i$  est irrationnel).

Les  $S'_m$  sont les hypersurfaces de « bifurcation simple », le long desquelles  $d$  change d'exactly une unité. Le théorème suivant justifie l'idée intuitive qu'un chemin générique ne coupe pas en même temps deux  $S_m$  différentes: *génériquement, les accidents se produisent séparément*.

**Théorème 3** Pour  $\alpha$  dans un  $G_\delta$  dense de  $T^k$ , chaque  $S'_m(k, \alpha)$  est dense dans  $S_m(k, \alpha)$ .

*Question.* Ce résultat est-il vrai pour presque tout  $\alpha \in T^k$ ? (oui pour  $k=2$ , d'après le théorème 5 ci-dessous)

On peut déterminer les accidents génériques, correspondant à la traversée d'une  $S'_m$ . Le plus intéressant se produit déjà pour  $k=1$ : fixons  $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ , et augmentons progressivement la longueur  $\ell_1$ ; les orbites sont finies, de plus en plus longues, et deviennent infinies (et denses) lorsque  $\ell_1$  atteint 1.

Le théorème 2 et ses corollaires ont été obtenus à partir de la fonction  $e$ . Celle-ci est continue (même lipschitzienne) dans chaque  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ , mais seulement semi-continue sur  $\mathcal{P}(k)$ :  $e(\Gamma)$  peut chuter brutalement lorsqu'on varie les angles  $\alpha_i$ .

Pour montrer le théorème 3, nous introduirons une autre fonction (non intrinsèque)  $e_s \leq e$ , avec  $e_s(\Gamma) = e(\Gamma)$  dès que  $1, \alpha_1, \dots, \alpha_k$  sont rationnellement indépendants. La fonction  $e_s$  est *continue*, et même Hölder d'exposant  $\frac{1}{2}$ , sur  $\mathcal{P}(k)$  tout entier; nous obtiendrons alors le théorème 3 en étudiant  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  lorsque

tous les  $\alpha_i$  sont *rationnels*. Signalons que cette continuité de  $e$ , permet d'étudier les pseudogroupes de rotations sur ordinateur.

Voici une autre application de cette technique. Soit  $\mathcal{P}^1(k) \subset \mathcal{P}(k)$  et  $\mathcal{P}^1(k, \alpha) \subset \mathcal{P}(k, \alpha)$  définis par l'équation  $\ell(\Gamma) = 1$ . Ces hypersurfaces linéaires sont apparues comme lieu de barycentres dans le corollaire 2 (plan de symétrie si  $k=2$ , cf. la Fig. 1 où  $\Delta$  est la trace de  $\mathcal{P}^1(2)$ ).

On montre assez facilement (cf. II) que, si  $\Gamma$  est minimal, alors  $\ell(\Gamma) \geq 1$ ; si  $\Gamma$  est minimal et équivalent à un groupe, alors  $\ell(\Gamma) > 1$ ; si  $\Gamma$  est minimal mais pas équivalent à un groupe, et si  $1, \alpha_1, \dots, \alpha_k$  sont rationnellement indépendants, alors  $\ell(\Gamma) = 1$ . Ceci noté, nous montrerons:

**Théorème 4** *Soit  $k \geq 2$ . Dans  $\mathcal{P}^1(k)$ , l'ensemble des pseudogroupes possédant une orbite finie contient un ouvert dense. Pour  $\alpha$  générique dans  $T^k$ , l'ensemble des  $\Gamma \in \mathcal{P}^1(k, \alpha)$  possédant une orbite finie contient un ouvert dense.*

On notera que le résultat est faux pour  $k=1$ . Il est également faux dans l'ensemble  $\mathcal{P}^{1+\varepsilon}(k)$  des  $\Gamma$  tels que  $\ell(\Gamma) = 1 + \varepsilon$ , pour  $\varepsilon > 0$  (alors que tout  $\Gamma \in \mathcal{P}^{1-\varepsilon}(k)$  a des orbites finies).

Revenons maintenant au cas  $k=2$ . Nous allons étudier  $\mathcal{P}^1(2, \alpha)$ , et définir un compact  $S$  qui détermine la structure de  $\mathcal{P}(2, \alpha)$  tout comme sur la Fig. 1 la connaissance de  $K \subset \Delta$  permet de reconstituer les carrés. Comme précédemment, nous supposons  $1, \alpha_1, \alpha_2$  rationnellement indépendants.

Pour  $(u, \ell) \in C \times [0, 1]$ , définissons  $\Gamma_{u, \ell} = \Gamma_{u, \ell}(\alpha)$  par:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left] -\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2} \right[ & J_1 &= I_1 + \alpha_1 \\ I_2 &= \left] u + \frac{\ell}{2}, u + 1 - \frac{\ell}{2} \right[ & J_2 &= I_2 + \alpha_2. \end{aligned}$$

Tout  $\Gamma \in \mathcal{P}^1(k, \alpha)$  est conjugué par une rotation de  $C$  à un unique  $\Gamma_{u, \ell}$ , avec  $0 < \ell < 1$ . Dans cette représentation, les diagonales  $\Delta$  des familles  $\Gamma(\ell_1, \ell_2)$  apparaissent comme des diagonales  $u + \ell = \text{constante} (= a_2 - a_1)$  modulo 1.

L'union des compacts  $K \subset \Delta$  est le compact  $S = S(\alpha) \subset C \times [0, 1]$  défini par l'équation  $e(\Gamma_{u, \ell}) = 0$ . C'est d'ailleurs une union disjointe  $S = S_{\min} \cup S_f$ , les  $\Gamma \in S_{\min}$  étant minimaux et les  $\Gamma \in S_f$  ayant une orbite finie (qui est en fait unique, toutes les autres orbites étant denses).

Nous montrerons que le complémentaire de  $S$  est une union de carrés à côtés parallèles aux axes (voir Fig. 3 a). Les adhérences de ces carrés sont disjointes. Les points de  $S_f$  sont ceux qui appartiennent au bord d'un des carrés.

Nous verrons que, pour presque tout  $\alpha$  dans  $T^2$ , le compact  $S$  est d'intérieur vide (en particulier, son complémentaire a une infinité de composantes). On sait alors [Wh] que  $S$  est homéomorphe à la *courbe de Sierpiński*  $\Sigma$  (cette courbe universelle, introduite dans [Si2], est en général représentée comme un « tapis », voir Fig. 3 b). Les points de  $S_{\min} \cap (C \times ]0, 1[)$  correspondent aux  $p \in \Sigma$  tels que tout cercle contenant  $p$  disconnecte  $\Sigma$ . Nous aurons donc:

**Théorème 5** *Il existe un  $G_\delta$  dense  $\mathcal{G} \subset T^2$ , de complémentaire négligeable pour la mesure de Lebesgue, tel que:*

(1) *Pour  $\alpha \in \mathcal{G}$ , l'ensemble des  $\Gamma_{u, \ell}(\alpha) \in C \times [0, 1]$  possédant une orbite dense est une courbe de Sierpiński.*

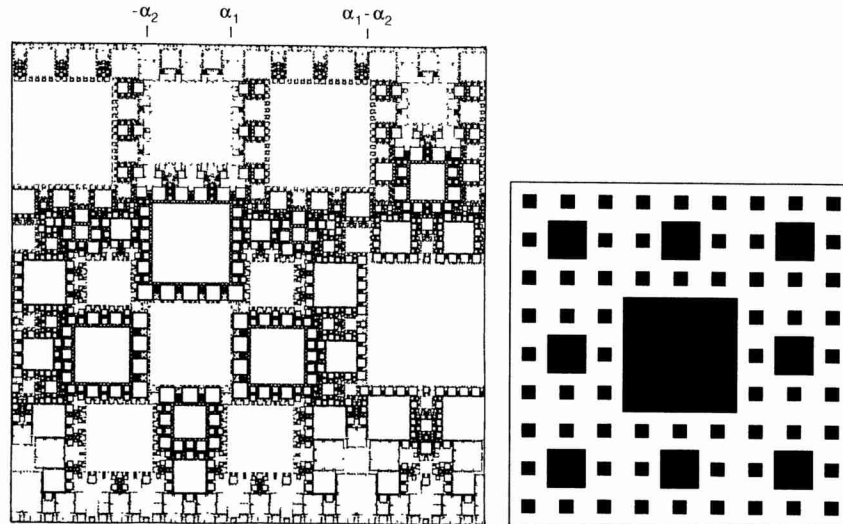


Fig. 3a. Figure réalisée sur ordinateur par P. Arnoux.  $\alpha_1 = 0,456311$ ;  $\alpha_2 = 0,704402$ . On a représenté  $C \times [0, 1]$  par  $[0, 1]^2$ . b Tapis de Sierpiński [Si2]

(2) *A homéomorphisme près, l'ensemble des  $\Gamma \in \mathcal{P}(2, \alpha)$  minimaux non équivalents à un groupe est indépendant de  $\alpha$  dans  $\mathcal{G}$ .*

Rappelons que, pour  $1, \alpha_1, \alpha_2$  rationnellement indépendants, un  $\Gamma \in \mathcal{P}(2, \alpha)$  minimal est dans  $\mathcal{P}^1(2, \alpha)$  si et seulement si il n'est pas équivalent à un groupe.

*Question.* Le compact  $S(\alpha) \subset [0, 1]^2$  est-il de mesure nulle pour presque tout  $\alpha \in T^2$ ? Si oui, quelle est sa dimension de Hausdorff?

Nous montrerons seulement (théorème V.11) que  $S(\alpha)$  est de dimension de Hausdorff 1 (donc de mesure 0) pour  $\alpha$  dans un  $G_\delta$  dense. Les  $S(\alpha)$  semblent avoir des propriétés d'autosimilarité qu'il conviendrait de regarder plus précisément.

Revenant au cas général, disons qu'un  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  est *totalelement irrationnel* si  $1, \alpha_1, \dots, \alpha_k$  sont rationnellement indépendants.

Le théorème 6 ci-dessous a été inspiré par le résultat suivant de Rips:

**Théorème.** *Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  minimal totalelement irrationnel, donné par un échange d'intervalles  $\varphi$ . Si  $\Gamma'$  est obtenu en ajoutant à  $\Gamma$  un nouveau générateur  $\gamma_{k+1}$ , alors ou bien  $\Gamma'$  a les mêmes orbites que  $\Gamma$  ou bien  $\Gamma'$  est équivalent à un groupe.*

Remarquons que l'hypothèse «totalelement irrationnel» est nécessaire: il suffit de considérer  $\varphi = \psi^n$ , où  $\psi$  est un échange d'intervalles minimal et  $n \geq 2$ .

Pour généraliser ce théorème, nous considérons les pseudogroupes de manière intrinsèque, sans référence à un système de générateurs:  $\Gamma = \Gamma'$  s'ils ont les mêmes orbites,  $\Gamma \subset \Gamma'$  si toute orbite de  $\Gamma$  est contenue dans une orbite de  $\Gamma'$ .

Etant donné  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ , soit  $\mathcal{C}(\Gamma)$  l'ensemble des pseudogroupes de rotations qui contiennent strictement  $\Gamma$  et ne sont pas équivalents à un groupe; nous n'imposons pas à  $\Gamma'$  d'être de type fini, i.e. d'appartenir à un  $\mathcal{P}(k)$ . Notons que  $\mathcal{C}(\Gamma) = \emptyset$  si  $\Gamma$  est minimal et équivalent à un groupe [Le3, lemme III.5]. La conclusion du théorème de Rips est de même  $\mathcal{C}(\Gamma) = \emptyset$ .

**Théorème 6** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  minimal.

- (1) Si  $\Gamma$  est totalement irrationnel, alors  $\mathcal{C}(\Gamma) = \emptyset$ .
- (2) L'ensemble  $\mathcal{C}(\Gamma)$  est toujours fini; on peut borner son cardinal en fonction uniquement de  $k$ .

Nous verrons qu'en fait les  $\Gamma' \in \mathcal{C}(\Gamma)$  appartiennent à une famille finie  $\{\Gamma_Q\}$ , construite explicitement en ajoutant à  $\Gamma$  des générateurs qui envoient un élément de  $\{a_1, \dots, a_k, a_1 + \alpha_1, \dots, a_k + \alpha_k\}$  sur un autre. En particulier:

**Corollaire 3** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  minimal. Soit  $\Gamma'$  obtenu en ajoutant à  $\Gamma$  un générateur  $\gamma_{k+1}$  dont l'angle  $\alpha_{k+1}$  n'appartient pas au sous-groupe de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  engendré par les  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) et les  $a_j - a_1$  ( $2 \leq j \leq k$ ). Alors  $\Gamma'$  est équivalent à un groupe.

Il y a bien sûr un résultat analogue en remplaçant les  $a_j - a_1$  par les  $b_j - b_1$ .

On peut également montrer:

**Corollaire.** Soit  $\varphi$  un échange d'intervalles minimal sur  $[0, 1]$ . Si on ajoute à  $\varphi$  un générateur  $\gamma: I \rightarrow J$  dont le déplacement n'appartient pas au sous-groupe de  $\mathbb{R}$  engendré par les longueurs des intervalles de  $\varphi$ , alors le pseudogroupe obtenu est équivalent à un groupe (en un sens à préciser).

Revenons pour finir à  $e(\Gamma)$ , que nous avons défini comme la « mesure du quotient  $C/\Gamma$  ». Mais on a aussi  $e(\Gamma) = \int_C \frac{1}{n(x)} d\mu(x)$ , où  $n(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est le cardinal de l'orbite de  $x$ . On peut donc voir  $e(\Gamma)$  comme l'inverse du cardinal moyen des orbites de  $\Gamma$ .

Nous allons nous intéresser à la valeur moyenne de  $e(\Gamma)$  dans  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  muni de sa mesure de Lebesgue  $d\Gamma$  de masse 1 (dans les coordonnées locales introduites avant l'énoncé du théorème 2, cette mesure est simplement  $dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_k$ ). Posons donc  $e_s(k, \alpha) = \int_{\mathcal{P}(k, \alpha)} e_s(\Gamma) d\Gamma$ ; nous utilisons  $e_s$  au

lieu de  $e$ , de manière à obtenir une fonction continue (rappelons que  $e_s = e$  dans presque tout  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ ). Nous montrerons en particulier:

**Théorème 7** Pour tout  $k \geq 1$  et tout  $\alpha \in T^k$ , on a  $\frac{1}{4^k} \leq e_s(k, \alpha) \leq \frac{1}{2^k}$ .

Nous pouvons ainsi dire que le cardinal moyen des orbites croît exponentiellement avec  $k$ .

*Remarque.* La valeur  $\frac{1}{2^k}$  est atteinte lorsque  $\alpha = (0, \dots, 0)$ . La minoration par  $\frac{1}{4^k}$  n'est pas optimale, mais elle n'est pas trop éloignée de la valeur

$$e_s\left(k, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) = \frac{k+1}{4^k}.$$

## Table des matières

I Préliminaires.	643
II La fonction $e$ ; le théorème 2 et ses conséquences.	646

La dynamique des pseudogroupes de rotations	643
III Le cas $k=2$ ; démonstration du théorème 1.	650
IV La fonction $e_s$ ; démonstration des théorèmes 3 et 4.	653
V Le cas $k=2$ (suite); démonstration du théorème 5.	655
VI Les minimaux sont-ils maximaux? démonstration du théorème 6 et du corollaire 3.	662
VII Cardinal moyen des orbites; démonstration du théorème 7.	664
VIII Croissance, mesures invariantes, unique ergodicité.	666

## I Préliminaires

### 1.1 Les espaces $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k, \alpha)$

Soit  $\mathcal{P}(k)$  l'espace des pseudogroupes  $\Gamma$  définis par  $k$  générateurs  $\gamma_i: I_i \rightarrow J_i$ , avec  $I_i = ]a_i, b_i[$  et  $J_i = I_i + \alpha_i$ . Pour que ce soit une variété (sans bord), nous imposons aux longueurs  $\ell_i$  des  $I_i$  d'être dans  $]0, 1[$ .

Nous identifions alors  $\mathcal{P}(k)$  à  $T^{2k} \times ]0, 1[^k$ , en repérant  $\Gamma$  par les  $\alpha_i$ , les milieux  $u_i$  des  $I_i$ , et les  $\ell_i$ . Lorsque  $k=2$ , nous compactifierons parfois  $\mathcal{P}(k)$  en  $T^4 \times [0, 1]^2$ .

A  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  est associé  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in T^k$ . On a ainsi une fibration (triviale) de  $\mathcal{P}(k)$  sur  $T^k$ , dont les fibres seront notées  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ . La dynamique de  $\Gamma$  dépend fortement de  $\alpha$ , et nous travaillerons très souvent à l'intérieur d'un  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  fixé.

Le rang  $r(\Gamma)$  sera le rang du groupe des périodes  $\tilde{P} \subset \mathbb{R}$  (engendré par 1 et les  $\alpha_i$ ). Nous dirons que  $\alpha \in T^k$ , ou  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$ , est *rationnel* si chaque  $\alpha_i$  est rationnel (i.e. si  $r(\Gamma)=1$ ), *totalelement irrationnel* si 1,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  sont rationnellement indépendants (i.e. si  $r(\Gamma)=k+1$ ).

Les orbites d'un  $\Gamma$  rationnel sont toutes finies. Les  $\alpha \in T^k$  totalement irrationnels forment un  $G_\delta$  dense dont le complémentaire est de mesure nulle. Attention, être ou non totalement irrationnel n'est pas une propriété intrinsèque de  $\Gamma$ .

Etant donné  $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{P}(k, \alpha)$ , posons  $\Gamma \leq \Gamma'$  si  $I_i \subset I'_i$  pour tout  $i$ . C'est un *ordre partiel* sur chaque  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ .

Appelons d'autre part  $\varphi_t \Gamma$  le pseudogroupe défini, pour  $-\min \ell_i < t < 1 - \max \ell_i$ , par  $I'_i = ]a_i, b_i + t[$  et  $J'_i = I'_i + \alpha_i$ . On obtient ainsi sur  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  un *flot* partiellement défini, et croissant pour l'ordre ci-dessus.

Le flot  $\varphi_t$  commute avec l'action  $\Gamma \rightarrow R_\theta \Gamma$  de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  sur  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  consistant à tourner de  $\theta$  tous les  $I_i$  et  $J_i$ . Cette action respecte la dynamique des pseudogroupes, elle permet de diminuer de 1 la dimension de l'espace des paramètres (voir V).

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble des  $\Gamma' \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  tels qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  avec  $\varphi_{-\varepsilon} \Gamma' \leq R_\theta \Gamma \leq \varphi_\varepsilon \Gamma'$  contient un voisinage de  $\Gamma$ . Ceci s'interprète en disant que la structure de  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  au voisinage de  $\Gamma$  est en grande partie décrite par le germe en  $\Gamma$  de l'orbite  $\varphi_t \Gamma$ .

Remarquons enfin que, pour  $t \geq 0$ , les orbites de  $\varphi_t \Gamma$  ne dépendent que de celles de  $\Gamma$ : en effet, la relation d'équivalence  $y \in (\varphi_t \Gamma)(x)$  est engendrée par « $x \sim y$  s'il existe  $h \in [0, t]$  tel que  $y - h \in \Gamma(x - h)$ ». Pour  $t < 0$ , seul est intrinsèque le germe en 0 de  $\varphi_t \Gamma$  (voir corollaire VIII.5).

### 1.2 Structure des orbites et interprétation en termes de feuilletages

Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ . Nous noterons  $A$  l'ensemble des points  $a_i, a_i + \alpha_i$ , et  $B$  l'ensemble des points  $b_i, b_i + \alpha_i$ . Une orbite de  $\Gamma$  est *singulière* si elle contient au moins un point de  $A$  ou  $B$ , *régulière* sinon.



Soit  $V$  le complémentaire de l'union des orbites singulières finies, et  $I$  une composante de l'ouvert  $V$ . Si l'orbite d'un  $p \in I$  est finie de cardinal  $q$ , il en est de même pour tout point de  $I$ . L'union de ces orbites sera appelée une *famille d'orbites finies* d'ordre  $q$ . Elle se compose de  $q$  intervalles ouverts, dont la longueur commune est l'*épaisseur* de la famille.

On voit facilement que le nombre de familles d'orbites finies de  $\Gamma$  peut être borné en fonction de  $k$  (la borne précise est  $3k$ ).

Soit maintenant  $I$  une composante de  $V$  ne rencontrant aucune orbite finie. On montre que le saturé  $U$  de  $I$  est une réunion de composantes de  $V$ , et que toute orbite contenue dans  $U$  est *dense* dans  $U$ ; pour cette raison, nous appellerons  $U$  une *composante minimale*.

Ce fait, essentiellement dû à Imanishi [Im], n'est pas trivial. On peut le voir directement, en adaptant le raisonnement donné dans l'appendice de [AL]. On peut aussi travailler purement en termes de feuilletages, et appliquer [Im] ou [AL]. D'une manière générale, nous aurons besoin de traduire en termes de pseudogroupes certains résultats de [Le4]. Donnons donc le dictionnaire.

La construction de somme connexe expliquée dans [AL, §1] permet de représenter  $\Gamma$  comme pseudogroupe d'holonomie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  défini par une 1-forme fermée singulière  $\omega$  sur une variété  $M^n$  de dimension  $n \geq 3$ . Le groupe des périodes de  $\omega$  est le groupe  $\tilde{P}$  engendré par 1 et les  $\alpha_i$ .

La forme  $\omega$  possède des singularités de Morse, au nombre de  $2k$ . Il y a  $k$  singularités d'indice 1 (resp.  $n-1$ ), correspondant aux paires  $\{a_i, a_i + \alpha_i\}$  (resp.  $\{b_i, b_i + \alpha_i\}$ ). La singularité est bloquante [Le4, O.B.iii] si les deux points ne sont pas dans la même orbite de  $\Gamma$ .

Les orbites de  $\Gamma$  correspondent aux feuilles de  $\mathcal{F}$ ; en particulier, feuille compacte = orbite finie, et feuille presque compacte [Le4, O.B.iii] = orbite finie singulière.

Les composantes minimales de  $\Gamma$ , au sens ci-dessus, correspondent aux composantes minimales de  $\mathcal{F}$  au sens de [Le4, O.B.ii]. Ce sont des ouverts connexes de la variété  $M^n$ .

### 1.3 Définition de $e(\Gamma)$

La structure décrite ci-dessus rend évidente l'égalité des 3 nombres suivants:

- la somme des épaisseurs des familles d'orbites finies de  $\Gamma$ ;
- la borne inférieure des  $\mu(W)$ , où  $W$  est un ouvert rencontrant toute orbite et  $\mu$  est la mesure de Lebesgue;

- l'intégrale  $\int_c \frac{1}{n(x)} d\mu(x)$ , où  $n(x) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  est le cardinal de l'orbite de  $x$  et  $\frac{1}{\infty} = 0$ .

Leur valeur commune sera notée  $e(\Gamma)$ . Bien sûr  $0 \leq e(\Gamma) \leq 1$ , avec  $e(\Gamma) = 0$  si et seulement si les orbites finies sont en nombre fini, ou encore si et seulement si il n'y a pas d'orbite régulière finie.

En restriction à un  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  fixé, la fonction  $e$  est clairement décroissante. Elle est de plus continue, car lipschitzienne: si on déplace de  $\delta$  un des points  $a_i$  ou  $b_i$ , on ne peut pas changer  $e(\Gamma)$  de plus de  $2\delta$ .

1.4 Composantes minimales complètes

Nous distinguons maintenant 2 types de composantes minimales. Supposons d'abord que  $C$  est une composante minimale, i.e. que  $\Gamma$  est minimal. Les conditions suivantes sont équivalentes (cf. [Le4, O.B.ii]):

- $\Gamma(x) = x + P$  pour tout  $x \in C$  (rappelons que  $P$  est le sous-groupe de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  engendré par les  $\alpha_i$ );
- il existe un sous-groupe  $G \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  tel que  $\Gamma(x) = x + G$  pour tout  $x \in C$ ;
- $y \in \Gamma(x) \Rightarrow y + t \in \Gamma(x + t)$  pour tout  $t$ .

Si elles sont satisfaites, nous dirons que  $\Gamma$  est engendré par l'action de  $P$ , ou encore que  $\Gamma$  est équivalent à un groupe. On peut montrer que  $\Gamma$  est équivalent à un groupe si et seulement si, pour tout  $i$ , les extrémités gauches  $a_i$  et  $a_i + \alpha_i$  (resp. droites  $b_i$  et  $b_i + \alpha_i$ ) sont dans la même orbite.

Si  $\Gamma$  est minimal mais pas équivalent à un groupe, alors [Le3, lemme III.5] toutes les orbites de  $\varphi_t \Gamma$  sont finies pour  $t < 0$ , tandis que  $\varphi_t \Gamma$  est engendré par l'action de  $P$  pour  $t > 0$ . Etre minimal mais pas équivalent à un groupe est donc très instable.

Au contraire, être équivalent à un groupe est une propriété ouverte dans un  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  fixé (cf. [Le3]). Voici l'esquisse d'une preuve directe. Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  équivalent à un groupe, et  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Pour tout  $x \in C$  il existe un mot  $m(x)$  en les  $\gamma_i^{\pm 1}$  tel que  $m(x)$  soit défini et égal à  $x + \alpha_i$ . Le cercle est l'union des domaines de définition d'un nombre fini de  $m(x)$ , et cette propriété reste vraie si on rétrécit un peu les  $I_i$ .

Disons maintenant qu'une composante minimale  $U$  est équivalente à un groupe, ou encore complète (nous disons faiblement complète dans [Le4] ...), si la propriété suivante est vérifiée: étant donné deux intervalles  $[x, x + t]$  et  $[y, y + t]$  contenus dans  $U$ , on a  $y + t \in \Gamma(x + t)$  si et seulement si  $y \in \Gamma(x)$ .

Voici une autre caractérisation: pour un (resp. tout) intervalle  $[x, x'] \subset U$  avec  $x' \in \Gamma(x)$ , le pseudogroupe minimal induit par  $\Gamma$  sur le cercle  $[x, x']/x = x'$  est équivalent à un groupe.

Si  $x$  est contenu dans une composante minimale non complète, alors pour  $t < 0$  l'orbite de  $x$  pour  $\varphi_t \Gamma$  est finie; pour  $t > 0$ , le point  $x$  appartient à une composante complète de  $\varphi_t \Gamma$ .

1.5 Le groupe  $\pi_1(C/\Gamma)$  et l'entier  $d(\Gamma)$

A un pseudogroupe quelconque  $\Gamma$  est associé un espace classifiant  $B\Gamma$  (Haefliger), et donc un groupe fondamental  $\pi_1(B\Gamma)$ . Si  $\Gamma$  est le pseudogroupe d'holonomie d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  d'une variété  $M$ , on obtient  $\pi_1(B\Gamma)$  en quotientant  $\pi_1 M$  par le sous-groupe distingué  $\mathcal{L} \subset \pi_1 M$  engendré par les classes d'homotopie libre de lacets contenus dans des feuilles et d'holonomie triviale (cf. [Sal2; Le4, O.A.]).

Pour un pseudogroupe de rotations sur  $C$ , nous noterons  $\pi_1(C/\Gamma) = \pi_1(B\Gamma)$ . C'est un invariant intrinsèque, ne dépendant que des orbites de  $\Gamma$ . Si  $\Gamma$  est donné par des générateurs  $\gamma_i (1 \leq i \leq k)$ , la formule  $\pi_1(B\Gamma) = \pi_1 M / \mathcal{L}$  conduit à la présentation suivante par générateurs et relations.

Sur le revêtement universel  $\tilde{C} = \mathbb{R}$ , on relève chaque  $\gamma_i$  en une translation  $\tilde{\gamma}_i: \tilde{I}_i \rightarrow \tilde{J}_i$ , avec longueur  $(\tilde{I}_i) = \text{longueur}(\tilde{J}_i) = \text{longueur}(I_i)$ . Soit d'autre part  $\tilde{\gamma}_0$  la translation  $x \mapsto x + 1$ , définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

Comme générateurs de  $\pi_1(C/\Gamma)$ , on prend  $k+1$  lettres  $t_0, t_1, \dots, t_k$ . Les relations sont les mots  $t_{i_1}^{\pm 1} \dots t_{i_p}^{\pm 1}$  tels qu'il existe  $x \in \mathbb{R}$  avec  $\tilde{\gamma}_{i_1}^{\pm 1} \dots \tilde{\gamma}_{i_p}^{\pm 1}(x)$  défini et égal à  $x$ .

On notera  $\rho: \pi_1(C/\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  l'homomorphisme obtenu en envoyant  $t_0$  sur 1 et  $t_i$  sur l'amplitude  $\tilde{\alpha}_i$  de  $\tilde{\gamma}_i$ . Son image est le groupe des périodes  $\tilde{P}$ .

Traduisons maintenant en termes de  $\pi_1(C/\Gamma)$  certains résultats de [Le4]. D'après le théorème 1 de [Le4],  $\pi_1(C/\Gamma)$  est un produit libre de groupes abéliens libres  $\prod_{j=0}^d \mathbb{Z}^{n_j}$ ; les facteurs de rang  $n_j \geq 2$  correspondent bijectivement aux composantes minimales complètes de  $\Gamma$ . On a bien sûr

$$r(\Gamma) \leq \sum_{j=0}^d n_j \leq k+1.$$

On définit  $d = d(\Gamma) \in \{0, 1, \dots, k\}$  comme le nombre de facteurs du produit libre, diminué de 1.

Voici une autre définition [Le4, théorème I.7]. Soit  $T$  le 1-complexe dont les sommets sont les orbites contenant au moins un point  $b_i$  ou  $b_i + \alpha_i$ , et dont les arêtes, au nombre de  $k$ , relient l'orbite de  $b_i$  à celle de  $b_i + \alpha_i$  (qui peut être la même). Alors  $d = s - \mathcal{B}_0 = k - \mathcal{B}_1$ , où  $s$  est le nombre de sommets et les  $\mathcal{B}$  sont les nombres de Betti de  $T$ . Le corollaire VIII.4 donnera une définition similaire, mais intrinsèque.

En particulier,  $d$  est inférieur ou égal au nombre de  $i$  pour lesquels  $\Gamma(b_i + \alpha_i) \neq \Gamma(b_i)$ , avec égalité si les  $\Gamma(b_i) \cup \Gamma(b_i + \alpha_i)$  sont tous disjoints. On peut bien sûr remplacer les  $b_i$  par les  $a_i$  dans tout ce qui précède.

Si  $d = k$ , alors  $\pi_1(C/\Gamma)$  est libre et  $\Gamma$  n'a pas de composante minimale complète. En particulier (cf. I.4), les orbites de  $\varphi_t \Gamma$  sont finies pour tout  $t < 0$ .

Si  $\Gamma$  est minimal et équivalent à un groupe, alors  $d = 0$  car  $\rho$  est un isomorphisme entre  $\pi_1(C/\Gamma)$  et  $\tilde{P}$  [Le4, proposition I.2]. Si  $\Gamma$  est minimal mais pas équivalent à un groupe, alors  $d \geq 1$ ; en fait,  $\pi_1(C/\Gamma)$  est libre de rang  $d+1$ , avec  $1 \leq r-1 \leq d \leq k$ . En particulier, un  $\Gamma$  minimal totalement irrationnel vérifie  $d = 0$  ou  $d = k$  selon qu'il est ou non équivalent à un groupe.

En restriction à un  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  fixé, la fonction  $d$  est clairement décroissante. Elle est également semi-continue supérieurement [Le4, proposition I.4]. En particulier, la fonction  $d_\Gamma: t \mapsto d(\varphi_t \Gamma)$  est décroissante et continue à gauche.

Pour  $1 \leq m \leq k$ , définissons  $S_m = S_m(k, \alpha) \subset \mathcal{P}(k, \alpha)$  par:  $\Gamma \in S_m \Leftrightarrow \liminf d(\Gamma') < m \leq d(\Gamma)$ , la  $\liminf$  étant prise pour  $\Gamma'$  tendant vers  $\Gamma$  dans  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ . Etant donné  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$ , on a:  $\Gamma \in \bigcup_m S_m \Leftrightarrow d$  n'est constant sur aucun voisinage de  $\Gamma$

dans  $\mathcal{P}(k, \alpha) \Leftrightarrow d_\Gamma$  n'est pas continu en 0 (cf. l'avant dernier paragraphe de I.1).

Puisque  $d$  est décroissant, chaque  $S_m$  est une hypersurface lipschitzienne, rencontrant les orbites de  $\varphi_t$  en au plus un point. On sait que, si  $\Gamma$  n'appartient à aucune  $S_m$ , alors toute composante minimale de  $\Gamma$  est complète [Le4, proposition I.5].

## II La fonction $e$ ; le théorème 2 et ses conséquences

Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ . Rappelons que  $A$  désigne l'ensemble des points  $a_i, a_i + \alpha_i$ , et  $B$  celui des points  $b_i, b_i + \alpha_i$ .

**Lemme II.1** *Si aucune orbite de  $\Gamma$  ne contient à la fois un point de  $A$  et un point de  $B$ , et si toute composante minimale de  $\Gamma$  est complète, alors  $e(\varphi_t \Gamma) = e(\Gamma) - td(\Gamma)$  pour  $t > 0$  assez petit.*

*Démonstration.* Rappelons (I.5) que  $d(\Gamma)$  se calcule à partir du 1-complexe  $T$ , comme nombre de sommets diminué du nombre de composantes. Prenons  $t > 0$  assez petit pour que les intervalles  $]b, b+t]$ ,  $b \in B$ , ne rencontrent aucune orbite singulière finie.

La première hypothèse du lemme a la conséquence suivante: si  $b \in B$ , avec  $\Gamma(b)$  fini, alors pour  $0 \leq \delta \leq t$  on a  $\Gamma(b+\delta) = \Gamma(b) + \delta$  (i.e.  $\Gamma(b+\delta)$  est  $\Gamma(b)$  tourné de  $\delta$ ). A chaque  $b \in B$  avec  $\Gamma(b)$  fini on peut ainsi associer la famille  $f_b$  d'orbites finies qui contient  $]b, b+t]$ , et on a  $f_b = f_{b'} \Leftrightarrow \Gamma(b) = \Gamma(b')$ .

Soit maintenant  $b \in B$  avec  $\Gamma(b)$  infini. Dans ce cas  $]b, b+t]$  est contenu dans une composante minimale  $U(b)$ . Si  $\Gamma(b)$  et  $\Gamma(b')$  sont des sommets de la même composante de  $T$ , on a  $b' - \varepsilon \in \Gamma(b - \varepsilon)$  pour  $\varepsilon > 0$  assez petit. On en déduit  $U(b) = U(b')$ , et en fait  $\Gamma(b) = \Gamma(b')$  car par hypothèse  $U(b)$  est complète (I.4). En d'autres termes, au plus un sommet de chaque composante de  $T$  représente une orbite infinie.

Il est maintenant clair que, quand on passe de  $\Gamma$  à  $\varphi_t \Gamma$ , la diminution de  $e$  est exactement  $td(\Gamma)$ .  $\square$

Notons  $d_T(t) = d(\varphi_t \Gamma)$ , et  $e_T(t) = e(\varphi_t \Gamma)$ . Rappelons (I.5) que  $d_T$  est décroissante et continue à gauche.

**Corollaire II.2** *Pour tout  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ , la fonction  $e_T$  est linéaire par morceaux, de dérivée à gauche  $-d_T$ . Elle est donc convexe.*

*Démonstration.* L'ensemble des  $t$  tels que  $\varphi_t \Gamma$  ne vérifie pas les hypothèses du lemme II.1 est au plus dénombrable. En effet la première condition est automatiquement vérifiée en dehors d'un nombre fini de classes modulo  $\tilde{P}$ ; la deuxième l'est pourvu que  $\varphi_t \Gamma$  n'appartienne à aucune  $S_m$  (I.5).

Dans chaque intervalle où  $d_T$  est constante, la fonction continue  $e_T + td_T$  ne prend ainsi qu'un ensemble dénombrable de valeurs. Elle est donc constante.  $\square$

**Corollaire II.3** *Si  $\Gamma$  est comme dans le lemme II.1, alors  $\Gamma$  n'appartient à aucune  $S_m$ .*

*Démonstration.* En effet, la fonction  $d_T$  est continue à droite en 0.  $\square$

*Remarque.* Il existe des  $\Gamma \in \mathcal{P}(2)$  vérifiant la première hypothèse du lemme II.1 mais appartenant à  $S_1 \cap S_2$  (voir III).

*Démonstration du théorème 2* Nous montrons maintenant la formule  $e(\Gamma_{x,y})$

$$= e(\Gamma) - \sum_{h=1}^d x_{\sigma(h)} - \sum_{h=1}^d y_{\tau(h)}$$

du théorème 2, où  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  n'est dans aucune  $S_m$ ,

et  $\Gamma_{x,y}$  est déterminé par les intervalles  $I_i(x,y) = ]a_i - y_i, b_i + x_i[$  et  $J_i(x,y) = I_i(x,y) + \alpha_i$ , avec les  $x_i, y_i$  proches de 0. Le corollaire II.2 nous permet de supposer de plus que les  $x_i, y_i$  sont strictement positifs.

La remarque essentielle est la suivante. Soit  $1 \leq i \leq k$  et  $\delta > 0$ , tels que  $]b_i, b_i + \delta[$  et  $]b_i + \alpha_i, b_i + \delta + \alpha_i[$  ne rencontrent aucune orbite finie singulière de  $\Gamma$ . Soit  $\Gamma'$  obtenu à partir de  $\Gamma$  en remplaçant  $]a_i, b_i[$  par  $]a_i, b_i + \delta[$  (et  $]a_i + \alpha_i, b_i + \alpha_i[$  par  $]a_i + \alpha_i, b_i + \delta + \alpha_i[$ ). Alors  $e(\Gamma') = e(\Gamma)$  si  $]b_i, b_i + \delta[$  et  $]b_i + \alpha_i, b_i + \delta + \alpha_i[$

$+\alpha_i[$  sont tous deux contenus dans des composantes minimales de  $\Gamma$ , ou s'ils sont contenus dans la même famille d'orbites finies, et  $e(\Gamma')=e(\Gamma)-\delta$  sinon. Il y a bien sûr un résultat analogue quand on remplace  $]a_i, b_i[$  par  $]a_i-\delta, b_i[$ .

Soit maintenant  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que :

- les intervalles  $]a_i-\varepsilon, a_i[$ ,  $]b_i, b_i+\varepsilon[$ ,  $]a_i-\varepsilon+\alpha_i, a_i+\varepsilon[$ ,  $]b_i+\alpha_i, b_i+\varepsilon+\alpha_i[$  ne rencontrent aucune orbite finie singulière de  $\Gamma$ ;
- $2\varepsilon$  est inférieur à la plus petite des épaisseurs des familles d'orbites finies de  $\Gamma$ .

Nous supposons que les  $x_i$  sont dans  $]0, \varepsilon[$  et tous distincts, et nous fixons un ordre, par exemple  $0 < x_k < x_{k-1} < \dots < x_3 < x_1 < x_2 < \varepsilon$ . De même, nous fixons un ordre sur les  $y_i$ , par exemple  $0 < y_2 < y_1 < y_4 < \dots < y_k < y_3 < \varepsilon$ .

Nous allons montrer que  $e(\Gamma)-e(\Gamma_{x,y})$  est une somme  $x_{i_1}+x_{i_2}+\dots+x_{i_p}+y_{j_1}+\dots+y_{j_q}$ , où les  $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$  ne dépendent que des deux ordres fixés. Le corollaire II.2 garantira  $p=d(\Gamma)$  (et de même  $q=d(\Gamma)$  par symétrie), et le théorème 2 sera démontré.

Nous passons de  $\Gamma$  à  $\Gamma_{x,y}$  en  $2k$  étapes: nous travaillons d'abord sur les  $x_i$ , par ordre de valeur décroissante, puis sur les  $y_i$ , également par ordre décroissant. Dans l'exemple ci-dessus, nous remplaçons d'abord  $]a_2, b_2[$  par  $]a_2-x_2, b_2[$  et  $]a_2+\alpha_2, b_2+\alpha_2[$  par  $]a_2-x_2+\alpha_2, b_2+\alpha_2[$ ; nous agrandissons ensuite  $I_1, I_3, \dots, I_k$  vers la gauche, puis  $I_3, I_k, \dots, I_4, I_1, I_2$  vers la droite (en modifiant simultanément les  $J_i$ ).

Le choix de  $\varepsilon$  et de l'ordre des étapes garantit qu'on se trouve à chaque étape dans la situation de la remarque ci-dessus; de plus le fait que  $e$  change ou non à une certaine étape ne dépend pas de la valeur des  $x_i$  et  $y_i$ , mais seulement des ordres fixés. On en déduit le résultat cherché.  $\square$

*Complément II.4* Soit comme ci-dessus  $\Gamma \in \mathcal{P}(2)$  n'appartenant à aucune  $S_m$ . Supposons que  $y_1$  et  $y_2$  soient nuls. D'après ce qui précède,  $e(\Gamma)-e(\Gamma_{x,y})$  est, pour  $|x_1|, |x_2|$  assez petits, de l'une des formes suivantes:  $0$ ,  $x_1+x_2$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\max(x_1, x_2)$ ,  $\min(x_1, x_2)$ . Montrons que  $\min(x_1, x_2)$  n'est pas possible. Si tel était le cas, les orbites  $\Gamma(b_1+\delta)$  et  $\Gamma(b_1+\alpha_1+\delta)$  seraient pour  $\delta > 0$  assez petit soit toutes deux infinies soit finies et égales, et de même pour  $\Gamma(b_2+\delta)$  et  $\Gamma(b_2+\alpha_2+\delta)$ . Mais alors  $e(\Gamma)-e(\Gamma_{x,y})$  serait nul pour  $x_1=x_2$  positif assez petit.

Etudions maintenant quelques conséquences du théorème 2, dont les corollaires 1 et 2.

*Démonstration du corollaire 1* Soit  $\Gamma_0 \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  appartenant à une hypersurface  $S_m$  ( $1 \leq m \leq k$ ) et à une seule. Nous voulons montrer que  $S_m \subset \mathcal{P}(k, \alpha)$  est linéaire par morceaux au voisinage de  $\Gamma_0$ . Soit  $\varepsilon > 0$  assez petit pour que  $d(\varphi_{-2\varepsilon}\Gamma_0)=m$  et  $d(\varphi_{2\varepsilon}\Gamma_0)=m-1$ .

D'après le corollaire II.2, un  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  voisin de  $\Gamma_0$  est dans  $S_m$  si et seulement si  $e(\varphi_{-\varepsilon}\Gamma)=e(\Gamma)+m\varepsilon$  et  $e(\varphi_{\varepsilon}\Gamma)=e(\Gamma)-(m-1)\varepsilon$ . L'hypersurface  $S_m$  est donc définie au voisinage de  $\Gamma_0$  par l'équation linéaire par morceaux  $e(\varphi_{-\varepsilon}\Gamma)-e(\varphi_{-\varepsilon}\Gamma_0)=e(\varphi_{\varepsilon}\Gamma)-e(\varphi_{\varepsilon}\Gamma_0)$ .  $\square$

*Remarque.* La même méthode permet d'étudier l'ensemble des  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  appartenant à un nombre fixé de  $S_m$ .

Rappelons que  $\ell(\Gamma)$  désigne la somme des longueurs  $\ell_i$  des  $I_i$ .

**Corollaire II.5** *Pour tout  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  on a  $e(\Gamma)+\ell(\Gamma) \geq 1$ , avec égalité si et seulement si  $d(\Gamma)=k$ .*

*Démonstration.* Soit  $\Gamma_t$  ( $0 < t \leq 1$ ) un chemin croissant dans  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ , avec  $\Gamma_1 = \Gamma$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \ell(\Gamma_t) = 0$  (donc  $\lim_{t \rightarrow 0} e(\Gamma_t) = 1$ ). Le long de ce chemin, la fonction  $e + \ell$  est croissante, et constante tant qu'on reste dans  $d^{-1}(k)$ . Enfin, si  $d(\Gamma) \leq k - 1$ , on a pour  $t > 0$  petit:  $e(\Gamma) + \ell(\Gamma) = e(\varphi_{-t}\Gamma) + \ell(\varphi_{-t}\Gamma) + (k - d(\Gamma))t > 1$ .  $\square$

**Corollaire II.6** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ . On a  $\ell(\Gamma) \leq 1 - \frac{1}{|P|}$  si  $\Gamma \in S_k$ , et  $\ell(\Gamma) \geq 1 - \frac{1}{|P|}$  si  $\Gamma \in S_1$ .

*Démonstration.* On a  $e(\Gamma) \geq \frac{1}{|P|}$ , avec égalité si  $\Gamma \in S_1$ .  $\square$

Rappelons que  $\frac{1}{|P|}$  vaut 0 dès qu'un des  $\alpha_i$  est irrationnel.

*Démonstration du corollaire 2* Soit  $\Gamma \in S_k$  tel que l'orbite  $\varphi_t \Gamma$  rencontre  $S_1$ . Pour  $1 \leq j \leq k$ , définissons  $t_j$  par  $\varphi_{t_j} \Gamma \in S_j$ , puis posons  $e_j = e(\varphi_{t_j} \Gamma)$  et  $\ell_j = \ell(\varphi_{t_j} \Gamma)$ . On obtient l'égalité cherchée  $\sum_{j=1}^k \ell_j = k \left(1 - \frac{1}{|P|}\right)$  en combinant les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \ell_j - \ell_{j+1} &= k(t_j - t_{j+1}) & 1 \leq j \leq k-1 \\ e_j - e_{j+1} &= -j(t_j - t_{j+1}) & 1 \leq j \leq k-1 \\ e_1 &= \frac{1}{|P|} \\ e_k &= 1 - \ell_k. \quad \square \end{aligned}$$

*Remarque.* Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  totalement irrationnel, avec  $k \geq 2$ . Si  $d(\Gamma) > 0$ , on peut montrer que l'orbite  $\varphi_t \Gamma$  rencontre forcément  $S_1$ .

**Corollaire II.7** Si  $\ell(\Gamma) < 1$ , alors  $\Gamma$  a une infinité d'orbites finies. En particulier, on a  $\ell(\Gamma) \geq 1$  si  $\Gamma$  est minimal.

*Démonstration.* En effet  $e(\Gamma) \geq 1 - \ell(\Gamma) > 0$ .  $\square$

*Remarque.* L'inégalité  $e(\Gamma) + \ell(\Gamma) \geq 1$ , et donc ce corollaire, sont vrais dans des situations beaucoup plus générales.

**Corollaire II.8** Si  $\Gamma$  est minimal et équivalent à un groupe, alors  $\ell(\Gamma) > 1$ .

*Démonstration.* On a en effet  $e(\Gamma) = 0$ , et  $d(\Gamma) = 0 < k$ . Il suffit alors d'appliquer le corollaire II.5.  $\square$

**Corollaire II.9** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ , totalement irrationnel. Si  $\ell(\Gamma) \geq 1$ , alors  $\Gamma$  possède des orbites infinies. Si  $\Gamma$  est minimal, alors  $\Gamma$  est équivalent à un groupe si et seulement si  $\ell(\Gamma) > 1$ .

*Démonstration.* Si toutes les orbites de  $\Gamma$  sont finies, alors  $\pi_1(C/\Gamma)$  est libre (I.5) et admet comme quotient  $\tilde{P} \simeq \mathbb{Z}^{k+1}$ . On a donc  $d(\Gamma) = k$ , d'où  $e(\Gamma) = 1 - \ell(\Gamma) \leq 0$ , contradiction.

Enfin, si  $\Gamma$  est minimal mais pas équivalent à un groupe, on a  $d(\Gamma)=k$  (cf. I.5), d'où  $\ell(\Gamma)=1-e(\Gamma)=1$ .  $\square$

*Remarque.* On peut rapprocher la première assertion de ce corollaire du fait qu'un échange d'intervalles irréductible et irrationnel est minimal [Ke].

### III Le cas $k=2$ ; démonstration du théorème 1

Fixons des points  $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ , et des angles  $\alpha_1, \alpha_2$  avec  $1, \alpha_1, \alpha_2$  rationnellement indépendants. Pour  $0 \leq \ell_1, \ell_2 \leq 1$ , soit  $\Gamma(\ell_1, \ell_2)$  le pseudogroupe déterminé par:

$$\begin{aligned} I_1 &= ]a_1, a_1 + \ell_1[ & J_1 &= I_1 + \alpha_1 \\ I_2 &= ]a_2, a_2 + \ell_2[ & J_2 &= I_2 + \alpha_2. \end{aligned}$$

Nous identifions  $(\ell_1, \ell_2)$  et  $\Gamma(\ell_1, \ell_2)$ . En particulier, nous écrirons  $d(\ell_1, \ell_2)$  pour  $d(\Gamma(\ell_1, \ell_2))$ , et de même pour  $e$ . Nous admettons le cas dégénéré où  $\ell_1$  et/ou  $\ell_2$  est nul, en convenant simplement qu'alors  $d(\ell_1, \ell_2)=2$ .

On déduit du corollaire II.2 (ou du corollaire 2) que  $d$  change le long de deux courbes  $S_1$  et  $S_2$  (voir Fig. 2) symétriques par rapport à la diagonale  $\Delta = \{(\ell_1, \ell_2); \ell_1 + \ell_2 = 1\}$ ; nous convenons que  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$  sont dans  $S_1 \cap S_2$ . Notons l'égalité  $e^{-1}(0) = S_1 \cup d^{-1}(0)$ . La région  $d^{-1}(0)$  contient (en fait est égale à) l'ensemble des  $\Gamma(\ell_1, \ell_2)$  équivalents à un groupe.

Le théorème 2 et le complément II.4 déterminent la forme de  $S_1 - \Delta$ , comme dans la démonstration du corollaire 1. On trouve que  $S_1 - \Delta$  se compose de segments horizontaux ou verticaux, raccordés par des coins supérieurs droits  $\lrcorner$ , d'où un dessin comme sur la Fig. 1.

Rappelons (I.5) que, si  $\Gamma(\ell_1, \ell_2)$  est minimal, alors ou bien  $d(\Gamma)=0$ , ou bien  $d(\Gamma)=2$  et donc  $\ell_1 + \ell_2 = 1$  (corollaire II.5). En particulier, un  $\Gamma \in S_1 - \Delta$  ne peut pas être minimal. On en déduit que  $S_1$  (et donc aussi  $S_2$ ) ne rencontrent le bord de  $[0, 1]^2$  qu'en  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$ .

Considérons maintenant dans  $\Delta$  le compact

$$K = S_1 \cap S_2 = \Delta \cap S_1 = \Delta \cap S_2 = \Delta \cap d^{-1}(2) = \Delta \cap e^{-1}(0),$$

formé des  $\Gamma \in \Delta$  n'ayant qu'un nombre fini d'orbites finies. Il n'est pas vide: il contient  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$ , ainsi que les  $\Gamma \in \Delta$  tels que  $I_1 \cap I_2$  ou  $I_1 \cap J_2$  ou  $I_2 \cap J_1$  ou  $I_2 \cap J_2$  soit vide (si par exemple  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ , toute orbite ne contenant ni  $a_1$  ni  $a_2$  est infinie).

Nous savons déjà que  $(0, 1)$  et  $(1, 0)$  ne sont pas des points isolés de  $K$ . En fait:

**Lemma III.1** *Le compact  $K \subset \Delta$  n'a aucun point isolé (i.e. un  $\Gamma \in K$  ne peut pas être coin commun de 2 carrés contigus). Si  $\Gamma \in K$  est minimal, il n'est isolé d'aucun côté dans  $K$ .*

Notons tout de suite le:

**Corollaire III.2** *Le pseudogroupe  $\Gamma(\ell, 1-\ell)$  est minimal pour une infinité non dénombrable de valeurs de  $\ell$ .*

*Démonstration du corollaire III.2* Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  tel que  $e(\Gamma)=0$ . Si aucune orbite ne rencontre à la fois  $A$  et  $B$ , alors  $\Gamma$  est minimal. En effet, toute orbite finie

isolée  $\theta$  doit rencontrer à la fois  $A$  et  $B$ : si par exemple  $\theta$  ne rencontre pas  $A$ , alors  $\theta + t$  est une orbite finie pour  $t > 0$  assez petit.

Pour la famille  $\Gamma(\ell, 1 - \ell)$ , l'ensemble des  $\ell$  tels qu'une orbite rencontre à la fois  $A$  et  $B$  est au plus dénombrable: en effet  $\ell$  doit être congru à 0 ou  $a_2 - a_1$  modulo  $\tilde{P}$ . On en déduit le corollaire III.2, puisque  $K$  n'est pas dénombrable.  $\square$

*Remarque III.3* Un  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  fournit une action libre d'un groupe  $G(\Gamma)$  sur un  $\mathbb{R}$ -arbre (voir [Le5]). Cette action est à orbites denses si  $\Gamma$  est minimal. D'après [Le5], on obtient une présentation de  $G(\Gamma)$  à partir de celle de  $\pi_1(C/\Gamma)$  donnée en I.5 en étendant le domaine de définition de chaque  $\tilde{\gamma}_i$  à l'adhérence de  $\tilde{I}_i$ ; ceci peut rajouter des relations, provenant d'orbites de  $\Gamma$  rencontrant à la fois  $A$  et  $B$  (comparer [Le4, p. 720]). Pour les  $\Gamma(\ell, 1 - \ell)$  minimaux que nous venons de construire,  $G(\Gamma)$  est isomorphe à  $\pi_1(C/\Gamma)$ , i.e. libre de rang 3. Dans le cas général, on conjecture que  $G(\Gamma)$  est un produit libre de groupes abéliens libres et de groupes de surfaces.

*Démonstration du lemme III.1* Puisque  $S_1 - \Delta$  ne contient aucun pseudogroupe minimal, nous savons déjà qu'un  $\Gamma \in K$  minimal n'est pas un coin de carré: il n'est donc isolé d'aucun côté dans  $K$ .

**Lemme III.4** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(2)$  n'ayant qu'un nombre fini d'orbites finies. Alors  $\Gamma$  a une seule composante minimale, et au plus une orbite finie.

Admettant provisoirement ce fait, achevons de montrer le lemme III.1. Si  $\Gamma(\ell_1, \ell_2) \in K$  est isolé d'un côté, il a exactement une orbite finie  $\theta$ . Nous savons que  $\theta$  contient un point de  $B$ , par exemple  $a_1 + \ell_1 + \alpha_1$ . Alors  $a_1 + \ell_1$  n'appartient pas à  $\theta$ , car sinon  $d(\Gamma) \leq 1$  d'après I.5.

Pour  $t > 0$ , le pseudogroupe  $\Gamma(\ell_1 + t, \ell_2)$  n'a plus d'orbite finie: il est donc minimal, ce qui l'empêche d'appartenir à un bord de carré. Ceci montre que  $\Gamma(\ell_1, \ell_2)$  n'est pas isolé dans  $K$ .  $\square$

*Remarque.* Nous verrons (remarque IV.4 et théorème V.11) que  $K$  est génériquement un ensemble de Cantor.

*Démonstration du lemme III.4* La démonstration reprend des idées bien connues en théorie des feuilletages [Ka; Pl; Le2; AL, §3].

(1) Pour commencer, soit  $\Gamma$  n'importe quel pseudogroupe de rotations. On dit qu'une mesure  $V$  sur  $C$  est  $\Gamma$ -invariante si elle est préservée par chaque  $\gamma_i$ . Par exemple:

- la mesure de Lebesgue  $\mu$ .
- si  $\theta$  est une orbite finie de  $\Gamma$ , la somme des masses de Dirac aux points de  $\theta$  est une mesure invariante, de masse finie égale au cardinal de  $\theta$ .
- si  $U$  est une composante minimale, on définit  $\mu_U(A) = \mu(A \cap U)$ ; c'est une mesure invariante de masse  $\leq 1$ .

Une mesure invariante  $V$  détermine un *homomorphisme*  $[V]: \pi_1(C/\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ . Avec les notations de I.5, on relève  $V$  en une mesure  $\tilde{\gamma}_0$ -invariante  $\tilde{V}$ . On envoie  $t_0$  sur la masse totale de  $V$ , et  $t_i$  sur  $\tilde{V}([x, \tilde{\gamma}_i(x)[$  ou  $-\tilde{V}([\tilde{\gamma}_i(x), x[)$  ( $x$  est un point quelconque de  $\tilde{I}_i$ ). Nous laissons au lecteur les vérifications qui s'imposent.

Etant donné  $[x, y] \subset C$  avec  $y \in \Gamma(x)$ , il existe  $\lambda \in \pi_1(C/\Gamma)$  tel que  $[V](\lambda) = V([x, y[$  pour toute mesure  $\Gamma$ -invariante  $V$ . En particulier, l'image de  $[\mu_U]$  est un sous-groupe dense de  $\mathbb{R}$  pour toute composante minimale  $U$ .



(2) Plaçons-nous maintenant dans la situation du lemme. On sait que  $\Gamma$  a au moins une composante minimale  $U$ . S'il y en avait deux, soit  $U$  et  $U'$ , l'image de  $[\mu_U] \oplus [\mu_{U'}]: \pi_1(C/\Gamma) \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  devrait être de rang  $\geq 4$ , ce qui est impossible car  $\pi_1(C/\Gamma)$  est engendré par 3 éléments  $t_0, t_1, t_2$ .

Soient maintenant  $\theta_1, \theta_2$  deux orbites finies, et  $\mu_1, \mu_2$  les mesures correspondantes. Soit  $a \in \theta_1$ . Puisqu'il y a un nombre fini d'orbites finies et une seule composante minimale, il existe un intervalle  $[x, y] \subset C$ , avec  $y \in \Gamma(x)$ , contenant  $a$  dans son intérieur et ne contenant aucun autre point de  $\theta_1 \cup \theta_2$ . Le noyau de  $[\mu_2]$  n'est donc pas contenu dans celui de  $[\mu_1]$  (et de même en échangeant  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ). Il en résulte que l'image de  $[\mu_U] \oplus [\mu_1] \oplus [\mu_2]: \pi_1(C/\Gamma) \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  est de rang  $\geq 4$ , contradiction.  $\square$

Nous savons déjà que les  $\Gamma(\ell, 1-\ell)$  minimaux ne sont pas équivalents à un groupe. En fait, pour un  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  minimal totalement irrationnel, les trois conditions suivantes sont équivalentes (corollaires II.5 et II.9):  $d(\Gamma) = k$ ,  $\ell(\Gamma) = 1$ ,  $\Gamma$  n'est pas équivalent à un groupe. Si elles sont vérifiées et si  $k > 1$ , on peut montrer (corollaire VI.3) que, pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , l'ensemble des  $x \in C$  tels que  $x + \alpha_i \notin \Gamma(x)$  est un compact non vide et sans point isolé, donc non dénombrable. Nous ignorons si son complémentaire peut avoir une infinité de composantes, voire être dense.

Pour voir que les  $\Gamma(\ell, 1-\ell)$  minimaux ne sont pas équivalents à un échange d'intervalles, nous utilisons la remarque suivante:

**Lemme III.5** *Soit  $\varphi$  un échange de  $p$  intervalles sur le cercle  $C$ . Si  $p$  est pair, le sous-groupe de  $\mathbb{R}$  engendré par 1 et les angles de rotation  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  est de rang  $r$  strictement inférieur à  $p+1$ .*

Nous regardons  $\varphi$  comme un ensemble de  $p$  rotations  $\delta_i: X_i \rightarrow Y_i$ , où les  $X_i$  sont des intervalles ouverts disjoints dont l'union est  $C$ , et de même pour les  $Y_i$ ; les  $\alpha_i$  sont les angles des  $\delta_i$ .

Pour un échange de  $p$  intervalles sur  $[0, 1]$ , avec  $p$  impair, le sous-groupe de  $\mathbb{R}$  engendré par les  $\varphi(x) - x$  est de rang  $< p$ . Ce résultat de Rauzy [Ra] et Veech [Ve1] entraîne facilement le lemme III.5, mais nous donnons également une preuve géométrique.

*Démonstration du lemme III.5* Il est bien connu (voir par exemple [Le1, §6]) que l'on peut «suspendre»  $\varphi$  en un feuilletage singulier d'une surface fermée orientable. On a  $r \leq 2g$ , où  $g$  est le genre de la surface.

D'après [Le1, proposition 6.1], on a aussi  $2g - 2 = p - c$ , avec  $c \geq 1$ . Il vient  $r \leq 2g \leq p + 1$ , et la dernière inégalité est stricte pour  $p$  pair.  $\square$

**Corollaire III.6** *Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  minimal totalement irrationnel, avec  $k$  pair. Alors  $\Gamma$  ne peut pas avoir les mêmes orbites qu'un échange d'intervalles  $\varphi$  sur  $C$ .*

*Démonstration.* Par l'absurde. Puisque  $\varphi$  n'a pas d'orbites finies, il n'y a pas de relation dans la présentation de  $\pi_1(C/\varphi)$  donnée en I.5. Donc  $\pi_1(C/\Gamma) \simeq \pi_1(C/\varphi)$  est libre de rang  $p+1$ , où  $p$  est le nombre d'intervalles de  $\varphi$ . En particulier,  $p = k$ . D'autre part, le groupe des périodes de  $\varphi$  est le même que celui de  $\Gamma$ , donc de rang  $k+1$ . Le lemme III.5 donne alors le résultat.  $\square$

*Remarques.* (1) Ce corollaire reste vrai si on suppose simplement  $\Gamma$  minimal, avec  $d(\Gamma)$  pair et  $\tilde{P}$  de rang  $d(\Gamma) + 1$ .

(2) On peut montrer plus généralement que  $\Gamma$  n'est pas représentable par un feuilletage d'une surface, au sens suivant:  $\mathcal{F}$  est un feuilletage non singulier d'une surface  $M$  (à priori non compacte) orientable sans bord,  $C$  est immergée dans  $M$  transversalement à  $\mathcal{F}$ , et les orbites de  $\Gamma$  sont les intersections de  $C$  avec les feuilles de  $\mathcal{F}$ .

En fait,  $\Gamma$  n'est pas équivalent au sens de Haefliger [Ha1] à un pseudogroupe défini par un échange d'intervalles.

**IV La fonction  $e_s$ ; démonstration des théorèmes 3 et 4**

Restreinte à un  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  fixé, la fonction  $e$  est continue, et même lipschitzienne. Mais elle n'est pas continue comme fonction de  $\mathcal{P}(k)$  dans  $\mathbb{R}$ , à cause du phénomène suivant.

Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ , et soit  $\gamma_{i_1}^{\pm 1} \dots \gamma_{i_p}^{\pm 1}$  un mot défini et égal à l'identité sur un intervalle  $I$  contenu dans une famille d'orbites finies. Si 1 et les  $\alpha_i$  ne sont pas rationnellement indépendants, le mot peut contenir davantage de fois le symbole  $\gamma_i$  que le symbole  $\gamma_i^{-1}$ . On peut alors perturber  $\Gamma$  dans  $\mathcal{P}(k)$  pour faire disparaître complètement la famille d'orbites finies, et  $e$  chute brutalement.

Nous dirons qu'une famille d'orbites finies de  $\Gamma$  est *stable* si elle subsiste quand on perturbe  $\Gamma$  dans  $\mathcal{P}(k)$ , avec peut-être une épaisseur un peu plus petite; cela revient à dire que, pour tout mot  $\gamma_{i_1}^{\pm 1} \dots \gamma_{i_p}^{\pm 1}$  comme ci-dessus et tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , les symboles  $\gamma_i$  et  $\gamma_i^{-1}$  apparaissent autant de fois.

Insistons sur le fait que, si  $\Gamma$  est totalement irrationnel, toute famille d'orbites finies est stable. On peut montrer que  $e: \mathcal{P}(k) \rightarrow \mathbb{R}$  est semi-continue supérieure, et continue en  $\Gamma$  si et seulement si toutes les familles d'orbites finies de  $\Gamma$  sont stables.

Définissons  $e_s(\Gamma)$  comme la somme des épaisseurs des familles d'orbites finies stables de  $\Gamma$ . On a  $e_s(\Gamma) \leq e(\Gamma)$ , avec égalité dès que  $\Gamma$  est totalement irrationnel. La fonction  $e_s$  n'est pas intrinsèque, mais elle est continue.

**Proposition IV.1** *La fonction  $e_s: \mathcal{P}(k) \rightarrow \mathbb{R}$  est Hölder d'exposant  $\frac{1}{2}$ , donc continue.*

Précisons la distance sur  $\mathcal{P}(k)$ . Nous appelons  $|\Gamma - \Gamma'|$  le maximum des  $3k$  nombres suivants: le double de la distance entre le milieu d'un intervalle  $I_i$  ou  $J_i$  de  $\Gamma$ , et le milieu de l'intervalle  $I'_i$  ou  $J'_i$  correspondant de  $\Gamma'$ ; la valeur absolue de la différence entre la longueur de  $I_i$  et celle de  $I'_i$ . Si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont  $\delta$ -proches, les angles de rotation et les extrémités d'intervalles sont  $\delta$ -proches. La proposition équivaut à une inégalité  $|e_s(\Gamma') - e_s(\Gamma)| \leq M |\Gamma - \Gamma'|^{1/2}$ , où  $M$  ne dépend que de  $k$ .

*Démonstration de la proposition IV.1* Suivant une suggestion de Sikorav, nous montrons que  $e_s$  est «uniformément semi-continue»: on a  $e_s(\Gamma_0) - e_s(\Gamma_1) \leq M |\Gamma_1 - \Gamma_0|^{1/2}$  pour tous  $\Gamma_0, \Gamma_1 \in \mathcal{P}(k)$ . Posons  $\delta = |\Gamma_1 - \Gamma_0|$ , et choisissons un chemin  $\Gamma_t$  entre  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$ , avec  $|\Gamma_t - \Gamma_0| \leq \delta$  pour tout  $t$ .

Soit  $x$  un point d'une famille d'orbites finies stables d'ordre  $n$  de  $\Gamma_0$ , d'épaisseur  $\lambda$ . Lorsque  $t$  augmente, deux phénomènes se produisent simultanément.

D'une part, l'ensemble  $A \cup B$  des extrémités des intervalles  $I_i, J_i$  change, chaque point bougeant d'au plus  $\delta$ . D'autre part, les points de l'orbite de  $x$  se déplacent, car les angles de rotation changent. Chacun de ces déplacements

est majoré par  $n\delta$ : en effet chaque angle varie d'au plus  $\delta$ , et on passe de  $x$  à n'importe quel point de son orbite par un mot de longueur  $\leq n$  en les  $\gamma_i^{\pm 1}$ .

Si la distance de  $x$  à  $A \cup B$  (les extrémités des intervalles définissant  $\Gamma_0$ ) est supérieure à  $(n+1)\delta$ , l'orbite de  $x$  se déforme donc continûment en une orbite finie d'ordre  $n$  de  $\Gamma_1$ . Autrement dit, si  $\lambda$  est assez grand, la famille d'orbites finies considérée subsiste pour  $\Gamma_1$ , avec une épaisseur  $\lambda' \geq \lambda - 2(n+1)\delta$ .

Appelons  $\lambda_j$  ( $1 \leq j \leq p$ ) les épaisseurs des familles d'orbites finies stables de  $\Gamma_0$ , et  $n_j$  leur ordre. Bien sûr  $n_j \leq \frac{1}{\lambda_j}$ . On a alors

$$e_s(\Gamma_0) = \sum_{j=1}^p \lambda_j,$$

et

$$e_s(\Gamma_1) \geq \sum_{j=1}^p \max(0, \lambda_j - 2(n_j + 1)\delta) \geq \sum_{j=1}^p \max\left(0, \lambda_j - 2\left(\frac{1}{\lambda_j} + 1\right)\delta\right),$$

d'où

$$e_s(\Gamma_0) - e_s(\Gamma_1) \leq \sum_{j=1}^p \min\left(\lambda_j, \left(\frac{2}{\lambda_j} + 2\right)\delta\right).$$

On montre facilement la majoration

$$\min\left(\lambda, \left(\frac{2}{\lambda} + 2\right)\delta\right) \leq 2\delta^{1/2},$$

valable pour  $\lambda \in ]0, 1]$  et  $\delta \geq 0$ . Puisque  $p$  est borné par une fonction de  $k$  (cf. I.2), on obtient le résultat cherché.  $\square$

Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ . Considérons  $\varphi_t \Gamma$ , défini sur l'intervalle  $]u, v[ = ] - \min \ell_i, 1 - \max \ell_i[$ , et  $e_{\Gamma,s}(t) = e_s(\varphi_t \Gamma)$ . Si  $\Gamma$  est totalement irrationnel, nous savons (corollaire II.2) que  $e_{\Gamma,s}$  est linéaire par morceaux; les pentes appartiennent à  $\{-k, -k+1, \dots, -1, 0\}$ , et croissent avec  $t$ . Ceci s'applique en fait à tout  $\Gamma$ : on l'approche par des  $\Gamma'$  totalement irrationnels, et on remarque que  $e_{\Gamma',s}$  converge uniformément vers  $e_{\Gamma,s}$ .

Définissons alors  $S_{m,s} = S_{m,s}(k, \alpha)$  comme l'ensemble des  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  tels que la dérivée à gauche en 0 de  $e_{\Gamma,s}$  soit  $\leq -m$ , et la dérivée à droite soit  $> -m$ . Les  $S_{m,s}(k, \alpha)$  dépendent continûment de  $\alpha$ , et coïncident avec les  $S_m(k, \alpha)$  si  $\alpha$  est totalement irrationnel (on pourrait également les construire directement en faisant sur la restriction de  $e_s$  à  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  une analyse analogue à celle de la partie II).

Appelons  $X(\alpha)$  l'ensemble des  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  tels que la demi-orbite positive  $\varphi_t \Gamma$  ( $0 \leq t < v$ ) coupe les  $S_{m,s}$  en des points distincts. Le théorème 3 revient à dire que, génériquement,  $X(\alpha)$  est dense dans  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ .

**Lemme IV.2** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  un pseudogroupe rationnel. Si les  $2k$  extrémités  $a_i, b_i$  sont dans des classes distinctes de  $C/P = \mathbb{R}/\tilde{P}$ , alors  $\Gamma$  appartient à  $X(\alpha)$  et n'appartient à aucune  $S_{m,s}$ .

*Démonstration.* Toutes les orbites d'un  $\Gamma$  rationnel sont finies. En particulier, appelons  $X_i = \Gamma(a_i) \cup \Gamma(a_i + \alpha_i)$ , et  $Y_i = \Gamma(b_i) \cup \Gamma(b_i + \alpha_i)$ . Si  $\Gamma$  vérifie les hypothèses du lemme, les  $X_i, Y_j$  sont finis et disjoints; soit  $\delta$  le minimum de leurs distances

2 à 2. Pour  $|t| < \delta$ , la fonction  $e_{\Gamma,s}(t)$  est linéaire, et donc  $\Gamma$  n'appartient à aucune  $S_{m,s}$  (comparer au corollaire II.3).

Lorsqu'on se déplace sur l'orbite  $\varphi_t \Gamma$ , il peut arriver qu'un  $X_i$  rencontre un  $Y_j$  ( $i=j$  n'est pas exclu). Mais lorsque cela se produit les  $Y_i$  ( $i \neq j$ ) sont loin les uns des autres, et loin de  $Y_j \cup X_1 \cup \dots \cup X_k$ , et cela assure que la pente de  $e_{\Gamma,s}$  ne peut changer que d'une unité. Donc  $\Gamma \in X(\alpha)$ .  $\square$

**Lemme IV.3** L'union  $X = \bigcup_{\alpha} X(\alpha)$  est un ouvert dense de  $\mathcal{P}(k)$ .

*Démonstration.* La densité est claire, puisque pour tout  $\alpha$  rationnel les  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  vérifiant l'hypothèse du lemme IV.2 sont denses dans  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ . L'ouverture n'est pas évidente, à cause de la noncompacité de  $[0, v[$ .

Pour tout  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ , on a  $e_s(\Gamma) \leq \min_{1 \leq i \leq k} (1 - \ell_i)$ : c'est vrai dans  $\mathcal{P}(1, \alpha)$  pour  $\alpha$  irrationnel, donc dans  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  pour  $\alpha$  totalement irrationnel, donc dans  $\mathcal{P}(k)$  par densité. Appliquée à  $\varphi_t \Gamma$ , cette inégalité donne  $e_{\Gamma,s}(t) \leq v - t$  pour tout  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ . En particulier, la dérivée de  $e_{\Gamma,s}$  vaut  $-1$  ou  $0$  pour  $t$  assez proche de  $v$ .

Ceci garantit que, lorsqu'on perturbe dans  $\mathcal{P}(k)$  un  $\Gamma \in X(\alpha)$ , il peut seulement entrer sur la demi-orbite positive un point de  $S_{1,s}$ , et ceci n'affecte pas l'appartenance à l'union des  $X(\alpha)$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 3* Soit  $U$  un ouvert dense dans un produit  $E \times F$ . Pour tout ouvert  $O \subset F$ , l'ensemble des  $e \in E$  tels que  $U$  rencontre  $\{e\} \times O$  est un ouvert dense. Si  $E$  est de Baire et  $F$  à base dénombrable, l'ensemble des  $e \in E$  tels que  $U \cap (\{e\} \times F)$  soit dense dans  $\{e\} \times F$  est donc un  $G_\delta$  dense.

L'ensemble  $\mathcal{G} \subset T^k$  des  $\alpha$  totalement irrationnels tels que  $X(\alpha)$  soit dense dans  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  est ainsi un  $G_\delta$  dense. Ceci montre le théorème 3.  $\square$

*Remarque IV.4* Un raisonnement analogue montre que, pour  $(\alpha_1, \alpha_2, a_2 - a_1)$  dans un  $G_\delta$  dense de  $T^3$ , le compact  $K \subset \Delta$  étudié dans la partie III est d'intérieur vide: c'est donc un ensemble de Cantor. Le théorème V.1 donnera un résultat plus fort.

*Démonstration du théorème 4* Considérons un  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  n'appartenant à aucune  $S_{m,s}$ , tel que  $e_s(\Gamma) = 0$ . Il existe  $\delta > 0$  tel que  $e_s(\varphi_t \Gamma) = 0$  pour  $t \geq -2\delta$ . Pour  $\Gamma'$  totalement irrationnel assez voisin de  $\Gamma$ , on aura  $e(\varphi_t \Gamma') = e_s(\varphi_t \Gamma) = 0$  pour  $t \geq -\delta$ , d'où  $\ell(\varphi_{-\delta} \Gamma') \geq 1$  par le corollaire II.5 et finalement  $\ell(\Gamma') > 1$ .

Un  $\Gamma \in \mathcal{P}^1(k)$  n'appartenant à aucune  $S_{m,s}$  vérifie donc  $e_s(\Gamma) > 0$ . Pour  $k \geq 2$ , les  $\Gamma$  satisfaisant aux hypothèses du lemme IV.2 sont denses dans  $\mathcal{P}^1(k)$ . On en déduit que  $e_s$  est strictement positive sur un ouvert dense de  $\mathcal{P}^1(k)$ , d'où la première assertion du théorème 4; la deuxième s'en déduit comme plus haut (démonstration du théorème 3).  $\square$

**V Le cas  $k = 2$  (suite); démonstration du théorème 5**

Fixons  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in T^2$ . Considérons l'anneau ouvert  $\mathcal{A} = C \times ]0, 1[$  comme l'ensemble des  $\Gamma_{u,\ell}$  de longueur 1 définis par:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left] -\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2} \right[ & J_1 &= I_1 + \alpha_1 \\ I_2 &= \left] u + \frac{\ell}{2}, u + 1 - \frac{\ell}{2} \right[ & J_2 &= I_2 + \alpha_2. \end{aligned}$$

Nous considérerons aussi l'anneau fermé  $\bar{\mathcal{A}} = C \times [0, 1]$ .

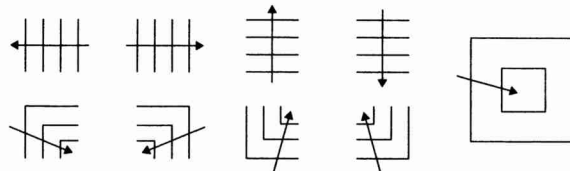


Fig. 4.

Avec les notations de I.1, tout  $\Gamma \in \mathcal{P}(2, \alpha)$  s'écrit de façon unique sous la forme  $\Gamma = R_\theta \varphi_t \Gamma_{u, \ell}$  avec  $\theta \in \mathbb{C}$ ,  $(u, \ell) \in \mathcal{A}$ , et  $|t| < \min(\ell, 1 - \ell)$ . En particulier,  $\mathcal{P}^1(2, \alpha)$  s'identifie à  $\mathbb{C} \times \mathcal{A}$ ; les diagonales  $\Delta$  de la partie III se projettent dans  $\mathcal{A}$  sur les diagonales  $u + \ell = \text{constante}$ .

Soit  $S = S(\alpha) \subset \mathcal{A}$  défini par l'équation  $e_s(\Gamma) = 0$ . Rappelons (voir IV) que  $e_s$  est continue, et égale à  $e$  si  $\alpha$  est totalement irrationnel. Pour vérifier les généralités qui suivent (jusqu'à la proposition V.2), on pourra donc supposer  $\alpha$  totalement irrationnel et remplacer  $e_s$  par  $e$ : l'extension par continuité à  $\alpha$  quelconque est immédiate.

L'ensemble  $S$  est compact, contient le bord de  $\bar{\mathcal{A}}$  et le segment  $\{u = 0\}$ . On montre également qu'il contient les segments  $\{u = \alpha_1\}$ ,  $\{u = \alpha_2\}$ ,  $\{u = \alpha_1 - \alpha_2\}$ , et qu'il est invariant par  $(u, \ell) \mapsto (\alpha_1 - \alpha_2 - u, \ell)$ . Si  $\Gamma \in \mathcal{A}$  est totalement irrationnel, alors  $\Gamma \in S$  équivaut à chacune des conditions suivantes:  $\Gamma$  a une orbite dense (lemme III.4);  $d(\Gamma) = 2$ ;  $\Gamma \in S_1$ ;  $\Gamma \in S_2$ ; l'orbite de  $\varphi_t$  passant par  $\Gamma$  n'est pas entièrement contenue dans  $X$  (voir partie IV).

Le théorème 2 et le complément II.4 déterminent l'expression de  $e_s$  au voisinage d'un  $(u_0, \ell_0) \notin S$ .

En posant  $u = u_0 + \bar{u}$  et  $\ell = \ell_0 + \bar{\ell}$ , on voit que  $e_s(u_0, \ell_0) - e_s(u, \ell)$  est la somme d'un premier terme égal à  $\frac{\bar{\ell}}{2}, \bar{u} - \frac{\bar{\ell}}{2}$ , ou  $\max\left(\frac{\bar{\ell}}{2}, \bar{u} - \frac{\bar{\ell}}{2}\right)$ , et d'un deuxième égal à  $\frac{\bar{\ell}}{2}, -\bar{u} - \frac{\bar{\ell}}{2}$ , ou  $\max\left(\frac{\bar{\ell}}{2}, -\bar{u} - \frac{\bar{\ell}}{2}\right)$ . La Fig. 4 schématise les lignes de niveau de  $e_s$  dans les 9 cas possibles (les flèches indiquent la direction dans laquelle  $e_s$  croît).

On en déduit immédiatement:

**Proposition V.1** *Chaque composante  $A_j$  du complémentaire  $\bar{\mathcal{A}} - S$  est un carré à côtés parallèles aux axes (voir Fig. 3a).*

L'allure de  $e_s$  dans un tel carré ne dépend que de la longueur  $\lambda$  de ses côtés: si  $(u_0, \ell_0)$  est le centre du carré, on a  $e_s(u, \ell) = \frac{\lambda}{2} - \max(|u - u_0|, |\ell - \ell_0|)$  pour  $\max(|u - u_0|, |\ell - \ell_0|) \leq \frac{\lambda}{2}$ ; en particulier,  $e_s$  vaut  $\frac{\lambda}{2}$  au centre du carré.

La connaissance de  $S$  détermine donc  $e_s$  dans  $\mathcal{A}$ , et même en fait dans  $\mathcal{P}(2, \alpha)$  tout entier: si  $\Gamma = R_\theta \varphi_t \Gamma_{u, \ell}$ , on a (d'après II):  $e_s(\Gamma) = 0$  si  $t \geq e_s(\Gamma_{u, \ell})$ ,  $e_s(\Gamma) = e_s(\Gamma_{u, \ell}) - t$  si  $|t| \leq e_s(\Gamma_{u, \ell})$ , et  $e_s(\Gamma) = -2t$  si  $t \leq -e_s(\Gamma_{u, \ell})$ . Si  $\alpha$  est totalement irrationnel, on peut ainsi reconstruire à partir de  $S$  toute la structure de  $\mathcal{P}(2, \alpha)$ : fonctions  $e$  et  $d$ , hypersurfaces  $S_1$  et  $S_2$ .

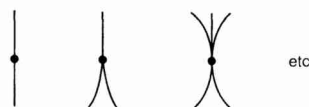


Fig. 5.

**Proposition V.2** Soit  $\alpha \in T^2$  totalement irrationnel, et  $A_j$  les carrés formant  $\bar{\mathcal{A}} - S(\alpha)$ . Les adhérences  $\bar{A}_j$  sont disjointes les unes des autres, et disjointes du bord de  $\bar{\mathcal{A}}$ .

*Démonstration.* Les intersections de  $S$  avec les diagonales  $u + \ell = \text{constante}$  correspondent aux  $K \subset \Delta$  de la partie III, qui n'ont pas de point isolé d'après le lemme III.1. Par symétrie, il en est de même sur les  $u - \ell = \text{constante}$ , d'où le résultat.  $\square$

**Proposition V.3** Sous les mêmes hypothèses, un  $\Gamma \in S(\alpha)$  est minimal si et seulement si il n'appartient au bord d'aucun  $A_j$ .

*Démonstration.* Un  $\Gamma \in S$  appartient à l'union des  $\delta A_j$  si et seulement si  $\Gamma$  est isolé d'un côté dans  $S \cap D^+$  ou  $S \cap D^-$  (nous désignons par  $D^\pm$  la diagonale  $u \pm \ell = \text{constante}$  qui contient  $\Gamma$ ). Un  $\Gamma$  minimal n'appartient donc à aucun  $A_j$  d'après le lemme III.1.

Si maintenant  $\Gamma \in S$  n'est pas minimal, il a exactement une orbite finie  $\theta$  (lemme III.4). Si  $\theta$  ne contient ni  $b_1 = \frac{\ell}{2}$  ni  $b_1 + \alpha_1 = \frac{\ell}{2} + \alpha_1$ , on peut agrandir  $I_1$  et  $J_1$  vers la droite sans que le pseudogroupe ne devienne minimal:  $\Gamma$  est donc isolé d'un côté dans  $S \cap D^+$ , et il appartient à un  $\delta A_j$ .

Un raisonnement analogue peut être tenu pour les 3 autres paires d'extrémités. Puisque  $r(\Gamma) = 3$ , on conclut alors par le fait général suivant:

**Lemme V.4** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(2)$ , avec  $d(\Gamma) = 2$ . On suppose que  $\Gamma$  possède exactement une orbite finie  $\theta$ , et que  $\theta$  rencontre chacune des paires  $\{a_1, a_1 + \alpha_1\}$ ,  $\{a_2, a_2 + \alpha_2\}$ ,  $\{b_1, b_1 + \alpha_1\}$ ,  $\{b_2, b_2 + \alpha_2\}$ . Alors  $r(\Gamma) = 2$ .

*Remarque.* On obtient un exemple avec  $r(\Gamma) = 2$  en prenant  $\alpha_1 = \alpha_2 \notin \mathbb{Q}$  et  $I_1 = ]0, \alpha_1[$ ,  $I_2 = ]\alpha_1, 1[$ .

Avant de montrer le lemme V.4, décrivons une construction générale. Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  dont toutes les orbites sont finies. Identifions  $y$  à  $x$  si  $y \in \Gamma(x)$ ; identifions également  $a_i$  à  $a_i + \alpha_i$  et  $b_i$  à  $b_i + \alpha_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ). Le quotient de  $C$  par ces identifications est un graphe  $T = T(\Gamma)$ , orienté par l'orientation de  $C$ . Les sommets sont les images des orbites singulières. Les arêtes correspondent aux familles d'orbites finies, elles ont donc une longueur: l'épaisseur de la famille.

Il existe sur  $T$  une unique «structure différentiable» pour laquelle la projection  $\pi: C \rightarrow T$  est une immersion. Les sommets de  $T$  apparaissent alors comme des aiguillages (voir Fig. 5).

*Démonstration du lemme V.4* Fixons  $t > 0$  inférieur à la distance minimale entre 2 points de  $\theta$ . Puisque  $d(\Gamma) = 2$ , toute orbite de  $\varphi_{-t}\Gamma$  est finie (I.5). Soit  $T$  le graphe associé à  $\varphi_{-t}\Gamma$ .

Les hypothèses sur  $\theta$  et  $t$  garantissent que, pour tout  $s \in [0, t]$ , l'ensemble  $\theta - s = \{x - s; x \in \theta\}$  est une orbite de  $\varphi_{-t}\Gamma$ ; de plus  $s \neq s' \Rightarrow \pi(\theta - s) \neq \pi(\theta - s')$ .

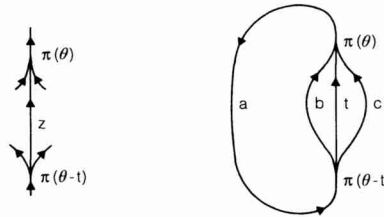


Fig. 6.

Donc  $T$  a exactement 2 sommets,  $\pi(\theta)$  et  $\pi(\theta-t)$ , que joint une arête  $z$  de longueur  $t$ .

Un voisinage de  $z$  est représenté sur la Fig. 6; chaque sommet est un aiguillage à 3 branches car  $d(\varphi_{-t}\Gamma)=2$  (voir I.5). L'arête partant de  $\pi(\theta)$  aboutit à  $\pi(\theta-t)$  et non à  $\pi(\theta)$ , car il existe une immersion surjective  $\pi: C \rightarrow T$ . On peut donc compléter le dessin de  $T$  comme sur la Fig. 6.

Soient  $a, b, c$  les longueurs des arêtes autres que  $z$  (voir Fig. 6). On a  $a+b+c+t=e(\varphi_{-t}\Gamma)=2t$  d'après le corollaire II.2. Le groupe des périodes  $\bar{P}$  de  $\Gamma$  (ou de  $\varphi_{-t}\Gamma$ ), engendré par  $a+b, a+t, a+c$ , est donc de rang 2.  $\square$

Considérons dans  $\bar{\mathcal{A}}$  le segment  $\{u=0\}$ , formé des  $\Gamma=\Gamma_{u,\ell}$  avec  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$  (et donc  $I_1 \cup I_2 = C$  moins 2 points).

**Corollaire V.5** Soit  $\alpha \in T^2$  totalement irrationnel. Il existe une infinité non dénombrable de  $\ell \in ]0, 1[$  tels que  $\Gamma_{0,\ell}$  soit minimal.

*Démonstration.* Rappelons que tout  $\Gamma_{0,\ell}$  appartient à  $S$ . L'ensemble des  $\ell \in [0, 1]$  tels que  $\Gamma_{0,\ell}$  ou bien n'appartienne à aucun  $\delta A_j$ , ou bien soit un coin d'un  $A_j$ , est un compact sans point isolé, donc non dénombrable.  $\square$

*Remarque.* On peut montrer le corollaire V.5 sans utiliser le lemme V.4.

Soit  $\mathcal{G}$  l'ensemble des  $\alpha \in T^2$  totalement irrationnels tels que  $S$  soit d'intérieur vide dans  $\bar{\mathcal{A}}$ . Nous savons (voir IV) que  $\mathcal{G}$  est un  $G_\delta$  dense.

Pour  $\alpha \in \mathcal{G}$ , il y a une infinité de  $A_j$ , et en fait on déduit de [Wh] que  $S$  est homéomorphe à la courbe universelle de Sierpiński (ou tapis de Sierpiński)  $\Sigma$ .

Ecrivons  $\Sigma$  comme union disjointe  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ , où  $\Sigma_1$  est l'ensemble des  $p \in \Sigma$  par lesquels passe un cercle (topologique) ne disconnectant pas  $\Sigma$ . Par le théorème de Jordan, les points de  $\Sigma_2$  correspondent dans  $S$  aux  $\Gamma \in \mathcal{A}$  n'appartenant à aucun  $\bar{A}_j$ , i.e. aux  $\Gamma \in \mathcal{A}$  qui sont minimaux.

Puisque tout  $\Gamma \in \mathcal{P}(2, \alpha)$  minimal non équivalent à un groupe est de longueur 1 (corollaire II.9), et que  $\mathcal{P}^1(2, \alpha)$  s'identifie à  $C \times \mathcal{A}$ , nous avons montré:

**Théorème V.6** Pour  $\alpha \in \mathcal{G}$ , l'ensemble des  $\Gamma \in \mathcal{P}(2, \alpha)$  minimaux non équivalents à un groupe est homéomorphe à  $S^1 \times \Sigma_2$ .

Pour avoir le théorème 5, il nous reste à prouver:

**Théorème V.7** Le complémentaire de  $\mathcal{G}$  dans  $T^2$  est de mesure de Lebesgue nulle.

*Démonstration.* Rappelons (voir ci-dessus) qu'à un  $\Gamma$  à orbites finies est associé un graphe  $T(\Gamma)$  et une projection  $\pi: C \rightarrow T(\Gamma)$ .

**Lemme V.8** Soit  $\Gamma_0 \in \mathcal{P}(k, \alpha)$ , avec  $d(\Gamma_0) = k$  et  $e(\Gamma_0) = 0$ . On peut approcher  $\Gamma_0$  dans  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  par des  $\Gamma_1$  à orbites finies tels que le graphe  $T(\Gamma_1)$  n'ait qu'un seul sommet.

*Démonstration.* Fixons  $t > 0$  petit. Puisque  $d(\Gamma_0) = k$ , rappelons (I.5) que  $\varphi_{-t} \Gamma_0$  est à orbites finies. Approchons-le par un  $\Gamma \in \mathcal{P}(k, \alpha)$  à orbites finies, possédant la propriété suivante: il existe un sommet  $s$  de  $T(\Gamma)$  tel que tous les  $a_i, b_j$  n'appartenant pas à  $\pi^{-1}(s)$  soient dans des classes distinctes modulo  $\tilde{P}$ .

Etant donné un tel  $\Gamma$ , nous allons amener successivement sur  $s$  tous les autres sommets, en prenant soin de ne pas introduire d'orbites infinies et de ne pas «trop» modifier  $\Gamma$ .

Si  $s$  est le seul sommet de  $T(\Gamma)$ , on prend  $\Gamma_1 = \Gamma$ . Sinon, chaque  $s' \neq s$  est la projection d'exactlyement une paire  $\{a_i, a_i + \alpha_i\}$  ou  $\{b_i, b_i + \alpha_i\}$ . Pour fixer les idées, disons qu'il existe au moins un sommet  $\pi(b_i) \neq s$ . Soit  $B_0$  l'ensemble des  $b_i, b_i + \alpha_i$  n'appartenant pas à  $\pi^{-1}(s)$ .

Considérons les intervalles  $[b, c]$ , où  $b \in B_0$  et  $c \in \pi^{-1}(s)$ . Fixons-en un de longueur  $\delta = |c - b|$  minimale, et supposons par exemple  $b = b_i$ .

L'intervalle  $]b, c[$  ne peut contenir aucun  $u \in \Gamma(\bar{b})$ , avec  $\bar{b} \in B_0$ . En effet, si  $u$  est parmi ces points le plus proche de  $c$ , on a  $u + t \in \Gamma(\bar{b} + t)$  pour tout  $t \in [0, c - u[$  et donc  $\bar{b} + c - u \in \pi^{-1}(s)$ : ceci contredit le choix de  $[b, c]$ .

De même, la restriction de  $\pi$  à  $[b, c]$  est injective:  $\pi(u) = \pi(v)$  avec  $b < u < v < c$  donne  $u + c - v \in \pi^{-1}(s)$ , contradiction. En particulier, on a  $\delta < e(\Gamma)$ .

Plus généralement,  $\pi(u) = \pi(v)$  avec  $u \in ]b, c[$  et  $v \in C$  entraîne  $\pi(u + t) = \pi(v + t)$  pour  $0 \leq t \leq c - u$ , et donc  $v + c - u \in \pi^{-1}(s)$ : un train s'engageant sur  $\pi([b, c])$  dans le sens positif ne peut en sortir que par  $s$ .

Remplaçons les intervalles  $I_i = ]a_i, b_i[$  et  $J_i = I_i + \alpha_i$  de  $\Gamma$  par  $I'_i = ]a_i, c[$  et  $J'_i = I'_i + \alpha_i$ . Nous affirmons que le  $\Gamma'$  obtenu est à orbites finies.

C'est clair si  $\pi(]b, c[)$  et  $\pi(]b + \alpha_i, c + \alpha_i[)$  sont disjoints ou égaux. Sinon, l'ensemble des points de  $]b + \alpha_i, c + \alpha_i[$  se projetant dans  $\pi([b, c])$  est un intervalle  $[p, c + \alpha_i]$ ; de plus la restriction de  $\pi$  à  $[p, c + \alpha_i]$  est injective. On en déduit facilement la finitude des orbites de  $\Gamma'$ .

Ainsi  $\Gamma'$  vérifie les mêmes hypothèses que  $\Gamma$ , mais  $T(\Gamma')$  a un sommet de moins que  $T(\Gamma)$ . Appliquée au plus  $2k - 1$  fois à (une approximation de)  $\varphi_{-t} \Gamma_0$ , cette opération fournit le  $\Gamma_1$  cherché. A chaque étape, on a agrandi une paire d'intervalles d'une quantité  $\delta < e(\varphi_{-t} \Gamma_0) = kt$ . Ceci force  $\Gamma_1$  à tendre vers  $\Gamma_0$  quand  $t \rightarrow 0$ .  $\square$

Soit maintenant  $\alpha \in T^2$  totalement irrationnel, et  $\Gamma \in \mathcal{P}(2, \alpha)$  appartenant à  $S$ . On a  $e(\Gamma) = 0$  et  $d(\Gamma) = 2$ , soit donc  $\Gamma_1$  donné par le lemme V.8. Notons que  $d(\Gamma_1) = 2$ , puisque  $\pi_1(C/\Gamma_1)$  est libre (I.5) et admet  $\tilde{P}$  comme quotient.

Posons  $\delta = \frac{1}{2}e(\Gamma_1)$ . On a  $\ell(\Gamma_1) = 1 - 2\delta$  (corollaire II.5), ce qui signifie que  $\Gamma_2 = \varphi_\delta \Gamma_1$  est de longueur 1.

Nous allons montrer que, si  $\alpha$  a été choisi en dehors d'un ensemble de mesure nulle, alors  $e(\Gamma_2)$  ne peut pas être nul. La projection de  $\Gamma_2$  dans  $\mathcal{A}$  sera une approximation de  $\Gamma$  par un point de  $\mathcal{A} - S$ , et  $S$  sera d'intérieur vide.

Le graphe  $T(\Gamma_1)$  se compose de 3 cercles tangents en un point. Leurs longueurs  $a, b, c$  sont distinctes, elles forment en fait une base de  $\tilde{P} \simeq \mathbb{Z}^3$ .

Supposons que les nombres  $a, b, c$  ne vérifient pas les inégalités du triangle, par exemple  $a > b + c$ . On a alors  $a > \delta = \frac{a+b+c}{2}$ , et  $\Gamma_2 = \varphi_\delta \Gamma_1$  a des orbites



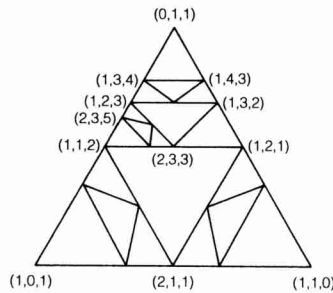


Fig. 7.

finies: si un  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  a une famille d'orbites finies d'épaisseur  $\lambda$ , on a  $e(\varphi_\delta \Gamma) > 0$  pour tout  $\delta < \lambda$ .

Si au contraire  $a, b, c$  vérifient les inégalités du triangle, disons que  $c$  est le plus petit et considérons  $\varphi_c \Gamma_1$ . Il est à orbites finies, et son graphe est formé de 3 cercles de longueurs  $a-c, b-c, c$ . Si ces 3 nombres ne vérifient pas les inégalités du triangle, alors  $\Gamma_2 = \varphi_{\delta-c}(\varphi_c \Gamma_1)$  aura des orbites finies. Sinon, nous pouvons recommencer.

Etant donné  $a, b, c$  positifs, appelons donc  $\psi(a, b, c)$  le triplet obtenu en gardant le plus petit des 3 nombres et en le soustrayant des 2 autres:  $\psi(a, b, c) = (a-c, b-c, c)$  ou  $(a-b, b, c-b)$  ou  $(a, b-a, c-a)$ . Les cas où 2 des nombres  $a, b, c$  seraient égaux nous importe peu.

**Lemme V.9** Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des  $(a, b, c)$  positifs rationnellement indépendants tels que  $\psi^n(a, b, c)$  vérifie les inégalités du triangle pour tout  $n \geq 0$ . Alors  $\mathcal{H}$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in T^2$  totalement irrationnel. Si  $\mathcal{H}$  ne contient aucune base de  $\tilde{P} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2$ , alors  $\alpha \in \mathcal{G}$  d'après ce qui précède. Le lemme V.9 entraîne donc le théorème V.7.

*Démonstration du lemme V.9* (Yoccoz) L'ensemble  $\mathcal{H}$  étant invariant par homothéties de rapport positif, nous considérons  $(a, b, c)$  comme des coordonnées homogènes dans  $P^2(\mathbb{R})$ . En particulier, nous repérerons un triangle  $A \subset P^2(\mathbb{R})$  par 3 points  $X, Y, Z$  de  $(\mathbb{R}^+)^3$ :  $A$  est la projection dans  $P^2(\mathbb{R})$  de l'enveloppe convexe de  $X, Y, Z$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $A_n$  l'ensemble des  $(a, b, c)$  positifs tels que  $\psi^p(a, b, c)$  vérifie les inégalités du triangle pour tout  $p \leq n$ . On voit que  $A_0$  est dans  $P^2(\mathbb{R})$  un triangle de sommets  $X_0 = (0, 1, 1), Y_0 = (1, 0, 1), Z_0 = (1, 1, 0)$ ; nous l'identifions affinement à un triangle équilatéral de  $\mathbb{R}^2$  (voir Fig. 7). Nous devons montrer que, dans  $\mathbb{R}^2$ , l'aire de  $A_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On passe de  $A_0$  à  $A_1$  en enlevant le triangle de sommets  $X_0 + Y_0 = (1, 1, 2), Y_0 + Z_0 = (2, 1, 1)$ , et  $Z_0 + X_0 = (1, 2, 1)$ . Il reste donc les 3 triangles  $\{X_0, X_0 + Y_0, Z_0 + X_0\}, \{Y_0, Y_0 + Z_0, X_0 + Y_0\}$  et  $\{Z_0, Z_0 + X_0, Y_0 + Z_0\}$ .

Plus généralement,  $A_n$  se compose de  $3^n$  triangles: si  $A$  est un triangle de  $A_n$  de sommets  $\{X, Y, Z\}$ , alors  $A \cap A_{n+1}$  se compose des 3 triangles  $\{X, X + Y, Z + X\}, \{Y, Y + Z, X + Y\}, \{Z, Z + X, Y + Z\}$  qui restent quand on enlève le triangle  $\{X + Y, Y + Z, Z + X\}$ . Topologiquement, la construction est analogue à celle de [Si1], mais à partir de  $A_2$  les triangles ne sont plus équilatéraux.

Pour contrôler l'aire de ces triangles, posons  $|X|=a+b+c$  si  $X=(a,b,c)$ . Soit  $A=\{X,Y,Z\}$  un triangle de  $A_n$ , comme ci-dessus. On montre par récurrence sur  $n$  que le rapport entre deux quelconques des nombres  $|X|, |Y|, |Z|$  est majoré par  $n$ . Les points  $X+Y, Y+Z, Z+X$  divisent donc les côtés de  $A$  dans des rapports n'excédant pas  $n$ , et on en déduit facilement la minoration

$$\text{aire}\{X+Y, Y+Z, Z+X\} \geq \frac{n}{(n+1)^2} \text{aire } A.$$

On a ensuite  $\text{aire}(A_{n+1}) \leq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \text{aire}(A_n)$ , et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{aire}(A_n) = 0$  puisque la série  $\sum \frac{n}{(n+1)^2}$  diverge.  $\square$

*Remarque V.10* Soit  $(a,b,c) \in \mathcal{H}$ . Considérons  $\Gamma \in \mathcal{P}^1(2)$  déterminé par  $\alpha_1 = \frac{a}{a+b+c}, \alpha_2 = \frac{a+b}{a+b+c}, a_1 = a_2 = 0, \ell_1 = \ell_2 = \frac{1}{2}$ . D'après l'analyse faite plus haut, on a  $e(\Gamma) = 0$ . D'autre part aucune orbite ne peut rencontrer à la fois  $A$  et  $B$  puisque  $a, b, c$  sont rationnellement indépendants. On en déduit que  $\Gamma$  est minimal (voir démonstration du corollaire III.2) et conduit à une action libre non simpliciale de  $F_3$  sur un  $\mathbb{R}$ -arbre (voir remarque III.3). Pour des exemples explicites, on peut prendre  $(a,b,c) = (1+p\mu+\mu^2, 1+\mu, \mu)$ , où  $p$  est entier  $\geq 1$  et  $\mu \in ]0, 1[$  est racine de  $P(x) = x^3 + px^2 + px - 1$ : en effet  $a, b, c$  sont rationnellement indépendants car  $P$  est irréductible, et  $\Psi^p(a,b,c) = (\mu a, \mu b, \mu c)$  (cette famille a été suggérée par un exemple de Bestvina-Handel et une remarque de D. Gaboriau). Plus généralement, on obtient une action libre non simpliciale de  $F_n$  ( $n \geq 3$ ) en remplaçant  $(a,b,c)$  par  $(t_1, \dots, t_n)$ , où  $t_i = \sum_{j=0}^{n-i} \mu^j$  et  $\mu$  est racine du polynôme irréductible  $\mu^n + \mu^{n-1} + \dots + \mu^2 + \mu - 1$ : on définit ensuite  $\alpha_i = \left(\sum_{j=1}^i t_j\right) \left(\sum_{j=1}^n t_j\right)^{-1}, a_i = 0, \ell_i = \frac{1}{n-1}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ).

Montrons enfin:

**Théorème V.11** Pour  $\alpha$  dans un  $G_\delta$  dense de  $T^2$ , la dimension de Hausdorff de  $S(\alpha)$  est égale à 1.

Pour  $\alpha$  totalement irrationnel dans un  $G_\delta$  dense de  $T^2$ , et pour tout  $a_2 - a_1 \in \mathbb{C}$ , le compact  $K \subset \Delta$  de la partie III est un ensemble de Cantor de dimension de Hausdorff nulle.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$  rationnel, et  $q$  un dénominateur commun de  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ . D'après le lemme IV.2, tout  $(u, \ell) \in S(\mathcal{B})$  vérifie  $u \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$  ou  $\ell \in \frac{1}{q}\mathbb{Z}$ ; dans ce cas les carrés  $A_j$  sont en nombre fini, se touchent selon leurs bords, et  $\bar{\mathcal{A}} = \cup \bar{\mathcal{A}}_j$ .

Posons  $\delta = \frac{1}{2}q^{-q}$ , et appelons  $S_\delta(\mathcal{B})$  l'ensemble des  $(u, \ell) \in \bar{\mathcal{A}}$  tels que  $u$  ou  $\ell$  soit  $\delta$ -proche d'un multiple entier de  $\frac{1}{q}$ . On peut le recouvrir par  $(2q+1)q^q$  carrés de côté  $\delta$ .

D'après la discussion qui suit la proposition V.1, la fonction  $e_\alpha$  est minorée par  $\delta$  en dehors de  $S_\delta(\mathcal{B})$ . La proposition IV.1 entraîne alors  $S(\alpha) \subset S_\delta(\mathcal{B})$  dès que  $\max(|\alpha_1 - \mathcal{B}_1|, |\alpha_2 - \mathcal{B}_2|) \leq P\delta^2 = \frac{P}{4q^{2q}}$ , où  $P$  est une constante.

Appelons  $N_\alpha(\delta)$  le nombre minimal de carrés de côté  $\delta$  nécessaires pour recouvrir  $S(\alpha)$ . On sait que la dimension de Hausdorff  $D_H(S(\alpha))$  est majorée par la capacité inférieure  $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\alpha(\delta)}{-\log \delta}$ .

Considérons dans  $T^2$  le  $G_\delta$  dense formé des  $\alpha$  tels qu'il existe une infinité de triplets d'entiers  $(p_1, p_2, q)$  avec  $\max\left(\left|\alpha_1 - \frac{p_1}{q}\right|, \left|\alpha_2 - \frac{p_2}{q}\right|\right) < \frac{P}{4q^{2q}}$ .

Pour un tel  $\alpha$ , on a  $N_\alpha(\frac{1}{2}q^{-q}) \leq (2q+1)q^q$  pour des  $q$  arbitrairement grands, d'où la majoration cherchée  $D_H(S(\alpha)) \leq 1$ . On peut également recouvrir l'intersection de  $S(\alpha)$  avec n'importe quelle diagonale  $u+\ell = \text{constante}$  par au plus  $2(2q+1)$  intervalles de longueur  $\leq \sqrt{2}q^{-q}$ , ce qui donne  $D_H(K) = 0$ . Si  $\alpha$  est totalement irrationnel, alors  $K$  n'a pas de point isolé (lemme III.1) et est donc un ensemble de Cantor.  $\square$

## VI Les minimaux sont-ils maximaux?

### Démonstration du théorème 6 et du corollaire 3

Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  un pseudogroupe minimal. Si  $\Gamma$  est équivalent à un groupe, rappelons que  $d(\Gamma) = 0$  et  $\mathcal{C}(\Gamma) = \emptyset$ . Sinon, on a  $d(\Gamma) \geq r(\Gamma) - 1 \geq 1$ , où  $r(\Gamma)$  est le rang du groupe des périodes  $\tilde{P} \subset \mathbb{R}$ .

L'ingrédient essentiel pour le théorème 6 est le résultat suivant:

**Lemme VI.1** *Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  minimal. Si  $\Gamma' \in \mathcal{C}(\Gamma)$ , alors  $\Gamma'$  peut être défini par un nombre fini de générateurs, et  $d(\Gamma') < d(\Gamma)$ .*

Ce lemme entraîne immédiatement la première partie du théorème 6: si  $\Gamma' \in \mathcal{C}(\Gamma)$ , on a  $d(\Gamma) > d(\Gamma') \geq r(\Gamma') - 1 \geq r(\Gamma) - 1$ , ce qui est une contradiction pour  $\Gamma$  totalement irrationnel. Ce raisonnement montre en fait  $\mathcal{C}(\Gamma) = \emptyset$  pour tout  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  minimal tel que  $d(\Gamma) = r(\Gamma) - 1$ ; nous ignorons si, réciproquement,  $\Gamma$  minimal et  $d(\Gamma) > r(\Gamma) - 1$  impliquent  $\mathcal{C}(\Gamma) \neq \emptyset$ .

*Démonstration du lemme VI.1* Le lemme est vrai si  $d(\Gamma) = 0$  (car  $\mathcal{C}(\Gamma) = \emptyset$ ), et nous le montrons par récurrence sur  $d(\Gamma)$ .

Soit  $\delta_0 > 0$  tel que  $d(\varphi_{-t}\Gamma) = d(\Gamma)$  pour tout  $t \in [0, 2\delta_0]$ , et soient  $x, y \in C$  avec  $y \in \Gamma'(x)$  et  $y \notin \Gamma(x)$ . Fixons  $\delta \in ]0, \delta_0[$  tel que  $y + t \in \Gamma'(x+t)$  pour  $|t| \leq \delta$ . Appelons  $\Gamma_1$  le pseudogroupe obtenu en ajoutant à  $\Gamma$  le générateur  $\gamma_{k+1}: ]x - \delta, x + \delta[ \rightarrow ]y - \delta, y + \delta[$ . Puisqu'on a  $\Gamma' = \Gamma_1$  ou  $\Gamma' \in \mathcal{C}(\Gamma_1)$ , il suffit de montrer  $d(\Gamma_1) < d(\Gamma)$ .

Considérons pour  $0 \leq t \leq \delta$  le pseudogroupe  $\theta_t = R_t \varphi_{-2t}\Gamma$ , pour lequel chaque  $\gamma_i$  est défini sur  $]a_i + t, b_i - t[$ . Puisque  $\delta \leq \delta_0$ , on a  $e(\theta_t) = 2td(\Gamma)$  d'après le corollaire II.2. Pour  $0 \leq t < \delta$ , soit  $\theta'_t$  le pseudogroupe obtenu en ajoutant à  $\theta_t$  la restriction de  $\gamma_{k+1}$  à  $]x - \delta + t, x + \delta - t[$ ; on remarque que  $\theta'_t$  est égal à  $R_t \varphi_{-2t}\Gamma_1$  dans  $\mathcal{P}(k+1)$ .

La fonction  $t \mapsto e(\theta'_t)$  vaut 0 pour  $t = 0$ , tend vers  $e(\theta_\delta) = 2\delta d(\Gamma)$  quand  $t \rightarrow \delta$ , et est linéaire par morceaux de pentes  $\geq d(\Gamma_1)$ . Si  $d(\Gamma_1) \geq d(\Gamma)$ , on en déduit  $e(\theta'_t) = e(\theta_t)$  pour tout  $t$ .

Prenons un  $t \in ]0, \delta[$  tel que les orbites de  $x$  et  $y$  pour  $\theta_t$  (qui sont bien sûr distinctes) soient régulières. On sait (I.4) que pour  $t > 0$  toutes les orbites

de  $\theta_i$  sont finies. Dans ces conditions le passage de  $\theta_i$  à  $\theta'_i$  doit diminuer strictement  $e$ , contradiction.  $\square$

*Remarque.* La démonstration de  $d(\Gamma_1) < d(\Gamma)$  s'applique si on autorise  $\Gamma$  à avoir un nombre fini d'orbites finies, à condition qu'aucune composante minimale ne soit complète.

**Corollaire VI.2** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  minimal, et  $\Gamma' \in \mathcal{C}(\Gamma)$ . Il existe dans  $A$  (resp.  $B$ ) deux points  $u$  et  $v$  tels que  $v \in \Gamma'(u)$  et  $v \notin \Gamma(u)$ .

*Démonstration.* Rappelons que  $A$  (resp.  $B$ ) désigne l'ensemble des points  $a_i, a_i + \alpha_i$  (resp.  $b_i, b_i + \alpha_i$ ); nous faisons la démonstration pour  $B$ . Nous pouvons sans perte de généralité remplacer  $\Gamma'$  par le  $\Gamma_1$  construit dans la démonstration précédente.

Considérons le 1-complexe  $T$  qui permet de calculer  $d$  (cf. I.5). Si le résultat est faux, le complexe  $T$  associé à  $\Gamma$  est un sous-complexe du complexe  $T_1$  associé à  $\Gamma_1$ . En particulier,  $T_1$  a au moins autant de sommets que  $T$ . Ceci contredit  $d(\Gamma_1) < d(\Gamma)$ , puisque toute composante de  $T_1$  contient au moins un sommet.  $\square$

**Corollaire VI.3** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  minimal totalement irrationnel, avec  $k \geq 2$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , l'ensemble  $Z_i$  des  $x \in C$  tels que  $x + \alpha_i \notin \Gamma(x)$  est sans point isolé.

*Démonstration.* Soient au contraire  $x \in C$  et  $\delta > 0$  tels que  $]x - \delta, x + \delta[ \cap Z_i = \{x\}$ . Construisons  $\Gamma_1$  en ajoutant à  $\Gamma$  le générateur  $]x - \delta, x + \delta[ \rightarrow ]x - \delta + \alpha_i, x + \delta + \alpha_i[$ . Puisque  $\Gamma$  est totalement irrationnel, on a  $d(\Gamma_1) = 0$ .

Mais on a aussi  $d(\Gamma_1) \geq d(\Gamma) - 1$ : en effet le nombre de sommets de  $T_1$  (cf. preuve précédente) est au moins égal à celui de  $T$  diminué de 1 (seules les orbites de  $x$  et  $x + \alpha_i$  ont changé). Finalement on obtient soit  $d(\Gamma) = 0$  et  $Z_i = \emptyset$ , soit  $d(\Gamma) = 1$  et  $k = 1$ , deux contradictions.  $\square$

*Démonstration du théorème 6 et du corollaire 3* Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  minimal. Soit  $Q$  un ensemble de paires  $(u_j, v_j)$  de points de  $A$ . Pour  $t > 0$ , définissons un pseudogroupe  $\Gamma_Q(t)$  en ajoutant à  $\Gamma$  les générateurs

$$]u_j - t, u_j + t[ \rightarrow ]v_j - t, v_j + t[.$$

Nous allons montrer l'existence d'un  $t_Q > 0$  tel que, pour  $0 < t < t_Q$ , le pseudogroupe  $\Gamma_Q(t)$  soit indépendant de  $t$  (i.e. ses orbites ne dépendent pas de  $t$ ). En particulier,  $u_j - t$  et  $v_j - t$  seront dans la même orbite de  $\Gamma_Q(t)$  pour tout  $t \in ]0, t_Q[$ .

Soit en effet  $t_Q > 0$  tel que  $d(\Gamma_Q(t))$  soit constant sur  $]0, t_Q[$ . Pour  $0 < t, t' < t_Q$ , les pseudogroupes minimaux  $\Gamma_Q(t)$  et  $\Gamma_Q(t')$  ont le même  $d$  et le même groupe des périodes, et l'un est inclus dans l'autre. Ils sont donc égaux d'après le lemme VI.1.

Notons  $\Gamma_Q = \Gamma_Q(t)$ , pour  $0 < t < t_Q$ . Nous obtenons une famille  $\{\Gamma_Q\}$ , indexée par un ensemble fini dont le cardinal peut être majoré en fonction uniquement de  $k$  (attention, nous n'affirmons pas que les  $\Gamma_Q$  sont distincts, ou sont dans  $\mathcal{C}(\Gamma)$ ).

Le théorème 6 et le corollaire 3 résultent immédiatement du lemme suivant.

**Lemme VI.4** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  minimal. Tout  $\Gamma' \in \mathcal{C}(\Gamma)$  est un  $\Gamma_Q$ .

*Démonstration.* Soit  $t_0$  le plus petit de tous les  $t_Q$ . D'après le corollaire VI.2, il existe  $u_1, v_1$  dans  $A$  tels que  $v_1 \in \Gamma'(u_1) - \Gamma(u_1)$ . Soit  $\Gamma_1$  obtenu en ajoutant à  $\Gamma$  le générateur  $]u_1 - t_1, u_1 + t_1[ \rightarrow ]v_1 - t_1, v_1 + t_1[$ , où  $t_1$  est choisi dans  $]0, t_0[$

de façon que  $\Gamma'(u_1 - t_1)$  et  $\Gamma'(v_1 - t_1)$  ne contiennent aucun point de  $A$ ; rappelons qu'en fait  $u_1 - t_1$  et  $v_1 - t_1$  sont dans la même orbite de  $\Gamma_1$  (et donc de  $\Gamma'$ ).

Si  $\Gamma_1 = \Gamma'$ , on a fini. Sinon, il existe  $u_2, v_2$  dans  $A \cup \{u_1 - t_1\} \cup \{v_1 - t_1\}$  avec  $v_2 \in \Gamma'(u_2) - \Gamma_1(u_2)$ . Le choix de  $t_1$  garantit qu'en fait  $u_2$  et  $v_2$  sont dans  $A$ .

On définit alors  $\Gamma_2$  en ajoutant un générateur  $]u_2 - t_2, u_2 + t_2[ \rightarrow ]v_2 - t_2, v_2 + t_2[$ , avec  $t_2 \in ]0, t_0[$  tel que  $\Gamma'(u_2 - t_2) = \Gamma'(v_2 - t_2)$  ne contienne aucun point de  $A \cup \{u_1 - t_1\}$ , et ainsi de suite. Le point important est de choisir chaque  $t_p$  de façon que  $u_{p+1}$  et  $v_{p+1}$  soient forcément dans  $A$  (si  $\Gamma_p \neq \Gamma'$ ).

Après un nombre fini d'étapes ( $A$  est fini), on arrive à un  $\Gamma_s = \Gamma'$ . Appelons  $Q$  l'ensemble des paires  $(u_1, v_1), \dots, (u_s, v_s)$ . Soit  $t_{\min} > 0$  le plus petit des  $t_p$  ( $1 \leq p \leq s$ ), et  $t_{\max} < t_0$  le plus grand. On a  $\Gamma_Q(t_{\min}) \subset \Gamma_s \subset \Gamma_Q(t_{\max})$ , d'où  $\Gamma' = \Gamma_s = \Gamma_Q$ .  $\square$

*Remarque.* On a  $d(\Gamma) > d(\Gamma_1) > \dots > d(\Gamma_s) = d(\Gamma') \geq r(\Gamma') - 1 \geq r(\Gamma) - 1$ , et donc  $s \leq d(\Gamma) - r(\Gamma) + 1$ . Ceci conduit à des bornes plus précises pour le cardinal de  $\mathcal{C}(\Gamma)$ .

### VII Cardinal moyen des orbites; démonstration du théorème 7

Fixons  $\alpha \in T^k$ , et paramétrons  $\mathcal{P}(k, \alpha)$  par les milieux  $u_i \in C$  des  $I_i$ , et les longueurs  $\ell_i \in ]0, 1[$ . Nous notons  $d\Gamma$  la mesure «de Lebesgue»  $d\ell_1 \dots d\ell_k du_1 \dots du_k$ , de masse totale 1, et nous voulons estimer  $e_s(k, \alpha) = \int_{\mathcal{P}(k, \alpha)} e_s(\Gamma) d\Gamma$ .

Pour intégrer sur  $\mathcal{P}(k, \alpha)$ , nous commencerons souvent par intégrer par rapport aux  $u_i$ , en utilisant la formule

$$\int_{T^k} \mu((A_1 + u_1) \cap \dots \cap (A_k + u_k)) du_1 \dots du_k = \prod_{i=1}^k \mu(A_i)$$

où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue sur  $C$ , les  $A_i$  sont des parties de  $C$ , et  $A_i + u_i = \{x + u_i; x \in A_i\}$ .

**Proposition VII.1** *Pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , avec  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ , on a:*

$$\prod_{i=1}^k \left( \alpha_i^2 - \alpha_i + \frac{1}{2} \right) \leq e_s(k, \alpha) \leq \frac{1}{2^k}.$$

*Remarque.* Cette proposition entraîne le théorème 7, puisque  $\alpha_i^2 - \alpha_i + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}$ .

*Démonstration.* Nous pouvons sans perte de généralité supposer  $\Gamma$  totalement irrationnel. On remarque alors que toute orbite finie doit rencontrer le complémentaire de l'union des  $I_i$ . Donc:

$$\begin{aligned} e_s(k, \alpha) &\leq \int_{\mathcal{P}(k, \alpha)} \mu((C - I_1) \cap (C - I_2) \cap \dots \cap (C - I_k)) d\ell_1 \dots d\ell_k du_1 \dots du_k \\ &= \int_{[0, 1]^k} (1 - \ell_1) \dots (1 - \ell_k) d\ell_1 \dots d\ell_k \\ &= \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

En sens contraire, on minore  $e_s(F)$  par la mesure du complémentaire de l'union des  $I_i \cup J_i$ , et on obtient

$$e_s(k, \alpha) \geq \prod_{i=1}^k \int_0^1 \mu(C - ([0, \ell_i[ \cup ]\alpha_i, \alpha_i + \ell_i]) d\ell_i.$$

La fonction à intégrer est facile à déterminer: en supposant pour simplifier  $0 \leq \alpha_i \leq \frac{1}{2}$ , elle vaut  $1 - 2\ell_i$  pour  $\ell_i \leq \alpha_i$ ,  $1 - \alpha_i - \ell_i$  pour  $\alpha_i \leq \ell_i \leq 1 - \alpha_i$ , et 0 pour  $\ell_i \geq 1 - \alpha_i$ . Son intégrale est  $\alpha_i^2 - \alpha_i + \frac{1}{2}$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarques.* – On montre facilement  $e_s(k, 0, \dots, 0) = \frac{1}{2^k}$ . Un calcul que nous omettrons donne  $e_s\left(k, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) = \frac{k+1}{4^k}$ .

– En intégrant l'inégalité  $e_s \geq \max(1 - \ell, 0)$  (cf. corollaire II.5), on minore  $e_s(k, \alpha)$  par  $\frac{1}{(k+1)!}$ , qui est supérieur à  $\frac{1}{4^k}$  pour  $k \leq 5$ .

Pour  $k=2$ , nous allons maintenant relier  $e_s(2, \alpha)$  à la géométrie du compact  $S = S(\alpha) \subset C \times [0, 1]$  défini dans la partie V. Rappelons que les composantes du complémentaire de  $S$  sont des carrés  $A_j$ , et que  $S$  est pour presque tout  $\alpha$  une courbe de Sierpiński.

**Proposition VII.2** *On a*

$$e_s(2, \alpha) = \frac{1}{6} + 2 \int_{C \times [0, 1]} (e_s(\Gamma_{u, \ell}))^2 dud\ell = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \sum_j (\text{aire } A_j)^2.$$

*Remarque.* Puisque  $\Sigma(\text{aire } A_j)^2 \leq (\Sigma \text{aire } A_j)^2$ , les propositions VII.1 et VII.2 conduisent à une majoration de la mesure de  $S$ .

*Démonstration.* Nous savons (cf. V) que  $\mathcal{P}(2, \alpha)$  est l'ensemble des  $\Gamma = R_\theta \varphi_t \Gamma_{u, \ell}$ , avec  $\theta \in C$ ,  $u \in C$ ,  $\ell \in ]0, 1[$ ,  $|t| < \min(\ell, 1 - \ell)$ . Dans ces coordonnées, la mesure s'écrit  $d\Gamma = 2d\ell du dt d\theta$ .

La fonction  $t \mapsto e_s(\varphi_t \Gamma_{u, \ell})$ , définie pour  $|t| < \min(\ell, 1 - \ell)$ , vaut 0 pour  $t \geq e_s(\Gamma_{u, \ell})$ ,  $e_s(\Gamma_{u, \ell}) - t$  pour  $|t| \leq e_s(\Gamma_{u, \ell})$ , et  $-2t$  pour  $t \leq -e_s(\Gamma_{u, \ell})$ . Le calcul de son intégrale donne  $(\min(\ell, (1 - \ell)))^2 + (e_s(\Gamma_{u, \ell}))^2$ .

Calculons  $e_s(2, \alpha)$ , en intégrant par rapport à  $\theta$  puis à  $t$ . Il vient

$$e_s(2, \alpha) = 2 \int_{C \times [0, 1]} (\min(\ell, 1 - \ell))^2 dud\ell + 2 \int_{C \times [0, 1]} (e_s(\Gamma_{u, \ell}))^2 dud\ell,$$

d'où la première égalité de la proposition.

Nous avons vu dans la partie V la formule donnant les valeurs de  $e_s$  à l'intérieur d'un carré  $A_j$ , en fonction de son côté  $\lambda$ . On en déduit l'intégrale sur  $A_j$  de  $e_s^2$ . En fait:

$$\begin{aligned} 2 \int_{A_j} e_s^2 &= 2 \int_{[-\lambda/2, \lambda/2]^2} \left( \frac{\lambda}{2} - \max(|u|, |\ell|) \right)^2 dud\ell \\ &= \frac{\lambda^4}{12} = \frac{1}{12} (\text{aire } A_j)^2, \end{aligned}$$

d'où la proposition puisque  $e_s$  vaut 0 en dehors des  $A_j$ .  $\square$

### VIII Croissance, mesures invariantes, unique ergodicité

Il n'est pas clair a priori que le type de croissance des orbites d'un  $\Gamma$  soit bien défini, c'est-à-dire indépendant du système de générateurs choisi: si  $\Gamma$  est défini par des  $\gamma_i: I_j \rightarrow J_i (1 \leq i \leq k)$ , et si  $\gamma: I \rightarrow J$  est un élément d'un autre système fini de générateurs, il serait concevable que la longueur minimale d'un mot en les  $\gamma_i^{\pm 1}$  envoyant  $x$  sur  $\gamma(x)$  tende vers l'infini quand  $x$  tend vers les extrémités de  $I$ . Le lemme suivant assure qu'il n'en est rien.

**Lemme VIII.1** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ , et  $x, y \in C$ . On suppose qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $y + t \in \Gamma(x + t)$  pour tout  $t \in ]0, \varepsilon[$ . Alors il existe un mot en les  $\gamma_i^{\pm 1}$ , qui est défini sur un intervalle non vide  $]x, x + \delta[$  et l'envoie sur  $]y, y + \delta[$ .

*Remarque.* Dire qu'un mot  $m$  en les  $\gamma_i^{\pm 1}$  est défini sur un intervalle  $I$  signifie que  $I$  est contenu dans le domaine de définition de  $m$ ; il ne lui est pas forcément égal.

*Démonstration.* Fixons d'abord  $\eta \in ]0, \varepsilon[$  avec la propriété suivante: si  $u$  et  $v$  sont des points de  $A$  tels que  $v \in \Gamma(u)$ , alors il existe un mot en les  $\gamma_i^{\pm 1}$  qui est défini sur  $[u - \eta, u]$  et envoie  $u$  sur  $v$  (rappelons que  $A$  est l'ensemble des points  $a_i, a_i + \alpha_i$ ).

Considérons maintenant les mots  $g = g_1 \dots g_p$ , où chaque  $g_j$  est un  $\gamma_i^{\pm 1}$ , tels que  $g$  soit défini sur un intervalle  $]x + t, x + t'[$ , avec  $0 \leq t < t' < \eta$ ; on demande de plus que  $g$  envoie  $]x + t, x + t'[$  sur  $]y + t, y + t'[$  et ne soit pas défini en  $x + t$  (par contre  $g$  peut être défini en  $x + t'$ ). De tels mots existent pourvu que  $y \notin \Gamma(x)$ , ce que nous pouvons supposer.

Appelons  $c(g)$  le nombre d'indices  $j \in \{1, \dots, p\}$  tels que  $g_j$  ne soit pas défini sur  $g_{j+1} \dots g_p ]x, x + t'[$  tout entier, et prenons un  $g$  qui minimise  $c(g)$ . Nous devons montrer  $c(g) = 0$ .

Si  $c(g) > 0$ , on a  $t > 0$ . Soit  $r$  le plus grand  $j$  tel que  $g_j$  ne soit pas défini en  $g_{j+1} g_{j+2} \dots g_p(x + t)$ , et  $s$  le plus petit  $j$  tel que  $g_j^{-1}$  ne soit pas défini en  $g_{j-1}^{-1} g_{j-2}^{-1} \dots g_1^{-1}(y + t)$ ; on a  $r \geq s$ .

Considérons  $u = g_{r+1} \dots g_p(x + t)$ , et  $v = g_{s-1}^{-1} \dots g_1^{-1}(y + t)$ . Ce sont deux points de  $A$ , qui sont dans la même orbite puisque  $y + t \in \Gamma(x + t)$ . Remplaçons dans  $g$  le sous-mot  $g_s \dots g_r$  par un mot défini sur  $[u - t, u]$  et envoyant  $u$  sur  $v$ . On obtient un  $g'$  avec  $c(g') < c(g)$ , contradiction.  $\square$

**Corollaire VIII.2** Si  $x$  et  $y$  sont comme dans le lemme, avec  $y \notin \Gamma(x)$ , alors les orbites  $\Gamma(x)$  et  $\Gamma(y)$  rencontrent  $A$ .

**Corollaire VIII.3** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ , et  $x, y \in C$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  avec  $y + t \in \Gamma(x + t)$  pour tout  $t \in ]0, \varepsilon[$ , si et seulement si on peut passer de  $x$  à  $y$  en appliquant un nombre fini de fois les  $\hat{\gamma}_i: [a_i, b_i[ \rightarrow [a_i + \alpha_i, b_i + \alpha_i[$  et leurs inverses.

**Corollaire VIII.4** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ . Sur l'ensemble des orbites de  $\Gamma$ , soient  $C_\tau$  les classes de la relation d'équivalence «  $\Gamma(y) \sim \Gamma(x)$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  avec  $y + t \in \Gamma(x + t)$  pour tout  $t \in ]0, \varepsilon[$  ». Alors  $d(\Gamma) = \sum (|C_\tau| - 1)$ , où  $|C_\tau|$  est le cardinal de  $C_\tau$ .

*Démonstration.* Seul le corollaire VIII.4, qui donne une nouvelle caractérisation intrinsèque de  $d(\Gamma)$ , en appelle une. D'après I.5, on lit  $d(\Gamma)$  sur le 1-complexe  $T$  dont les sommets sont les orbites rencontrant  $A$ , et dont les arêtes relient  $\Gamma(a_i)$  à  $\Gamma(a_i + \alpha_i)$ :  $d(\Gamma)$  est le nombre de sommets moins le nombre de composantes.

D'après le lemme VIII.1, seules les orbites des points de  $A$  peuvent être dans des  $C_t$  de cardinal  $>1$ . De plus, les orbites de 2 points de  $A$  sont dans la même classe  $C_t$  si et seulement si ce sont des sommets de la même composante de  $T$ , d'où le résultat.  $\square$

Rappelons (I.1) que, pour  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  et  $t \geq 0$ , les orbites de  $\varphi_t \Gamma$  ne dépendent que de celles de  $\Gamma$ . Voici un contre-exemple pour  $t < 0$ : soit  $h > 0$ , et  $\Gamma_h \in \mathcal{P}(2)$  défini par  $I_1 = ]0, \frac{1}{2} + h[$ ,  $I_2 = ]\frac{1}{2}, 1 + h[$ , et  $\alpha_1 = \alpha_2 \notin \mathbb{Q}$ ; les  $\Gamma_h$  ont tous les mêmes orbites, mais  $\varphi_t \Gamma_h$  et  $\varphi_t \Gamma_{h'}$  n'ont pas les mêmes orbites si  $h \neq h'$  et  $t \leq -\min(h, h')$ . Nous avons cependant:

**Corollaire VIII.5** *Le germe en 0 de  $\varphi_t \Gamma$  est intrinsèque: si  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  et  $\Gamma' \in \mathcal{P}(k')$  ont les mêmes orbites, il existe  $\delta > 0$  tel que  $\varphi_t \Gamma$  et  $\varphi_t \Gamma'$  aient les mêmes orbites pour  $t > -\delta$ .*

*Démonstration.* Soit  $\gamma'_j: I'_j \rightarrow J'_j$  un générateur de  $\Gamma'$ . D'après le lemme VIII.1, on peut recouvrir  $I'_j$  par un nombre fini d'intervalles ouverts sur chacun desquels  $\gamma'_j$  est donné par un mot en les  $\gamma_i^{\pm 1}$ . Soit  $\delta_j$  un nombre de Lebesgue pour ce recouvrement, et  $s \in ]0, \min_{1 \leq j \leq k'} \delta_j[$ .

Si  $x \in ]a'_j, b'_j - s[$ , l'intervalle  $[x, x + s]$  est contenu dans un intervalle du recouvrement, et  $\gamma'_j(x) \in (\varphi_{-s} \Gamma')(x)$ . En d'autres termes, les orbites de  $\varphi_{-s} \Gamma'$  sont contenues dans celles de  $\varphi_{-s} \Gamma$ . On en déduit le résultat.  $\square$

Etant donné  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$  et  $x \in C$ , on définit  $c_x(n)$ , la fonction de croissance de l'orbite de  $x$ , comme le nombre de points de  $C$  qui sont image de  $x$  par un mot en les  $\gamma_i^{\pm 1}$  de longueur  $\leq n$ .

D'après ce qui précède, le type de croissance de la fonction  $c_x$  ne dépend pas du système de générateurs  $(\gamma_i)$ . Bien sûr  $c_x(n)$  est toujours majoré par la fonction de croissance du groupe  $P$ , qui est polynomiale de degré  $r(\Gamma) - 1$ .

**Proposition VIII.6** *Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ , minimal mais non équivalent à un groupe. Soit  $d = d(\Gamma)$ , et soit  $p$  le nombre de mesures de probabilité  $\Gamma$ -invariantes ergodiques.*

- (1) *On a  $p \leq d \leq k$ .*
- (2) *La croissance de toute orbite de  $x$  est majorée par un polynôme de degré  $d - p + 1$ .*

*Démonstration.* Soient  $\mu_1, \dots, \mu_p$  des mesures de probabilité  $\Gamma$ -invariantes ergodiques. Il est classique (voir notations et références dans la démonstration du lemme III.4) que les  $[\mu_i]: \pi_1(C/\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  sont linéairement indépendants: étant donné une mesure  $\Gamma$ -invariante  $V$ , la connaissance de  $[V]$  détermine  $V([x, y])$  si  $y \in \Gamma(x)$ , donc  $V$ ; une relation linéaire entre les  $[\mu_i]$  fournirait ainsi une relation entre les  $\mu_i$ , ce qu'interdit l'ergodicité. En particulier,  $p$  est fini  $\leq d + 1$ .

A cause de cette indépendance, il existe des  $V = a_1 \mu_1 + \dots + a_p \mu_p$ , avec les  $a_i$  réels positifs, tels que l'image de  $[V]$  engendre un sous-groupe de  $\mathbb{R}$  de rang  $\leq d + 1 - (p - 1) = d - p + 2$ . Autrement dit,  $\Gamma$  est topologiquement conjugué à un  $\Gamma' \in \mathcal{P}(k)$  tel que  $r(\Gamma') \leq d - p + 2$ . On en déduit l'assertion 2 de la proposition, donc aussi l'assertion 1.  $\square$

Nous allons maintenant généraliser des résultats d'unique ergodicité obtenus par Veech [Ve2] et Boshernitzan [Bo] pour les échanges d'intervalles.



Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ . Une composante minimale  $U$  est *uniquement ergodique* s'il existe (à proportionnalité près) une seule mesure  $\Gamma$ -invariante  $V$  telle que  $V(C-U)=0$ . Une composante complète est toujours uniquement ergodique.

Pour  $n \geq 1$ , soit  $D_n$  l'ensemble des images des points  $a_i, b_i, a_i + \alpha_i, b_i + \alpha_i$  par les mots de longueur  $< n$  en les  $\gamma_i^{\pm 1}$ . C'est aussi l'ensemble des extrémités des composantes des domaines de définition des mots de longueurs  $\leq n$  en les  $\gamma_i^{\pm 1}$ . Soit  $\varepsilon_n$  le minimum des distances entre points distincts de  $D_n$ .

**Théorème VIII.7** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ . Si  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} n\varepsilon_n > 0$ , alors toute composante minimale est *uniquement ergodique*.

**Corollaire VIII.8** Soit  $\Gamma \in \mathcal{P}(k)$ , normalisé pour que  $a_1 = 0$ . Si le sous-groupe de  $\mathbb{R}$  engendré par 1 et les  $\alpha_i, a_i, b_i$  est de rang 2, toute composante minimale est *uniquement ergodique*.

Ces résultats généralisent respectivement les théorèmes 1.2 de [Ve2] et 1.1 de [Bo], et les démonstrations (données ci-dessous) sont proches.

Soit  $\varphi$  un échange d'intervalles. Sa minimalité (au sens des échanges d'intervalles) est par définition celle du système engendré par les  $\hat{\gamma}_i : [a_i, b_i[ \rightarrow [a_i + \alpha_i, b_i + \alpha_i[$ ; elle n'entraîne pas forcément celle du pseudogroupe  $\Gamma$  associé (géométriquement, cela correspond à l'existence de liaisons entre selles dans le feuilletage suspension de  $\varphi$ ).

C'est une des raisons pour lesquelles nous parlons de l'unique ergodicité des composantes minimales.

S'il existe un  $\Gamma \in \mathcal{P}(2)$  avec une composante minimale non uniquement ergodique, alors  $\Gamma$  est minimal, admet exactement 2 mesures de probabilité invariantes ergodiques, et est topologiquement conjugué à un  $\Gamma' \in \mathcal{P}(2)$  de rang  $r(\Gamma') = 2$ .

En général, le corollaire VIII.8 n'est pas vrai sous l'hypothèse plus faible  $r(\Gamma) \leq 2$  (un exemple avec  $k=5$  est décrit dans [Ve2, remarque 1.6]). Le cas  $k=2$  est-il spécial?

*Démonstration du théorème VIII.7* Si toute orbite singulière est finie, l'union des orbites finies est ouverte et fermée: il n'y a donc pas d'orbite infinie, et le théorème est vide. Sinon, nous remarquons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ , et nous fixons une composante minimale  $U$ .

Montrons d'abord un résultat d'ergodicité: si  $P \subset U$  est mesurable et  $\Gamma$ -invariant, alors  $\mu(P)$  vaut 0 ou  $\mu(U)$ . Rappelons que  $\mu$  désigne la mesure de Lebesgue.

**Lemme VIII.9** Supposons  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} n\varepsilon_n > 0$ . Pour tout  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ , il existe une infinité d'entiers  $n$  avec la propriété suivante: si  $I \subset U$  est un intervalle de longueur  $\varepsilon_n$ , alors  $\lambda(I) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(I \cap P) / \mu(I)$  n'appartient pas à  $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ .

*Démonstration.* Nous pouvons supposer  $\varepsilon < \limsup_{n \rightarrow +\infty} n\varepsilon_n$ . Choisissons  $\delta > 0$  et  $Q \subset U$  mesurable, avec  $\mu(Q) > \mu(U) - \varepsilon$ , tels que  $\lambda(J) \notin [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$  pour tout intervalle  $J \subset U$  de longueur  $< \delta$  qui rencontre  $Q$ .

Soit  $n$  tel que  $n\varepsilon_n > \varepsilon$  et  $\varepsilon_n < \delta$  (il en existe une infinité), et soit  $I \subset U$  un intervalle ouvert de longueur  $\varepsilon_n$ . Si  $I$  contient un point de  $D_n$  (nécessairement unique), appelons-le  $x$ ; sinon, soit  $x$  quelconque dans  $I$ . Dans les deux cas,

un mot de longueur  $\leq n$  en les  $\gamma_i^{\pm 1}$  est défini sur  $I$  tout entier dès qu'il est défini en  $x$ .

L'orbite de  $x$  étant infinie, il existe des mots  $\delta_0 = \text{id}$ ,  $\delta_1 = \gamma_{i_1}^{\tau_1}$ ,  $\delta_2 = \gamma_{i_2}^{\tau_2} \gamma_{i_1}^{\tau_1}$ , ...,  $\delta_n = \gamma_{i_n}^{\tau_n} \dots \gamma_{i_1}^{\tau_1}$  (avec les  $\tau_j = \pm 1$ ), définis en  $x$ , tels que les  $\delta_j(x)$  soient distincts.

Remarquons que, si un mot  $\gamma$  de longueur  $\leq n$  en les  $\gamma_i^{\pm 1}$  est défini en  $y \in C$ , alors  $\gamma y = y$  ou  $|\gamma y - y| \geq \varepsilon_n$ . En effet, si  $\bar{y}$  est une extrémité de la composante du domaine de définition de  $\gamma$  qui contient  $y$ , les points  $\bar{y} + \gamma y - y$  sont dans  $D_n$ .

On en déduit ici que les  $\delta_j(x)$  sont distants d'au moins  $\varepsilon_n$ . Pour  $j = 0, \dots, n$ , les intervalles  $\delta_j(I)$  sont donc disjoints. Chacun étant de longueur  $\varepsilon_n$ , l'hypothèse  $n\varepsilon_n > \varepsilon$  garantit qu'un  $\delta_j(I)$  rencontre  $Q$ . On a donc  $\lambda(I) = \lambda(\delta_j(I)) \notin [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ .  $\square$

Si  $0 < \mu(P) < \mu(U)$ , soient  $u$  et  $v$  des points de densité de  $P$  et  $U - P$  respectivement. Soit  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ . Pour  $n$  assez grand, il existe dans  $U$  des intervalles  $I_u, I_v$  de longueur  $\varepsilon_n$  tels que  $\lambda(I_u) > 1 - \varepsilon$  et  $\lambda(I_v) < \varepsilon$  (car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ ). Si  $u$  et  $v$

ont été choisis dans la même composante connexe de l'ouvert  $U$ , ceci contredit le lemme VIII.9 puisque  $\lambda(I)$  est une fonction continue des extrémités de  $I$ . Nous avons donc montré l'ergodicité.

Supposons maintenant que  $U$  n'est pas uniquement ergodique. Soit  $\mu'$  une mesure de probabilité  $\Gamma$ -invariante telle que les restrictions à  $U$  de  $\mu$  et  $\mu'$  ne soient pas proportionnelles, et soit  $\bar{\mu} = \frac{\mu + \mu'}{2}$ .

Il existe  $P \subset U$  mesurable  $\Gamma$ -invariant avec  $0 < \bar{\mu}(P) < \bar{\mu}(U)$ . Soit d'autre part  $\bar{\varepsilon}_n$  la plus petite  $\bar{\mu}$ -mesure d'un intervalle joignant 2 points de  $D_n$ . On a  $\bar{\varepsilon}_n \geq \frac{1}{2} \varepsilon_n$ , et donc  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} n\bar{\varepsilon}_n > 0$ .

On contredit alors l'ergodicité en remplaçant dans ce qui précède  $\mu$  par  $\bar{\mu}$  et  $\varepsilon_n$  par  $\bar{\varepsilon}_n$ . De façon équivalente, on peut raisonner sur le pseudogroupe obtenu en conjugant  $\Gamma$  par un homéomorphisme de  $C$  envoyant  $\bar{\mu}$  sur  $\mu$ : il vérifiera encore  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} n\varepsilon_n > 0$ .  $\square$

*Démonstration du corollaire VIII.8* Par hypothèse, tous les  $\alpha_i, a_i, b_i$  appartiennent à  $\frac{1}{q} \mathbb{Z} \oplus \mathcal{B} \mathbb{Z}$ , où  $q$  est un entier et  $\mathcal{B}$  un irrationnel.

Appelons  $p$  la plus grande des valeurs absolues des coefficients de  $\mathcal{B}$  dans les écritures des  $\alpha_i, a_i, b_i, a_i + \alpha_i, b_i + \alpha_i$ .

Tout point  $u \in D_n$  s'écrit alors  $\frac{r(u)}{q} + s(u) \mathcal{B}$  avec  $|s(u)| \leq pn$ . On en déduit

$$\varepsilon_n \geq \frac{1}{q} \min \{ |r + s\mathcal{B}|; r \in \mathbb{Z}; s = 1, 2, \dots, 2pn \},$$

d'où  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} n\varepsilon_n \geq 1/(8pq^2)$  en raisonnant comme dans [Bo, p. 388].  $\square$

*Remerciements.* P. Arnoux a stimulé mon intuition par son intérêt et ses dessins sur ordinateur (cf. Figs. 1 et 3a). J'ai pu exposer de larges portions de cet article en 1989 au séminaire de

systèmes dynamiques de l'Université de Floride; A. Fathi m'a initié en particulier à la dimension de Hausdorff, et J. Mayer à la courbe de Sierpiński. J'ai également profité de discussions avec F. Laudenbach, J.C. Sikorav, et J.C. Yoccoz (à qui est due la démonstration du lemme V.9).

### Références

- [AL] Arnoux, P., Levitt, G.: Sur l'unique ergodicité des 1-formes fermées singulières. *Invent. Math.* **84**, 141–156 (1986)
- [Bo] Boshernitzan, M.: Rank two interval exchange transformations. *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **8**, 379–394 (1988)
- [E] Ehresmann, C.: Sur la théorie des espaces fibrés. In: *Coll. Int. Top. Alg.*, pp. 3–15. Paris: CNRS 1947. In: *Œuvres complètes*, I, pp. 133–145. Amiens 1984
- [Ha1] Haefliger, A.: Some remarks on foliations with minimal leaves. *J. Differ. Geom.* **15**, 269–284 (1980)
- [Ha2] Haefliger, A.: Groupoïdes d'holonomie et classifiants. In: *Structures transverses des feuilletages*. (Astérisque, vol. 116, pp. 70–97) Paris: Soc. Math. Fr. 1984
- [Ha3] Haefliger, A.: Pseudogroups of local isometries. In: Cordero (ed.) *Differential Geometry*, Santiago de Compostela. (Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 131, pp. 174–197) Harlow: Longman 1985
- [Ha4] Haefliger, A.: Leaf closures in Riemannian foliations. In: Matsumoto, Y. et al. (eds.) *A fete of topology, papers dedicated to I. Tamura*, pp. 3–32. Boston, MA: Academic Press 1988
- [Im] Imanishi, H.: On codimension one foliations defined by closed one forms with singularities. *J. Math. Kyoto Univ.* **19**, 285–291 (1979)
- [Ke] Keane, M.: Interval exchange transformations. *Math. Z.* **141**, 25–31 (1975)
- [Le1] Levitt, G.: Pantalons et feuilletages des surfaces. *Topology* **21**, 9–33 (1982)
- [Le2] Levitt, G.: Sur les mesures transverses invariantes d'un feuilletage de codimension 1. *C.R. Acad. Sci., Paris* **290**, 1139–1140 (1980)
- [Le3] Levitt, G.: 1-formes fermées singulières et groupe fondamental. *Invent. Math.* **88**, 635–667 (1987)
- [Le4] Levitt, G.: Groupe fondamental de l'espace des feuilles dans les feuilletages sans holonomie. *J. Differ. Geom.* **31**, 711–761 (1990)
- [Le5] Levitt, G.: Constructing free actions on  $\mathbb{R}$ -trees. *Duke Math. J.* **69**, 615–633 (1993)
- [Mo] Molino, P.: *Riemannian foliations*. (Prog. Math., vol. 73) Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1988
- [Ra] Rauzy, G.: Une généralisation du développement en fraction continue. *Sémin. Delange-Pisot-Poitou*, n° 15 fasc. 1, Paris, 18ème année (1976–1977)
- [Sac] Sacksteder, R.: Foliations and pseudogroups. *Am. J. Math.* **87**, 79–102 (1965)
- [Sa1] Salem, E.: Une généralisation du théorème de Myers-Steenrod aux pseudogroupes d'isométries. *Ann. Inst. Fourier* **38**, 185–200 (1988)
- [Sa2] Salem, E.: Riemannian foliations and pseudogroups. In: Molino, P.: *Riemannian foliations*, appendix D. (Prog. Math., vol. 73) Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1988
- [Si1] Sierpiński, W.: Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. *C.R. Acad. Sci., Paris* **160**, 302–305 (1915); *Œuvres choisies II*, pp. 99–106. Varsovie: PWN 1975
- [Si2] Sierpiński, W.: Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée. *C.R. Acad. Sci., Paris* **162**, 629–632 (1916); *Œuvres choisies II*, pp. 107–119. Varsovie: PWN 1975
- [SS] Singer, I.M., Sternberg, S.: The infinite groups of Lie and Cartan. *J. Anal. Math.* **15**, 1–114 (1965)
- [VW] Veblen, O., Whitehead, J.H.C.: *The foundations of differential geometry*. Camb. Tracts Math. **29** (1932)
- [Ve1] Veech, W.A.: Interval exchange transformations. *J. Anal. Math.* **33**, 222–272 (1978)
- [Ve2] Veech, W.A.: Boshernitzan's criterion for unique ergodicity of an interval exchange transformation. *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **7**, 149–153 (1987)
- [Wh] Whyburn, G.T.: Topological characterization of the Sierpiński curve. *Fundam. Math.* **45**, 320–324 (1958)