Werk

Titel: Théorème de Brun-Titchmarsh; application au théorème der Fermat.

Autor: Fouvry, Étienne

Jahr: 1985

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0079|log27

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Invent. math. 79, 383–407 (1985)

Inventiones mathematicae
© Springer-Verlag 1985

Théorème de Brun-Titchmarsh; application au théorème de Fermat

Étienne Fouvry

E.R.A. au C.N.R.S. N° 226, U.E.R. de Mathématiques, Université de Bordeaux I, 351, cours de la Libération, F-33405 Talence, Cedex, France

I. Présentation des résultats

En convenant que la lettre p désigne un nombre premier et $P^+(n)$ le plus grand facteur premier de l'entier $n \geqq 2$, on s'intéresse à la question suivante: le nombre $P^+(p-1)$ peut-il être grand? Pour préciser ce problème, introduisons, pour a entier non nul, $x \geqq 2$ et $\delta \geqq 0$, les quantités:

$$A_a(x, \delta) = |\{p;\, a+2 \leqq p \leqq x,\, P^+(p-a) \geqq x^\delta\}|$$

et

$$A_a^*(x, \delta) = |\{p;\, a+2 \leqq p \leqq x,\, p \equiv 2[3],\, P^+(p-a) \geqq x^\delta\}|$$

(le caractère quelque peu artificiel de $A_a^*(x, \delta)$ sera éclairci d'ici peu) et intéressons-nous aux valeurs de δ, pour lesquelles l'assertion suivante est vraie:

Il existe $c_0 = c_0(\delta, a) > 0$ tel que, pour $x > x_0(\delta, a)$, on ait l'inégalité:

$$A_a^*(x, \delta) \geqq c_0 \frac{x}{\log x}. \tag{1.1}$$

Parmi les différents travaux sur cette constante δ, citons en particulier:

$\delta = 0{,}625 - \varepsilon$, obtenue par Hooley ([11]) en utilisant principalement le théorème de Bombieri-Vinogradov et l'inégalité de grand crible,

$\delta = 0{,}6563$ dû à Deshouillers et Iwaniec ([3]) en utilisant le crible de Rosser-Iwaniec et des majorations en moyenne de sommes de Kloosterman ([2]). Toutefois, en incorporant aussi des résultats de calcul de dispersion ([4–6]), l'auteur est parvenu à $\delta = 0{,}6578$ ([7]). Ces différentes valeurs de δ sont, en fait, énoncées pour $A_a(x, \delta)$ mais sont aussi valables pour $A_a^*(x, \delta)$. (On se reportera à [14] pour une étude des différents travaux sur δ.)

Dans cet article, on démontre:

Théorème 1. *L'assertion* (1.1) *est vraie pour*

$$\delta = \delta_0 = 0{,}6687.$$

Ce théorème a une conséquence directe sur le premier cas du théorème de Fermat. Rappelons que l'on dit que le premier cas du théorème de Fermat est vrai pour l'exposant premier l, si on a l'implication

$$(X, Y, Z) \in \mathbb{Z}^3 \quad \text{et} \quad X^l + Y^l + Z^l = 0 \Rightarrow l \mid XYZ. \tag{1.2}$$

Le premier critère pour déceler des exposants l vérifiant (1.2) est dû à Sophie Germain; malgré un grand nombre de travaux sur ce sujet (voir [15] par exemple), la question de l'existence d'une infinité de tels exposants l était encore un problème ouvert; mais récemment Adleman et Heath-Brown (voir l'article suivant) ont trouvé un très joli critère, dont la vérification ne semblait plus désespérément hors d'atteinte des méthodes actuelles de théorie analytique des nombres:

Critère (Adleman et Heath-Brown). *Si l'inégalité* (1.1) *est vraie pour* $a=1$ *et un* $\delta > 2/3$, *le premier cas du théorème de Fermat est vrai pour une infinité d'exposants premiers.*

En combinant ce critère avec le théorème 1, on a donc le résultat suivant, qui est la motivation profonde de cet article:

Théorème 2 (Adleman, Fouvry et Heath-Brown). *Le premier cas du théorème de Fermat est vrai pour une infinité d'exposants premiers.*

Plus précisément, on montre la minoration

$$|\{l \leqq x;\ l \text{ premier vérifiant } (1.2)\}| \gg x^{\delta_0}$$

pour x suffisamment grand.

L'abord des quantités $A_a(x, \delta)$ et $A_a^*(x, \delta)$ se fait par la somme de Tchebyshev-Hooley (voir § VI) et nécessite un théorème de Brun-Titchmarsh en moyenne, c'est-à-dire des majorations du cardinal des nombres premiers dans des progressions arithmétiques, majorations valables pour presque toutes les progressions. On pose donc, pour $x \geqq 2$, a et q entiers ($q \geqq 1$)

$$\pi(x; q, a) = |\{p; p \leqq x \text{ et } p \equiv a[q]\}|$$

et

$$\pi^*(x; q, a) = |\{p; p \leqq x, p \equiv a[q] \text{ et } p \equiv 2[3]\}| \qquad \text{si } 3 \nmid q.$$

Le problème de la majoration en moyenne de $\pi(x; q, a)$ s'énonce de la façon suivante:

Soient $\varepsilon > 0$, $A > 0$, $\frac{1}{2} \leqq \theta \leqq 1 - \varepsilon$, *et* $\mathcal{Q}(a, \theta) = \{q; x^\theta < q \leqq 2x^\theta,\ (q, a) = 1\}$; *pour quelle fonction* $C(\theta)$ *a-t-on l'inégalité*

$$\pi(x; q, a) \leqq \frac{(C(\theta) + \varepsilon)x}{\varphi(q) \log x} \tag{1.3}$$

pour presque tout q *de* $\mathcal{O}(a, \theta)$, *ce qui signifie que le nombre d'exceptions est inférieur à* $x^\theta (\log x)^{-A}$ *pour* $x > x_0(\varepsilon, a, A)$?

Dans le cas de la fonction $\pi^*(x; q, a)$ on s'intéressera évidemment à l'inégalité

$$\pi^*(x; q, a) \leqq \frac{(C^*(\theta)+\varepsilon)x}{\varphi(q)\log x} \tag{1.3*}$$

lorsque q appartient à $\mathcal{Q}^*(a, \theta) = \{q; x^\theta < q \leqq 2x^\theta, (q, 3a) = 1\}$.

Enfin, on rappelle la définition de la fonction de Buchstab $w(u)$:

$$\begin{aligned} w(u) &= 0 && \text{pour } 0 \leqq u < 1 \\ w(u) &= 1 && \text{pour } 1 \leqq u \leqq 2 \\ w'(u) &= \frac{w(u-1)}{u-1} && \text{pour } u > 2. \end{aligned}$$

On peut maintenant énoncer le théorème 3 qui a, pour conséquence, le théorème 1 (voir § VI):

Théorème 3. *L'assertion* (1.3) *est vraie pour les choix suivants de* $C(\theta)$:

$$\tfrac{1}{2} \leqq \theta \leqq \tfrac{17}{32} - \varepsilon\colon\ C(\theta) = 1 + \left(\int_{\frac{3}{5}(1-\theta)}^{\max(\frac{3}{7}, \frac{5}{8} - \frac{3}{8}\theta)} + \int_{1-\theta}^{\frac{1}{2}} \right) \frac{w((1-t)/t)}{t(1-t)}\, dt$$
$$+ \iint_{\mathcal{E}(\theta)} \frac{w((1-t_1-t_2-t_3)/t_3)}{t_1 t_2 t_3 (1-t_1-t_2-t_3)}\, dt_1\, dt_2\, dt_3$$

avec $\mathcal{E}(\theta) = \{(t_1, t_2, t_3);\ \frac{5}{6} - \frac{4}{3}\theta \leqq t_3 \leqq t_2 \leqq t_1 \leqq \frac{3}{5}(1-\theta)\}$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{17}{32} - \varepsilon < \theta \leqq \tfrac{8}{15}\colon && C(\theta) = \frac{22}{15-13\theta} - \log\frac{4(1-\theta)}{3\theta} \\
&\tfrac{8}{15} \leqq \theta \leqq \tfrac{4}{7}\colon && C(\theta) = \frac{10}{9-10\theta} - \log\frac{4(1-\theta)}{3\theta} \\
&\tfrac{4}{7} \leqq \theta \leqq \tfrac{3}{5}\colon && C(\theta) = \frac{10}{9-10\theta} \\
&\tfrac{3}{5} \leqq \theta \leqq \tfrac{5}{7}\colon && C(\theta) = \frac{8}{3-\theta} \\
&\tfrac{5}{7} \leqq \theta \leqq \tfrac{3}{4}\colon && C(\theta) = \frac{6}{1+\theta} \\
&\tfrac{3}{4} \leqq \theta \leqq \tfrac{5}{6}\colon && C(\theta) = \frac{12}{5-2\theta} \\
&\tfrac{5}{6} \leqq \theta \leqq \tfrac{9}{10}\colon && C(\theta) = \frac{48}{15-2\theta} \\
&\tfrac{9}{10} \leqq \theta \leqq 1-\varepsilon\colon && C(\theta) = \frac{4}{2-\theta}.
\end{aligned}$$

Dans le cas de la relation (1.3*), *on peut donner à* $C^*(\theta)$ *les valeurs correspondantes de* $C(\theta)$, *divisées par* 2. *Toutes ces majorations sont valables uniformément pour* $|a| \leqq (\log x)^A$.

Les valeurs proposées de $C(\theta)$ sur les différents intervalles sont des améliorations de ce qui était précédemment connu ([3, 7, 14]), mais ne sont pas toutes indispensables pour franchir dans (1.1) la valeur 2/3 de δ.

L'amélioration la plus spectaculaire a lieu en $\theta=\frac{1}{2}$, puisqu'on a $C(\frac{1}{2})\leqq 1{,}73$ au lieu de 2,30 ([7]), on a donc franchi la valeur 2, autrement dit, pour presque tout q compris entre $x^{\frac{1}{2}}$ et $x^{0{,}513}$, on a contourné «le phénomène de parité» inhérent au crible, grâce à une identité combinatoire, dans laquelle on peut évaluer un grand nombre de termes, que les formules classiques du crible ignorent. Rappelons que la valeur conjecturée $C(\theta)=1$ est démontrée pour $\theta\leqq\frac{1}{2}-\varepsilon$ (conséquence du théorème de Bombieri-Vinogradov). Il est évident qu'on peut remplacer, dans la définition de $\pi^*(x;q,a)$, la congruence modulo 3 par une autre congruence, en apportant les modification idoines.

Ce travail a été réalisé lors d'un séjour à l'Institute for Advanced Study à Princeton; l'auteur a profité de très intéressantes conversations avec les Professeurs Bombieri et Iwaniec, il tient à les remercier ici.

II. Lemmes

Les trois premiers lemmes rappellent des résultats classiques de la théorie du crible. Si $\mathscr{A}$ est une suite finie d'entiers et $\mathscr{P}$ un ensemble de nombres premiers, on pose, pour d entier $\geqq 1$ et $z\geqq 1$:

$$P(z)=\prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p<z}} p, \qquad \mathscr{A}_d=\{n\in\mathscr{A};\ n\equiv 0[d]\}$$

et

$$\mathscr{S}(\mathscr{A},\mathscr{P},z)=|\{n\in\mathscr{A};\ (n,P(z))=1\}|.$$

Le premier lemme est obtenu par itération de l'identité de Buchstab ([12], lemme 2):

Lemme 1. *Pour $R\geqq 1$, on a l'égalité*

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(\mathscr{A},\mathscr{P},z)&+\sum_{r=1}^{R}\sum_{\substack{D_{2r-1}\leqq p_{2r-1}<\dots<p_1<z\\ p_{2l-1}<D_{2l-1}(l<r)}}\mathscr{S}(\mathscr{A}_{p_1\dots p_{2r-1}},\mathscr{P},p_{2r-1})\\ &+\sum_{\substack{p_{2R+1}<\dots<p_1<z\\ p_{2l-1}<D_{2l-1}(l\leqq R)}}\mathscr{S}(\mathscr{A}_{p_1\dots p_{2R+1}},\mathscr{P},p_{2R+1})\\ &=|\mathscr{A}|+\sum_{r=1}^{2R}(-1)^r\sum_{\substack{p_r<\dots<p_1<z\\ p_{2l-1}<D_{2l-1}(2l-1\leqq r)}}|\mathscr{A}_{p_1\dots p_r}|\end{aligned}$$

où les p_i apparaissant dans les sommations, sont des nombres premiers de $\mathscr{P}$, et où les D_i $(i=1,3,\dots,2R-1)$ sont des fonctions arbitraires de $p_1,\dots,p_{i-1}$.

On suppose maintenant que chaque $|\mathscr{A}_d|$ s'écrit sous la forme

$$|\mathscr{A}_d|=\frac{\omega(d)}{d}X+r(\mathscr{A},d) \tag{2.1}$$

où $\omega(d)$ est une fonction multiplicative vérifiant l'inégalité du crible linéaire:

$$\frac{V(z_1)}{V(z_2)} \leqq \frac{\log z_2}{\log z_1}\left(1+\frac{K}{\log z_1}\right) \tag{2.2}$$

pour $z_2 > z_1 \geqq 2$ et $V(z) = \prod_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p<z}} \left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)$.

En outre, on suppose qu'on a l'inégalité

$$\sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ z_1\leqq p<z_2}} \sum_{\alpha\geqq 2} \frac{\omega(p^\alpha)}{p^\alpha} \leqq \frac{L}{\log 3z_1} \tag{2.3}$$

(K et L sont >1); on pose aussi, pour $D>1$, $s=\log D/\log z$. On peut alors énoncer un cas particulier de la célèbre formule du crible de Rosser-Iwaniec ([13], Théorème 4):

Lemme 2. *Soit $z^3 \geqq D \geqq z \geqq 2$ et soit $0<\varepsilon<1/3$. Sous les conditions* (2.1), (2.2) *et* (2.3), *on a l'inégalité*

$$\mathscr{S}(\mathscr{A},\mathscr{P},z) + \sum_{D^{\frac{1}{3}}\leqq p_1<z} \mathscr{S}(\mathscr{A}_{p_1},\mathscr{P},p_1)$$
$$\leqq X V(z)\{2e^\gamma s^{-1}+E\} + \sum_{(D)} r^+(\mathscr{A},(D))$$

avec γ constante d'Euler et $E=E(\varepsilon,D,K,L) \ll \varepsilon+\varepsilon^{-8}e^{3\sqrt{K}+L}(\log D)^{-\frac{1}{3}}$. Dans le terme d'erreur, on note par (D), une suite éventuellement vide $(D_1,\dots,D_l)$ de nombres de la forme

$$D^{\varepsilon^2(1+\varepsilon^9)^n} \qquad (n\geqq 0)$$

vérifiant les relations:

$$D_1 \geqq D_2 \geqq \dots \geqq D_l; \qquad D_1 \dots D_{2i} D_{2i+1}^3 < D, \qquad \text{pour } 0\leqq i \leqq (l-1)/2,$$

et on pose

$$r^+(\mathscr{A},(D)) = \sum_{v<D^\varepsilon} c^+_{(D)}(v,\varepsilon) \sum_{D_i\leqq p_i<D_i^{1+\varepsilon^9}} r(\mathscr{A}, vp_1\dots p_l).$$

Dans cette expression, l'entier $vp_1\dots p_l$ a tous ses facteurs premiers dans $\mathscr{P}$ et on a l'inégalité:

$$|c^+_{(D)}(v,\varepsilon)| \leqq 1.$$

Signalons que la majoration donnée de E a été obtenue en rassemblant les différentes majorations (29), (30), (31), (32) et (33) de [13].

On rappelle maintenant le «lemme fondamental» de la théorie du crible ([13], Lemmes 3 et 4).

Lemme 3. *Sous la condition* (2.2), *il existe deux suites de coefficients $\{\mu_d^+\}$ et $\{\mu_d^-\}$ telles qu'on ait*

$$\cdot\ \mu_1^\pm = 1, \quad |\mu_d^\pm| \leqq 1 \quad \text{et} \quad \mu_d^\pm = 0 \quad \text{pour } d>D$$
$$\cdot\ \mu^- * \mathbb{1} \leqq \mu * \mathbb{1} \leqq \mu^+ * \mathbb{1}$$
$$\cdot \sum_{d|P(z)} \mu_d^+ \frac{\omega(d)}{d} \leqq V(z)\{1+O(e^{-s}(1+e^{\sqrt{K}}(\log D)^{-\frac{1}{3}}))\}$$

et

$$\sum_{d|P(z)} \mu_d^- \frac{\omega(d)}{d} \geqq V(z)\{1+O(e^{-s}(1+e^{\sqrt{K}}(\log D)^{-\frac{1}{2}}))\}.$$

On passe maintenant aux résultats relatifs au niveau de répartition des suites dans les progressions arithmétiques. Le but de ces travaux est d'améliorer l'exposant 1/2 dans le théorème de Bombieri-Vinogradov; cet objectif n'a pas été totalement atteint pour l'instant, toutefois on a mis à jour plusieurs situations, où on franchit la valeur critique 1/2, en particulier dans le cas de convolution de certains types de suites.

Les Lemmes 4, 5, 6 et 10 sont extraits du récent travail de Bombieri, Friedlander et Iwaniec ([1]) qui améliore et replace dans un cadre plus général les différents résultats de [4–6, 8 et 9]. Tous ces travaux reposent sur la méthode de dispersion de Linnik et sur des majorations de sommes de Kloosterman.

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\geqq 1}$ est d'ordre κ (κ entier $\geqq 1$) si elle vérifie l'inégalité suivante:

$$|x_n| \leqq \tau_\kappa(n) \qquad (n \geqq 1)$$

($\tau_\kappa(n)$ est le nombre de manières d'écrire n en produit de κ entiers $\geqq 1$). Nous supposerons, dans l'énoncé des Lemmes 4, 5, 6, 7, 9 et 10 que (α_m), (β_n), (γ_q), (δ_r) et (λ_l) sont cinq suites de réels d'ordre κ, dont les supports sont respectivement inclus dans $[M, 2M[$, $[N, 2N[$, $[Q, 2Q[$, $[R, 2R[$ et $[L, 2L[$; les nombres M, N, Q, R et L sont $\geqq 1$ et on pose $X=2LMN$.

Avec ces conventions, on introduit, pour a entier, la quantité

$$\begin{aligned}\mathscr{K}_a &= \mathscr{K}_a((\gamma_q), (\delta_r); (\alpha_m), (\beta_n), (\lambda_l)) \\ &= \sum_{(qr,a)=1} \gamma_q \delta_r \left(\sum_{lmn \equiv a[qr]} \alpha_m \beta_n \lambda_l - \frac{1}{\varphi(qr)} \sum_{(lmn,qr)=1} \alpha_m \beta_n \lambda_l \right)\end{aligned}$$

afin d'étudier la relation:

Pour tout A, on a

$$\mathscr{K}_a = O_{a,A,\kappa}(X(\log X)^{-A}) \tag{2.4}$$

qui décrit une certaine forme de la répartition en moyenne du produit de convolution $\alpha * \beta * \lambda$, dans des progressions arithmétiques de raison comprise entre QR et $4QR$. Remarquons que dans [1], on cherche à évaluer $\mathscr{K}_a$ par

$$\mathscr{K}_a = O_{a,A,\kappa}(\|\alpha\| \, \|\beta\| \, \|\lambda\| \, X^{\frac{1}{2}}(\log X)^{-A})$$

où $\|\alpha\|$ est la norme l^2 de (α_m), la majoration (2.4) est moins forte mais évite d'utiliser parfois l'hypothèse (A_5) de [1]. On sera amené à supposer que (β_n) se répartit bien dans les progressions arithmétiques de raison $\leqq (\log 2N)^B$ (cf. Théorème de Siegel-Walfisz):

Pour tout B, on a la relation

$$\sum_{\substack{n \equiv n_0[k] \\ (n,d)=1}} \beta_n = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{(n,dk)=1} \beta_n + O_{\kappa,B}(N \tau_\kappa(d)(\log 2N)^{-B}) \tag{2.5}$$

pour $d \geqq 1$, $k \geqq 1$ et $(k, n_0)=1$.

On trouve le Lemme 4 dans [1] et aussi dans [7]: il affirme qu'on franchit la valeur critique 1/2 de l'exposant de répartition pour $X^{\varepsilon}<N<X^{(1/6)-\varepsilon}$. On montre:

Lemme 4. *Sous les conditions:*

(i) (β_n) *vérifie* (2.5)

(ii) $L=R=1$

(iii) $\max(X^{\varepsilon}, X^{\varepsilon-1}Q^2)\leqq N\leqq X^{(5/6)-\varepsilon}Q^{-4/3}$ ($\varepsilon>0$ *quelconque*)

la relation (2.4) *est vraie uniformément pour* $|a|\leqq(\log X)^A$.

La constante O apparaissant dans (2.4) dépend alors de ε, et cette remarque est valable pour les Lemmes 5, 6, 9 et 10. Le Lemme 5 envisage le cas d'une forme trilinéaire:

Lemme 5 ([1]). *Sous les conditions:*

(i) (β_n) *vérifie* (2.5)

(ii) $R=1$

(iii) $p|ln$ *et* $p\leqq\exp(\log^{\frac{1}{2}}X)\Rightarrow\beta_n\lambda_l=0$

(iv) $N^2L^3\leqq X^{1-\varepsilon}Q$, $N^5L^2\leqq X^{2-\varepsilon}$ *et* $NL\geqq X^{\varepsilon}Q$ ($\varepsilon>0$ *quelconque*)

la relation (2.4) *est vraie uniformément pour* $|a|\leqq(\log X)^A$.

Le lemme suivant se démontre directement par la technique de Fourier, sans passer par un calcul de dispersion; en notant $\chi_{\mathscr{T}}$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathscr{T}$, on montre:

Lemme 6 ([1]). *Sous les conditions:*

(i) $\alpha_m=\chi_{\mathscr{T}}(m)$ *où* $\mathscr{T}$ *est un intervalle de* $[M, 2M[$

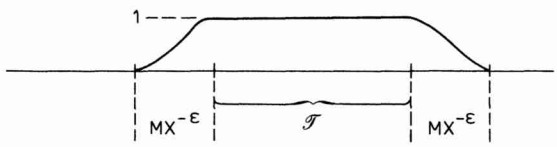
(ii) $L=1$

(iii) $M\geqq X^{\varepsilon}\max\{Q, X^{-1}QR^4, Q^{\frac{1}{2}}R, X^{-2}Q^3R^4\}$ ($\varepsilon>0$ *quelconque*)

la relation (2.4) *est vraie, uniformément pour* $|a|\leqq(\log X)^A$.

Ce résultat reste valable si (α_m) *est la function caractéristique des* $m\in\mathscr{T}$ *congrus à* m_0 *modulo* 3 (m_0 *fixé*) *et si on a l'implication* $3|qr\Rightarrow\gamma_q\delta_r=0$.

Le cas où $\alpha_m=\chi_{\mathscr{T}}(m)$ est traité dans [1]. Voyons maintenant comment transformer cette démonstration lorsqu'on impose en outre $m\equiv m_0$ [3]. Soit $\alpha(\xi)$ une fonction lisse dont le graphe est.



On sépare $\mathscr{K}_a$ en quatre sommes correspondant aux contraintes supplémentaires: $q\equiv q_0$ [3] et $r\equiv r_0$ [3] avec q_0 et $r_0=\pm1$. On s'intéresse par exemple, au cas $q_0=r_0=1$. Les congruences

$$m\equiv m_0\ [3]\quad\text{et}\quad m\equiv a\bar{n}[qr]$$

($\bar{n}$ inverse de n modulo qr) s'écrivent

$$m \equiv 3a(\overline{3n}) + m_0 qr \qquad [3qr]$$

et la formule sommatoire de Poisson conduit à l'égalité:

$$\sum_{\substack{m \equiv m_0 [3] \\ m \equiv a\bar{n}[qr]}} \alpha(m) = \frac{1}{3qr} \sum_h e\left(-\frac{hm_0}{3}\right) \hat{\alpha}\left(\frac{h}{3qr}\right) e\left(-ah\frac{\overline{3n}}{qr}\right).$$

On suit alors la démonstration du Théorème 5 de [1].

Le lemme suivant décrit un «processus d'échange» dans lequel les rôles des variables et des modules de congruence sont inversés:

Lemme 7. *Soit*

$$S = \sum_q \gamma_q \left(\sum_{(m,q)=1} \alpha_m \left(\sum_{\substack{n \\ mn \leqq x \\ mn \equiv 1 [q]}} 1 - \frac{x}{mq} \right) \right)$$

Sous les conditions Q et $M \leqq x$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$, les égalités

$$S = \sum_q \gamma_q \left(\sum_{\substack{m,n \\ mn \leqq x \\ mn \equiv 1 [q]}} \alpha_m - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{m,n \\ mn \leqq x \\ (mn,q)=1}} \alpha_m \right) + O_\varepsilon(Mx^\varepsilon) \tag{2.6}$$

et

$$S = \sum_m \alpha_m \left(\sum_{\substack{q,k \\ qk \leqq x \\ qk \equiv -1 [m]}} \gamma_q - \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{q,k \\ qk \leqq x \\ (qk,m)=1}} \gamma_q \right) + O_\varepsilon(Qx^\varepsilon). \tag{2.7}$$

On a des égalités similaires, si $3|qm \Rightarrow \gamma_q \alpha_m = 0$, pour la somme

$$S^* = \sum_q \gamma_q \left(\sum_{(m,q)=1} \alpha_m \left(\sum_{\substack{n \\ mn \leqq x \\ mn \equiv 1 [q],\, mn \equiv 2 [3]}} 1 - \frac{x}{3mq} \right) \right)$$

c'est-à-dire

$$S^* = \sum_q \gamma_q \left(\sum_{\substack{m,n \\ mn \leqq x \\ mn \equiv 1 [q],\, mn \equiv 2 [3]}} \alpha_m - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{m,n \\ mn \leqq x \\ (mn,q)=1,\, mn \equiv 2 [3]}} \alpha_m \right) + O_\varepsilon(Mx^\varepsilon) \tag{2.6*}$$

et

$$S^* = \sum_n \alpha_m \left(\sum_{\substack{q,k \\ qk \leqq x \\ qk \equiv -1 [m],\, qk \equiv 1 [3]}} \gamma_q - \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{q,k \\ qk \leqq x \\ (qk,m)=1,\, qk \equiv 1 [3]}} \gamma_q \right) + O_\varepsilon(Qx^\varepsilon). \tag{2.7*}$$

Démonstration. L'égalité (2.6) s'obtient en écrivant l'égalité

$$\sum_{\substack{n \leqq x/m \\ (n,q)=1}} 1 = \frac{\varphi(q)}{q} \frac{x}{m} + O_\varepsilon(x^{\varepsilon/2}).$$

La relation (2.7) part de l'égalité $mn=1+qk$ et de la relation

$$\sum_{\substack{k\leqq x/q\\(k,m)=1}} 1=\frac{\varphi(m)}{m}\frac{x}{q}+O_\varepsilon(x^{\varepsilon/2}),$$

on démontre de même (2.6*) et (2.7*) en remarquant l'équivalence

$$mn\equiv 2[3]\Leftrightarrow qk\equiv 1[3].$$

Le lemme suivant exprime le fait qu'en général, le produit de tous les petits facteurs premiers d'un entier est petit. On montre ([16], Lemme 3):

Lemme 8. *Pour $2\leqq u\leqq v\leqq x$, on a l'inégalité*

$$|\{n\leqq x;\ \prod_{p\leqq u,\, p^\nu \| n} p^\nu\geqq v\}|\leqq c_1 x\exp\left(-c_2\frac{\log v}{\log u}\right)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes absolues positives.

Ce lemme va nous permettre de déduire des Lemmes 5 et 6, l'estimation suivante, qui améliore celle de [5] Théorème 3:

Lemme 9. *Soit S_1 la somme définie par*

$$S_1((\alpha_m),(\gamma_q))=\sum_q \gamma_q\left(\sum_{\substack{mn\leqq x\\ mn\equiv 1[q]}}\alpha_m\Lambda(n)-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{mn\leqq x\\(mn,q)=1}}\alpha_m\Lambda(n)\right).$$

L'inégalité

$$Qx^\varepsilon\leqq xM^{-1}\leqq x^{-\varepsilon}\min(x^{3/8}Q^{3/8},x^{4/7})\qquad(\varepsilon>0\ \textit{quelconque})$$

entraîne que la relation

$$S_1=O_{A,\kappa,\varepsilon}(x(\log x)^{-A})$$

est vraie pour tout A et $x\geqq 2$. Ce résultat reste valable si, dans la définition de S_1, on impose $m\equiv m_0[3]$, $n\equiv n_0[3]$ (où m_0 et n_0 sont des classes vérifiant $m_0n_0\equiv 2[3]$) et $3\nmid q$.

Démonstration. Posons $N=xM^{-1}$ et appliquons l'identité d'Heath-Brown ([10]): on a pour $n\leqq N$ l'égalité

$$\Lambda(n)=\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1}\binom{4}{j}\sum_{m_1,\dots,m_j\leqq N^{\frac14}}\cdots\sum\mu(m_1)\dots\mu(m_j)\sum_{m_1\dots m_jn_1\dots n_j=n}\cdots\sum\log n_1$$

que l'on reporte dans l'expression de S_1. Ayant fixé $j\in\{1,2,3,4\}$, on rend les variables $m,m_1,\dots,m_j$, $n_1,\dots,n_j$ indépendantes en les astreignant à décrire des intervalles de la forme

$$m\in[M_0,M_0\Delta[,\ m_i\in[M_i,M_i\Delta[,\ n_i\in[N_i,N_i\Delta[\qquad(1\leqq i\leqq j)\tag{2.8}$$

où M_0, M_i et N_i sont de la forme Δ^{μ_0}, Δ^{μ_i}, Δ^{ν_i} $(1\leqq i\leqq j)$ avec μ_0, μ_i et ν_i entiers, et $\Delta=1+(\log x)^{-B}$.

La constante B est suffisamment grande par rapport à A et κ, et on impose les conditions

$$M \leqq M_0 < 2M, \qquad M_i \leqq N^{\frac{1}{4}} (1 \leqq i \leqq j), \qquad \frac{x}{2} \leqq M_0 M_1 \dots M_j N_1 \dots N_j \leqq x \tag{2.9}$$

On montre alors que la contribution à S_1 des $(m, m_1, \dots, m_j, n_1, \dots, n_j)$ qui n'appartiennent pas à un produit d'intervalles décrits ci-dessus est, pour B suffisamment grand, négligeable (cette technique est employée par exemple dans [6] § 3 et dans [1] § 15). Remarquant que pour $N_1 \leqq n_1 < N_1 \Delta$, on a

$$\log n_1 = \log N_1 + O((\log x)^{-B}),$$

on constate qu'on aura démontré le lemme, dès que, pour tout C, on aura l'inégalité

$$\sum_q \gamma_q \Bigg(\sum_{m m_1 \dots m_j n_1 \dots n_j \equiv 1 [q]} \alpha_m \mu(m_1) \dots \mu(m_j) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(m m_1 \dots m_j n_1 \dots n_j, q) = 1} \alpha_m \mu(m_1) \dots \mu(m_j) \Bigg) = O_{C,\kappa,\varepsilon}(x(\log x)^{-C}) \tag{2.10}$$

où les variables m, m_i et n_i vérifient (2.8).

On peut alors faire disparaître les variables m_i et n_i trop petites en écrivant l'inégalité (2.10) sous la forme

$$\sum_q \gamma_q \Bigg(\sum_{m' m_1 \dots m_{i'} n_1 \dots n_{j'} \equiv 1 [q]} \alpha'_{m'} \mu(m_1) \dots \mu(m_{i'}) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(m' m_1 \dots m_{i'} n_1 \dots n_{j'}, q) = 1} \alpha'_{m'} \mu(m_1) \dots \mu(m_{i'}) \Bigg) = O_{C,\kappa,\varepsilon}(x(\log x)^{-C}) \tag{2.11}$$

où $\alpha'_{m'}$ est d'ordre $\kappa + 8$, $0 \leqq i' \leqq j$ et $0 \leqq j' \leqq j$.

Les conditions de sommation (2.8) et (2.9) sont ainsi modifiées:

$$m' \in [M', M'\Delta[, \quad m_i \in [M_i, M_i \Delta[\quad (1 \leqq i \leqq i') \quad \text{et} \quad n_i \in [N_i, N_i \Delta[\quad (1 \leqq i \leqq j')$$

avec

$$M \leqq M' \leqq 2M z_0^8; \qquad z_0 \leqq M_i \leqq N^{\frac{1}{4}} \ (1 \leqq i \leqq i'), \qquad z_0 \leqq N_i \ (1 \leqq i \leqq j')$$

et

$$\frac{x}{2} \leqq M' M_1 \dots M_{i'} N_1 \dots N_{j'} \leqq x \qquad (\text{on a posé } z_0 = \exp(\log^{\frac{3}{4}} x)).$$

On envisage alors deux situations:

1°) Il y a un produit partiel de $\{M_1, \dots, M_{i'}, N_1, \dots, N_{j'}\}$ dans l'intervalle $[N^{\frac{1}{2} - (\varepsilon/10)}, 2N^{\frac{1}{2}}]$.

On factorise chaque variable m_i sous la forme

$$m_i = m'_i m''_i$$

où m'_i contient tous les facteurs premiers de m_i, inférieurs à $\exp(\log^{\frac{1}{3}} x)$ et ceux-là seulement. Le Lemme 8 entraîne que la contribution des m_i avec $m'_i \geqq z_1$

$(=\exp(\log^{\frac{1}{2}} x))$ est négligeable. On opère de même avec n_i qu'on factorise en $n_i = n_i' n_i''$.

Dans ce cas particulier, on voit, après avoir rendu les variables m_i' et m_i'', n_i' et n_i'' indépendantes, que l'inégalité (2.11) devient

$$\sum_q \gamma_q \left(\sum_{m'' \nu \nu' \equiv 1 [q]} \alpha''_{m''} g_\nu g'_{\nu'} - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(m'' \nu \nu', q) = 1} \alpha''_{m''} g_\nu g'_{\nu'} \right) = O_{C,\kappa,\varepsilon}(x(\log x)^{-C}) \tag{2.12}$$

où $(\alpha''_{m''})$ est d'ordre $\kappa + 16$, (g_ν) et $(g'_{\nu'})$ d'ordre 8.

Par construction m'' «contient» les variables $m', m'_1, \ldots, m'_{i'}, n'_1, \ldots, n'_{j'}$; ν est le produit des variables m''_i et n''_i associées aux M_i et N_i dont le produit se trouve dans $[N^{\frac{1}{3}-(\varepsilon/10)}, 2N^{\frac{1}{2}}]$ et ν' le produit des m''_i et n''_i restants. Enfin, les variables m'', ν et ν' vérifient

$$m'' \in [M'', M''\Delta[, \qquad \nu \in [L_1, L_1\Delta[, \qquad \nu' \in [L'_1, L'_1\Delta[$$

avec

$$M \leqq M'' \leqq 2M z_0^8 z_1^8, \qquad N^{\frac{1}{3}-(\varepsilon/10)} z_1^{-8} \leqq L_1 \leqq 2N^{\frac{1}{2}}, \qquad L_1 L'_1 \leqq N$$

et

$$\frac{x}{2} \leqq M'' L_1 L'_1 \leqq x.$$

On applique le Lemme 5 en donnant à N et à L les valeurs $N = L_1$ et $L = L'_1$ et en vérifiant que la suite g_ν satisfait (2.5), ce qui fournit la majoration (2.12).

2°) S'il n'y a pas de produit partiel dans l'intervalle $[N^{\frac{1}{3}-(\varepsilon/10)}, 2N^{\frac{1}{2}}]$. On a l'inégalité

$$\frac{N}{4} z_0^{-8} \leqq P \leqq N \qquad \text{où } P = M_1 \ldots M_{i'} N_1 \ldots N_{j'}.$$

Notons N_0 le plus petit produit partiel des $\{M_1, \ldots, M_{i'}, N_1, \ldots, N_{j'}\}$ supérieur à $2N^{\frac{1}{2}}$, on a nécessairement $PN_0^{-1} \leqq N^{\frac{1}{3}-(\varepsilon/10)}$, ce qui entraîne $N_0 \geqq N^{2/3}$, et par construction, N_0 est un des N_i $(1 \leqq i \leqq j')$. On est ainsi ramené à étudier l'inégalité

$$S_2 = \sum_q \gamma_q \left(\sum_{m' t s \equiv 1 [q]} \alpha'_{m'} \xi_t - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(m' t s, q) = 1} \alpha'_{m'} \xi_t \right) = O_{C,\kappa,\varepsilon}(x(\log x)^{-C}) \tag{2.13}$$

où ξ_t est d'ordre 7, et où les variables m', t et s vérifient $m' \in [M', M'\Delta[$, $t \in [T, T\Delta[$ et $s \in [S, S\Delta[$ avec

$$M \leqq M' \leqq 2M z_0^8, \qquad T \leqq N^{\frac{1}{3}}, \qquad ST \leqq N \quad \text{et} \quad \frac{x}{2} \leqq M'ST \leqq x.$$

Par la méthode du Lemme 7, on écrit S_2 sous la forme

$$S_2 = \sum_{m', t} \alpha'_{m'} \xi_t \left(\sum_{\substack{q,k \\ qk \equiv -1 [m't]}} \gamma_q - \frac{1}{\varphi(m't)} \sum_{\substack{q,k \\ (qk, m't) = 1}} \gamma_q \right) + O(x^{0,99})$$

les variables m', t, q et k vérifiant en outre $S \leqq qk(m't)^{-1} < S\Delta$.

On rend ces variables indépendantes en recouvrant le domaine de sommation par des produits d'intervalles de la forme $[(1+(\log x)^{-B'})^\nu, (1+(\log x)^{-B'})^{\nu+1}]$ avec B' suffisamment grand par rapport à C et à κ.

Il reste alors à appliquer le Lemme 6 avec, pour choix des paramètres M, Q et R respectivement xQ^{-1}, M' et T et l'inégalité (2.13) est démontrée.

Dans le cas où on impose $m \equiv m_0[3]$ et $n \equiv n_0[3]$, on sépare S_1 en deux sommes partielles suivant que $q \equiv 1$ ou $q \equiv 2[3]$; la variable n est décomposée, par l'identité d'Heath-Brown, et une factorisation technique en variables m_i', m_i'', n_i' et n_i'', on fixe alors la classe de congruence de chacune de ces variables, ce qui fournit un nombre borné de cas, et le Lemme 5 s'applique de la même manière. Pour l'étude de S_2, on a posé $m'st = qk+1$, et puisque $m'st \equiv 2[3]$, on en déduit que $k \equiv q[3]$, on applique alors la deuxième partie du Lemme 6.

Le lemme suivant rassemble les résultats des Théorèmes 1 et 2 de [1]:

Lemme 10. *Sous les conditions:*

(i) (β_n) *vérifie* (2.5)

(ii) $L=1$

(iii) $p|n$ *et* $p < \exp(\log^{\frac{1}{4}} X) \Rightarrow \beta_n = 0$

la relation (2.4) *est vraie, uniformément pour* $|a| \leqq (\log X)^A$, *dès que l'une ou l'autre des inégalités suivantes est vérifiée:*

$$X^\varepsilon R < N < X^{-\varepsilon} \min\{X^{\frac{1}{2}} Q^{-\frac{1}{2}}, X^2 Q^{-5} R^{-1}, X Q^{-2} R^{-\frac{1}{2}}\}$$
$$X^\varepsilon R < N < X^{-\varepsilon} \min\{X^{\frac{1}{2}} Q^{-1} R^{\frac{1}{2}}, X^{2/5} Q^{-2/5}, X^{\frac{1}{2}} Q^{-3/4}\}$$

$(\varepsilon > 0)$ *quelconque*).

Le Lemme 11 rappelle quelques propriétés de la fonction w définie dans l'introduction.

Lemme 11. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et* $0 < u \leqq 10$, *on a, pour* $x > x_0(\varepsilon)$ *les inégalités*

$$|\{n \leqq x;\, p|n \Rightarrow p > x^{1/u}\}| \leqq (w(u)+\varepsilon)\frac{x}{\log x}$$

et

$$|\{n \leqq x;\, n \equiv n_0[3], p|n \Rightarrow p > x^{1/u}\}| \leqq \tfrac{1}{2}(w(u)+\varepsilon)\frac{x}{\log x}$$

avec $n_0 = 1$ *ou* 2. *La fonction* w *vérifie pour tout* u *l'inégalité* $w(u) \leqq u$.
(En fait on démontre facilement l'inégalité $w(u) \leqq u-1$ pour $u > 2$.)

Le dernier lemme donne les propriétés combinatoires de $(D) = (D_1, \ldots, D_l)$ du crible de Rosser-Iwaniec.

Lemme 12. *Soit* $(D) = (D_1, \ldots, D_l)$ *une suite du Lemme* 2. *Alors, pour toute écriture* $D = D'D''$ *avec* D' *et* $D'' \geqq 1$, *on peut séparer* (D) *en deux parties de produit partiel* Δ' *et* Δ'' *avec* $\Delta' \leqq D'$ *et* $\Delta'' \leqq D''$.

En outre, si (D) *ne peut pas fournir de produit partiel dans l'intervalle* $[U, V]$ *avec* $1 \leqq U \leqq V \leqq D$, *on a l'inégalité* $D_1 \ldots D_l \leqq D\,U\,V^{-1}$.

La première partie de ce lemme est la propriété cruciale du terme d'erreur du crible de Rosser-Iwaniec, la seconde est démontrée dans [7] Lemme 5.

III. Etude pour $1/2 \leqq \theta \leqq 17/32 - \varepsilon$

Le cas général de la fonction $\pi^*(x; q, a)$ entraîne de petites complications techniques pour rendre certaines variables premières entre elles (voir Lemme 7 par exemple), aussi n'étudierons-nous que la fonction $\pi^*(x; q, 1)$ (cette restriction est d'ailleurs compatible avec l'application au Théorème 2). Remarquons aussi qu'on pourrait écrire $\pi^*(x; q, 1) = \pi(x; 3q, a_q)$ avec $a_q = q+1$ ou $a_q = 2q+1$ suivant que $q \equiv 1$ ou 2 modulo 3, mais a_q n'est plus fixe et ceci empêche d'appliquer les Lemmes 4, 5, 6 par exemple.

Dans tout ce paragraphe, on désignera par q un entier tel que

$$q \in \mathcal{Q}^*(1, \theta) \quad \text{et} \quad q \equiv 1\,[3]. \tag{3.1}$$

On notera par η un réel strictement positif, très petit par rapport à ε, et on définit les suites:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{(q)} &= \{qk+1 \leqq x;\ k \equiv 1\,[3]\} \\
\tilde{\mathcal{A}}^{(q)} &= \{n \in \mathcal{A}^{(q)};\ p \mid n \Rightarrow p \geqq x^{\eta^2}\} \\
\mathcal{B}^{(q)} &= \{n \leqq x;\ (n, q) = 1 \text{ et } n \equiv 2\,[3]\} \\
\tilde{\mathcal{B}}^{(q)} &= \{n \in \mathcal{B}^{(q)};\ p \mid n \Rightarrow p > x^{\eta^2}\}.
\end{aligned}$$

La condition (3.1) entraîne que tous les éléments de $\mathcal{A}^{(q)}$ sont congrus à 2 modulo 3; pour $q \equiv 2\,[3]$, on imposerait évidemment $k \equiv 2\,[3]$. On cherche donc des nombres premiers dans $\mathcal{A}^{(q)}$; pour éviter le phénomène de parité, on s'affranchit des formules classiques du crible en appliquant le Lemme 1, qui est, en quelque sorte «en amont» du Lemme 2.

Pour obtenir $O_\eta(1)$ termes dans l'égalité du Lemme 1, on travaille avec la suite $\tilde{\mathcal{A}}^{(q)}$ avec $R = 2[\eta^{-2}]$,

$$\begin{gathered}
D_1 = x^{3/5 - 3\theta/5 - 3\eta}, \qquad D_3 = x^{5/6 - 4\theta/3 - 3\eta}, \\
D_{2r+1} = x^{0,9}/(p_1 p_2 \dots p_{2r-1} p_{2r}^2) \qquad (r \geqq 2) \\
\mathcal{P} = \mathcal{P}^{(q)} = \{p;\ p \nmid 3q\} \quad \text{et} \quad z = x^{\frac{1}{2}}.
\end{gathered}$$

On a donc l'égalité:

$$\pi^*(x; q, 1) + S_1^{(q)} + S_3^{(q)} + \dots = \sum_d \lambda^{(q)}(d)\,|\tilde{\mathcal{A}}_d^{(q)}| \tag{3.2}$$

avec

$$S_{2r-1}^{(q)} = \sum_{p_i} \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{A}}_{p_1 \dots p_{2r-1}}^{(q)}, \mathcal{P}^{(q)}, p_{2r-1}) \qquad (r \geqq 1)$$

où les p_i, qui appartiennent à $\mathcal{P}^{(q)}$, vérifient

$$D_{2r-1} \leqq p_{2r-1} < \dots < p_1 < z \quad \text{et} \quad p_{2l-1} < D_{2l-1} \qquad (l < r)$$

et

$$\lambda^{(q)}(d) = \begin{cases} (-1)^l & \text{pour } d = p_1 \dots p_l \quad \text{avec } p_i \in \mathcal{P}^{(q)} \text{ et} \\ x^{\eta^2} \leqq p_l < \dots < p_1 < D_1; \quad p_3 < D_3, \dots \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Notons l'implication

$$d > x^{0,95} \Rightarrow \lambda^{(q)}(d) = 0.$$

1. Application du lemme fondamental (voir [13], §5)

Le Lemme 3 fournit l'encadrement suivant de $|\tilde{\mathscr{A}}_d^{(q)}|$:

$$\sum_r \mu_r^- |\mathscr{A}_{dr}^{(q)}| \leqq |\tilde{\mathscr{A}}_d^{(q)}| \leqq \sum_r \mu_r^+ |\mathscr{A}_{dr}^{(q)}| \tag{3.3}$$

avec $r \leqq D = x^\eta$ et $r \mid P^{(q)}(x^{\eta^2})$; on écrit la formule (2.1): pour $(dr, 3q) = 1$, on a

$$|\mathscr{A}_{dr}^{(q)}| = \frac{x}{3drq} + r(\mathscr{A}^{(q)}, dr)$$

et les inégalités (2.2) et (2.3) sont vérifiées pour

$$K = K_0 \log\log x \quad \text{et} \quad L = L_0$$

avec K_0 et L_0 constantes absolues. La formule (3.3) donne la majoration du membre de droite de (3.2):

$$\sum_d \lambda^{(q)}(d) |\tilde{\mathscr{A}}_d^{(q)}| \leqq \frac{x}{3q} \sum_{\substack{d \\ \lambda^{(q)}(d) = \pm 1}} \sum_r (\pm 1) \frac{\mu_r^\pm}{dr} + \sum_{\substack{d \\ \lambda^{(q)}(d) = \pm 1}} \sum_r (\pm 1) \mu_r^\pm r(\mathscr{A}^{(q)}, dr). \tag{3.4}$$

Le Lemme 3 donne l'encadrement

$$\left| \left(\sum_r \frac{\mu_r^+}{r} - \sum_r \frac{\mu_r^-}{r} \right) \left(\sum_{\substack{d \\ \lambda^{(q)}(d) = -1}} \frac{1}{d} \right) \right|$$
$$= O(V^{(q)}(x^{\eta^2}) e^{-1/\eta} (1 + e^{\sqrt{K_0 \log\log x}} (\eta \log x)^{-\frac{1}{3}}) \eta^{-2}) \leqq \frac{\varepsilon q}{10 \varphi(q) \log x}.$$

L'inégalité (3.4) devient, avec des notations évidentes:

$$\sum_d \lambda^{(q)}(d) |\tilde{\mathscr{A}}_d^{(q)}| \leqq \frac{x}{3q} \sum_{d,r} \frac{\lambda^{(q)}(d) \mu_r^+}{dr} + R^{(q)} + \frac{\varepsilon x}{10 \varphi(q) \log x}.$$

Pour faire apparaître la suite $\mathscr{B}^{(q)}$, on remarque qu'on a l'égalité:

$$\frac{x}{3drq} = \frac{1}{\varphi(q)} |\mathscr{B}_{dr}^{(q)}| + O\left(\frac{x^\eta}{\varphi(q)}\right),$$

et on applique de nouveau le Lemme 3 pour écrire:

$$\frac{x}{3q} \sum_{d,r} \frac{\lambda^{(q)}(d) \mu_r^+}{dr} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{d,r} \lambda^{(q)}(d) \mu_r^+ |\mathscr{B}_{dr}^{(q)}| + O\left(\frac{x^{0,98}}{\varphi(q)}\right)$$
$$\leqq \frac{1}{\varphi(q)} \sum_d \lambda^{(q)}(d) |\tilde{\mathscr{B}}_d^{(q)}| + \frac{\varepsilon x}{10 \varphi(q) \log x}.$$

En conclusion l'égalité (3.2) est devenue l'inégalité

$$\pi^*(x;q,1)+S_1^{(q)}+S_3^{(q)}+\ldots\leqq\frac{1}{\varphi(q)}\sum_d \lambda^{(q)}(d)|\tilde{\mathscr{B}}_d^{(q)}|+R^{(q)}+\frac{\varepsilon x}{5\varphi(q)\log x}. \tag{3.5}$$

2. Etude en moyenne de $R^{(q)}$

Afin de majorer en moyenne $R^{(q)}$, on va montrer l'inégalité

$$\sum_q \gamma_q R^{(q)}=O_{\varepsilon,A}(x(\log x)^{-A}) \tag{3.6}$$

pour tout $A>0$, et pour toute suite γ_q vérifiant $|\gamma_q|\leqq 1$ et $\gamma_q=0$ si q ne vérifie pas (3.1).

Pour étudier l'inégalité (3.6), on revient à la définition de $R^{(q)}$, on fixe alors le nombre l de facteurs premiers de d, et on utilise l'expression (2.6*) du Lemme 7; on est ainsi ramené à étudier l'inégalité

$$S_3=\sum_q \gamma_q\left(\sum_{rp_1\ldots p_l n\equiv 1[q]}\mu_r-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(rp_1\ldots p_l n,\,q)=1}\mu_r\right)=O_{A,\eta}(x(\log x)^{-A}) \tag{3.7}$$

les variables $r, p_1,\ldots,p_l,n$ vérifiant en outre les conditions

$$rp_1\ldots p_l n\equiv 2[3],\qquad r\leqq x^\eta$$
$$p_1>p_2>\ldots>p_l\geqq x^{\eta^2},\qquad p_1<D_1,\ p_3<D_3,\ldots,rp_1\ldots p_l n\leqq x,$$

le coefficient μ_r vérifie $|\mu_r|\leqq 1$.

On fixe alors les classes de congruence, modulo 3, des variables $r, p_1,\ldots,p_l$, et n, et on note $P_1,P_2,\ldots,P_l$ une famille de nombres vérifiant

$$x^{\eta^2}\leqq P_l<P_{l-1}<\ldots<P_1,\qquad P_1<D_1,\qquad P_3<D_3,\qquad P_1P_2P_3P_4^2P_5<x^{0,9},\ldots$$

et la démonstration de (3.7) revient à prouver l'inégalité:

$$\textit{Pour tout } C, \textit{ on a } S_4=O_{C,\eta}(x(\log x)^{-C}) \tag{3.8}$$

où S_4 est défini par la même formule que S_3, à la différence près que les p_i vérifient en plus l'inégalité

$$P_i\leqq p_i<P_i(1+(\log x)^{-B})\qquad (1\leqq i\leqq l)$$

où B est fonction uniquement de A et η.

On envisage alors deux cas:

- lorsque $\{P_1,\ldots,P_l\}$ a un produit partiel $P_{i_1}\ldots P_{i_k}$, dans l'intervalle $[Y,Z]$ (avec $Y=x^{2\theta-1+\eta}$ et $Z=x^{5/6-4\theta/3-\eta}$), on applique le Lemme 4, avec pour choix de β_n:

$$\beta_n=\sum_{n=p_{i_1}\cdots p_{i_k}}1$$

et l'inégalité (3.8) est démontrée;

– lorsqu'un tel produit partiel n'existe pas, on voit que l'inégalité $Y^2<Z$ entraîne que le produit des P_i inférieurs à Y est lui aussi inférieur à Y, et qu'au plus deux des P_i (c'est-à-dire P_1 et P_2) sont supérieurs à Z. L'écriture (2.7*) «permute», avec une erreur négligeable, S_4 en

$$\sum_{r,\,p_1,\,\ldots,\,p_l} \mu_r \Bigg(\sum_{\substack{q,\,k \\ qk\equiv -1\,[rp_1\ldots p_l]}} \gamma_q - \frac{1}{\varphi(rp_1\ldots p_l)} \sum_{\substack{q,\,k \\ (qk,\,rp_1\ldots p_l)=1}} \gamma_q \Bigg)$$

où les variables q et k vérifient $qk\leqq x$ et $k\equiv 1\,[3]$.

On utilise alors la seconde partie du Lemme 6 avec, pour choix des paramètres:

$$M=x^{1-\theta}, \qquad Q\leqq P_1(P_3\ldots P_l)x^{\eta}\leqq x^{(7\theta-2)/5-\eta}$$

et

$$R=P_2\leqq x^{3(1-\theta)/5-\eta}$$

ce qui termine la démonstration de l'inégalité (3.8).

En conclusion, l'inégalité (3.5) devient l'inégalité suivante, pour tout q (avec au plus $x^{\theta}(\log x)^{-A}$ exceptions, pour $x>x_0(\varepsilon, A)$):

$$\pi^*(x;\,q,\,1)+S_1^{(q)}+S_3^{(q)}+\ldots\leqq\frac{1}{\varphi(q)}\sum_d \lambda^{(q)}(d)\,|\tilde{\mathscr{B}}_d^{(q)}|+\frac{\varepsilon x}{4\varphi(q)\log x}\,. \tag{3.9}$$

3. Etude en moyenne de $S_5^{(q)}, S_7^{(q)}, \ldots$

Posons

$$T_{2r-1}^{(q)}=\sum_{p_i}\mathscr{S}(\tilde{\mathscr{B}}_{p_1\ldots p_{2r-1}}^{(q)},\,\mathscr{P}^{(q)},\,p_{2r-1})$$

où les variables de sommation vérifient les mêmes conditions de sommation que dans la définition de $S_{2r-1}^{(q)}$. On se propose de démontrer la relation suivante, pour $l\geqq 2$, et pour tout A:

$$\sum_q \gamma_q\left(S_{2l+1}^{(q)}-\frac{1}{\varphi(q)}\,T_{2l+1}^{(q)}\right)=O_{\eta,A}(x(\log x)^{-A}) \tag{3.10}$$

(γ_q vérifie les mêmes conditions que précédemment). Pour obtenir cette estimation, on rend les variables indépendantes, pour se ramener à l'estimation

$$\sum_q \gamma_q\Bigg(\sum_{p_1\ldots p_{2l+1}m\equiv 1\,[q]} f_{P_{2l+1}}(m)-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(p_1\ldots p_{2l+1}m,q)=1} f_{P_{2l+1}}(m)\Bigg)=O_{\eta,A}(x(\log x)^{-C})$$

les nombres p_i et m vérifiant les conditions

$$p_i\ldots p_{2l+1}m\leqq x, \qquad P_i\leqq p_i<P_i(1+(\log x)^{-B})$$

avec

$$P_1\geqq P_2\geqq\ldots\geqq P_{2l+1}\geqq x^{\eta^2}; \qquad P_1<D_1,\ P_3<D_3,$$
$$P_1\ldots P_{2i}^2P_{2i+1}<x^{0,9} \quad (2\leqq i<l) \quad \text{et} \quad P_1\ldots P_{2l}^2P_{2l+1}>x^{0,9}$$

et parcourant des classes de congruence fixées modulo 3. (On désigne par $f_z(m)$ la fonction caractéristique des entiers m dont tous les facteurs premiers sont plus grands que z.)

Dans $\{P_1, \ldots, P_{2l+1}\}$, on peut toujours trouver un produit partiel dans l'intervalle $[Y, Z]$; en effet, si ce n'était pas le cas, on aurait

$$Y > P_3 \geqq P_4 > \ldots \geqq P_{2l+1},$$

mais aussi

$$P_3 P_4 \ldots P_{2l+1} < Y$$

ce qui entraînerait

$$P_1 \ldots P_{2l}^2 P_{2l+1} \leqq D_1^2 Y^2 \leqq x^{0,8}$$

ce qui est contradictoire.

On applique alors le Lemme 4, en prenant pour N le produit partiel des P_i situé dans l'intervalle $[Y, Z]$ on a ainsi l'inégalité (3.10).

4. *Minoration en moyenne de $S_1^{(q)}$*

On part de la minoration triviale

$$S_1^{(q)} \geqq S_1^{*(q)} = \sum_{p_1, p_2} 1$$

où p_1 et p_2 vérifient les conditions $p_1 p_2 \equiv 2[3]$, $p_1 p_2 \equiv 1[q]$, $p_1 p_2 \leqq x$, $p_1 < p_2$ et $x^{1-\theta_1+\eta} < p_1 < x^{1-\theta-\eta}$ avec

$$\theta_1 = \min(\tfrac{3}{8}(1+\theta), \tfrac{4}{7}).$$

Le Lemme 9 donne directement

$$\sum_q \gamma_q \left(S_1^{*(q)} - \frac{1}{\varphi(q)} T_1^{*(q)} \right) = O_{A,\eta}(x(\log x)^{-A}) \tag{3.11}$$

où $T_1^{*(q)}$ se définit à partir de $S_1^{*(q)}$ en remplaçant $p_1 p_2 \equiv 1[q]$ par $(p_1 p_2, q) = 1$.

5. *Conclusion*

Les inégalités (3.10) et (3.11) transforment la relation (3.9) en l'inégalité suivante:

$$\pi^*(x; q, 1) + \frac{1}{\varphi(q)} T_1^{*(q)} + \frac{1}{\varphi(q)} T_5^{(q)} + \ldots \leqq \frac{1}{\varphi(q)} \sum_d \lambda^{(q)}(d) |\tilde{\mathscr{B}}_d^{(q)}| + \frac{\varepsilon x}{2\varphi(q) \log x} \tag{3.12}$$

valable pour $q \in \mathscr{Q}^*(1, \theta)$ avec au plus $x^\theta (\log x)^{-A}$ exceptions pour $x > x_0(\varepsilon, A)$. Mais, en appliquant le Lemme 1 à la suite $\tilde{\mathscr{B}}^{(q)}$, on a, avec le même choix des

paramètres, l'égalité:

$$\pi^*(x;1,1)+T_1^{(q)}+T_3^{(q)}+\ldots=\sum_d \lambda^{(q)}(d)|\tilde{\mathscr{B}}_d^{(q)}|+O(x^{3/4})$$

et en la comparant avec (3.12), on a l'inégalité

$$\pi^*(x;q,1)\leqq\frac{1}{\varphi(q)}\left(\pi(x;3,2)+(T_1^{(q)}-T_1^{*(q)})+T_3^{(q)}+\frac{2\varepsilon x}{3\log x}\right)$$

valable pour presque tout q. Le Lemme 11 et le théorème des nombres premiers fournissent les évaluations des quantités $T_1^{(q)}-T_1^{*(q)}$ et $T_3^{(q)}$, ce qui donne la première partie du Théorème 3 en prenant η suffisamment petit par rapport à ε.

IV. Etude pour $17/32-\varepsilon<\theta\leqq 3/5$

1. Principe de la méthode

Pour simplifier l'exposé, on ne s'intéresse qu'à la fonction $C(\theta)$: la démonstration s'adapte sans ennui à l'étude de $C^*(\theta)$, en utilisant la technique du paragraphe précédent, technique qui, comme on l'a vu, consiste essentiellement à fixer la classe de congruence modulo 3 de chacune des variables.

On emploie le Lemme 2 à la suite

$$\mathscr{A}^{(q)}=\{qk+1, qk+1\leqq x\} \quad \text{avec } z=x^{\frac{1}{2}},\ \mathscr{P}=\mathscr{P}^{(q)}=\{p;p\nmid q\},$$
$$K=K_0\log\log x \quad \text{et} \quad L=L_0 \quad (K_0 \text{ et } L_0 \text{ constantes absolues}).$$

Nous noterons η un réel >0, très petit par rapport à ε et η jouera le rôle du paramètre ε dans l'énoncé du Lemme 2.

On se propose de trouver D, le plus grand possible, pour que le terme d'erreur $\sum_{(D)} r^+(\mathscr{A}^{(q)},(D))$ soit petit pour presque tout q. On fixe alors $(D)=(D_1,D_2,\ldots,D_l)$ et on doit démontrer pour toute suite (γ_q) vérifiant

$$|\gamma_q|\leqq 1 \quad \text{et} \quad \gamma_q=0 \quad \text{si} \quad q\notin\mathscr{Q}(1,\theta)$$

et pour tout A, l'inégalité

$$\sum_q \gamma_q\left(\sum_{\nu p_1\ldots p_l n\equiv 1\,[q]} c_\nu-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(\nu p_1\ldots p_l n,q)=1} c_\nu\right)=O_{A,\eta}(x(\log x)^{-A}) \tag{4.1}$$

avec $|c_\nu|\leqq 1$, $\frac{x}{2}\leqq \nu p_1\ldots p_l n\leqq x$, $D_i\leqq p_i<D_i^{1+\eta^9}$, et $\nu<x^\eta$.

Toutefois les Lemmes 7 et 8, ramènent l'étude de (4.1) à celle d'une des trois formes suivantes (le symbole $\sim$ au-dessus d'une variable signifie que celle-ci a tous ses facteurs premiers $>\exp(\log^{\frac{1}{2}} x)$):

$$\sum_q \gamma_q\left(\sum_{\nu' p_1\ldots p_l\tilde{n}\equiv 1\,[q]} c'_{\nu'}-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(\nu' p_1\ldots p_l\tilde{n},q)=1} c'_{\nu'}\right)=O_{A,\eta}(x(\log x)^{-A}) \tag{4.2}$$

$$\sum_{\nu, p_1, \ldots, p_l} c_\nu \left(\sum_{qk \equiv -1 [\nu p_1 \ldots p_l]} \gamma_q - \frac{1}{\varphi(\nu p_1 \ldots p_l)} \sum_{(qk, \nu p_1 \ldots p_l)=1} \gamma_q \right) = O_{A,\eta}(x(\log x)^{-A}) \quad (4.3)$$

$$\sum_{\nu, p_1, \ldots, p_l} c_\nu \left(\sum_{q'\tilde{k} \equiv -1 [\nu p_1 \ldots p_l]} \gamma'_{q'} - \frac{1}{\varphi(\nu p_1 \ldots p_l)} \sum_{(q'\tilde{k}, \nu p_1 \ldots p_l)=1} \gamma'_{q'} \right)$$
$$= O_{A,\eta}(x(\log x)^{-A}) \quad (4.4)$$

avec

$$|c'_{\nu'}| \leqq \tau_2(\nu'), \qquad |\gamma'_{q'}| \leqq \tau_2(q')$$
$$1 \leqq \nu' \leqq x^{3\eta/2}, \qquad x^\theta \leqq q' \leqq x^{\theta+\eta/2}$$

et les conditions $\frac{x}{2} \leqq qk \leqq x$ ou $\frac{x}{2} \leqq q'\tilde{k} \leqq x$.

On pose:

$$D = x^{\gamma(\theta)-100\eta} \quad \text{et} \quad D_1 \ldots D_l = x^u.$$

Le Lemme 12 dit, que dans $\{D_1, \ldots, D_l\}$, on trouve deux produits partiels Δ' et Δ'' vérifiant

$$\Delta' \leqq x^{1-\theta-3\eta}, \qquad \Delta'' \leqq x^{\theta+\gamma(\theta)-1-97\eta}, \qquad \Delta'\Delta'' = x^u;$$

on applique alors le Lemme 6 à la partie gauche de (4.3) en prenant

$$Q \leqq x^\eta (\Delta')^{1+\eta^9} \qquad R \leqq (\Delta'')^{1+\eta^9} \qquad M = x^{1-\theta}$$

et l'inégalité (4.3) sera démontrée dès qu'on aura les inégalités

$$x^{1-\theta} > x^{-1+2\eta}(\Delta'\Delta'')^{1+\eta^9}(\Delta'')^{3(1+\eta^9)} \quad \text{et} \quad x^{1-\theta} > x^\eta(\Delta'\Delta'')^{(1+\eta^9)/2}(\Delta'')^{(1+\eta^9)/2} \quad (4.5)$$

(car, pour $Q \leqq X^{\frac{1}{2}}$, on a dans ce lemme l'inégalité:

$$X^{-2}Q^3R^4 \leqq X^{-1}QR^4).$$

Les inégalités (4.5) sont une conséquence des inégalités

$$u + 4\theta + 3\gamma(\theta) \leqq 5 + 200\eta \quad \text{et} \quad u + 3\theta + \gamma(\theta) \leqq 3 + 50\eta. \quad (4.6)$$

Remarquons que l'utilisation de la majoration triviale $u \leqq \gamma(\theta) - 100\eta$ conduit à la valeur $C(\theta) = 4/(3(1-\theta))$ déjà obtenue par Deshouillers et Iwaniec ([3]). Toutefois, en faisant appel au Lemme 5, il sera possible de supposer une meilleure majoration de u.

2. *Etude pour* $17/32 - \varepsilon < \theta < 3/5$

Définissons les fonctions $\gamma(\theta)$ et $\delta(\theta)$ par les formules suivantes:

pour $17/32 - \varepsilon \leqq \theta \leqq 8/15$: $\gamma(\theta) = \frac{15}{11} - \frac{13}{11}\theta$ et $\delta(\theta) = \frac{10}{11} - \frac{5}{11}\theta$

pour $8/15 \leqq \theta \leqq 3/5$: $\gamma(\theta) = \frac{9}{5} - 2\theta$ et $\delta(\theta) = \frac{6}{5} - \theta$

et envisageons deux cas:

a) *si* $u \leqq \delta(\theta)$.

Les inégalités (4.6) sont alors vérifiées, donc la relation (4.4) est démontrée

b) *si* $u > \delta(\theta)$.

Le Lemme 12 entraîne que dans tout intervalle $[U, V]$ inclus dans $[1, D]$ avec $VU^{-1} \geqq x^{\gamma(\theta)-u-100\eta}$, il y a un produit partiel de (D). Mais le Lemme 5 donne la majoration (4.2) dès que (D) peut fournir un produit partiel x^{ζ}, tel qu'on ait les inégalités

$$\begin{cases} 2\zeta + 3(1-u) \leqq 1 + \theta - 4\eta \\ 5\zeta + 2(1-u) \leqq 2 - 4\eta \\ \zeta + (1-u) \geqq \theta + 4\eta \end{cases} \tag{4.7}$$

car la variable $\tilde{n}$, qui joue le rôle de la variable l de ce lemme, vérifie l'inégalité

$$x^{1-u-3\eta} \leqq \tilde{n} \leqq x^{1-u}.$$

Les inégalités (4.7) sont équivalentes à $U \leqq x^{\zeta} \leqq V$ avec

$$U = x^{-1+u+\theta+4\eta} \quad \text{et} \quad V = x^{\min(-1+3u/2+\theta/2-2\eta,\, 2u/5-4\eta/5)},$$

on a donc la relation

$$VU^{-1} \geqq x^{\min(u/2-\theta/2,\, 1-3u/5-\theta)} x^{-6\eta} \geqq x^{\gamma(\theta)-u-100\eta}$$

que l'on vérifie en remplaçant $\gamma(\theta)$ et $\delta(\theta)$ par leurs valeurs, ceci termine la démonstration de (4.4).

3. *Fin de la démonstration*

Utilisant la même méthode que pour l'inégalité (3.11) on a, pour presque tout q de $\mathcal{Q}(1, \theta)$, la minoration

$$\sum_{D^{\frac{1}{3}} \leqq p_1 < x^{\frac{1}{2}}} \mathcal{S}(\mathcal{A}_{p_1}^{(q)}, \mathcal{P}^{(q)}, p_1) \geqq \frac{x}{\varphi(q) \log x} \left(\log \left(\frac{4(1-\theta)}{3\theta} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

qui n'a d'intérêt que pour $\theta < 4/7$. En remplaçant dans le Lemme 2, la quantité D par sa valeur, on obtient ainsi les valeurs de $C(\theta)$ annoncées dans le Théorème 3.

Il est possible d'améliorer la fonction $C(\theta)$ pour θ légèrement inférieur à 3/5, en demandant à (D) de «fournir les quantités N et L» du Lemme 5, mais le gain est très petit.

V. Etude pour $3/5 \leqq \theta \leqq 1 - \varepsilon$

On travaille là aussi avec le Lemme 2, et, pour montrer que le terme d'erreur est petit en moyenne, on s'intéresse à l'inégalité (4.4) en regroupant au mieux

les variables $p_1, \ldots, p_l$. On pose

$$D = x^{\gamma(\theta) - 100\eta}$$

et (D) se scinde en deux parties de produit partiel Δ' et Δ'' avec

$$\Delta' \leqq x^{1-\theta-3\eta} \quad \text{et} \quad \Delta'' \leqq x^{\theta+\gamma(\theta)-1-97\eta}.$$

1. Pour $3/5 \leqq \theta \leqq 5/7$

L'inégalité (4.4) est obtenue par le Lemme 10 (première inégalité) en donnant aux paramètres les valeurs

$$x^{1-\theta-(\eta/2)} \leqq N \leqq x^{1-\theta}, \quad Q \leqq (\Delta'')^{1+\eta^9} \quad \text{et} \quad R \leqq x^{\eta}(\Delta')^{1+\eta^9} \tag{5.1}$$

avec $\gamma(\theta) = \frac{3}{4} - \frac{\theta}{4}$.

2. Pour $5/7 \leqq \theta \leqq 3/4$

On utilise maintenant la deuxième inégalité du Lemme 10, avec la même valeur des paramètres qu'en (5.1), la fonction $\gamma(\theta)$ valant: $\gamma(\theta) = \frac{1}{3} + \frac{\theta}{3}$, en remarquant que le principe du grand crible ([1] thm 0) permet de supposer l'inégalité

$$\Delta' \Delta'' \geqq x^{\frac{1}{2} - 2\eta}. \tag{5.2}$$

3. Pour $3/4 \leqq \theta \leqq 5/6$

Le raisonnement est le même que précédemment avec

$$\gamma(\theta) = \frac{5}{6} - \frac{\theta}{3}.$$

4. Pour $5/6 \leqq \theta \leqq 9/10$

Le Lemme 4 permet de remplacer l'inégalité (5.2) par

$$\Delta' \Delta'' \geqq x^{3\theta/4 - 1/8 - 2\eta}$$

et la deuxième inégalité du Lemme 10 est vérifiée pour

$$\gamma(\theta) = \frac{5}{8} - \frac{\theta}{12}.$$

5. *Pour* $9/10 \leqq \theta \leqq 1-\varepsilon$

On a l'inégalité (4.4) avec le Lemme 4, puisqu'on a la relation

$$\Delta' \Delta'' \leqq D,$$

en choisissant $\gamma(\theta)=1-\dfrac{\theta}{2}$, on ne profite donc pas d'une décomposition de (D) en Δ' et Δ''.

VI. Démonstration du Théorème 1

Il revient au même de démontrer l'inégalité

$$S(\delta_0, x)=\sum_{x^{\delta_0} \leqq l < x} \pi^*(x; l, 1) \log l > c_3 x \tag{6.1}$$

avec $c_3>0$ et l désignant un nombre premier. La somme de Tchebyshev-Hooley permet d'accéder à la quantité étudiée, car on a les égalités

$$\begin{aligned} T-H(x,1) &:= \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv 2[3]}} \sum_{l \mid p-1} \log l \\ &= \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv 2[3]}} \sum_{n \mid p-1} \Lambda(n)+o(x) \\ &= \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv 2[3]}} \log(p-1)+o(x) \sim \frac{x}{2}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Par une interversion de sommations, on a aussi

$$\begin{aligned} T-H(x,1) &= \sum \pi^*(x; l, 1) \log l \\ &= \Big(\sum_{l \leqq x^{\frac{1}{2}}} + \sum_{x^{\frac{1}{2}} < l < x^{\delta_0}}\Big) \pi^*(x; l, 1) \log l + S(\delta_0, x) \\ &\leqq \left(\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{2}}^{\delta_0} C^*(\theta)\, d\theta\right) x + S(\delta_0, x) + \varepsilon x \qquad \text{pour } x > x_0(\varepsilon), \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Bombieri-Vinogradov, la définition de $C^*(\theta)$, et la majoration triviale pour les l exceptionnels.

Il est clair que l'inégalité (6.1) sera acquise si on a l'inégalité:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\delta_0} C^*(\theta) d\theta < \frac{1}{4}$$

obtenue en comparant avec (6.2); au vu du Théorème 3, il revient au même de prouver l'inégalité

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\delta_0} C(\theta) d\theta < \frac{1}{2}. \tag{6.3}$$

1. Intégration entre $1/2$ *et* $17/32-\varepsilon$

Remarquons d'abord les relations

$$w(u)=1 \quad \text{pour } 1<u<2$$

et

$$w(u)=1+\log(u-1) \quad \text{pour } 2\leqq u\leqq 3,$$

qui conduisent à l'égalité

$$\left(\int_{3(1-\theta)/5}^{\max(3/7,\,5/8-3\theta/8)}+\int_{1-\theta}^{1/2}\right)\frac{w((1-t)/t)}{t(1-t)}\,dt=C_1(\theta)-C_2(\theta)+C_3(\theta)$$

avec

$$C_1(\theta)=\log 2$$

$$C_2(\theta)=\begin{cases}\log\left(\dfrac{3(1+\theta)(1-\theta)}{\theta(5-3\theta)}\right) & (\tfrac{1}{2}\leqq\theta\leqq\tfrac{11}{21})\\[2ex] \log\left(\dfrac{4(1-\theta)}{3\theta}\right) & (\tfrac{11}{21}\leqq\theta\leqq\tfrac{17}{32}-\varepsilon)\end{cases}$$

et

$$C_3(\theta)=\int_{3(1-\theta)/5}^{1/3}\frac{w((1-t)/t}{t(1-t)}\,dt=\int_{2}^{(2+3\theta)/(3(1-\theta))}\frac{1+\log(t-1)}{t}\,dt$$

après un changement de variable. Notons $C_4(\theta)$ l'intégrale triple apparaissant dans le Théorème 3, par la majoration $w(u)\leqq u$, on a l'inégalité

$$C_4(\theta)\leqq\iiint_{\mathscr{E}(\theta)}\frac{dt_1\,dt_2\,dt_3}{t_1t_2t_3^2}=\frac{3}{5-8\theta}\left(1+\left(1-\log\frac{18(1-\theta)}{5(5-8\theta)}\right)^2\right)-\frac{5}{3(1-\theta)}.$$

On a les inégalités

$$\int_{1/2}^{17/32}(1+\log 2)\,\mathrm{d}\theta \leqq 0{,}05292$$

$$\int_{1/2}^{11/21}C_2(\theta)\,d\theta \geqq 0{,}00528$$

$$\int_{11/21}^{17/32}C_2(\theta)\,d\theta \geqq 0{,}00132.$$

Dans l'égalité

$$\int_{1/2}^{17/32}C_3(\theta)\,d\theta=\int_{1/2}^{17/32}\int_{2}^{7/3}\frac{1+\log(u-1)}{u}\,d\theta\,du+\int_{1/2}^{17/32}\int_{7/3}^{(2+3\theta)/(3(1-\theta))}\frac{1+\log(u-1)}{u}\,d\theta\,du$$

la première intégrale double est $\leqq 0{,}00553$.

La seconde s'écrit, grâce à la formule de Fubini, sous la forme

$$\int_{7/3}^{23/9} \frac{115-45u}{96u(1+u)}(1+\log(u-1))du \leqq 0{,}00190.$$

On a aussi

$$\int_{1/2}^{17/32} C_4(\theta)d\theta \qquad \leqq 0{,}01061.$$

Ces différentes inégalités entraînent

$$\int_{1/2}^{(17/32)-\varepsilon} C(\theta)d\theta \qquad \leqq 0{,}06436.$$

2. Intégration sur les autres intervalles

On a les inégalités

$$\int_{17/32}^{8/15} \frac{22}{15-13\theta}d\theta \qquad \leqq 0{,}00568$$

$$\int_{8/15}^{3/5} \frac{10}{9-10\theta}d\theta \qquad \leqq 0{,}20068$$

$$\int_{17/32}^{4/7} \log\left(\frac{4(1-\theta)}{3\theta}\right)d\theta \qquad \geqq 0{,}00327$$

$$\int_{3/5}^{0{,}6687} \frac{8}{3-\theta}d\theta \qquad \leqq 0{,}23235$$

on a donc finalement $\int_{1/2}^{0{,}6687} C(\theta)d\theta \leqq 0{,}49981$, l'inégalité (6.3) est démontrée, ce qui termine la preuve du Théorème 1.

3. Remarque finale

La valeur δ_0 pourrait être améliorée en constatant que lors de l'étude de $T-H(x;1)$ on somme $\pi^*(x;l,1)$ sur les nombres premiers l, on peut profiter de cet avantage pour s'intéresser par exemple, à des majorations de la forme

$$\sum_q \Lambda(q)R^{(q)} = O_{\eta,A}(x(\log x)^{-A})$$

au lieu de la majoration (3.6).

Bibliographie

1. Bombieri, E., Friedlander, J., Iwaniec, H.: Primes in arithmetic progressions to large moduli (à paraître)
2. Deshouillers, J.-M., Iwaniec, H.: Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms. Invent. Math. **70**, 219–288 (1982)

3. Deshouillers, J.-M., Iwaniec, H.: On the Brun-Titchmarsh theorem on average. Janos Bolyai Conf. 1981 (à paraître)
4. Fouvry, E.: Répartition des suites dans les progressions arithmétiques, Résultats du type Bombieri-Vinogradov avec exposant supérieur à $\frac{1}{2}$. Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Bordeaux I (1981)
5. Fouvry, E.: Répartition des suites dans les progressions arithmétiques. Acta Arith. **41**, 359–382 (1982)
6. Fouvry, E.: Autour du théorème de Bombieri-Vinogradov. Acta Math. **152**, 219–244 (1984)
7. Fouvry, E.: Sur le théorème de Brun-Titchmarsh. Acta Arith. **43**, 417–424 (1984)
8. Fouvry, E., Iwaniec, H.: On a theorem of Bombieri-Vinogradov type. Mathematika **27**, 135–152 (1980)
9. Fouvry, E., Iwaniec, H.: Primes in arithmetic progressions. Acta Arith. **42**, 197–218 (1983)
10. Heath-Brown, D.R.: Prime numbers in short intervals and a generalized Vaughan identity. Can. J. of Math. **34**, 1365–1377 (1982)
11. Hooley, C.: On the largest prime factor of $p+a$. Mathematika **20**, 135–143 (1973)
12. Iwaniec, H.: The half dimensional sieve. Acta Arith. **29**, 69–95 (1976)
13. Iwaniec, H.: A new form of the error term in the linear sieve. Acta Arith. **37**, 307–321 (1980)
14. Iwaniec, H.: On the Brun-Titchmarsh Theorem. J. Math. Soc. of Japan **34**, 95–123 (1982)
15. Ribenboim, P.: 13 lectures on Fermat's last Theorem. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979
16. Tenenbaum, G.: Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné. Comp. Math. **51**, 243–263 (1984)

Oblatum 10-VII-1984