Werk

Titel: K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale.

Autor: Soulé, C.

Jahr: 1979

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0055|log21

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Inventiones math. 55, 251 – 295 (1979)

Inventiones mathematicae
© by Springer-Verlag 1979

K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale

C. Soulé

Université Paris VII, C.N.R.S., Tour 45 – 55, 5è étage, F-75221 Paris Cedex 05, France

Introduction

D. Quillen a défini pour tout anneau unitaire A des groupes de K-théorie

$$K_n(A)=\pi_n(BGL^+(A)), \quad n\in\mathbb{N}\, i^*,$$

où $BGL^+(A)$ est une modification de l'espace classifiant du groupe linéaire infini $GL(A)$ (cf. [38]). Ces groupes $K_n(A)$ sont connus quand A est un corps fini [40].

On s'intéresse ici au cas où A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Quillen a montré dans ce cas que $K_n(A)$ est de type fini [42], Garland et Borel ont calculé $K_n(A)\otimes\mathbb{Q}$ [10], Quillen [41] puis Harris et Segal [24] ont exhibé dans $K_{2i-1}(A)$ un groupe cyclique d'ordre $w_i(F)$ (i.e., à une puissance de 2 près, l'ordre du groupe de cohomologie $H^0(F, W(i))$, défini ci-dessous en I).

Une conjecture de Lichtenbaum affirme que quand F est totalement réel et i pair, on a (à une puissance de 2 près)

$$|\zeta_F(1-i)|=\frac{\operatorname{card} K_{2i-2}(A)}{\operatorname{card} K_{2i-1}(A)}.$$

On sait dans ce cas que $w_i(F)\zeta_F(1-i)$ est un entier (cf. [17]).

Dans le texte qui suit, on obtient un résultat reliant la K-théorie de A au numérateur de $\zeta_F(1-i)$. Dans le cas où $A=\mathbb{Z}$, il dit que si ℓ est un nombre proprement irrégulier et $i<\ell$, la ℓ-composante du numérateur de $\zeta(1-i)$ divise l'ordre de $K_{2i-2}(\mathbb{Z})$.

La méthode utilisée consiste à comparer la K-théorie de A à la cohomologie ℓ-adique de $\operatorname{Spec} A'$ (où A' est le localisé de A en-dehors de ℓ), selon une voie envisagée par Quillen. On utilise ensuite le lien, établi par Coates et Lichtenbaum [15] (du moins, quand $A=\mathbb{Z}$, si ℓ est proprement irrégulier), entre la cohomologie ℓ-adique de $\operatorname{Spec} A'$ et les valeurs de la fonction ζ_F. On définit (à l'aide des classes de Chern étales équivariantes de Grothendieck [22]) des

0020-9910/79/0055/0251/$09.00

morphismes

$$\bar{c}_{i,k}\colon\ K_{2i-k}(A;\mathbb{Z}/q)\to H^k(\operatorname{Spec}A',\mu_q^{\otimes i}),\qquad q=\ell^v,\ \ell\neq 2.$$

Le groupe $H^k(\operatorname{Spec}A',\mu_q^{\otimes i})$ désigne ici la cohomologie étale à coefficients le faisceau des racines q-ièmes de l'unité, tensorisé i fois par lui-même. Le groupe $K_n(A;\mathbb{Z}/q)$ de K-théorie à coefficients $\mathbb{Z}/q$ a été introduit par Browder [11] et Karoubi [27] qui s'en servent pour retrouver les résultats de Harris et Segal. On démontre ici des théorèmes de surjectivité concernant les morphismes $\bar{c}_{i,k}$. Le cas où $k=0$ correspond aux résultats de W. Browder et M. Karoubi (i.e. le dénominateur de $\zeta_F(1-i)$), et le cas $k=2$ correspond au numérateur de $\zeta_F(1-i)$. Il faut cependant noter que la surjectivité de $\bar{c}_{i,k}$ suppose $i<\ell$ (on obtient en général que l'image de $\bar{c}_{i,k}$ dans le groupe $H^k(\operatorname{Spec}A',\mu_q^{\otimes i})$ contient celle de la multiplication par $i!$).

Le plan de ce texte est le suivant. Après avoir présenté les conjectures de Quillen et Lichtenbaum et le résultat principal, on introduit les morphismes $\bar{c}_{i,k}$ (pour tout anneau A où ℓ est inversible) et l'on étudie leur comportement pour le produit (II.3). Le troisième paragraphe étudie la suite exacte de localisation d'un anneau de Dedekind (respectivement, en cohomologie étale, la suite spectrale de Leray du morphisme $\operatorname{Spec}F\to\operatorname{Spec}A$): on montre que les morphismes $\bar{c}_{i,k}$ commutent à la localisation et au transfert (III.2, III.3) et que la K-théorie de A s'envoie injectivement dans celle de F (si on néglige la 2-torsion, cf. III.3, th. 3).

Le paragraphe IV étudie la surjectivité des morphismes $\bar{c}_{i,k}$, d'abord pour les anneaux d'entiers de corps locaux ou globaux (IV.1), puis pour les corps finis. On en déduit que la multiplication par $i!$ annule le groupe $H^2(\operatorname{Spec}A',W_\ell(i))$ (si $i\geqq 2$) (IV.3.2), ce qui implique un théorème de finitude pour la cohomologie ℓ-adique. On étudie en IV.3.3 la limite projective des morphismes $\bar{c}_{i,k}$, puis l'on traite en IV.4 le cas de la ℓ-extension cyclotomique maximale d'un corps de nombres, et en IV.5 celui des «corps locaux de dimension supérieure» (introduits par Kato [28] et Parshin [38]). En conclusion, on indique brièvement comment la γ-filtration des groupes de K-théorie de Quillen aide à l'étude des morphismes $\bar{c}_{i,k}$ dans le cas des variétés de dimension plus grande, et on formule une conjecture reliant dans ce cas la fonction zêta au gradué associé à cette filtration. On espère développer ces considérations dans un texte ultérieur.

Je tiens à vivement remercier L. Breen, K. Brown, P. Deligne, L. Illusie, S. Lichtenbaum et J.-L. Loday, qui, à des titres divers, m'ont aidé dans ce travail. Je remercie surtout S. Bloch, M. Karoubi, et D. Quillen, qui, en me parlant de leurs travaux personnels, m'ont permis d'écrire ce texte.

Notations. $\mathbb{Z}$ est l'anneau des entiers, ℓ un nombre premier impair, $q=\ell^v$ une puissance entière de ℓ, $v\geqq 1$, $\mathbb{Z}/q$ l'anneau des entiers modulo q, $\mathbb{Z}_\ell$ celui des entiers ℓ-adiques, et $\mathbb{Q}_\ell$ son corps des fractions, A un anneau unitaire commutatif, k ou F un corps.

Plan

I *Les conjectures; énoncé du résultat principal* 254
I.1 Présentation des conjectures 254
I.2 Résultats 255
II *Classes de Chern ℓ-adiques* 256
II.1 Classes de Chern équivariantes ℓ-adiques de Grothendieck 256
II.2 Des tests pour la K-théorie à coefficients 258
II.2.1 La K-théorie à coefficients 258
II.2.2 Le morphisme d'Hurewicz 260
II.2.3 Classes de Chern et K-théorie, définitions 261
II.3 Formule de multiplication 262
III *Localisation et transfert* 266
III.1 Préliminaires de cohomologie étale 266
III.2 La suite exacte de localisation en égale caractéristique et le transfert 270
III.3 La suite exacte de localisation d'un anneau de Dedekind à corps résiduels finis . . . 273
IV *Surjectivité des classes de Chern* 278
IV.1 Anneaux d'entiers de corps globaux 278
IV.2 Les corps finis 284
IV.3 Sur les conjectures de Lichtenbaum et Quillen 284
IV.4 Anneaux contenant toutes les racines de l'unité 290
IV.5 Corps locaux de dimension supérieure 292
IV.6 Sur la γ-filtration 293

I Les conjectures; énoncé du résultat principal

I.1 Présentation des conjectures (cf. [33])

Soient F un corps de nombres totalement réel, i un entier pair non nul, ζ_F la fonction zêta et $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F. La conjecture de Lichtenbaum est surtout connue sous la forme suivante (où $K_*(\mathcal{O}_F)$ désigne la K-théorie de l'anneau $\mathcal{O}_F$):

$$|\zeta_F(1-i)| = \frac{\operatorname{card}(K_{2i-2}(\mathcal{O}_F))}{\operatorname{card}(K_{2i-1}(\mathcal{O}_F))}$$

(modulo une puissance de 2).

En fait, cet énoncé est la synthèse de deux autres conjectures, reliant respectivement la K-théorie et les valeurs de la fonction zêta à un intermédiaire, à savoir des groupes de cohomologie étale, que nous allons maintenant définir. Fixons un nombre premier impair ℓ, F un corps de nombres (quelconque), i un entier pair. On note S l'ensemble des places finies de F qui divisent ℓ, $\mathcal{O}_S$ l'anneau des S-entiers de F, $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$ (resp. $W_\ell(i)$) le faisceau étale des racines ℓ^ν-ièmes (resp. $\ell^{\nu'}$-ièmes, $\forall \nu' \in \mathbb{N}$) de l'unité sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S$ (ou $\operatorname{Spec} F$), tensorisé i fois par lui-même (resp. tordu i fois à la Tate), j l'injection de $\operatorname{Spec} F$ dans $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S$, et $\mathbb{Z}_\ell$ les entiers ℓ-adiques. On pose, par définition,

$$H^k(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S, \mathbb{Z}_\ell(i)) = \varprojlim_\nu H^k(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}),$$

la limite des groupes de cohomologie étale étant prise pour les morphismes induits par les projections $\mu_{\ell^{\nu+1}}^{\otimes i} \to \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$.

Conjecture de D. Quillen

(Q) *Il existe des isomorphismes.*

$$\mathrm{ch}_{i,2}: K_{2i-2}(\mathcal{O}_S) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^2(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S, \mathbb{Z}_\ell(i))$$
$$\mathrm{ch}_{i,1}: K_{2i-1}(\mathcal{O}_S) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^1(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S, \mathbb{Z}_\ell(i)).$$

Conjecture de S. Lichtenbaum

Soient F un corps de nombres totalement réel et i un entier pair >0.

(L1) *Les groupes $H^k(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S, j_* W_\ell(i))$ sont finis, et nuls si $k \geqq 2$.*

(L2) *On a, en désignant par $|.|_\ell$ la partie ℓ-primaire d'un nombre rationnel,*

$$|\zeta_F(1-i)|_\ell = \frac{\operatorname{card} H^1(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S, j_*(W_\ell(i)))}{\operatorname{card} H^0(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S, j_* W_\ell(i))}.$$

Les morphismes de Bockstein des longues suites exactes associées aux suites exactes de faisceaux sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S$

$$0 \to \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i} \to W_\ell(i) \xrightarrow{\times \ell^\nu} W_\ell(i) \to 0$$

donnent, quand la conjecture (L1) est vérifiée, des isomorphismes

$$H^k(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S, j_* W_\ell(i)) \to H^{k+1}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S, \mathbb{Z}_\ell(i)).$$

Par ailleurs, la suite exacte de localisation de Quillen [39] et le calcul par Borel de $K_*(\mathcal{O}_S) \otimes \mathbb{Q}$ [10] montrent que $K_{2i-k}(\mathcal{O}_S) \otimes \mathbb{Z}_\ell$ est isomorphe à la ℓ-torsion de $K_{2i-k}(\mathcal{O})$ (quand i est pair, F totalement réel et $k=1$ ou 2). Ceci montre que la synthèse des conjectures de Quillen et Lichtenbaum est bien l'énoncé donné au début de ce paragraphe.

I.2 Résultats

I.2.1 Conjectures de Lichtenbaum

On sait, par les théorèmes de dualité de Artin et Verdier [2] que (si ℓ est impair) $H^k(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S, j_* W_\ell(i)) = 0$ si $k \geqq 3$ (pour tout F et tout i). On voit aisément que $H^0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S, j_* W_\ell(i))$ est fini.

On démontre ici le théorème suivant:

Théorème 5 (cf. IV.3.2). *Pour tout corps de nombres F, si $i \geqq 2$, la multiplication par $i!$ annule le groupe $H^2(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_S, j_* W_\ell(i))$.*

Par un argument essentiellement dû à Lichtenbaum, on en déduit la partie (L1) de sa conjecture. Ce résultat s'exprime aussi en disant que certaines valeurs de la série caractéristique d'un module d'Iwasawa sont non nulles (cf. [15] ou [3]). Dans le cas d'un corps abélien (totalement réel) on peut aussi le démontrer à l'aide du théorème de Stickelberger [16].

Quant à la conjecture (L2) (qui dépend de celle d'Iwasawa, cf. [3]), elle est montrée dans certains cas par S. Lichtenbaum et J. Coates ([15, 32]). Si $F = \mathbb{Q}$, par exemple, elle est vraie quand ℓ est un nombre premier impair régulier ou proprement irrégulier (on sait que tout nombre premier inférieur à 125000 est de ce type, d'après [57], § 5).

I.2.2 La conjecture de Quillen

C'est sur cette conjecture que porte le texte qui suit. Le résultat principal est le suivant (cf. § IV.3.).

Théorème. *Si F est un corps de nombres totalement réel et $i \equiv 0 \pmod 2$, ou si F est une extension de degré de transcendance un d'un corps fini, et si $i < \ell$, il existe des*

morphismes $\mathrm{ch}_{i,1}$ *et* $\mathrm{ch}_{i,2}$ *comme dans l'énoncé de la conjecture* (Q). *Ils sont surjectifs.*

Corollaire. *Si F est totalement réel, si i est pair, et si la conjecture* (L2) *est vérifiée par F, i et ℓ, le numérateur de $|\zeta_F(1-i)|_\ell$ divise l'ordre de $K_{2i-2}(\mathcal{O})$, quand $i<\ell$.*

Exemple. $K_{22}(\mathbb{Z})$ contient un élément d'ordre 691.

On montrera dans un autre article que la cohomologie-adique de $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S$ est, dans le cas général, de type fini sur $\mathbb{Z}_\ell$, et qu'il existe un isomorphisme naturel entre $K_{2i-k}(\mathcal{O}_S)\otimes\mathbb{Q}_\ell$ et $H^k(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_S,\mathbb{Q}_\ell(i))$ ($k=1$ ou 2).

Notons enfin que les calculs explicites effectués en bas rang ($K_1(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/2$, $K_2(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/2$, $K_3(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/48$, $K_4(\mathbb{Z})=$(2-groupe)$\oplus$($\mathbb{Z}/3$ ou 0) $K_5(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}\oplus$(2-groupe)$\oplus$(3-groupe)) sont aussi compatibles à ces conjectures (cf. [36, 30, 31, 51, 54]).

II Classes de Chern ℓ-adiques

II.1 Classes de Chern équivariantes ℓ-adiques de Grothendieck

II.1.1 Fixons un nombre premier ℓ. Soient A un anneau commutatif unitaire dans lequel ℓ est inversible, P un module projectif de type fini sur A, de rang borné par r sur tout corps résiduel de A, et

$$\rho\colon G\to\operatorname{Aut}(P)$$

une représentation de G sur P. Ces données définissent un G-faisceau localement libre sur $\operatorname{Spec}A$. A. Grothendieck associe à ce fibré des classes de Chern, nulles pour $i>r$,

$$c_i(\rho)\in H^{2i}(\operatorname{Spec}A,G;\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}),\qquad 0\leqq i,\ \nu\geqq 1,$$

qui appartiennent à des groupes de cohomologie étale équivariante par rapport à l'action triviale de G sur $\operatorname{Spec}A$ (voir [22]).

Ces classes de Chern forment un système projectif pour les morphismes induits par les projections $\mu_{\ell^{\nu+1}}^{\otimes i}\to\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$. On a $c_0(\rho)=1$ par définition, et si on désigne par

$$c(\rho)=1+c_1(\rho)+c_2(\rho)+\ldots+c_r(\rho)$$

la classe de Chern «totale», on a les propriétés suivantes (loc. cit., § 2.3).

i) Fonctorialité. Si f est un système de morphismes compatibles $A\to A'$, $G\to G'$, $P\to P'$, on a $c_i(f^*(\rho))=f^*(c_i(\rho))$.

ii) Normalisation. $c_1(\rho)=\beta_\nu(\xi(\det(\rho)))$, où $\xi(\det(\rho))\in H^1(\operatorname{Spec}A,G;G_m)$ est la classe du G-fibré inversible de rang un associé à $\det(\rho)$, et β_ν le morphisme de

Bockstein dû à la suite exacte de faisceaux étales

$$0 \to \mu_{\ell^\nu} \to G_m \xrightarrow{\times \ell^\nu} G_m \to 0$$

(comme $1/\ell \in A$, l'application $G_m \xrightarrow{\times \ell^\nu} G_m$ est surjective, cf. [46]. II.2.5).

iii) Additivité. Si $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ est une suite exacte de G-modules projectifs sur A, on a (en désignant par ρ', ρ, ρ'' les représentations correspondantes)

$$c(\rho) = c(\rho') \cup c(\rho'')$$

(cup-produit pour la cohomologie équivariante).

On notera $R_A(G)$ le groupe de Grothendieck des représentations du groupe G dans un A-module projectif de type fini, et $IR_A(G)$ le noyau de la projection $R_A(G) \to K_0(A)$ (associant à une représentation son support). On a une décomposition canonique

$$R_A(G) = IR_A(G) \oplus K_0(A).$$

La formule d'addition ci-dessus permet d'étendre les classes de Chern à $R_A(G)$.

iv) Multiplicativité. Si ρ et ρ' sont deux éléments de $IR_A(G)$ on a

$$c_i(\rho \otimes \rho') = Q_i(c_1(\rho), c_2(\rho), \ldots; c_1(\rho'), c_2(\rho'), \ldots),$$

où le polynôme Q_i est un polynôme universel à coefficients entiers qu'on peut décrire par exemple à partir de la même formule pour les classes de Chern topologiques ordinaires (les monômes de Q_i sont évalués par des cup-produits en cohomologie équivariante).

La représentation naturelle id_n de $GL_n(A)$ sur A^n donne ainsi des classes

$$c_i(id_n) \in H^{2i}(\operatorname{Spec} A, GL_n(A); \mu_q^{\otimes i}), \quad \text{avec } q = \ell^\nu,$$

qui sont «stables», c'est à dire ne changent pas si on compose la représentation naturelle avec le plongement habituel i_n de $GL_n(A)$ (resp. A^n) dans $GL_{n+1}(A)$ (resp. A^{n+1}). En effet, si 1 désigne la représentation triviale de $GL_n(A)$ sur A, on a

$$i_n^*(c(id_{n+1})) = c(i_n^*(id_{n+1})) = c(id_n \oplus 1) = c(id_n) \cup c(1) = c(id_n).$$

II.1.2 On déduit des classes de Chern ci-dessus des tests pour l'homologie de $GL_n(A)$. En effet, une variante de la formule de Künneth donne le lemme suivant:

Lemme 1. *Si G est un groupe opérant trivialement sur le schéma* Spec A, *il existe un morphisme naturel:*

$$H^{2i}(\operatorname{Spec} A, G; \mu_q^{\otimes i}) \xrightarrow{\Phi} \bigoplus_{k=0}^{2i} \operatorname{Hom}(H_{2i-k}(G; \mathbb{Z}/q), H^k(\operatorname{Spec} A; \mu_q^{\otimes i})).$$

Preuve. Comme l'action de G sur $\operatorname{Spec} A$ est triviale, la cohomologie équivariante peut se calculer comme suit. Notons $C.(G)$ le complexe standard des chaînes sur $\mathbb{Z}/q$ du classifiant de G (i.e. les invariants sous G de la résolution standard de $\mathbb{Z}/q$ par des $\mathbb{Z}/q[G]$-modules libres), et $\mathscr{L}^*$ une résolution injective du faisceau étale $\mu_q^{\otimes i}$ sur $\operatorname{Spec} A$. Alors

$$H^{2i}(\operatorname{Spec} A, G; \mu_q^{\otimes i}) = H_{-2i}(\operatorname{Hom}(C.(G), \mathbb{Z}/q) \otimes \Gamma(\mathscr{L}^*))$$

est l'homologie du produit des complexes définis par

$$\operatorname{Hom}(C.(G), \mathbb{Z}/q)_n = \operatorname{Hom}(C_{-n}(G), \mathbb{Z}/q)$$

et

$$\Gamma(\mathscr{L}^*)_n = \Gamma(\mathscr{L}^{-n}) \quad \text{(sections sur Spec } A\text{)}.$$

Les morphismes naturels

$$\operatorname{Hom}(C.(G), \mathbb{Z}/q) \otimes \Gamma(\mathscr{L}^*) \to \operatorname{Hom}(C.(G), \Gamma(\mathscr{L}^*))$$

et

$$H_*(\operatorname{Hom}(C.(G), \Gamma(\mathscr{L}^*)) \to \operatorname{Hom}(H_*(C.(G)), H_*(\Gamma(\mathscr{L}^*)))$$

(cf. [12], IV.6) permettent de définir le morphisme Φ (il ne dépend pas du choîx de la résolution $\mathscr{L}^*$, puisque les complexes des sections de deux telles résolutions sont homotopes). q.e.d.

Le lemme précédent permet donc d'associer aux classes de Chern $c_i(\rho)$ définies au paragraphe précédent des morphismes

$$c_{i,k}(\rho)\colon H_{2i-k}(G; \mathbb{Z}/q) \to H^k(\operatorname{Spec} A; \mu_q^{\otimes i})$$

(composantes de $\Phi(c_i(\rho))$).

En particulier, la représentation naturelle de $GL_n(A)$ donne ainsi, après passage à la limite sur n (rendu possible par la stabilité des classes $c_i(id_n)$), des morphismes

$$c_{i,k}(id)\colon H_{2i-k}(GL(A); \mathbb{Z}/q) \to H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i}), \qquad 0 \leqq k \leqq 2i,$$

où $GL(A) = \varinjlim_n GL_n(A)$ désigne le groupe linéaire infini.

Remarque. Il serait intéressant d'étudier quelle partie de la cohomologie de $GL_n(A)$ peut être détectée à l'aide des classes $c_{i,k}(id)$ (en restreignant celles-ci à des sous-groupes convenables de $GL_n(A)$). Ce problème a été abordé dans [52] et [54]. Nous nous restreindrons ici à la partie de l'homologie qui provient de la K-théorie par le morphisme d'Hurewicz (à coefficients).

II.2 Des tests pour la K-théorie à coefficients

II.2.1 La K-théorie à coefficients

On désigne par q un entier positif et par $[X, X']$ les classes d'homotopie pointées d'applications pointées entre deux espaces (pointés) X et X'. Si n est un entier,

$n \geqq 2$, on désigne par

$$(Y_q^n =)\, Y^n = S^{n-1} \bigcup_{\times q} e^n$$

le cône (homotopique) de la multiplication par q dans la sphère S^{n-1}. Autrement dit, on a une cofibration homotopique

$$S^{n-1} \xrightarrow{\times q} S^{n-1} \to Y^n.$$

L'homotopie à coefficients $\mathbb{Z}/q$ d'un espace pointé X est définie par

$$\pi_n(X; \mathbb{Z}/q) = [Y^n, X].$$

La K-théorie à coefficients $\mathbb{Z}/q$ d'un anneau A a été introduite par Browder [11] et Karoubi [27]. Si $n \geqq 2$, elle est définie par

$$K_n(A; \mathbb{Z}/q) = \pi_n(BGL^+(A); \mathbb{Z}/q) = [Y^n, BGL^+(A)],$$

où $BGL^+(A)$ est l'espace construit par D. Quillen pour sa première définition de la K-théorie supérieure (on trouvera un exposé complet de celle-ci dans [34]). Si $n = 0$, on pose

$$K_0(A; \mathbb{Z}/q) = K_0(A)/qK_0(A).$$

Pour $n = 1$, nous prendrons (à la différence de W. Browder) la définition suivante. Soit $BQ(A)$ l'espace classifiant de la catégorie $Q(A)$ associée par Quillen à celle des modules projectifs de types fini sur A lors de sa seconde définition de la K-théorie supérieure (cf. [39]). On pose

$$K_1(A; \mathbb{Z}/q) = \pi_2(BQ(A); \mathbb{Z}/q).$$

Cette définition est liée aux présédentes par les égalités (cf. [21])

$$\pi_{n+1}(BQ(A); \mathbb{Z}/q) = \pi_n(BGL^+(A); \mathbb{Z}/q) = K_n(A; \mathbb{Z}/q), \quad \text{si } n \geqq 2.$$

La cofibration définissant Y^n montre qu'on a une suite exacte (de Bockstein)

$$\ldots \to K_n(A) \xrightarrow{\times q} K_n(A) \to K_n(A; \mathbb{Z}/q) \to K_{n-1}(A) \xrightarrow{\times q} \ldots K_0(A; \mathbb{Z}/q) \to 0.$$

En particulier, si $K_0(A)$ est sans torsion, on a

$$K_1(A; \mathbb{Z}/q) = K_1(A)/qK_1(A),$$

ce qui permet de définir ce groupe sans avoir recours à la seconde définition de la K-théorie.

Si 2 ne divise pas q, on peut munir $K_*(A; \mathbb{Z}/q)$ d'une structure de $\mathbb{Z}/q$-algèbre graduée (anti)commutative. Ceci se voit en appliquant à l'accouplement $BQ(A) \wedge BQ(A) \to BQ^2(A)$ (cf. [58] et [20]) les raisonnements de ([11], 1.5, 1.6, 1.7). Le produit en degré autre que 1, ou avec $K_1(A)/qK_1(A)$, est celui déduit de

l'accouplement

$$BGL^+(A) \wedge BGL^+(A) \to BGL^+(A)$$

défini (à homotopie faible près) par Loday [34]. En effet, ces accouplements sont reliés par les diagrammes de [58], 9.2.6, 9.3.3, et preuve de 15.9.

La plupart des propriétés de la K-théorie, telles que la suite exacte de localisation associée à un anneau de Dedekind [39], sont décrites par des fibrations entre espaces $BQ(A)$ et peuvent être délacées dans les espaces $BQ^k(A)$ (cf. [20] et [58]). Par conséquent, elles demeurent valables pour la K-théorie à coefficients. Cet argument sera souvent utilisé implicitement dans la suite.

II.2.2 Le morphisme d'Hurewicz

Un calcul aisé (cf. aussi [11]) montre que l'homologie $H_i(Y^n; \mathbb{Z}/q)$ est égale à $\mathbb{Z}/q$ si $i = 0, n-1$, ou n, et à 0 sinon. Notons ε_q^n le générateur de $H_n(Y^n; \mathbb{Z}/q)$ dont l'image dans $H_{n-1}(Y^n; \mathbb{Z})$ (par le morphisme de Bockstein) est la classe de $S^{n-1} \subset Y^n$. Tout élément α de $[Y^n, X]$ induit un morphisme α_* de l'homologie de Y^n vers celle de X.

Definition. Le morphisme d'Hurewicz à coefficients $\mathbb{Z}/q$

$$h_q : \pi_n(X; \mathbb{Z}/q) \to H_n(X; \mathbb{Z}/q), \qquad n \geqq 2,$$

est défini par la formule $h_q(\alpha) = \alpha_*(\varepsilon_q^n)$.

– Si h est le morphisme d'Hurewicz ordinaire, on obtient un morphisme entre suites exactes de Bockstein:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to \pi_n(X) & \xrightarrow{\times q} & \pi_n(X) & \longrightarrow & \pi_n(X; \mathbb{Z}/q) & \to & \pi_{n-1}(X) & \xrightarrow{\times q} & \ldots \\
\downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h_q & & \downarrow h & & \\
\ldots H_n(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\times q} & H_n(X; \mathbb{Z}) & \to & H_n(X; \mathbb{Z}/q) & \to & H_{n-1}(X; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\times q} & \ldots
\end{array}$$

En effet, par fonctorialité, il suffit de le montrer pour Y^n, auquel cas cela résulte de la définition de ε_q^n.

Lemme 2. *Si $2 \nmid q$, le morphisme h_q est bilinéaire.*

Autrement dit, un accouplement $X \wedge Y \xrightarrow{\mu} Z$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\pi_m(X; \mathbb{Z}/q) \otimes \pi_n(Y; \mathbb{Z}/q) & \xrightarrow{\mu'} & \pi_{m+n}(Z; \mathbb{Z}/q) \\
\downarrow h_q \otimes h_q & & \downarrow h_q \\
H_m(X; \mathbb{Z}/q) \otimes H_n(Y; \mathbb{Z}/q) & \xrightarrow{\mu''} & H_{m+n}(Z; \mathbb{Z}/q).
\end{array}$$

Preuve. Le produit μ' en homotopie a été défini par Browder ([11], 1.4 et 1.6) comme le composé

$$Y^{m+n} \xrightarrow{\rho} Y^m \wedge Y^n \to X \wedge Y \xrightarrow{\mu} Z,$$

où ρ est une section continue. Il suffit donc de vérifier que $\rho_*(\varepsilon_q^{m+n}) = \varepsilon_q^m \otimes \varepsilon_q^n$ dans $H_{m+n}(Y^m \wedge Y^n; \mathbb{Z}/q)$. Mais par définition de ρ (loc. cit.), la restriction de ρ à S^{m+n-1} est donnée par le générateur de $\pi_{m+n-1}(Y^m \wedge Y^n)$ dont l'image par h est précisément $\beta_q(\varepsilon_q^m \otimes \varepsilon_q^n)$ (où β_q est le morphisme de Bockstein). q.e.d.

Lemme 3. *Soit* $\Delta: X \to X \wedge X$ *le morphisme diagonal, et*

$$\Delta_*: H_n(X; \mathbb{Z}/q) \to H_n(X \wedge X; \mathbb{Z}/q),$$

le morphisme induit en homologie. Si $n \geqq 2$, *on a* $\Delta_* \circ h_q = 0$ (i.e. *l'image du morphisme d'Hurewicz est formée d'éléments primitifs*).

Preuve. Ce lemme (bien connu pour le morphisme d'Hurewicz ordinaire) se montre en se ramenant à $X = Y^n$. Il faut alors prouver que $\Delta_*(\varepsilon_q^n) = 0$. Mais $H_i(Y^n \wedge Y^n; \mathbb{Z}/q)$ n'est non nul qu'en degrés 0, $2n-2$, $2n-1$ et $2n$, et si $n=2$, l'élévation au carré $H^1(Y^2; \mathbb{Z}/q) \to H^2(Y^2; \mathbb{Z}/q)$ est nulle (cf. [11]), d'où le lemme.

Remarque. La même chose est vraie en homotopie, grâce au fait que $\pi_n(Y^n \wedge Y^n; \mathbb{Z}/q) = 0$ (rappelons que q est impair).

II.2.3 Classes de Chern et K-théorie, définitions

On reprend les notations de II.1. Outre l'anneau A on s'est donc fixé des entiers $i \geqq 0$, $k \geqq 0$, $q = \ell^\nu$, et $n = 2i-k \geqq 0$. On va définir des morphismes

$$\bar{c}_{i,k}: K_{2i-k}(A; \mathbb{Z}/q) \to H^k(\operatorname{Spec} A; \mu_q^{\otimes i}).$$

– *Si* $2i-k \geqq 2$, on pose $\bar{c}_{i,k} = c_{i,k}(id) \circ h_q$, où $c_{i,k}(id)$ a été défini en II.1.2, et h_q est le morphisme d'Hurewicz décrit au paragraphe précédent. On notera

$$c_{i,k}: K_{2i-k}(A) \to H^k(\operatorname{Spec} A; \mu_q^{\otimes i})$$

le composé de $\bar{c}_{i,k}$ avec la réduction modulo q en K-théorie.

– *Si* $2i = k$, le morphisme

$$c_{i,2i}: K_0(A) \to H^{2i}(\operatorname{Spec} A; \mu_q^{\otimes i})$$

est donnée par les classes de Chern du groupe trivial (cf. II.1.1). Il se factorise évidemment par $K_0(A; \mathbb{Z}/q) = K_0(A)/qK_0(A)$.

– *Si* $2i-k=1$, nous donnerons au paragraphe IV.1.3 une définition «ad hoc» de $\bar{c}_{i,k}$ dans le cas d'un anneau de Dedekind. Notons en tous cas qu'un morphisme $c_{i,k}$ est toujours défini sur $K_1(A)$, à l'aide de $c_{i,k}(id)$ et des morphismes

$$K_1(A) \to H_1(GL(A); \mathbb{Z}) \to H_1(GL(A); \mathbb{Z}/q).$$

Ceci permet de définir $\bar{c}_{i,k}$ par réduction modulo q quand $K_0(A)$ n'a pas de q-torsion (par exemple si A est un anneau principal).

Remarque. La première définition de $c_{i,k}$ est due à Quillen et Illusie [26]. Elle consiste à interpréter le groupe $H^k(\operatorname{Spec} A, G; \mu_q^{\otimes i})$ comme celui des classes d'homotopie d'applications de l'espace classifiant BG de G vers l'espace $K(R\Gamma(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i}), 2i)$ (le transformé de Dold-Puppe de la classe dans la catégorie dérivée $D(\mathbb{Z})$ des sections sur $\operatorname{Spec} A$ d'une résolution injective de $\mu_q^{\otimes i}$, translatée à gauche de $2i$ et tronquée aux entiers négatifs). Ce point de vue a été utilisé dans [53] et [54].

II.3 Formule de multiplication

Théorème 1. i) *Soient* $a \in K_n(A; \mathbb{Z}/q)$ *et* $b \in K_m(A; \mathbb{Z}/q)$, *avec* $m \geqq 2$ (resp. $n \geqq 2$) *ou* $m = 1$ *et* $a \in K_1(A)/qK_1(A)$ (resp. $n = 1$ *et* $b \in K_1(A)/qK_1(A)$). *Notons* $a \cdot b \in K_{m+n}(A; \mathbb{Z}/q)$ *le produit de a et b. On a*

$$\bar{c}_{i,k}(a \cdot b) = \sum \frac{-(i-1)!}{(i'-1)!(i''-1)!} \bar{c}_{i',k'}(a) \cup \bar{c}_{i'',k''}(b).$$

Dans cette formule, la somme est prise sur tous les entiers i', i'', k', k'' *vérifiant* $i = i' + i''$, $k = k' + k''$, $2i' - k' = m$, *et* $2i'' - k'' = n$. *L'élément* $c_{i',k'}(a) \cup c_{i'',k''}(b)$ *est obtenu par le cup produit*

$$H^{k'}(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i'}) \times H^{k''}(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i''}) \to H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i}).$$

ii) *Si* $a \in K_0(A; \mathbb{Z}/q)$ *et* $b \in K_m(A; \mathbb{Z}/q)$, *avec* $m \geqq 2$, *ou* $b \in K_1(A)/qK_1(A)$, *on a, à condition que* $c_{i,2i}(a) = 0$ *pour* $i \geqq 2$,

$$\bar{c}_{i,k}(a \cdot b) = \sum_{i',i'',k'} \frac{-(i-1)!}{(i'-1)!(i''-1)!} (c_{1,2}^{i''})(a) \cup \bar{c}_{i',k'}(b),$$

avec $i' + i'' = i$, *et* $k' + 2i'' = k$ $(c_{1,2}^{i''})(a) \in H^{2i''}(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i})$ *étant la puissance* i''*-ième de* $c_{1,2}(a)$.

Démonstration. Ce théorème traduit la formule donnant les classes de Chern d'un produit tensoriel de deux représentations d'augmentation nulle (cf. II.1.1):

$$c_i(\rho \otimes \rho') = Q_i(c_1(\rho), c_2(\rho), \ldots; c_1(\rho'), c_2(\rho'), \ldots).$$

– Il faut d'abord traduire le cup-produit de la cohomologie étale équivariante à l'aide du lemme 1 (II.1.2). Notons $\mathscr{L}^\cdot(i)$ (resp. $\mathscr{L}^\cdot(j)$, $\mathscr{L}^\cdot(i+j)$) une résolution injective du faisceau étale $\mu_q^{\otimes i}$ (resp. $\mu_q^{\otimes j}$, $\mu_q^{\otimes (i+j)}$) sur $\operatorname{Spec} A$, et $\mathscr{L}^\cdot(i) \otimes \mathscr{L}^\cdot(j) \to \mathscr{L}^\cdot(i+j)$ le morphisme (défini à homotopie près) associé au produit tensoriel $\mu_q^{\otimes i} \otimes \mu_q^{\otimes j} \to \mu_q^{\otimes (i+j)}$. Le morphisme de complexes

$$\operatorname{Hom}(C.(G), \mathbb{Z}/q) \otimes \Gamma(\mathscr{L}^\cdot(i)) \otimes \operatorname{Hom}(C.(G'), \mathbb{Z}/q) \otimes \Gamma(\mathscr{L}^\cdot(j)) \to \operatorname{Hom}(C.(G \times G'), \mathbb{Z}/q) \otimes \Gamma(\mathscr{L}^\cdot(i+j))$$

qui s'en déduit (en utilisant l'équivalence d'homotopie $C.(G) \otimes C.(G') \to C.(G \otimes G')$ donnée par le théorème d'Eilenberg-Zilber) induit le cup-produit en

cohomologie étale équivariante (cf. par exemple «La classe de cohomologie associée à un cycle», 1.2, dans S.G.A. IV 1/2 [46]). Son composé avec

$$\mathrm{Hom}(C.(G\times G'),\mathbb{Z}/q)\otimes\Gamma(\mathscr{L}^{\cdot}(i+j))\to\mathrm{Hom}(C.(G\times G'),\Gamma(\mathscr{L}^{\cdot}(i+j)))$$

décrit le composé du cup-produit avec Φ, et se factorise par

$$\mathrm{Hom}(C.(G),\mathscr{L}^{\cdot}(i)))\otimes\mathrm{Hom}(C.(G'),\mathscr{L}^{\cdot}(j))),$$

d'où des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} H_{2i'-k'}(G;\mathbb{Z}/q)\otimes H_{2i''-k''}(G';\mathbb{Z}/q) & \xrightarrow{\phi(x)\otimes\phi(y)} & H^{k'}(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes i'})\otimes H^{k''}(\mathrm{Spec}\,A;\mu_q^{\otimes i''}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{2(i'+i'')-(k'+k'')}(G\times G';\mathbb{Z}/q) & \xrightarrow{\phi(x\cup y)} & H^{k'+k''}(\mathrm{Spec}\,A;\mu_q^{\otimes(i'+i'')}) \end{array}$$

(ceci est à comparer aux formules d'associativité du chapitre XI de [12]).
— Si I est un multiindice $(i_1,\dots,i_\alpha)$, on pose $|I|=i_1+\dots+i_\alpha$. Définissons un morphisme de groupes gradués

$$\Phi(c_I(\rho)):H.(G;\mathbb{Z}/q)\to H^{\cdot}(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes|I|}).$$

Ce sera le composé du morphisme diagonal

$$H.(G;\mathbb{Z}/q)\to H.(G;\mathbb{Z}/q)^{\otimes\alpha},$$

du produit tensoriel des applications

$$\Phi(c_{i_\beta}(\rho)):\ H.(G;\mathbb{Z}/q)\to H^{\cdot}(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes i_\beta}),\qquad 1\leqq\beta\leqq\alpha,$$

(par convention

$$\Phi(c_i(\rho)):\ H_n(G;\mathbb{Z}/q)\to H^k(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes i})$$

est nulle si $n+k\neq 2i$) et du cup-produit

$$H^{\cdot}(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes i_1})\otimes\dots\otimes H^{\cdot}(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes i_\alpha})\to H^{\cdot}(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes|I|}).$$

Si

$$Q_i(c_1(\rho),\dots;c_1(\rho'),\dots)=\sum_{|I|+|J|=i}a_{I,J}c_I(\rho)\,c_J(\rho'),$$

on pose

$$\Phi(Q_i(c.(\rho);c.(\rho'))=\sum_{I,J}a_{I,J}\Phi(c_I(\rho))\cup\Phi(c_J(\rho')).$$

La formule de produit ci-dessus se traduit alors par

$$\Phi(c_i(\rho\otimes\rho'))=\Phi(Q_i(c.(\rho);c.(\rho')).$$

– Le produit en K-théorie algébrique [34] est obtenu de la façon suivante. Si G est un groupe on sait qu'il existe un morphisme

$$\tau\colon IR_A(G)\to[BG, BGL^+(A)].$$

On note $\overline{id}_r$ l'image de la représentation naturelle de $GL_r(A)$ dans le groupe $IR_A(GL_r(A))$ (cf. II.1.1) et $\tau(\overline{id}_r)$ l'application

$$\tau(\overline{id}_r)\colon BGL_r^+(A)\to BGL^+(A)$$

qui lui correspond. La représentation $\overline{id}_r\otimes\overline{id}_s$ de $GL_r(A)\times GL_s(A)$ fournit de même une application

$$BGL_r^+(A)\times BGL_s^+(A)\xrightarrow{\tau(\overline{id}_r\otimes\overline{id}_s)}BGL^+(A),$$

qui se factorise par une application

$$\mu\colon BGL_r^+(A)\wedge BGL_s^+(A)\to BGL^+(A).$$

On vérifie que μ est «stable», i.e. définit une application (donnée à homotopie faible près)

$$\mu\colon BGL^+(A)\wedge BGL^+(A)\to BGL^+(A).$$

Il résulte de ces constructions que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} H_\bullet(BGL_r^+(A)\wedge BGL_s^+(A)) & \xrightarrow{\mu_*} & H_\bullet(BGL^+(A);\mathbb{Z}/q) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi(c_i(id))} \\ H_\bullet(GL_r(A)\times GL_s(A)) & \xrightarrow{\Phi(c_i(\overline{id}_r\otimes\overline{id}_s))} & H^\bullet(\operatorname{Spec}A;\mu_q^{\otimes i}) \end{array}$$

(où la flèche verticale de gauche est obtenue par excision).

– Les résultats précedents et la bilinéarité du morphisme d'Hurewicz (Lemme 2, II.2.2) montrent que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} \pi_\bullet(BGL^+(A);\mathbb{Z}/q)\otimes\pi_\bullet(BGL^+(A);\mathbb{Z}/q) & \xrightarrow{h_q\otimes h_q} & H_\bullet(GL(A);\mathbb{Z}/q)\otimes H_\bullet(GL(A);\mathbb{Z}/q) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi(Q_i(c_\bullet(\overline{id}_r),c_\bullet(\overline{id}_s))} \\ \pi_\bullet(BGL^+(A);\mathbb{Z}/q) & \xrightarrow{\bar{c}_i} & H^\bullet(\operatorname{Spec}A,\mu_q^{\otimes i}). \end{array}$$

La verticale de gauche est le produit dans la K-théorie à coefficients.

– Comme l'image du morphisme d'Hurewicz est formée d'éléments primitifs (Lemme 3, II.2.2), on a

$$\Phi(Q_i(c_\bullet(\overline{id}_r),c_\bullet(\overline{id}_s))\circ(h_q\otimes h_q)=\Phi(P_i(c_\bullet(\overline{id}_r),\ c_\bullet(\overline{id}_s))\circ(h_q\otimes h_q),$$

où P_i est la partie du polynôme Q_i formé de monômes du type $a_{i',i''}c_{i'}(\overline{id}_r)\cup c_{i''}(\overline{id}_s)$. Le calcul explicite de Q_i (effectué à l'aide du caractère de Chern ordinaire par exemple) montre que

$$a_{i',i''}=\frac{-(i'+i''-1)!}{(i'-1)!(i''-1)!}.$$

La partie i) du théorème en résulte.

– Si $a=[P]\in K_0(A)$ est la classe d'un A-module projectif P, le produit $a\cdot b$ est défini comme suit (cf. [34]). On écrit P comme facteur direct d'un module libre: $P\oplus Q=A^s$. On fait opérer $GL_r(A)$ sur le module $A^{rs}=(A^r\otimes P)\oplus(A^r\otimes Q)$ par $id_r\otimes 1_P$ sur le premier facteur (1_P désignant la représentation triviale sur P) et trivialement sur le second facteur. Soient ρ_Q la représentation ainsi obtenue, et $\bar{\rho}_Q$ son image dans $IR_A(GL_r(A))$. L'application

$$\tau(\bar{\rho}_Q)\colon BGL_r(A)\to BGL^+(A)$$

est stable et induit une application

$$\mu_a\colon BGL^+(A)\to BGL^+(A)$$

indépendante de Q (à homotopie faible près). On pose alors $a\cdot b=(\mu_a)_*(b)$ si $b\in K_m(A;\mathbb{Z}/q)$, $m>1$, ou $b\in K_1(A)/qK_1(A)$. On a

$$\bar{c}_{i,k}(a\cdot b)=c_{i,k}(\overline{id})(h_q(a\cdot b))=c_{i,k}(\overline{id})((\mu_a)_*(h_q(b))=c_{i,k}(\bar{\rho}_Q)(h_q(b)).$$

Mais $c(\bar{\rho}_Q)=c(\overline{id}_r\otimes 1_P)=c(\overline{id}_r)\cup Q(c_\cdot(\overline{id}_r);c_1(P))$. Cette formule se traduit par ii), en utilisant comme précédemment que les monômes de Q_i du type $c_1(P)\cup c_I(\overline{id}_r)$, avec $\mathrm{card}(I)\geqq 2$, ne contribuent pas à la formule finale (à cause du lemme 3). q.e.d.

Remarques. – Une formule analogue a été démontrée par Bloch dans le cas des classes de Chern de la cohomologie crystalline [7].

– La formule du théorème ne sera utilisée que quand un seul des termes des sommes de i) et ii) est non nul.

– Si, pour tout $n\geqq 1$, l'élément $((-1)^{i-1}/(i-1)!)\bar{c}_{i,k}(a_n)=\overline{ch}_{i,k}(a_n)$, $a_n\in K_n(A;\mathbb{Z}/q)$, est bien défini (en ce sens que $\bar{c}_{i,k}(a_n)=0$, ou bien $(i-1)!$ est inversible dans $H^k(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes i})$) (de même pour b_m), on peut exprimer le théorème par

$$ch(a\cdot b)=ch(a)\cup ch(b),$$

où $a=a_1+\ldots+a_n+\ldots\in\bigoplus_n K_n(A;\mathbb{Z}/q)$,

$$b=b_1+\ldots+b_m+\ldots\in\bigoplus_m K_m(A;\mathbb{Z}/q),\quad\text{et}\quad ch=\sum_{i,k}ch_{i,k}.$$

Un problème ouvert est de savoir définir un caractère de Chern ch du type ci-dessus dans une situation plus générale.

III Localisation et transfert

III.1 Préliminaires de cohomologie étale

Soit A un anneau commutatif unitaire et intègre dans lequel le nombre premier ℓ est inversible et k un entier positif. Dans ce paragraphe, on donnera certains éléments, utiles dans la suite, concernant le calcul des groupes de cohomologie étale $H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i})$. Ils sont pour la plupart classiques.

III.1.1 Si A est un corps F, la cohomologie étale de $\operatorname{Spec} F$ est la cohomologie galoisienne de F [46], c'est à dire la cohomologie continue du groupe profini $\operatorname{Gal}(F^s/F)$, où F^s est une clôture séparable de F (cf. [48] ou [13]).

Si le faisceau de coefficients est le groupe multiplicatif $G_m=(F^s)^*$, on a:

$$H^0(F, G_m)\simeq F^*, \quad H^1(F, G_m)=0, \quad \text{et} \quad H^2(F, G_m)\simeq \operatorname{Br}(F),$$

où $\operatorname{Br}(F)$ désigne le groupe de Brauer de F.

La cohomologie à valeurs dans le faisceau μ_q des racines q-ièmes de l'unité s'en déduit par la longue suite exacte associée à la suite exacte «de Kummer»:

$$1\to \mu_q \to G_m \xrightarrow{\times q} G_m \xrightarrow{\times q} G_m \to 1.$$

On obtient ainsi:

$$H^0(F, \mu_q)\simeq (F^*)_{(q)}, \quad H^1(F, \mu_q)\simeq F^*/(F^*)^q, \quad \text{et} \quad H^2(F, \mu_q)\simeq \operatorname{Br}(F)_{(q)},$$

(où $X_{(q)}$ désigne le noyau de la multiplication par q dans le groupe abélien X).

Supposons que F vérifie la propriété suivante:

(B, q): Tout élément d'ordre q dans le groupe de Brauer de F est décomposé par une extension cyclique F' de degré q de F (i.e. son image est nulle dans $\operatorname{Br}(F')$).

Alors le cup-produit $H^1(F, \mu_q)\times H^1(F, \mu_q)\to H^2(F, \mu_q^{\otimes 2})$ est surjectif (cf. [47], Chap. XIV, Prop. 1, Cor. 2). Ceci est le cas si F est un corps local ou global, au sens suivant:

Définitions. On appellera *corps local* un corps complet pour une valuation discrète, de corps résiduel un corps fini, et *corps global* une extension de degré de transcendance un d'un corps fini, ou un corps de nombres (extension finie du corps des rationnels).

Notons enfin que si F est un corps local ou global on a $H^k(F, G_m)=0$ si $k\geqq 3$ [48], et que $H^2(F, G_m)$ est q-divisible pour $2\nmid q$; par conséquent $H^k(F, \mu_q)=0$ si $k\geqq 3$ (par contre si F est un corps de nombres ayant r_1 plongement réels on a $H^3(F, \mu_2)=(\mathbb{Z}/2)^{r_1}$).

III.1.2 Si le groupe des unités A^* contient un élément d'ordre q, le faisceau $\mu_q^{\otimes i}$ est le faisceau constant $\mathbb{Z}/q$, donc $H^0(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i})\simeq \mathbb{Z}/q$ et le cup-produit

$$H^0(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i})\otimes H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes j})\to H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i+j})$$

est un isomorphisme.

Si A est un anneau intégralement clos on pourra se ramener à la situation ci-dessus en considérant la clôture intégrale $\tilde{A}$ de A dans le corps $\tilde{F}$ obtenu en ajoutant une racine primitive q-ième de l'unité au corps des fractions F de A. On sait que $\tilde{A}$ est une extension étale de A (car q est inversible dans A; utiliser le critère II.1.1, c) de [46]). On pourra donc descendre de $\tilde{A}$ à A par la suite spectrale de Hochschild-Serre ([45], VIII, p. 406), ou par le transfert (cf. ci-dessous, III.1.5).

III.1.3 Si A est un anneau de Dedekind

– On sait que $H^0(\operatorname{Spec} A, G_m) \simeq A^*$ et que $H^1(\operatorname{Spec} A, G_m) \simeq \operatorname{Pic}(A)$, le groupe des classes d'idéaux de A [46]; d'où une suite exacte

$$0 \to A^*/(A^*)^q \to H^1(\operatorname{Spec} A, \mu_q) \to \operatorname{Pic}(A)_{(q)} \to 0.$$

– Désignons par F le corps des fractions de A, par j l'injection $\operatorname{Spec} F \to \operatorname{Spec} A$, et par $j_*((\mu_q^{\otimes i})_F)$ l'image directe du faisceau $\mu_q^{\otimes i}$ sur $\operatorname{Spec} F$.

Lemme 4. *Le morphisme de faisceaux étales (sur* $\operatorname{Spec} A$*)*

$$(\mu_q^{\otimes i})_A \to j_*((\mu_q^{\otimes i})_F)$$

est un isomorphisme.

Preuve. Ceci est valable en remplaçant $\mu_q^{\otimes i}$ par n'importe quel faisceau localement constant $\mathscr{F}$. En effet il suffit de vérifier cet isomorphisme sur les fibres géométriques, donc on peut supposer que $\mathscr{F}$ est constant. Il résulte dans ce cas de la définition de $j_*(\mathscr{F}_F)$ (cf. [1] et [46]) que ce faisceau est constant et égal à $\mathscr{F}_A$.

On omettra dans la suite l'indice A ou F dans l'écriture de $\mu_q^{\otimes i}$.

Le lemme 4 ci-dessus permet de passer de A à F par la suite spectrale de Leray du foncteur j_*:

$$H^r(\operatorname{Spec} A, (R^p j_*)(\mu_q^{\otimes i})) \Rightarrow H^{r+p}(F, \mu_q^{\otimes i}).$$

On peut calculer cette suite spectrale de la façon suivante. Soient v une place finie de F correspondant à un idéal $\mathfrak{p}$ de A, et i_v: $\operatorname{Spec} k_v \to \operatorname{Spec} A$ l'immersion fermée correspondante ($k_v = A/\mathfrak{p}$). Si $\mathscr{F}$ désigne le Faisceau $R^p j_* \mu_q^{\otimes i}$, l'application

$$\mathscr{F} \to \bigoplus_v i_{v*} i_v^* \mathscr{F}$$

est un isomorphisme (ceci se vérifie sur les fibres géométriques). On a de plus

$$\begin{aligned} H^r(\operatorname{Spec} A;\, i_{v*} i_v^* \mathscr{F}) &\simeq H^r(\operatorname{Spec} k_v; i_v^* \mathscr{F}) \\ &= H^r(\operatorname{Gal}(k_v^s/k_v);\, (i_v^* \mathscr{F})\,(\operatorname{Spec} k_v^s)), \end{aligned}$$

où k_v^s est une clôture séparable de k_v. Le module $(i_v^* \mathscr{F})\,(\operatorname{Spec} k_v^s)$ est isomorphe (d'après [45], Cor. 4.8) à la fibre géométrique $(R^p j_* \mathscr{F})_y$ du faisceau $R^p j_* \mathscr{F}$ au point $y = \operatorname{Spec} k_v^s$. Soient $\tilde{A}_v$ le hensélisé strict de A en v, F_v la complétion de F en v, T_v l'extension maximale non ramifiée de F_v, et $\tilde{F}_v$ le hensélisé strict de F en v.

On a des isomorphismes

$$(R^p j_* \mathscr{F})_y \simeq H^p(\mathrm{Spec}(\tilde{A}_v \underset{A}{\otimes} F), \mu_q^{\otimes i}) \qquad ([46], \text{II.3.3})$$
$$\simeq H^p(\tilde{F}_v, \mu_q^{\otimes i}) \qquad (\text{car } A \text{ est de dimension de Krull un})$$
$$\simeq H^p(T_v, \mu_q^{\otimes i}) \qquad (\text{cf. } [44], \text{ th. 2, iii})).$$

On trouve [48]:

$$H^p(T_v, \mu_q^{\otimes i}) = 0 \quad \text{si } p \geqq 2,$$
$$H^0(T_v, \mu_q^{\otimes i}) \simeq \mathbb{Z}/q,$$

et

$$H^1(T_v, \mu_q^{\otimes i}) \simeq (T_v^*/(T_v^*)^q) \otimes \mu_q^{\otimes (i-1)} \quad \text{si } i \geqq 1 \ (\mu_q^{\otimes 0} = \mathbb{Z}/q).$$

On remarque que le $\mathrm{Gal}(T_v/F_v)$-module $T_v^* \otimes \mu_q^{\otimes (i-1)}$ est isomorphe au $\mathrm{Gal}(k_v^s/k_v)$-module $\mu_q^{\otimes (i-1)}$. On a donc démontré le résultat suivant:

Proposition 1 *(suite exacte de localisation en cohomologie étale). Si A est un anneau de Dedekind on a $H^0(\mathrm{Spec}\, A, \mu_q^{\otimes i}) \simeq H^0(F, \mu_q^{\otimes i})$, et il existe une longue suite exacte:*

$$0 \to H^1(\mathrm{Spec}\, A, \mu_q^{\otimes i}) \to H^1(F, \mu_q^{\otimes i}) \to \bigoplus_v H^0(k_v, \mu_q^{\otimes (i-1)})$$
$$\ldots \to H^k(\mathrm{Spec}\, A, \mu_q^{\otimes i}) \to H^k(F, \mu_q^{\otimes i}) \to \bigoplus_v H^{k-1}(k_v, \mu_q^{\otimes (i-1)})$$
$$\to H^{k+1}(\mathrm{Spec}\, A, \mu_q^{\otimes i}) \ldots .$$

Nous simplifierons cette suite exacte dans certains cas au paragraphe III.2. Cette proposition et ce qui précède montre que si le corps F est un corps local ou global, si $2 \nmid q$, et si $k \geqq 3$, on a $H^k(\mathrm{Spec}\, A, \mu_q^{\otimes i}) = 0$ (ce qui est un cas particulier du théorème de Artin et Verdier [2]).

III.1.4 Si A est un corps fini k d'ordre p^r (où p est un nombre premier différent de ℓ), on obtient:

Lemme 5. *Soit $(q, p^{ri}-1)$ le p.g.c.d. de q et $p^{ri}-1$. Les groupes $H^0(k, \mu_q^{\otimes i})$ et $H^1(k, \mu_q^{\otimes i})$ sont finis et cycliques d'ordre $(q, p^{ri}-1)$. Le groupe $H^k(k, \mu_q^{\otimes i})$ est nul si $k \geqq 2$.*

Preuve. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k^s/k)$ est $\Gamma = \hat{\mathbb{Z}}$, un générateur topologique étant l'élément de Frobénius σ. Le Γ-module $\mu_q^{\otimes i}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/q$ muni de l'action donnée par

$$\sigma * x = p^{ri} x, \quad \text{si } x \in \mathbb{Z}/q.$$

Ceci permet de conclure, grâce à la suite exacte

$$0 \to H^0(k, \mu_q^{\otimes i}) \to \mathbb{Z}/q \xrightarrow{1-\sigma} \mathbb{Z}/q \to H^1(k, \mu_q^{\otimes i}) \to 0. \quad \text{q.e.d.}$$

III.1.5 Le transfert

Soient B une extension étale (finie) d'un anneau A, f l'injection de A dans B, et $q = \ell^v$ un entier inversible dans A. Outre le morphisme induit

$$f_*: H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i}) \to H^k(\operatorname{Spec} B, \mu_q^{\otimes i})$$

est associé à f un morphisme de transfert

$$f^*: H^k(\operatorname{Spec} B, \mu_q^{\otimes i}) \to H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i})$$

défini comme suit. Soit

$$\varphi: Y = \operatorname{Spec} B \to X = \operatorname{Spec} A$$

le revêtement correspondant à f, et $\varphi_*((\mu_q^{\otimes i})_Y)$ l'image directe du faisceau $\mu_q^{\otimes i}$ de Y. Le transfert f^* est le composé

$$H^k(Y, (\mu_q^{\otimes i})_Y) \xrightarrow{\psi} H^k(X, \varphi_*(\mu_q^{\otimes i})_Y) \xrightarrow{\chi} H^k(X, (\mu_q^{\otimes i})_X)$$

où ψ est induit par φ_* et χ par le morphisme de faisceaux

$$\mathrm{Tr}: \varphi_*(\mu_q^{\otimes i})_Y \to (\mu_q^{\otimes i})_X$$

obtenu localement (au sens étale) par «somme des valeurs sur les feuillets». Autrement dit, si $X' \to X$ est un revêtement fini de X trivialisant φ, i.e. tel que $Y \underset{X}{\times} X' \simeq (X')^n$, le morphisme

$$\mathrm{Tr}: (\mu_q^{\otimes i})(Y \underset{X}{\times} X') = ((\mu_q^{\otimes i})(X'))^n \to (\mu_q^{\otimes i})(X')$$

est donné par somme des composantes.

Lemme 6. i) *Le morphisme de transfert f^* vérifie la formule d'adjonction*

$$f^*(x \cup f_*(y)) = f^*(x) \cup y.$$

ii) *Soit G le groupe des automorphismes de B sur A et n son ordre. On a $f^* \circ f_* = n \cdot id$, et $f_* \circ f^* = \sum_{g \in G} g_*$, si l'extension est galoisienne.*

iii) *Si $\operatorname{Spec} A$ est de ℓ-dimension cohomologique d, pour toute extension étale $f: A \to B$, le morphisme de transfert f^* est surjectif.*

Preuve. i) Se voit en remarquant que ψ et χ sont des morphismes entre modules sur la cohomologie de $\operatorname{Spec} A$.

ii) La première égalité résulte de i):

$$f^*(f_*(x)) = f^*(f_*(x) \cup 1) = x \cup f^*(1) = n \cdot x.$$

Pour la seconde, on note que le morphisme de faisceaux

$$\varphi^* \circ \mathrm{Tr} \circ \varphi_*: (\mu_q^{\otimes i})_Y \to (\mu_q^{\otimes i})_Y$$

s'identifie à $\sum_{g \in G} g_*$, ce qui se voit sur les fibres.

iii) Comme φ est un morphisme fini l'application ψ est un isomorphisme (cf. [46], II.3.6). Le morphisme de faisceaux Tr est surjectif (comme on le voit sur les fibres). Si $\mathscr{F}$ est le noyau de Tr, on a une suite exacte

$$H^d(X, \varphi_*(\mu_q^{\otimes i})_Y) \xrightarrow{\chi} H^d(X, (\mu_q^{\otimes i})_X) \to H^{d+1}(X, \mathscr{F}),$$

et $H^{d+1}(X, \mathscr{F}) = 0$, car $\mathscr{F}$ est un faisceau de ℓ-torsion. q.e.d.

III.1.6 Cohomologie ℓ-adique

Les morphismes de faisceaux

$$\mu_{\ell^{\nu+1}}^{\otimes i} \to \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}, \quad \nu \geqq 1,$$

permettent de définir

$$H^k(\operatorname{Spec} A, \mathbb{Z}_\ell(i)) = \varprojlim_\nu (\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}).$$

Lemme 7. *$H^0(\operatorname{Spec} A, \mathbb{Z}_\ell(i)) = 0$ pour tout anneau A qui est noethérien et intégralement clos, et ne contient pas toutes les racines ℓ^ν-ièmes de l'unité, $\nu \geqq 1$.*

Preuve. Soit F le corps des fractions de A. On a vu (III.1.3) que $H^0(\operatorname{Spec} A, \mathbb{Z}_\ell(i)) = H^0(F, \mathbb{Z}_\ell(i))$, ce qui permet de se ramener au cas du corps F. Si F^s désigne une clôture séparable de F et $F_\infty \subset F^s$ la ℓ-extension cyclotomique maximale de F, le $\operatorname{Gal}(F^s/F)$-module topologique $\mathbb{Z}_\ell(i)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$ avec pour action

$$\sigma * u = \varepsilon(\sigma)^i u, \quad \sigma \in \operatorname{Gal}(F^s/F), \ u \in \mathbb{Z}_\ell.$$

Le morphisme ε est ici le composé de $\operatorname{Gal}(F^s/F) \to \operatorname{Gal}(F_\infty/F)$ avec l'injection $\operatorname{Gal}(F_\infty/F) \to (\mathbb{Z}_\ell)^*$. Comme l'image de ε est infinie, l'équation $(\varepsilon(\sigma)^i - 1)u = 0$ pour tout $\sigma \in \operatorname{Gal}(F^s/F)$ implique $u = 0$. q.e.d.

III.2 La suite exacte de localisation en égale caractéristique et le transfert

Si F est un corps, v une valuation discrète de F, F_v le complété de F pour v, et k_v son corps résiduel, on notera

$$\partial_v : K_n(F) \to K_{n-1}(k_v),$$
$$\bar{\partial} : K_n(F; \mathbb{Z}/q) \to K_{n-1}(k_v; \mathbb{Z}/q),$$
$$\partial_v^e : H^k(F, \mu_q^{\otimes i}) \to H^{k-1}(k_v, \mu_q^{\otimes (i-1)})$$

le composé du morphisme induit par $F \to F_v$ et du bord de la suite exacte de localisation de l'anneau des entiers de F_v, en K-théorie ou en cohomologie étale (cf. III.1.3, Proposition 1).

Proposition 2. *Supposons que F et k_v ont même caractéristique ($\neq \ell$). Alors:*

i) *Si $F = F_v$, les morphismes ∂_v, $\bar{\partial}_v$, ∂_v^e sont scindés (non canoniquement).*

ii) *Les classes de Chern définies au paragraphe II.2 vérifient*

$$\partial_v^e \circ \bar{c}_{i,k} = (1-i)\bar{c}_{i-1,k-1} \circ \bar{\partial}_v.$$

Démonstration. i) Si F est égal à F_v on peut écrire (de façon non unique) $F_v = \kappa_v((t))$, où l'élément t est une uniformisante de F. Posons, pour simplifier, $\kappa = \kappa_v$, et $\partial = \partial_v$ (resp. $\bar{\partial}_v$, ou ∂_v^e). Soient i_* le morphisme induit en K-théorie ou en cohomologie étale par l'inclusion i: $\kappa \to F$, et $\dot{t}$ l'image de t dans $K_1(F)$ (resp. $K_1(F;\mathbb{Z}/q)$ ou $H^1(F,\mu_q)$). Si x est un élément de $K_{n-1}(\kappa)$ (resp. $K_{n-1}(\kappa;\mathbb{Z}/q)$ ou $H^{k-1}(\kappa,\mu_q^{\otimes(i-1)})$), on pose

$$s_t(x) = \dot{t} \cdot i_*(x).$$

Le morphisme s_t est une section de ∂. On sait en effet que la suite exacte de localisation d'un anneau de Dedekind est une suite exacte de modules sur la K-théorie de A (resp. sa cohomologie étale). Pour la K-théorie cela est montré par Gillet ([20], § 1.5), et pour la cohomologie étale cela résulte de l'accouplement

$$R^\cdot j_* \mu_q^{\otimes i}) \otimes \mu_q^{\otimes j} \to R^\cdot j_* \mu_q^{\otimes(i+j)}.$$

Par conséquent $\partial(s_t(x)) = \partial(\dot{t}) \cdot x$. Comme $\partial(\dot{t})$ est la valuation de t, on a $\partial(s_t(x)) = x$.

ii) Comme la classe de Chern commute à l'injection $F \to F_v$, on peut supposer que $F = F_v$, et on reprend les notations précédentes. Il suffit alors de montrer que

$$\bar{c}_{i,k}(s_t(x)) = (1-i)\, s_t(\bar{c}_{i-1,k-1}(x)),$$

i.e.

$$\bar{c}_{i,k}(\dot{t} \cdot i_*(x)) = (1-i)(\dot{t} \cup i_*(\bar{c}_{i-1,k-1}(x))).$$

La seule classe de Chern non nulle sur $\dot{t} \in K_1(F;\mathbb{Z}/q)$ est $\bar{c}_{1,1}(\dot{t}) = \dot{t}$ (voir IV.1.3). D'après la formule de multiplication (II.3, Théorème 1), on en déduit que

$$\begin{aligned}\bar{c}_{i,k}(\dot{t} \cdot i_*(x)) &= (1-i)\, c_{1,1}(\dot{t}) \cup \bar{c}_{i-1,k\ \ 1}(i_*(x)) \\ &= (1-i)\, \dot{t} \cup i_*(\bar{c}_{i-1,k-1}(x)). \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Proposition 3. *Soient $F = \kappa(t)$ le corps des fractions rationnelles sur un corps κ et $A = \kappa[t]$ l'anneau des polynômes.*

i) *La suite exacte de localisation de A se scinde en suites exactes à trois termes*

$$0 \to K_n(\kappa) \to K_n(\kappa(t)) \to \bigoplus_{v \neq \infty} K_{n-1}(\kappa_v) \to 0$$

(resp. *idem avec la K-théorie à coefficients, ou*

$$0 \to H^k(\kappa, \mu_q^{\otimes i}) \to H^k(\kappa(t), \mu_q^{\otimes i}) \to \bigoplus_{v \neq \infty} H^{k-1}(\kappa_v, \mu_q^{\otimes(i-1)}) \to 0).$$

ii) *(Loi de réciprocité de Weil). Si S désigne l'ensemble des valuations de $\kappa(t)$ (y compris la valuation à l'infini), et N_v la norme (ou transfert) de κ_v à κ, on a la*

formule

$$\sum_{v \in S} N_v \circ \partial_v(x) = 0$$

si $x \in K_n(k(t))$ (resp. $K_n(k(t); \mathbb{Z}/q)$, *ou* $H^k(k(t), \mu_q^{\otimes i})$).

Preuve. i) On note d'abord que $K_n(k[t]) = K_n(k)$, $K_n(k[t]; \mathbb{Z}/q) = K_n(k; \mathbb{Z}/q)$, et $H^k(\mathrm{Spec}\, k[t], \mu_q^{\otimes i}) = H^k(k, \mu_q^{\otimes i})$.

Cette propriété d'«invariance homotopique» est bien connue en K-théorie. En cohomologie étale on peut la vérifier en considérant la droite affine A^1_k sur k comme ouvert dans l'espace projectif P^1_k, dont on connaît la cohomologie étale, et en appliquant à cette situation le théorème V.3.4 de [46].

Soit p un point rationnel de A^1_k et A_p le localisé de $A = k[t]$ en p. Le morphisme $K_n(k) \to K_n(k(t))$ se factorise par une injection $K_n(k) \to K_n(A_p)$ (car k est un facteur direct de A_p). On peut alors appliquer à A_p le théorème 5.11 de [39] pour voir que $K_n(A_p) \to K_n(k(t))$ est une injection. Le même argument est valable en K-théorie à coefficients et l'analogue du théorème cité ci-dessus en cohomologie étale a été démontré par Bloch et Ogus ([9], th. 4.2.) (cet argument m'a été indiqué par Colliot-Thélène).

ii) Ce résultat (valable plus généralement pour toute courbe propre et lisse au lieu de la droite projective) a été démontré par Gillet ([20], § 2.3). (Le transfert en K-théorie est celui défini par Quillen dans [39], et en cohomologie c'est celui défini au paragraphe III.1.5 ci-dessus.)

Soit X une variété lisse de dimension d sur un corps k. Il existe un suite spectrale (obtenue en filtrant la K-théorie par la dimension du support) dont le premier terme est

$$E^1_{r,s} = \bigoplus_{x \in X_{(r)}} K_{r+s}(k(x)),$$

où $X_{(r)}$ est l'ensemble des sous-variétés irréductibles x de dimension r de X, et $k(x)$ le corps résiduel en x. Cette suite spectrale est covariante pour les morphismes propres. On applique ce fait à $X = P^1_k$ et à la projection p de X sur $\mathrm{Spec}\, k$. L'application $\bigoplus_v N_v \circ \partial_v$ s'interprète alors comme la composée de

$$d^1 : E^1_{1,n-1}(X) \to E^1_{0,n-1}(X)$$

avec le morphisme $p_* : E^1_{0,n-1}(X) \to E^1_{0,n-1}(\mathrm{Spec}\, k)$ induit par p. On conclut en remarquant que $E^1_{1,n-1}(\mathrm{Spec}\, k) = 0$.

La même suite spectrale existe aussi en K-théorie à coefficients et en cohomologie étale, où elle s'écrit:

$$E^1_{r,s}(i) = \bigoplus_{x \in X_{(r)}} H^{r+s}(k(x), \mu_q^{\otimes (r+i-d)})$$

(cf. [9], Prop. 3.7, et 3.9). D'où le résultat.

Théorème 2. *Soient k un corps, k' un extension séparable finie de k, ℓ un nombre premier distinct de la caractéristique de k, $N = f^*$ (resp. f_*) le morphisme de*

transfert de k' à k (resp. *le morphisme induit par l'injection $f: k \to k'$*) *en K-théorie à coefficients $\mathbb{Z}/q$ ($q=\ell^\nu$), ou en cohomologie étale. On a, si $x \in K_{2i-k}(k'; \mathbb{Z}/q)$*

i) $f_*(\bar{c}_{i,k}(N(x))) = f_*(N(\bar{c}_{i,k}(x))$, *si l'extension est galoisienne.*

ii) $i \cdot (\bar{c}_{i,k}(N(x)) - N(\bar{c}_{i,k}(x))) = 0$.

Preuve. i) Soit G le groupe des automorphismes de k' sur k. On a

$$f_* \circ N = \sum_{g \in G} g_*.$$

Nous avons vu ce fait pour la cohomologie étale (Lemma 6 ii), III.1.5) et il a été démontré en K-théorie par Bloch ([8], 3.5.3). On a donc

$$\begin{aligned} f_* \circ N \circ \bar{c}_{i,k} &= \sum_{g \in G} g_* \circ \bar{c}_{i,k} = \bar{c}_{i,k} \circ \Big(\sum_{g \in G} g_*\Big) \\ &= \bar{c}_{i,k} \circ f_* \circ N = f_* \circ \bar{c}_{i,k} \circ N. \end{aligned}$$

(En particulier, si f_* est injectif $\bar{c}_{i,k}$ commute à N.)

ii) Le corps k' s'identifie (de façon non unique) à un corps résiduel k_v de la droite affine A^1_k. Si $x \in K_{2i-k}(k'; \mathbb{Z}/q)$, il existe donc, d'après la proposition 3 i) ci-dessus, un élément $y \in K_{2i-k+1}(k(t); \mathbb{Z}/q)$ tel que

$$\bar{\partial}_v(y) = x$$

et

$$\bar{\partial}_w(y) = 0 \quad \text{si } w \in S - \{v, \infty\}.$$

La formule de réciprocité de la Proposition 3, ii), montre que

$$\bar{\partial}_\infty(y) = N_\infty(\bar{\partial}_\infty(y)) = -N_v(\bar{\partial}_v(y)) = -N(x).$$

On a alors, d'après la Proposition 2 ii), si $w \in S$, $\bar{\partial}_w(\bar{c}_{i+1,k+1}(y)) = i \cdot \bar{c}_{i,k}(\bar{\partial}_w(y))$, donc

$$\bar{\partial}_w(\bar{c}_{i+1,k+1}(y)) = 0 \quad \text{si } w \neq v, \infty,$$

$$\bar{\partial}_v(\bar{c}_{i+1,k+1}(y)) = i \cdot \bar{c}_{i,k}(x),$$

et

$$\bar{\partial}_\sigma(\bar{c}_{i+1,k+1}(y)) = -i \cdot \bar{c}_{i,k}(N(x)).$$

La formule de réciprocité en cohomologie étale (Prop. 3) permet de conclure.

(Cette preuve s'inspire de la K-théorie de Milnor, où le procédé précédent est utilisé pour définir un transfert (cf. [5]). Elle montre donc que le morphisme de la K-théorie de Milnor vers la K-théorie de Quillen commute aux transferts.)

III.3 La suite exacte de localisation d'un anneau de Dedekind à corps résiduels finis

Proposition 4. *Soit A un anneau complet pour une valuation discrète v, F son corps des fractions, et k son corps résiduel, le bord ∂ (resp $\bar{\partial}$, ou ∂^e) de la suite exacte de localisation de l'anneau des entiers de F est surjectif et scindé (en toute dimension) dès que k est un corps fini (de caractéristique différente de ℓ).*

Preuve. En cohomologie étale on sait que la projection

$$H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_q^{\otimes i}) \to H^k(\ell, \mu_q^{\otimes i})$$

est un isomorphisme ([46], Prop. IV.2.2).

Un théorème de Harris et Segal [24] implique que le morphisme

$$K_n(A; \mathbb{Z}/q) \to K_n(\ell; \mathbb{Z}/q)$$

est surjectif et scindé. En effet si ℓ est d'ordre p^s et si r désigne le plus petit entier tel que $p^{sr} \equiv 1 \pmod{\ell}$, le corps fini $\tilde{\ell}$ d'ordre p^{sr} est le corps résiduel d'un anneau de valuation discrète $\tilde{A}$ contenant A. Comme le morphisme $\tilde{A}^* \to \tilde{\ell}^*$ est scindé, et comme $\tilde{A}$ est un A-module libre, les conditions i) et ii) de (loc. cit., p. 26) sont vérifiées, d'où le résultat, d'après le Corollaire 3.2 de (loc. cit.). Ce corollaire est exprimé avec la K-théorie ordinaire, mais vaut aussi pour la K-théorie à coefficients (appliquer le Théorème 3.1 de loc. cit. avec pour espace X les espaces Y^n définis en II.2.1).

Si π est une uniformisante de F, et s une section de la réduction modulo v (notée r_v) en K-théorie ou en cohomologie étale, on pose

$$s_\pi(x) = \dot{\pi} \cdot s(x),$$

où x est un élément de la K-théorie de ℓ et $\dot{\pi}$ l'image de π dans $K_1(F)$ (ou $K_1(F; \mathbb{Z}/q)$, ou $H^1(F, \mu_q)$). On montre alors, comme dans le cas d'égale caractéristique (Proposition 2, i)), que

$$\partial(s_\pi(x)) = \partial(\dot{\pi}) \cdot (r_v(s(x)) = \partial(\dot{\pi}) \cdot x = x.$$

Corollaire. *Si A est un anneau de Dedekind dont les corps résiduels ℓ_v sont finis, F son corps de fractions, et x un élément de $K_{2i-k}(F; \mathbb{Z}/q)$, on a*

$$\partial_v^e(\bar{c}_{i,k}(x)) = (1-i)\bar{c}_{i-1,k-1}(\bar{\partial}_v(x)).$$

Preuve. On procède comme dans le cas d'égale caracteristique (Proposition 2 ii)). On peut supposer que F est complet pour v, et raisonner avec s_π au lieu de ∂_v.

On a alors

$$\bar{c}_{i,k}(s_\pi(x)) = \bar{c}_{i,k}(\dot{\pi} \cdot s(x)) = (i-1)\,\dot{\pi} \cup \bar{c}_{i-1,k-1}(s(x))$$

et

$$\bar{c}_{i-1,k-1}(s(x)) = r_v^{-1}(r_v \cdot \bar{c}_{i-1,k-1}(s(x))) = r_v^{-1}(\bar{c}_{i-1,k-1}(x)),$$

d'où

$$\bar{c}_{i,k}(s_\pi(x)) = (i-1)\, s_\pi(\bar{c}_{i-1,k-1}(x)). \quad \text{q.e.d.}$$

Théorème 3. *Soit A un anneau de Dedekind dont le corps des fractions F est un corps global. Le bord $\partial = \bigoplus_v \partial_v$ (resp. $\bar{\partial} = \bigoplus_v \bar{\partial}_v$, resp. $\partial^e = \bigoplus_v \partial_v^e$) est surjectif* (mod 2) *sur $K_n(F)$ avec $n > 1$* (resp. *$K_n(F; \mathbb{Z}/q)$ avec n pair et positif*, resp. *$H^2(F, \mu_q^{\otimes i})$*).

En particulier, on a une suite exacte à trois termes (modulo la classe des modules de 2-torsion):

$$0 \to K_n(A) \to K_n(F) \to \bigoplus_v K_{n-1}(\kappa_v) \to 0.$$

Démonstration. Dans l'énoncé de ce théorème on suppose que q est inversible dans A quand on parle de cohomologie étale (par contre pour $n>1$, on remarquera que si κ_v est de caractéristique ℓ on a $K_{n-1}(\kappa_v; \mathbb{Z}/q)=0$, d'après [40]).

1) Supposons que A contient un élément d'ordre q. Il en est donc de même pour F et les corps κ_v. La K-théorie à coefficients et la cohomologie étale de κ_v sont alors décrites comme suit:

Lemme 8. i) $\bigoplus_{n \geqq 0} K_n(\kappa_v; \mathbb{Z}/q) = \Lambda(\beta_v) \otimes P(\alpha_v)$, *où* $\Lambda(\beta_v)$ *est l'algèbre extérieure engendrée sur* $\mathbb{Z}/q$ *par un élément* β_v *de degré un et* $P(\alpha_v)$ *l'algèbre des polynômes sur* $\mathbb{Z}/q$ *en un élément* α_v *de degré deux.*

ii) $H^k(\kappa_v, \mu_q) = \mathbb{Z}/q$ *si* $k=0$ *ou* 1, *et* 0 *sinon. Le cup-produit par les puissances d'un générateur* a *de* $H^0(\kappa_v, \mu_q) = \mathbb{Z}/q$ *fournit un isomorphisme de* $H^k(\kappa_v, \mu_q)$ *avec* $H^k(\kappa_v, \mu_q^{\otimes i})$, $i \geqq 1$.

Preuve du lemme. La partie i) est due à Browder ([11], 2.6) et ii) a été démontré au paragraphe III.1 (2 et 4). q.e.d.

Le générateur de $K_2(\kappa_v; \mathbb{Z}/q)$ est obtenu grâce à la suite exacte de Bockstein

$$K_2(\kappa_v) \to K_2(\kappa_v; \mathbb{Z}/q) \xrightarrow{\beta_q} K_1(\kappa_v) \xrightarrow{\times q} K_1(\kappa_v).$$

Si ζ_v est un élément d'ordre q de $\kappa_v^* = K_1(\kappa_v)$, α_v est l'élément de $K_2(\kappa_v; \mathbb{Z}/q)$ d'image ζ_v par le morphisme de Bockstein β_q (il est uniquement déterminé car $K_2(\kappa_v)=0$).

Choisissons pour ζ_v la réduction modulo v d'un élément ζ d'ordre q de A^*. Si α est un élément de $K_2(A; \mathbb{Z}/q)$ d'image ζ dans $K_1(A)=A^*$, la réduction modulo v de α est α_v.

De même le choîx de ζ fournit des générateurs a (resp. a_v) de $H^0(\operatorname{Spec} A, \mu_q)$ (resp. $H^0(\kappa_v, \mu_q)$).

Comme la suite exacte de localisation est une suite exacte de modules sur la K-théorie de A (resp. la cohomologie de $\operatorname{Spec} A$) on a, en notant j_* l'application induite par l'injection j: $A \to F$,

$$\bar{\partial}_v(j_*(\alpha) \cdot x) = \alpha_v \cdot \bar{\partial}_v(x) \qquad (\text{resp. } \partial_v^e(j_*(a) \cup x) = a_v \cup \partial_v^e(x))$$

si $x \in K_n(F; \mathbb{Z}/q)$ (resp. $x \in H^k(F, \mu_q^{\otimes i})$). D'après le lemme 8 ci-dessus, la surjectivité de $\bar{\partial}$ et ∂^e (pour n et k pairs) résultera de celle de

$$K_2(F; \mathbb{Z}/q) \xrightarrow{\bar{\partial}} \bigoplus_v K_1(\kappa_v; \mathbb{Z}/q)$$

et

$$H^2(F, \mu_q^{\otimes 2}) \xrightarrow{\partial^e} \bigoplus_v H^1(\kappa_v, \mu_q).$$

Comme $K_1(\kappa_v; \mathbb{Z}/q) = K_1(\kappa_v)/q K_1(\kappa_v)$, la surjectivité de $\bar{\partial}$ résulte du même résultat en K-théorie ordinaire [36] (par contre, on verra au paragraphe IV.1.4 que le morphisme $K_2(A; \mathbb{Z}/q) \to K_2(F; \mathbb{Z}/q)$ n'est pas toujours injectif). Quant à la

surjectivité de

$$H^2(F,\mu_q^{\otimes 2}) \simeq Br(F)_{(q)} \xrightarrow{\partial^e} \bigoplus_v \mathfrak{k}_v^*/(\mathfrak{k}_v^*)^q,$$

elle est aussi connue [55].

2) Si on ne suppose plus que A^* contient un élément d'ordre q, on notera $\tilde{F}$ l'extension cyclotomique de F obtenue en lui ajoutant une racine primitive q-ième de l'unité, $\tilde{A}$ la clôture intégrale de A dans $\tilde{F}$, et $\tilde{\mathfrak{k}}_w$ les corps résiduels de $\tilde{A}$. Si on suppose que ℓ est inversible dans A (ce qui est possible pour la K-théorie à coefficients $\mathbb{Z}/q$), l'anneau $\tilde{A}$ est une extension étale de A et les idéaux premiers de A sont non ramifiés dans $\tilde{A}$. On note f l'injection de F dans $\tilde{F}$, f^* le transfert induit par f-en K-théorie ou en cohomologie étale-, et $N_{w,v}$ le transfert associé à l'extension $\mathfrak{k}_v \subset \tilde{\mathfrak{k}}_w$, quand w divise v.

Les suites exactes de localisation de A et $\tilde{A}$ sont reliées par les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \to K_n(\tilde{A};\mathbb{Z}/q) & \longrightarrow & K_n(\tilde{F};\mathbb{Z}/q) & \xrightarrow{\tilde{\partial}} & \bigoplus_w K_{n-1}(\tilde{\mathfrak{k}}_w;\mathbb{Z}/q) & \to \ldots \\
\downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow \otimes N_{w,v} & \\
\ldots \to K_n(A;\mathbb{Z}/q) & \longrightarrow & K_n(F;\mathbb{Z}/q) & \xrightarrow{\partial} & \bigoplus_v K_{n-1}(\mathfrak{k}_v;\mathbb{Z}/q) & \to \ldots
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \to H^k(\operatorname{Spec}\tilde{A},\mu_q^{\otimes i}) & \longrightarrow & H^k(\tilde{F},\mu_q^{\otimes i}) & \xrightarrow{\partial^e} & \bigoplus_w H^{k-1}(\tilde{\mathfrak{k}}_w,\mu_q^{\otimes(i-1)}) & \to \ldots \\
\downarrow f^* & & \downarrow f^* & & \downarrow \otimes N_{w,v} & \\
\ldots \to H^k(\operatorname{Spec}A,\mu_q^{\otimes i}) & \longrightarrow & H^k(F,\mu_q^{\otimes i}) & \xrightarrow{\partial^e} & \bigoplus_v H^{k-1}(\mathfrak{k}_v,\mu_q^{\otimes(i-1)}) & \to \ldots.
\end{array}$$

En K-théorie cela se voit en remarquant que la restriction des scalaires de $\tilde{A}$ à A induit un diagramme commutatif de catégories

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{\mathscr{S}} & \longrightarrow & \tilde{\mathscr{U}} & \longrightarrow & \tilde{\mathscr{U}}/\tilde{\mathscr{S}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{S} & \longrightarrow & \mathscr{U} & \longrightarrow & \mathscr{U}/\mathscr{S}
\end{array}$$

où $\mathscr{U}$ est la catégorie des A-modules projectifs de type fini, $\mathscr{S}$ la sous-catégorie des modules de A-torsion, et $\mathscr{U}/\mathscr{S}$ la catégorie quotient (de même, sur $\tilde{A}$, pour les catégories $\tilde{\mathscr{U}}$, $\tilde{\mathscr{S}}$ et $\tilde{\mathscr{U}}/\tilde{\mathscr{S}}$), et en appliquant ([20], Cor. 1.11.). En cohomologie étale, cela résulte de la formule

$$f^* \circ (R^s \tilde{j}_*) = (R^s j_*) \circ f^*,$$

où j (resp. $\tilde{j}$) est l'injection $A \to F$ (resp. $\tilde{A} \to \tilde{F}$). La surjectivité de $\tilde{\partial}$ et ∂^e résulte donc de 1) et du lemme suivant:

Lemme 9. *Si k' est une extension finie d'un corps fini k (de caractéristique première à ℓ) les normes (ou transferts)*

$$K_{2i-1}(k';\mathbb{Z}/q)\to K_{2i-1}(k;\mathbb{Z}/q)$$

et

$$H^1(k',\mu_q^{\otimes i})\to H^1(k,\mu_q^{\otimes i})$$

sont surjectives.

Preuve du lemme. En K-théorie, Quillen a montré [40] que la norme

$$K_{2i-1}(k')\to K_{2i-1}(k)$$

est surjective. Mais $K_{2i}(k)=K_{2i}(k')=0$ (loc.cit.), donc

$$K_{2i-1}(k;\mathbb{Z}/q)=K_{2i-1}(k)/qK_{2i-1}(k)$$

(de même pour k'), d'où le lemme.

En cohomologie étale ce lemme résulte du fait que k est de dimension cohomologique 1 (cf. III.1.5, Lemme 6).

La surjectivité du morphisme ∂ résulte, par passage à la limite, de celle des morphismes $\bar{\partial}$. On sait en effet que les groupes $K_*(A)$ sont de type fini ([42] et [43]). En particulier, $K_*(A)$ et $K_*(F)$ n'ont pas de sous-groupe ℓ-divisible non trivial. Il en résulte que la suite ci-dessous est exacte:

$$\ldots\to K_n(A)\otimes\mathbb{Z}_\ell\to K_n(F)\otimes\mathbb{Z}_\ell\xrightarrow{\partial}\bigoplus_v K_{n-1}(k_v)\otimes\mathbb{Z}_\ell\to\ldots$$

(en utilisant par exemple [12] VI.3.3 et VII.7.1).

Par ailleurs les suites exactes de Bockstein donnent des diagrammes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & K_n(A)/\ell^{\nu+1}K_n(A) & \to & K_n(A;\mathbb{Z}/\ell^{\nu+1}) & \to & K_{n-1}(A)_{(\ell^{\nu+1})} & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x^\ell} & & \\
0 & \to & K_n(A)/\ell^{\nu}K_n(A) & \to & K_n(A;\mathbb{Z}/\ell^{\nu}) & \to & K_{n-1}(A)_{(\ell^{\nu})} & \to & 0
\end{array}$$

(ceci résulte de morphismes entre les fibrations définissant $Y^n_{\ell^\nu}$, cf. II.2.1, pour différentes valeurs de ν). Par conséquent le groupe

$$K_n(A;\mathbb{Z}_\ell)\overset{\text{def}}{=}\varprojlim_\nu K_n(A;\mathbb{Z}/\ell^\nu)$$

est isomorphe à $K_n(A)\otimes\mathbb{Z}_\ell$ (de même pour k_v), et le morphisme

$$K_n(F)\otimes\mathbb{Z}_l\to K_n(F;\mathbb{Z}_\ell)$$

est surjectif. Il reste à considérer la limite projective des morphismes

$$\bar{\partial}\colon\ K_n(F;\mathbb{Z}/\ell^\nu)\to\bigoplus_v K_{n-1}(k_v;\mathbb{Z}/\ell^\nu).$$

Le noyau des $\bar{\partial}$ est fini (puisque $K_n(A)$ est de type fini), donc leur système projectif vérifie la condition de Mittag-Leffler et le morphisme ∂ est surjectif ([23], Prop. 13.2.2.).

Comme $K_n(A)\otimes\mathbb{Z}_\ell \to K_n(F)\otimes\mathbb{Z}_\ell$ est injectif pour tout nombre premier impair ℓ, il en est de même de $K_n(A)\to K_n(F)\,(\mathrm{mod}\,2)$. q.e.d.

IV Surjectivité des classes de Chern

IV.1 Anneaux d'entiers de corps globaux

Théorème 4. *Soit A un anneau commutatif unitaire, ℓ un nombre premier impair, non nul dans A, $q=\ell^v$ une puissance de ℓ, $A'=A[1/\ell]$ le localisé de A en-dehors de ℓ. Sous les hypothèses* 1) *à* 4) *ci-dessous, il existe un morphisme surjectif*

$$\bar{c}_{i,k}\colon\ K_{2i-k}(A;\mathbb{Z}/q)\to H^k(\mathrm{Spec}\,A',\mu_q^{\otimes i}).$$

1) *$i<\ell$ et $k\leqq 2$;*

2) *si ℓ n'est pas inversible dans A, l'anneau A est un anneau de Dedekind à corps résiduels finis;*

3) *si $k=1$ ou 2, A est un anneau de Dedekind, et si $k=2$ le corps des fractions F de A est un corps local ou global;*

4) *le groupe des unités A^* de A contient un élément d'ordre q,*
ou bien $q=\ell$ et A est intégralement clos,
ou bien $k=0$ et A a pour corps des fractions un corps local ou global,
ou bien $k=1$ et A a pour corps des fractions un corps local ($\ell\neq$ caractéristique résiduelle),
ou bien $k=2$ et A est un corps local ou global.

Remarque. L'hypothèse $i<\ell$ peut être remplacée par l'énoncé plus précis suivant: l'image du morphisme $\bar{c}_{i,k}$ contient celle de la multiplication par $i!$ dans $H^k(\mathrm{Spec}\,A',\mu_q^{\otimes i})$. Il en est de même dans les théorèmes 6 et 8 ci-dessous.

Démonstration

IV.1.1 L'hypothèse 2) permet de se ramener au cas où A contient l'inverse de ℓ, i.e. $A'=A$. En effet la suite exacte de localisation reliant A et A' [21] s'écrit

$$\ldots\to K_n(A;\mathbb{Z}/q)\to K_n(A';\mathbb{Z}/q)\to\bigoplus_{v|\ell}K_{n-1}(k_v;\mathbb{Z}/q)\to\ldots.$$

Comme les corps k_v ont ℓ pour caractéristique, les groupes $K_*(k_v)$ sont des groupes finis d'ordre premier à ℓ [40]. Donc $K_{n-1}(k_v;\mathbb{Z}/q)=0$ si $n>1$ et $v|\ell$, et $K_n(A;\mathbb{Z}/q)=K_n(A';\mathbb{Z}/q)$ si $n>1$. On supposera désormais $A=A'$ et $\bar{c}_{i,k}$ sera le morphisme défini en II.2.3.

IV.1.2. Si $q=\ell$, on peut supposer que A^* contient un élément d'ordre q. Sinon, on note $\tilde{A}$ sa clôture intégrale dans $\tilde{F}=F(\sqrt[\ell]{1})$. Le revêtement $\mathrm{Spec}\,\tilde{A}\to\mathrm{Spec}\,A$ est étale et galoisien (car ℓ est inversible dans A). L'ordre r du groupe

d'automorphismes de ce revêtement divise $\ell-1$, donc est premier à ℓ. Notons f l'injection de A dans $\tilde{A}$, et f_* (resp. f^*) le morphisme induit par f (resp. le transfert). Comme $f^* \cdot f_*$ est la multiplication par r, le transfert est surjectif (en K-théorie à coefficients et en cohomologie étale) et f_* est injectif, donc $\bar{c}_{i,k}$ commute à f^* (cf. III.2, Théorème 2i)). Donc la surjectivité de $\bar{c}_{i,k}$ pour $\tilde{A}$ implique le même résultat pour A.

IV.1.3 La première classe de Chern

On a vu au paragraphe II.1.1 que la première classe de Chern est l'image par le morphisme de Bockstein β_q de la classe

$$\xi(\rho)=\xi(\det(\rho))\in H^1(\operatorname{Spec} A, G; G_m)$$

du G-fibré de rang un $\det(\rho)$.

Grâce à l'application $H^1(\operatorname{Spec} A, G; G_m) \to \operatorname{Hom}(H_1(G;\mathbb{Z}), H^0(\operatorname{Spec} A, G_m))$ analogue à celle décrite dans le lemme 1 de II.1.2, on associe à $\xi(id)$ un morphisme

$$\xi_0 \colon K_1(A)=H_1(GL(A);\mathbb{Z}) \to H^0(\operatorname{Spec} A, G_m),$$

qui s'identifie à l'application déterminant

$$GL(A)/(GL(A), GL(A)) \to A^*.$$

Donc ξ_0 est surjectif et scindé.

Quand $G=1$, ξ définit un morphisme

$$\xi_1 \colon K_0(A) \to H^1(\operatorname{Spec} A, G_m)$$

associant à la classe $[P]$ d'un module projectif P sur A celle du fibré associé sur $\operatorname{Spec} A$. Si A est un anneau de Dedekind, on sait que $H^1(\operatorname{Spec} A, G_m) \simeq \operatorname{Pic}(A)$, où $\operatorname{Pic}(A)$ est le groupe des classes d'idéaux de A [46], et que $K_0(A)=\mathbb{Z}\oplus\operatorname{Pic}(A)$ [36]. Le morphisme ξ_1 s'identifie, par définition, à la projection de $K_0(A)$ sur $\operatorname{Pic}(A)$.

Comme $c_1(id)=\beta_q(\xi(id))$, on a $c_{1,0}=0$, $c_{1,1}=\beta_q \circ \xi_0$, et $c_{1,2}=\beta_q \circ \xi_1$, où β_q désigne le morphisme de Bockstein en cohomologie étale.

Le morphisme $\bar{c}_{1,0}$ (à la différence de $c_{1,0}$) est surjectif. Cela résulte du diagramme commutatif (D) suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
K_2(A;\mathbb{Z}/q) & \longrightarrow & K_1(A) & \xrightarrow{\times q} & K_1(A) \\
\downarrow{\scriptstyle c_{1,0}} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \xi_0} \\
0 \to H^0(\operatorname{Spec} A, \mu_q) & \longrightarrow & H^0(\operatorname{Spec} A, G_m) & \xrightarrow{\times q} & H^0(\operatorname{Spec} A, G_m).
\end{array}$$

Pour montrer que (D) commute on note $C_\cdot(G)$ (resp. $C_{q\cdot}(G)$) le complexe des chaînes de BG sur $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Z}/q$) et $\mathscr{L}^\cdot$ (resp. $\mathscr{L}_q^\cdot$) une résolution de G_m (resp. μ_q)

sur $\operatorname{Spec} A$. Le morphisme de Bockstein

$$\beta_q\colon\ H^1(\operatorname{Spec} A, G; G_m) \to H^2(\operatorname{Spec} A, G; \mu_q)$$

provient d'un morphisme de degré -1 (défini dans la catégorie dérivée $D(\mathbb{Z})$)

$$\Gamma(\mathscr{L}^\cdot) \to \Gamma(\mathscr{L}_q^\cdot)$$

qui conduit, via le Lemme 1, au diagramme commutatif (dans $D(\mathbb{Z})$) suivant:

$$\begin{array}{ccc}
C.(G) & \xrightarrow{\phi(\xi(\rho))} & \Gamma(\mathscr{L}^\cdot)[-1] \\
\downarrow{\scriptstyle \times q} & & \downarrow{\scriptstyle \times q} \\
C.(G) & \xrightarrow{\phi(\xi(\rho))} & \Gamma(\mathscr{L}^\cdot)[-1] \\
\downarrow & & \downarrow \\
C_q.(G) & \xrightarrow{\phi(c_1(\rho))} & \Gamma(\mathscr{L}_q^\cdot)[-2].
\end{array}$$

Interprété en homologie, cela donne le diagramme (D) (on utilise II.2.2).

Si A est un anneau principal, on a

$$K_1(A; \mathbb{Z}/q) \xrightarrow{\sim} H^1(\operatorname{Spec} A, \mu_q) \simeq A^*/(A^*)^q.$$

D'après la description donnée ci-dessus de $c_{1,1}$, le morphisme $\bar{c}_{1,1}$ est un isomorphisme.

Si A est un anneau de Dedekind, nous n'avons pas, jusqu'à présent, défini le morphisme $\bar{c}_{1,1}$ en général. Or le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
K_1(A; \mathbb{Z}/q) & \longrightarrow & K_1(F; \mathbb{Z}/q) & \longrightarrow & \bigoplus_v \mathbb{Z}/q \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \bar{c}_{1,1}} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\
0 \longrightarrow H^1(\operatorname{Spec} A, \mu_q) & \longrightarrow & H^1(F, \mu_q) & \longrightarrow & \bigoplus_v \mathbb{Z}/q
\end{array}$$

(cf. III.3) permet de définir $\bar{c}_{1,1}$ pour A comme le morphisme qui rend commutatif le diagramme précédent. Ce morphisme sera automatiquement surjectif (c'est même un isomorphisme si F est un corps local ou global, car $K_1(A; \mathbb{Z}/q)$ s'envoie injectivement dans $K_1(F; \mathbb{Z}/q)$, d'après III.3, Théorème 3).

Enfin, puisque $c_{1,2} = \beta_q \circ \xi_1$, l'image de $c_{1,2}$ est

$$\beta_q(H^1(\operatorname{Spec} A, G_m)) \subset H^2(\operatorname{Spec} A, \mu_q).$$

IV.1.4 Le cas $i=2$ et $k=2$

Pour un corps F le morphisme $c_{2,2}\colon K_2(F) \to H^2(F, \mu_q^{\otimes 2})$ n'est autre que le symbole galoisien (ou plutôt son opposé), qui a été étudié par exemple par

Milnor [36] et Tate [55]. En effet la formule de multiplication (Théorème 1, II.3) montre que l'image par $c_{2,2}$ du symbole $(a,b)=a\cdot b$, où $a,\ b\in F^*=K_1(F)$, est

$$c_{2,2}(a\cdot b)=-c_{1,1}(a)\cup c_{1,1}(b)$$

(remarquer que $(2-1)!=1$).

Dans le cas d'un corps local ou global, Tate a montré que $c_{2,2}$ induit un isomorphisme $K_2(F)/qK_2(F)\to H^2(F,\mu_q^{\otimes 2})$ (cf. [55])[1]. On va en déduire le résultat suivant:

Lemme 10. *Si A est un anneau de Dedekind dont le corps des fractions est un corps local ou global, le morphisme $c_{2,2}$ induit un isomorphisme*

$$K_2(A)/qK_2(A)\to H^2(\operatorname{Spec}A,\mu_q^{\otimes 2}).$$

Preuve du lemme. Le diagramme commutatif (cf. IV.3.1 ci-dessous)

$$\begin{array}{ccccc} K_2(A)/\ell K_2(A) & \to & K_2(A)/\ell^{\nu+1}K_2(A) & \to & K_2(A)/\ell^{\nu}K_2(A) \\ \downarrow{\scriptstyle c_{2,2}} & & \downarrow{\scriptstyle c_{2,2}} & & \downarrow{\scriptstyle c_{2,2}} \\ H^2(\operatorname{Spec}A,\mu_\ell^{\otimes 2}) & \to & H^2(\operatorname{Spec}A,\mu_{\ell^{\nu+1}}^{\otimes 2}) & \to & H^2(\operatorname{Spec}A,\mu_{\ell^{\nu}}^{\otimes 2}), \end{array}$$

où l'horizontale inférieure est la suite exacte de Bockstein associée à la suite exacte de faisceaux étales $0\to\mu_\ell^{\otimes 2}\to\mu_{\ell^{\nu+1}}^{\otimes 2}\to\mu_{\ell^{\nu}}^{\otimes 2}\to 0$, permet de se ramener, par récurrence, au cas où $q=\ell$. On peut alors supposer que A^* contient un élément d'ordre q (cf. IV.1.2), et on note α un élément de $K_2(A;\mathbb{Z}/q)$ d'image dans $K_1(A)$ un élément d'ordre q. Si a décrit le groupe de Picard $\operatorname{Pic}(A)\subset K_0(A)$, le produit $\alpha\cdot a$ décrit un sous-groupe de $K_2(A;\mathbb{Z}/q)$ que nous noterons Ω.

Soit i l'injection de A dans F, et i_* le morphisme induit par i. On a $i_*(\alpha\cdot a)=i_*(\alpha)\cup i_*(a)=0$, car $\operatorname{Pic}(F)=0$. Donc $i_*(\beta_q(\alpha\cdot a))=\beta_q(i_*(\alpha\cdot a))=0$ (où β_q est le morphisme de Bockstein), et comme $i_*\colon K_1(A)\to K_1(F)$ est injectif, le groupe Ω est dans le noyau de $\beta_q\colon K_2(A;\mathbb{Z}/q)\to K_1(A)$. C'est donc un sous-groupe du noyau de $i_*\colon K_2(A)/qK_2(A)\to K_2(F)/qK_2(F)$.

Par ailleurs, la formule de multiplication (Théorème 1) montre que $\bar{c}_{2,2}(\alpha\cdot a)=\bar{c}_{1,0}(\alpha)\cup c_{1,2}(a)$. On a vu en IV.1.3 que $\bar{c}_{1,0}(\alpha)$ est un générateur de $H^0(\operatorname{Spec}A,\mu_q)$, et que $c_{1,2}(a)$ décrit le sous-groupe $\operatorname{Pic}(A)/q\operatorname{Pic}(A)$ de $H^2(\operatorname{Spec}A,\mu_q)$. Donc $\bar{c}_{2,2}(\Omega)$ est le sous-groupe

$$\beta_q(H^1(\operatorname{Spec}A,G_m))\cup H^0(\operatorname{Spec}A,\mu_q)\simeq\operatorname{Pic}(A)\otimes\mu_q$$

de $H^2(\operatorname{Spec}A,\mu_q^{\otimes 2})$. Or Tate démontre dans ([55], Théorème 6.2) que le noyau de $K_2(A)/qK_2(A)\to K_2(F)/qK_2(F)$ est isomorphe à $\operatorname{Pic}(A)\otimes\mu_q$. Comme le groupe de Picard est fini, on voit que ce noyau est Ω.

On conclut en remarquant que la suite exacte

$$0\to\Omega\to K_2(A)/qK_2(A)\xrightarrow{i_*}K_2(F)/qK_2(F)$$

[1] La surjectivité de $c_{2,2}$ résulte de la propriété (B,q) (cf. III.1.1)

s'envoie par $c_{2,2}$ sur la suite exacte

$$\mathrm{Pic}(A)\otimes\mu_q\to H^2(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes 2})\to H^2(F,\mu_q^{\otimes 2}),$$

et en utilisant le fait que $c_{2,2}$ est un isomorphisme pour F.

IV.1.5 Le cas où A^* contient un élément d'ordre q

Posons, puisque $i<\ell$, $ch_{i,k}=(-1)^{i-1}/(i-1)!\,c_{i,k}$ et $\overline{ch}_{i,k}=(-1)^{i-1}/(i-1)!\,\bar{c}_{i,k}$.

Soit α un élément de $K_2(A;\mathbb{Z}/q)$ dont l'image par $\bar{c}_{1,0}=\overline{ch}_{1,0}$ est un générateur a de $H^0(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q)=\mathbb{Z}/q$ (cf. IV.1.3). La formule de multiplication (Théorème 1) montre que $\overline{ch}_{i,0}(\alpha^i)=a^i$. Puisque pour tous les entiers k, i et j le cup-produit

$$H^k(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes i})\otimes H^0(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes j})\to H^k(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes(i+j)})$$

est un isomorphisme (cf. III.1.2), l'élément a^i est un générateur de $H^0(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes i})$.

De même si $\beta\in K_2(A)/qK_2(A)\subset K_2(A;\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est d'image b par $\overline{ch}_{2,2}$ dans $H^2(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes 2})$, étant donné que $ch_{1,0}(\beta)=0$ (cf. IV.1.3), on a

$$\overline{ch}_{i,2}(\beta\cdot\alpha^{i-2})=b\cup a^{i-2}\in H^2(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes i}).$$

Donc, d'après IV.1.4, $\overline{ch}_{i,2}$ est surjectif sous les hypothèses du théorème.

Si $\beta\in K_1(A;\mathbb{Z}/q)$, on vérifie que

$$\overline{ch}_{i,1}(\beta\cdot\alpha^{i-1})=\overline{ch}_{1,1}(\beta)\cup\overline{ch}_{i-1,0}(\alpha^{i-1}).$$

En effet, A est alors un anneau de Dedekind, de corps des fractions F, et $H^1(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q^{\otimes i})\to H^1(F,\mu_q^{\otimes i})$ est injectif (III.1.3). La formule ci-dessus peut donc être vérifiée dans $H^1(F,\mu_q^{\otimes i})$. Or elle est vraie pour F et $\overline{ch}_{1,1}$ a été défini par le plongement $H^1(\mathrm{Spec}\,A,\mu_q)\to H^1(F,\mu_q)$ (IV.1.3). D'où la formule ci-dessus, ce qui prouve le théorème, puisque $\overline{ch}_{1,1}$ est surjectif.

IV.1.6 Le cas où $k=0$

Si A^* ne contient pas d'élément d'ordre q, on suppose que A est un anneau de Dedekind dont le corps des fractions est un corps local ou global. La surjectivité de $\overline{ch}_{i,0}$ résulte alors de la théorie de Harris et Segal [24]. Notons $\bar{F}$ une clôture algébrique de F, ζ_j une racine ℓ^j-ème de l'unité dans $\bar{F}$ pour tout $j\geqq 1$, et $F_j=F(\zeta_j)$. Harris et Segal montrent qu'il existe dans A des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ (en nombre infini si F est global) tels que, si v est la valuation associée à $\mathfrak{p}$,

– $K_n(A;\mathbb{Z}/q)\to K_n(\kappa_v;\mathbb{Z}/q)$ est surjectif et scindé

— $\mathfrak{p}$ reste premier dans F_{m+1} (où m désigne le plus grand entier t tel que F_t contienne ζ_t).

Soit $r=[F_m: F]$. Le lemme de (loc. cit., § 4) montre que $H^0(F, \mu_q^{\otimes i})$ est nul si $i \not\equiv 0 \pmod r$ et que si $i=r\ell^\lambda s$, on a

$$H^0(F, \mu_q^{\otimes i}) = H^0(\mathrm{Gal}(F(\zeta_{m+\lambda})/F), \mu_q^{\otimes i})$$

et

$$H^0(\mathfrak{k}_v, \mu_q^{\otimes i}) = H^0(\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_v(\zeta_{m+\lambda})/\mathfrak{k}_v), \mu_q^{\otimes i}).$$

Mais des hypothèses résulte que les groupes $\mathrm{Gal}(F(\zeta_{m+\lambda})/F)$ et $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_v(\zeta_{m+\lambda})/\mathfrak{k}_v)$ sont isomorphes (et cycliques d'ordre $r\ell^\lambda$). On montrera au paragraphe IV.2 que $\overline{ch}_{i,0}$ est un isomorphisme si A est un corps fini. Donc il est surjectif pour F, et pour A, car $H^0(\mathrm{Spec}\, A, \mu_q^{\otimes i}) \simeq H^0(F, \mu_q^{\otimes i})$ (III.1.3). (Le théorème de Harris et Segal est énoncé pour un corps de nombres mais nous avons déjà vu en III.3, Proposition 4, qu'il est valable pour un corps local, et on vérifie de même qu'il est valable pour un corps de fonctions sur une courbe).

IV.1.7 Cas où $k=2$ et où A est un corps global F

Notons $\tilde{F}$ le corps obtenu en ajoutant à F les racines q-ièmes de l'unité (dans une clôture séparable de F), f l'injection $F \to \tilde{F}$, et f^* le transfert associé. On a vu en III.2, Théorème 2, que, si $2 \leqq i < \ell$,

$$\overline{ch}_{i,2}(f^*(x)) = f^*(\overline{ch}_{i,2}(x)), \quad \text{quand } x \in K_{2i-2}(\tilde{F}; \mathbb{Z}/q).$$

Mais $\overline{ch}_{i,2}$ est surjectif pour $\tilde{F}$ d'après IV.1.5, et f^* est surjectif en cohomologie étale (de degré deux) car F est de dimension cohomologique deux (III.1.5, Lemme 6).

IV.1.8 Si $k=1$ et si A est l'anneau des entiers d'un corps local

Soit $\mathfrak{k}$ le corps résiduel (fini). On note que

$$H^1(\mathrm{Spec}\, A, \mu_q^{\otimes i}) \simeq H^1(\mathfrak{k}, \mu_q^{\otimes i}) \quad ([46], \text{IV.2.2}).$$

On a vu que, d'après Harris et Segal, le morphisme

$$K_{2i-1}(A; \mathbb{Z}/q) \to K_{2i-1}(\mathfrak{k}; \mathbb{Z}/q)$$

est scindé. La surjectivité de $\bar{c}_{i,1}$ pour A résultera du même fait pour $\mathfrak{k}$ (cf. ci-dessous Proposition 5, IV.2). Pour son corps des fractions elle s'obtient par la suite exacte de localisation (cf. IV.5).

Ceci termine la démonstration du théorème 4.

IV.2 Les corps finis

Proposition 5. *Soit k un corps fini, ℓ un nombre premier impair différent de la caractéristique de k, et $q=\ell^v$ une puissance de ℓ. Les morphismes $\bar{c}_{i,k}$ sont des isomorphismes si $i<\ell$ et si $k=0$ ou 1. De même le morphisme $c_{i,1}$: $K_{2i-1}(k)\otimes\mathbb{Z}_\ell \to H^1(k;\mathbb{Z}_\ell(i))$ est un isomorphisme si $i<\ell$.*

Preuve. Soit p^r l'ordre de k. On sait (d'après Quillen [40]) que $K_{2i}(k)$ est nul et que $K_{2i-1}(k)=\mathbb{Z}/(p^{ri}-1)$. Il en résulte que $K_{2i-k}(k;\mathbb{Z}/q)$ est de même ordre que $H^k(k,\mu_q^{\otimes i})$ si $k=0$ ou 1 (cf. III.1.4). Par conséquent il suffit de montrer que les morphismes $\bar{c}_{i,k}$ sont surjectifs.

Comme k est de ℓ-dimension cohomologique 1, le morphisme $\bar{c}_{i,1}$ est surjectif (par la même démonstration qu'en IV.1.7), si $i<\ell$. En passant à la limite projective, on voit que $c_{i,1}$ est aussi un isomorphisme si $i<\ell$.

Mais en comparant les classes $\bar{c}_{i,k}$ pour les valeurs q et $q'=q\ell^v$, avec v variable, (cf., ci-dessous, § IV.3.1), on obtient le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & K_{2i}(k;\mathbb{Z}/q) & \to & K_{2i-1}(k)\otimes\mathbb{Z}_\ell & \xrightarrow{\times q} & K_{2i-1}(k)\otimes\mathbb{Z}_\ell & \to & K_{2i-1}(k;\mathbb{Z}/q)\to 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \bar{c}_{i,0}} & & \downarrow{\scriptstyle c_{i,1}} & & \downarrow{\scriptstyle c_{i,1}} & & \downarrow{\scriptstyle c_{i,1}} \\
0 & \to & H^0(k,\mu_q^{\otimes i}) & \to & H^1(k,\mathbb{Z}_\ell(i)) & \xrightarrow{\times q} & H^1(k,\mathbb{Z}_\ell(i)) & \to & H^1(k,\mu_q^{\otimes i}) \to 0.
\end{array}$$

Il en résulte que $\bar{c}_{i,0}$ est aussi un isomorphisme si $i<\ell$. q.e.d.

N.B.: Si $i\geqq\ell$, le même raisonnement montre que le noyau et le conoyau de $\bar{c}_{i,k}$ et $c_{i,1}$ sont annulés par i!

IV.3 Sur les conjectures de Lichtenbaum et Quillen

IV.3.1 Lemme 11. *Soient v et v' deux entiers $\geqq 1$, avec $v<v'$ (*resp. *$v>v'$). Les monomorphismes (*resp. *épimorphismes) canoniques $\mu_{\ell^v}^{\otimes i}\to\mu_{\ell^{v'}}^{\otimes i}$ et $\mathbb{Z}/\ell^v\to\mathbb{Z}/\ell^{v'}$ induisent un diagrame commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
K_{2i-k}(A;\mathbb{Z}/\ell^v) & \xrightarrow{\bar{c}_{i,k}} & H^k(\operatorname{Spec}A,\mu_{\ell^v}^{\otimes i}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
K_{2i-k}(A;\mathbb{Z}/\ell^{v'}) & \xrightarrow{\bar{c}_{i,k}} & H^k(\operatorname{Spec}A,\mu_{\ell^{v'}}^{\otimes i}).
\end{array}$$

Preuve. Le morphisme $K_{2i-k}(A;\mathbb{Z}/\ell^v)\to K_{2i-k}(A;\mathbb{Z}/\ell^{v'})$ provient d'un morphisme de fibrations:

$$\begin{array}{ccccc}
S^{n-1} & \xrightarrow{\times\ell^v} & S^{n-1} & \longrightarrow & Y^n_{\ell^v} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
S^{n-1} & \xrightarrow{\times\ell^{v'}} & S^{n-1} & \longrightarrow & Y^n_{\ell^{v'}},
\end{array}$$

dont on déduit, pour tout espace X, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X;\mathbb{Z}/\ell^\nu) & \xrightarrow{h_{\ell^\nu}} & H_n(X;\mathbb{Z}/\ell^\nu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_n(X;\mathbb{Z}/\ell^\nu) & \xrightarrow{h_{\ell^{\nu'}}} & H_n(X;\mathbb{Z}/\ell^{\nu'}). \end{array}$$

On est donc amené à montrer que, pour tout groupe G, si

$$x \in H^{2i}(\operatorname{Spec} A, G; \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$$

(resp. $x' \in H^{2i}(\operatorname{Spec} A, G; \mu_{\ell^{\nu'}}^{\otimes i})$) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_{2i-k}(G;\mathbb{Z}/\ell^\nu) & \xrightarrow{\Phi(x)} & H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{2i-k}(G;\mathbb{Z}/\ell^{\nu'}) & \xrightarrow{\Phi(x')} & H^k(\operatorname{Spec} A, \mu_{\ell^{\nu'}}^{\otimes i}) \end{array}$$

commute dès que x est l'image de x' par le morphisme associé à la projection $\mu_{\ell^{\nu'}}^{\otimes i} \to \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$ (resp. x' est l'image de x par la projection $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i} \to \mu_{\ell^{\nu'}}^{\otimes i}$). On sait en effet que les classes de Chern $c_i(\rho)$ forment un système projectif (cf. II.1).

D'après le Lemme 1, $\Phi(x)$ s'interprète comme un morphisme (de degré $-2i$) dans la catégorie dérivée $D(\mathbb{Z}/\ell^\nu)$

$$C.(G) \otimes \mathbb{Z}/\ell^\nu \to \Gamma(\mathscr{L}_{\ell^\nu}^{\cdot}),$$

où $C.(G)$ est la résolution standard de BG sur $\mathbb{Z}$ et $\Gamma(\mathscr{L}_{\ell^\nu}^{\cdot})$ le complexe des sections d'une résolution de $\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$. Choisissons $\nu' > \nu$. Le morphisme composé

$$\mu_{\ell^{\nu'}}^{\otimes i} \to \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i} \to \mu_{\ell^{\nu'}}^{\otimes i}$$

est la multiplication par $\ell^{\nu'-\nu}$, d'où un diagramme commutatif (dans la catégorie $D(\mathbb{Z})$)

$$\begin{array}{ccc} C.(G) & \xrightarrow{\Phi(x')} & \Gamma(\mathscr{L}_{\ell^{\nu'}}^{\cdot}) \\ \| & & \downarrow \\ C.(G) & \xrightarrow{\Phi(x)} & \Gamma(\mathscr{L}_{\ell^\nu}^{\cdot}) \\ \| & & \downarrow \\ C.(G) & \xrightarrow{\ell^{\nu'-\nu}\Phi(x')} & \Gamma(\mathscr{L}_{\ell^{\nu'}}^{\cdot}). \end{array}$$

Cela s'écrit aussi

$$\begin{array}{ccc} C.(G)\otimes\mathbb{Z}/\ell^{\nu'} & \xrightarrow{\Phi(x')} & \Gamma(\mathscr{L}^{\cdot}_{\ell^{\nu'}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C.(G)\otimes\mathbb{Z}/\ell^{\nu} & \xrightarrow{\Phi(x)} & \Gamma(\mathscr{L}^{\cdot}_{\ell^{\nu}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C.(G)\otimes\mathbb{Z}/\ell^{\nu'} & \xrightarrow{\Phi(x')} & \Gamma(\mathscr{L}^{\cdot}_{\ell^{\nu'}}), \end{array}$$

et il suffit de traduire ce diagramme en homologie. q.e.d.

IV.3.2.

Théorème 5. *Soient ℓ un nombre premier impair, F un corps de nombres, A le localisé en-dehors de ℓ de l'anneau des entiers de F, i un entier supérieur à 2. Alors (avec les notations de I) la multiplication par $i!$ annule le groupe $H^2(\operatorname{Spec} A, j_* W_\ell(i))$.*

Preuve. On a montré au paragraphe III.1.3, Lemme 4, que, sur $\operatorname{Spec} A$, $j_*\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i} \simeq \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$. Comme $W_\ell(i) = \varinjlim_\nu \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}$, on en déduit que $j_* W_\ell(i) \simeq W_\ell(i)$.

Les morphismes de fibrations

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\times \ell^\nu} & S^{n-1} & \longrightarrow & Y^n_{\ell^\nu} \\ \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \times \ell} & & \downarrow \\ S^{n-1} & \xrightarrow{\times \ell^{\nu+1}} & S^{n-1} & \longrightarrow & Y^n_{\ell^{\nu+1}} \end{array}$$

conduisent à des diagrammes commutatifs (pour tout anneau A)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to K_n(A)\otimes\mathbb{Z}/\ell^\nu & \to K_n(A;\mathbb{Z}/\ell^\nu) & \to K_{n-1}(A)_{(\ell^\nu)} & \to 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 \to K_n(A)\otimes\mathbb{Z}/\ell^{\nu+1} \to K_n(A;\mathbb{Z}/\ell^{\nu+1}) & \to K_{n-1}(A)_{(\ell^{\nu+1})} & \to 0. \end{array}$$

Si on pose $K_n(A;\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) = \varinjlim_\nu K_n(A;\mathbb{Z}/\ell^\nu)$, on a donc une suite exacte canonique

$$0 \to K_n(A)\otimes\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to K_n(A;\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \to K_{n-1}(A)_{\ell\text{-tors}} \to 0,$$

où $K_*(A)_{\ell\text{-tors}}$ désigne les éléments d'ordre une puissance de ℓ.

– Si A est un anneau de Dedekind dont le corps des fractions F est un corps global, on déduit de III.3, Corollaire, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} K_{2i-1}(X;\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) & \longrightarrow & \bigoplus_v K_{2i-2}(k_v;\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) & & \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{c}_{i,1}} & & \downarrow{\scriptstyle (i-1)\bar{c}_{i-1,0}} & & \\ H^1(F, W_\ell(i)) & \longrightarrow & \bigoplus_v H^0(k_v, W_\ell(i-1)) & \longrightarrow & H^2(\operatorname{Spec} A, W_\ell(i)), \end{array}$$

où $\bar{c}_{i,k}$ est la limite inductive des morphismes $\bar{c}_{i,k}$ (définie grâce au Lemme 11 ci-dessus).

– Si F est un corps de nombres, S. Lichtenbaum a montré que $H^2(F, W_\ell(i))=0$ si $i\geqq 2$ ([32], Lemme 9.5).

– Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_{2i-1}(F;\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \bigoplus_v K_{2i-2}(k_v;\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{2i-2}(F)_{\ell\text{-tors}} & \xrightarrow{\partial} & \bigoplus_v K_{2i-3}(k_v)_{\ell\text{-tors}} \end{array}$$

montre que $\bar{\partial}$ est surjectif. En effet, on sait que

$$K_{2i-2}(k_v, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \xrightarrow{\sim} K_{2i-3}(k_v)_{\ell\text{-tors}},$$

et que $K_{2i-2}(F)$ est un groupe de torsion (puisque $K_{2i-2}(A)$ est fini, d'après, A. Borel [10]). On peut donc appliquer le théorème 3.

– Pour les corps k_v, l'image de $\bar{c}_{i,0}$ contient celle de la multiplication par $i!$ (cf. IV.2). Donc le conoyau du morphisme

$$H^1(F, W_\ell(i)) \to \bigoplus_v H^0(k_v, W_\ell(i-1))$$

est annulé par $i!$ q.e.d.

(Cette preuve est essentiellement celle utilisée par S. Lichtenbaum quand $i=2$ [33].)

Corollaire. *La conjecture* (L1) *est vraie* (*cf. I*).

Preuve.[2] Soient F un corps de nombres totalement réel et Γ le groupe de Galois de sa ℓ-extension cyclotomique maximale. Si $\Lambda=\mathbb{Z}_\ell[[T]]$ désigne l'anneau des séries formelles sur $\mathbb{Z}_\ell$, on sait que tout $\mathbb{Z}_\ell[\Gamma]$-module (topologique) s'identifie à un Λ-module. D'après [15], lemmes 6.3 et 6.4, le groupe $H^2(\operatorname{Spec} A, W_\ell(i))$ est le dual de Pontryagin du groupe des invariants $(Y[i-1])^\Gamma$ d'un certain Λ-module $Y[i-1]$. On dispose de la suite exacte

$$0 \to (Y[i-1])^\Gamma \to (Z[i-1])^\Gamma \to (D[i-1])^\Gamma,$$

où le terme de droite est un groupe fini, et où $Z[i-1]$ est la somme de Λ-modules du type $\Lambda/(h(T))$, $h(T)$ désignant un élément non nul de Λ. Si le groupe $(Z[i-1])^\Gamma$ est non nul, on voit aisément qu'il contient un sous-groupe sans torsion. Or, d'après le théorème précédent, il est annulé par une constante et est donc nul. D'après loc. cit., cela implique la conjecture (L1). q.e.d.

---

[2] Plus simplement (P. Schneider): $H^2(\operatorname{Spec} A, W_\ell(i))$ est divisible, donc nul par le théorème 5

IV.3.3

Théorème 6. *Soient A un anneau de Dedekind dont le corps des fractions F est un corps global (de caractéristique différente du nombre premier impair ℓ), A' son localisé en-dehors de ℓ, et i un entier avec $2 \leqq i < \ell$.*

i) *Les morphismes*

$$c_{i,2}\colon K_{2i-2}(F) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^2(F, \mathbb{Z}_\ell(i))$$

sont surjectifs.

ii) *Si F est un corps de nombres, le morphisme $\tilde{c}_{i,0}$ induit une surjection*

$$K_{2i-1}(A)_{\ell\text{-tors}} \to H^0(\operatorname{Spec} A', W_\ell(i)).$$

iii) *Si F est un corps de nombres totalement réel et $i \equiv 0 \pmod 2$, ou si sa caractéristique est positive, les morphismes*

$$c_{i,k}\colon K_{2i-k}(A) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^k(\operatorname{Spec} A', \mathbb{Z}_\ell(i))$$

sont surjectifs ($k = 1$ ou 2).

iv) *Si A est l'anneau des entiers d'un corps de nombres totalement réel et si i est pair, le dénominateur de $\zeta_F(1-i)$ (mis sous forme réduite) divise l'ordre de $K_{2i-1}(A)$.*

Si de plus la conjecture (L 2) *du paragraphe* I.1 *est vérifiée, le numérateur de $\zeta_F(1-i)$ divise de $K_{2i-2}(A)$ l'ordre.*

Démonstration. i) D'après le théorème 4 de IV.1, le morphisme

$$\bar{c}_{i,2}\colon K_{2i-2}(F; \mathbb{Z}/\ell^\nu) \to H^2(F, \mu_{\ell^\nu}^{\otimes i})$$

est surjectif pour toute valeur de ν. De plus son noyau est fini, à cause du diagramme commutatif (III.3, Corollaire)

$$\begin{array}{ccccc} K_{2i-2}(A; \mathbb{Z}/q) & \to K_{2i-2}(F; \mathbb{Z}/q) & \to \bigoplus_v K_{2i-3}(\kappa_v; \mathbb{Z}/q) \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{c}_{i,2}} & \downarrow{\scriptstyle \bar{c}_{i,2}} & \downarrow{\scriptstyle (1-i)\bar{c}_{i-1,1}} \\ H^2(\operatorname{Spec} A', \mu_q^{\otimes i}) \to H^2(F, \mu_q^{\otimes i}) & \to \bigoplus_v H^1(\kappa_v, \mu_q^{\otimes (i-1)}) \end{array}$$

et de la proposition 5 du paragraphe précédent. En passent à la limite projective (cf. aussi III.3, théorème 3) on obtient donc la surjectivité de $c_{i,2}$.

ii) D'après le théorème 4, on obtient, par limite inductive, une surjection

$$\tilde{c}_{i,0}\colon K_{2i}(A; \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \to H^0(\operatorname{Spec} A, W_\ell(i)).$$

Mais si $F \subset \mathbb{C}$ est un corps de nombres plongé dans le corps des complexes, le théorème de comparaison ([22], paragraphe 3) montre que le morphisme composé

$$K_{2i}(A; \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \to H^0(\operatorname{Spec} A, W_\ell(i)) \to H^0(\mathbb{C}, W_\ell(i)) = \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$$

se factorise par la K-théorie topologique $K_{2i}^{\mathrm{top}}(\mathbb{C};\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)=\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ du corps des nombres complexes. Mais $H^0(\mathrm{Spec}\,A, W_\ell(i))\to H^0(\mathbb{C}, W_\ell(i))$ est une application injective et l'application $K_{2i}(A)\otimes\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\to K_{2i}^{\mathrm{top}}(\mathbb{C})\otimes\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ est nulle (ceci se voit en appliquant la théorie de Chern-Weil pour montrer que le morphisme $K_{2i}(A)\otimes\mathbb{Q}\to K_{2i}^{\mathrm{top}}(\mathbb{C})\otimes\mathbb{Q}$ est nulle: les classes de Chern d'un fibré plat à groupe structural $GL_m(A)$ sont nulles rationnellement [3]), donc $\bar{c}_{i,0}$ se factorise par $K_{2i-1}(A)_{\ell\text{-tors}}$.

iii) Aux suites exactes de «faisceaux»

$$0\to\mu_{\ell^\nu}^{\otimes i}\to W_\ell(i)\xrightarrow{\times\ell^\nu} W_\ell(i)\to 0$$

sont associées des longues suites exactes de Bockstein, pour les différentes valeurs de ν. Elles conduisent à des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to H^k(\mathrm{Spec}\,A, W_\ell(i))\otimes\mathbb{Z}/\ell^{\nu+1} & \to & H^{k+1}(\mathrm{Spec}\,A, \mu_{\ell^{\nu+1}}^{\otimes i}) & \to & H^{k+1}(\mathrm{Spec}\,A, W_\ell(i))_{(\ell^{\nu+1})}\to 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0\to H^k(\mathrm{Spec}\,A, W_\ell(i))\otimes\mathbb{Z}/\ell^{\nu} & \to & H^{k+1}(\mathrm{Spec}\,A, \mu_{\ell^{\nu}}^{\otimes i}) & \to & H^{k+1}(\mathrm{Spec}\,A, W_\ell(i))_{(\ell^{\nu})}\to 0.
\end{array}$$

Si l'on sait que $H^k(\mathrm{Spec}\,A, W_\ell(i))$ est de torsion et que ni ce groupe ni $H^{k+1}(\mathrm{Spec}\,A, W_\ell(i))_{\ell\text{-tors}}$ ne contiennent d'élément divisible, on obtient, par passage à la limite projective,

$$H^k(\mathrm{Spec}\,A, W_\ell(i))\xrightarrow{\sim} H^{k+1}(\mathrm{Spec}\,A, \mathbb{Z}_\ell(i)).$$

Ce sera le cas pour A sous les hypothèses de iii). En effet c'est un récultat classique pour un anneau se fonctions sur un courbe (propre et lisse) définie sur un corps fini k, et pour un anneau d'entiers dans un corps de nombres totalement réel cela résulte du Théorème 5, puisque Lichtenbaum déduit de la nullité de $H^2(\mathrm{Spec}\,A, W_\ell(i))$ la finitude de $H^1(\mathrm{Spec}\,A, W_\ell(i))$ (cf. I.2 et [15]).

Pour $k=1$, la partie iii) résulte alors de ii) et du diagramme:

$$\begin{array}{ccccc}
K_{2i}(A;\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) & \longrightarrow & K_{2i-1}(A)_{\ell\text{-tors}} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \bar{c}_{i,0}} & & \downarrow{\scriptstyle c_{i,1}} & & \\
0\longrightarrow H^0(\mathrm{Spec}\,A, W_\ell(i)) & \longrightarrow & H^1(\mathrm{Spec}\,A, \mathbb{Z}_\ell(i)) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Pour $k=2$, on pose $\tilde{A}=A(\sqrt[q]{1})$, et l'on note que $\bar{c}_{i,2}$ commute au transfert $H^2(\mathrm{Spec}\,\tilde{A}, \mu_q^{\otimes i})\to H^2(\mathrm{Spec}\,A, \mu_q^{\otimes i})$. En effet, c'est connu pour F et $F(\sqrt[q]{1})$, et le morphisme

---

[3] Je dois cet argument à M. Karoubi. On voit ainsi que les morphismes $\bar{c}_{i,0}$ détectent les mêmes classes que Browder [11] et Karoubi [27] du moins si $i<\ell$

$H^1(\mathrm{Spec}\, A, W_\ell(i)) \to H^1(F, W_\ell(i))$

(resp. $H^1(Spec\ \tilde{A}, W_\ell(i)) \to H^2(\mathrm{Spec}\, \tilde{A}, \mu_q^{\otimes i})$)

est injectif (resp. surjectif). On conclut, grâce au Théorème 4 at à la surjectivité de ce transfert, que $\bar{c}_{i,2}$ est surjectif. Par limite projective, on voit que $c_{i,2}$ est surjectif.

iv) D'après un théorème de Daligne et Ribet [17], le dénominateur de $\zeta_F(1-i)$ (mis sous forme réduite) divise toujours l'ordre de $H^0(\mathrm{Spec}\, A, W_\ell(i))$, donc celui de $K_{2i-1}(A)$ (d'après ii)) (ce résultat a été montré par Harris et Segal [24] sans supposer que i est inférieur à ℓ).

Si la conjecture (L2) est vérifiée, le numérateur de $\zeta_F(1-i)$ divise l'ordre de $H^1(\mathrm{Spec}\, A, W_\ell(i))$, donc celui de $K_{2i-2}(A)$ (d'après iii)). q.e.d.

Exemples. Soient $F=\mathbb{Q}$, b_i le i-ème nombre de Bernoulli, et ℓ un nombre premier proprement irrégulier (par exemple inférieur à 125000) divisant le numérateur de $|b_i/2i| = |\zeta(1-i)|$, avec $i \equiv 0 \pmod 2$, et $i < \ell$. L'ordre de $K_{2i-2}(\mathbb{Z})$ est divisible par $|b_i/2i|_\ell$. Ainsi, quand $i=12$, le numérateur de $b_i/2i$ est 691, donc $K_{22}(\mathbb{Z})$ contient un élément d'ordre 691. De même $K_{62}(\mathbb{Z})$ contient un élément d'ordre 37.

Remarques. Les congruences de Kummer (cf., par example, [37], appendice) montrent que si un nombre premier ℓ divise le numérateur d'un nombre $b_i/2i$, il existe un entier $i' < \ell$ tel que ℓ divise aussi le numérateur de $b_{i'}/2i'$.

Par opposition au cas de $\bar{c}_{i,0}$, les éléments rendant surjectifs les morphismes $\bar{c}_{i,2}$ ont une image nulle dans $K_*^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}; \mathbb{Z}/q)$ (cf. $H^k(\mathbb{C}, \mu_q^{\otimes i}) = 0$ si $k>0$). Ils ne sont pas non plus dans l'image de l'homotopie stable π_n^s des sphères (quand $A=\mathbb{Z}$). En effet, on sait que si π_n^s contient un élément d'ordre ℓ, on a $n \geqq 2\ell - 3$ [49]. Je ne sais pas si leur image dans la K-théorie (algébrique) à coefficients du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels est non nulle, ainsi que le dit une conjecture de Segal.

On notera aussi que l'involution de GL_n qui envoir une matrice sur l'inverse de sa transposée induit en K-théorie l'opération d'Adams ψ_{-1} [29]. Cet endomorphisme ψ_{-1} est donc trivial sur l'image de π_n^s dans $K_n(\mathbb{Z})$. Par ailleurs, la conjecture de Quillen implique que ψ_{-1} est égal à 1 (resp. -1) sur $K_n(\mathbb{Z})$ selon que n est congru à 2 ou 3 (resp. 0 ou 1) modulo 4 (cf. IV.6 ci-dessous, et [18]).

IV.4 Anneaux contenant toutes les racines de l'unité

Soient $F \subset \mathbb{C}$ un corps de nombres inclus dans le corps des complexes, ℓ un nombre premier impair, F_∞ la ℓ-extension cyclotomique maximale de F (obtenue en adjoignant à F toutes les racines ℓ^ν-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, $\nu \geqq 1$), A un

anneau de Dedekind de corps des fractions F (et contenant $1/\ell$), et A_∞ sa clôture intégrale dans F_∞. On note comme précédemment $K_n(A;\mathbb{Z}_\ell)$ la limite projective des groupes $K_n(A;\mathbb{Z}/\ell^\nu)$, $\nu\geqq 1$.

Théorème 7. *Si $k=0$ ou 1, et si $i\geqq 1$ est un entier quelconque, on peut définir sur un certain sous-groupe $K'_{2i-k}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ de $K_{2i-k}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ un morphisme surjectif*

$$ch_{i,k}\colon K'_{2i-k}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)\to H^k(\operatorname{Spec}A_\infty,\mathbb{Z}_\ell(i)).$$

Preuve. Les groupes $H^k(\operatorname{Spec}A_\infty,\mathbb{Z}_\ell(i))$ sont des $\mathbb{Z}_\ell$-modules sans torsion pour $k=0$ ou 1. En effet, pour $k=0$, il est clair que $H^0(\operatorname{Spec}A_\infty,\mathbb{Z}_\ell(i))=\mathbb{Z}_\ell$. Pour $k=1$, ceci est montré dans la proposition 5.5 de [3].

Des suites exactes

$$0\to K_2(A_\infty)/\ell^\nu K_2(A_\infty)\to K_2(A_\infty;\mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z})\to K_1(A_\infty)_{(\ell^\nu)}\to 0$$

résulte qu'on peut trouver un élément $\alpha=(\alpha_\nu)\in K_2(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ tel que l'image de α_ν dans $(A_\infty)^*_{(\ell^\nu)}$ soit une racine primitive ℓ^ν-ième de l'unité, pour tout $\nu\geqq 1$. Il résulte de IV.1.3 et IV.1.5 que $c_{i,0}(\alpha^i)$ est le produit d'un générateur de $H^0(\operatorname{Spec}A_\infty,\mathbb{Z}_\ell(i))$ par $(i-1)!$. Comme le groupe $H^0(\operatorname{Spec}A_\infty;\mathbb{Z}_\ell(i))$ est sans torsion, on peut poser

$$ch_{i,0}=((-1)^{i-1}/(i-1)!)c_{i,0}$$

sur le sous-groupe $K'_{2i}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ de $K_{2i}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ engendré par $((\alpha_\nu^i))$.

Par ailleurs, le morphisme

$$ch_{1,1}=c_{1,1}\colon K_1(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)\to H^1(\operatorname{Spec}A_\infty,\mathbb{Z}_\ell(1))$$

est surjectif (IV.1.3) et l'on a la formule de multiplication

$$c_{i,1}(a\cdot b)=(-1)^{i-1}(i-1)!\,ch_{i-1,0}(a)\cup ch_{1,1}(b)$$

(ceci se vérifie, comme en IV.1.5, à l'aide du corps F_∞). On peut donc définir

$$ch_{i,1}=(-1)^{i-1}/(i-1)!\,c_{i,1}$$

sur la partie $K'_{2i-1}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ de $K_{2i-1}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ engendrée par le produit de $K_1(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ et $K'_{2i-2}(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$. Un tel morphisme est surjectif à cause de III.1.2. q.e.d.

Remarques. On voit de même que si un anneau A contient toutes les racines ℓ^ν-ièmes de l'unité, $\nu\geqq 1$, les groupes $K_{2i}(A;\mathbb{Z}_\ell)$ contiennent un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}_\ell$.

Pour un anneau A_∞ du type considéré dans l'énoncé du théorème précédent, la conjecture de Quillen (cf. I) impliquerait que $K.(A_\infty;\mathbb{Z}_\ell)$ est périodique de période 2.

Supposons que F est un corps totalement réel, et notons $\mu(F)$ son μ-invariant au sens d'Iwasawa (cf. [3] par exemple). La conjecture selon laquelle $\mu(F)=0$

équivaut au fait que $H^2(\operatorname{Spec} A_\infty, \mu_{\ell^v}^{\otimes i})=0$ pour *un* couple d'entiers i et $v \geqq 1$, et aussi au fait que $K_2(A_\infty)$ soit ℓ-divisible (cf. [3] Prop. 5.5, et Lemme 10 ci-dessus). Rappelons que c'est un fait connu si F est un corps abélien [19].

IV.5 Corps locaux de dimension supérieure

On considère dans ce paragraphe une suite de corps $F_0, F_1, \ldots, F_d = F$ vérifiant les propriétés suivantes:

i) F_0 est un corps fini,

ii) F_m, si $m \geqq 1$, est un corps complet pour une valuation discrète, et F_{m-1} est son corps résiduel.

Cette situation a été étudiée par Kato [28] et Parshin [38], qui ont relié la K-théorie de Milnor de F au groupe de Galois de son extension abélienne maximale. En K-théorie de Quillen on peut déduire de leurs résultats et méthodes les faits suivants:

Théorème 8. *Soient ℓ un nombre premier impair différent de la caractéristique de F, $q=\ell^v$ une puissance de ℓ, et i un entier, $i<\ell$. Les morphismes*

$$\bar{c}_{i,k}\colon\ K_{2i-k}(F;\mathbb{Z}/q) \to H^k(F, \mu_q^{\otimes i})$$

sont tous surjectifs quand les hypothèses suivantes sont vérifiées:
- *On a $i \geqq k$;*
- *Si $m \geqq 2$, les corps F_m et F_{m+1} ont même caractéristique;*
- *Si F_1 est de caractéristique positive et F_2 de caractéristique nulle ou $\ell = \operatorname{car} F_0$, le groupe F^* contient un élément d'ordre q.*

Démonstration. Soit A_m l'anneau des entiers de F_m. Si $q \neq 0$ dans F_{m-1}, la suite exacte de localisation de A_m en cohomologie étale s'écrit

$$0 \to H^k(F_{m-1}, \mu_q^{\otimes i}) \to H^k(F_m, \mu_q^{\otimes i}) \to H^{k-1}(F_{m-1}, \mu_q^{\otimes i-1}) \to 0, \qquad k \geqq 1.$$

Ces suites exactes sont scindées par des morphismes s_π dépendant du choix d'une uniformisante π de F_m (cf. Proposition 4, III.3). Si on dispose pour tout entier $n \geqq 1$ d'une section de

$$K_n(A_m;\mathbb{Z}/q) \to K_n(F_m;\mathbb{Z}/q),$$

on obtient (cf. ibid.) un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & K_{2i-k}(A_m;\mathbb{Z}/q) & \to & K_{2i-k}(F_m;\mathbb{Z}/q) & \to & K_{2i-k-1}(F_{m-1};\mathbb{Z}/q) & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \bar{c}_{i,k}} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{c}_{i,k}} & & \downarrow{\scriptstyle (1-i)\,\bar{c}_{i-1,k-1}} & & \\
0 & \to & H^k(F_{m-1}, \mu_q^{\otimes i}) & \to & H^k(F_m, \mu_q^{\otimes i}) & \to & H^{k-1}(F_{m-1}, \mu_q^{\otimes i-1}) & \to & 0.
\end{array}$$

Ce sera le cas si $m=1$ (cf. IV.1.8), ou si F_m et F_{m-1} ont même caractéristique. Compte-tenu des hypothèses et du fait que le théorème est connu pour un corps

fini (IV.2), on est ramené à le montrer quand $d=2$, F étant de caractéristique nulle, et F_1 de caractéristique positive.

Dans ce cas F^* contient par hypothèse un élément d'ordre q. La méthode de IV.1.5 permet alors de se ramener au cas $i=k$. Notons $K_i^M(F)$ le i-ème groupe de K-théorie de Milnor du corps F. Le morphisme composé

$$K_i^M(F)/qK_i^M(F) \to K_i(F)/qK_i(F) \xrightarrow{ch_{i,1}} H^i(F, \mu_q^{\otimes i})$$

coïncide avec le symbole galoisien, du fait de la formule de multiplication (théorème 1). Or Kato montre précisément que ce symbole galoisien est un isomorphisme. q.e.d.

Remarques. – On déduit ainsi des résultats de Kato et Parshin que la K-théorie de Milnor du corps F (divisée par q) s'envoie injectivement dans la K-théorie de Quillen (à coefficients $\mathbb{Z}/q$), en degré $i \leqq \ell$.

Si $i<k$ la preuve ci-dessus montre aussi que $\bar{c}_{i,k}=0$. Plus généralement, si A est un anneau local ou une algèbre de type fini sur un corps, et si d est sa dimension de Krull, le morphisme $\bar{c}_{i,k}$ est nul quand $k>i+d$. Ceci résulte des théorèmes de stabilité de l'homologie de GL_n dus à Quillen [43] et du fait que, avec les notations de II.1.2, $c_{i,k}(id_m)=0$ si $i>m$.

IV.6 Sur la γ-filtration

L'exemple du paragraphe IV.5 ci-dessus montre que, si A est anneau (contenant $1/\ell$) de dimension cohomologique plus grande que celle des anneaux considérés aux paragraphes précédents, il se peut que d'un même groupe $K_n(A;\mathbb{Z}_\ell)$ partent plusieurs morphismes $\bar{c}_{i,k}$ non nuls vers la cohomologie ℓ-adique de Spec$A$. La conjecture de Quillen (cf. I) se généralise donc difficilement. La γ-filtration des groupes $K_n(A;\mathbb{Z}_\ell)$ permet peut-être de vaincre cette difficulté.

Rappelons (cf. [29], et aussi [25]) que $F^iK_n(A;\mathbb{Z}/q)$ est le sous-groupe de $K_n(A;\mathbb{Z}/q)$ engendré par les produits du type $\gamma_{r_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot\gamma_{r_\alpha}(x_\alpha)$, avec $r_1+\ldots+r_\alpha \geqq i$, où les éléments $x_1,\ldots,x_\alpha$ sont dans des groupes de K-théorie de degré positif, ou bien dans la K-théorie réduite $\tilde{K}_0(A;\mathbb{Z}/q)$. Les opérations γ_r sont définies dans les textes cités. On note $Gr^iK_n(A;\mathbb{Z}/q)$ le gradué associé à cette filtration, et l'on définit $F^iK_n(A;\mathbb{Z}_\ell)$ comme la limite projective des groupes $F^iK_n(A;\mathbb{Z}/\ell^\nu)$, $\nu \geqq 1$.

Cette filtration est analogue à une filtration par les poids au sens de Deligne (l'opération d'Adams ψ_r est la multiplication par r^i dans $Gr^iK_n(A;\mathbb{Z}/q)$, et si A est parfait de caractéristique p l'opération ψ_p est induite par l'endomorphisme de Frobenius). Sa longueur est bornée grâce aux résultats de stabilité homologique (cf. IV.5, Remarque, et [14] ou [35]).

On peut montrer que $\bar{c}_{i,k}$ est nulle sur $F^{i+1}K_{2i-k}$, que $\bar{c}_{i,k}(\psi_r(x))=r^i\bar{c}_{i,k}(x)$, et que le morphisme induit par $\bar{c}_{i,k}$ sur Gr^iK_{2i-k} est surjectif dans toutes les situations où nous avons obtenu un résultat de surjectivité (théorèmes 4, 6, 7 et 8). Il paraît dès lors raisonnable de penser que c'est le groupe $Gr^iK_{2i-k}(X;\mathbb{Z}_\ell)$ qui doit en général être comparé à $H^k(X;\mathbb{Z}_\ell(i))$ (quand X est, par exemple, une variété quasi-projective sur un corps qui est algébriquement clos ou de type fini sur un corps premier).

Peut-être la γ-filtration permet-elle aussi d'étendre les liens supposés entre K-théorie et fonctions zêta. Pour la partie libre on est conduit à l'énoncé suivant:

Conjecture. *Soient X une variété projective et lisse de dimension d sur un corps global, ζ_X sa fonction zêta (on la suppose prolongée analytiquement, cf.* [50]), *et i un entier supérieur à $(d+1)/2$. Les groupes $Gr^i K_n(X) \otimes \mathbb{Q}$ sont alors de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ et l'ordre du zéro (*resp. *pôle) de ζ_X au point $d+1-i$ est égal en valeur absolue à la somme (finie) $\sum_n (-1)^{n+1} \dim_{\mathbb{Q}}(Gr^i K_n(X) \otimes \mathbb{Q})$ quand celle-a est positive (*resp. *négative).*

Un tel énoncé est à rapprocher des travaux de Borel [10] et Bloch [6], ainsi que des conjectures sur l'équation fonctionnelle de $\zeta_X(s)$ [50] et le lien des pôles de cette fonction avec des groupes de cycles [56].

Bibliographie

1. Artin, M.: Grothendieck Topologies. Springer 1962
2. Artin, M., Verdier, J.L.: Seminar on Etale Cohomology of number fields. AMS Summer Institute on Algebraic geometry 1964
3. Bayer, P., Neukirch, J.: On values of zeta functions and ℓ-adic Euler characteristics. Inventiones math. **50**, 35–64 (1978)
4. Bass, H.: Algebraic K-theory. New York: Benjamin 1968
5. Bass, H., Tate, J.: The Milnor ring of a global field. "Algebraic K-theory II". Lecture Notes in Mathematics no. 342. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
6. Bloch, S.: Higher regulators, Algebraic K-theory, and zeta functions of elliptic curves. Preprint
7. Bloch, S.: Algebraic K-theory and crystalline cohomology, I.H.E.S., n° 47, 187–268 (1978)
8. Bloch, S.: Some formulas pertaining to the K-theory of commutative groupschemes. Preprint, 1977
9. Bloch, S., Ogus, A.: Gersten's Conjecture and the homology of schemes. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., **7**, fasc. 2 (1974)
10. Borel, A.: Stable real cohomology of arithmetic groups. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^{è} série, **7**, 235–272 (1974)
11. Browder, W.: Algebraic K-theory with coefficients Z/p, dans "Geometry applications of Homotopy Theory I". Lecture notes in Mathematics no. 657. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978
12. Cartan, E., Eilenberg, S.: Homological Algebra, Princeton University Press, 1956
13. Cassels, J.W., Fröhlich, A.: Algebraic Number Theory. New York-London: Academic Press, 1967
14. Charney, R.: Homology Stability for GL_n of a Dedekind domain, à paraître
15. Coates, J., Lichtenbaum, S.: On ℓ-adic zêta functions. Annals of Maths., **98**, 498–550 (1973)
16. Coates, J.: p-adic L-functions and Iwasawa's theory. Proc. Symp., Univ. Durham, Durham, 1975, pp. 269–253. London-New York-San Francisco: Academic Press 1977
17. Deligne, P., Ribet, K.: Values of abelian L-functions at negative integers, à paraître aux Inventiones math.
18. Farrell, F.T., Hsiang, W.C.: On the rational homotopy groups of the diffeomorphisms groups of discs, spheres and aspherical manifolds.
19. Ferrero, B., Washington, L.C.: The Iwasawa invariant μ_p for abelian number fields. A paraître aux Annals of Maths.
20. Gillet, H.: The applications of Algebraic K-theory to intersection theory. Thèse, preprint
21. Grayson, D.: Higher Algebraic K-theory II. Lecture notes in Mathematics no 551. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
22. Grothendieck, A.: Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets. Dans «10 exposés sur la cohomologie des schémas». Masson: North-Holland 1968

23. Grothendieck, A.: Eléments de Géométrie Algébrique, Chapitre 0, §13, Publications I.H.E.S. n° 11, 1961
24. Harris, B., Segal, G.: K_i of rings of algebraic integers. Ann. of Maths. **101**, 20–33 (1975)
25. Hiller, H.: λ-rings and algebraic K-theory. Preprint
26. Illusie, L.: Lettre à Gersten, 24/2/1974
27. Karoubi, M.: A paraître
28. Kato, K.: A generalization of local class field theory by using K-groups, I et II. Proc. Japan Acad. **53**, 140–143 (1977) **54**, 250–255 (1979)
29. Kratzer, C.: Opérations d'Adams en K-théorie algébrique, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris, **287**, Série A, 297 (1978) et article en préparation
30. Lee, R., Szczarba, R.H.: The group $K_3(\mathbb{Z})$ is cyclic of order 48, Ann. of Math., **104**, 31–60 (1976)
31. Lee, R., Szczarba, R.H.: On the torsion in $K_4(\mathbb{Z})$ and $K_5(\mathbb{Z})$. Duke Journal, 1978
32. Lichtenbaum, S.: On the values of zéta and L-functions, I. Ann. of Maths., **96**, 338–360 (1972)
33. Lichtenbaum, S.: Values of zeta functions, étale cohomology, and algebraic K-theory. Dans "Alg. K-theory II". Lecture notes in Mathematics no 342. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
34. Loday, J.L.: K-théorie et représentations de groupes. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. $4^{\text{ème}}$ série, **9**, 309–377 (1976)
35. Maazen, H.: Stabilité de l'homologie de GL_n. C.R. Acad. Sc. Paris, **288**, 707–708 (1979)
36. Milnor, J.: Introduction to Algebraic K-theory. Annals of Maths. Studies n° 72. Princeton
37. Milnor, J., Stasheff, J.D.: Characteristic classes; Appendice, Annals of Maths. Studies, n° 67, 1974
38. Parshin, A.I.: Corps de classes et K-théorie algébrique, Ouspekhi Math. N.T. 30, **1**, 253–254 (1975) (en russe), et «Class Field Theory for Arithmetical schemes», preprint
39. Quillen, D.: Algebraic K-theory I. Lecture Notes n° 341
40. Quillen, D.: On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field. Annals of Maths., **96**, 552–586 (1972)
41. Quillen, D.: Lettre à Milnor sur $\mathrm{Im}(\pi_i O \xrightarrow{J} \pi_i^s \to K_i\mathbb{Z})$. Lecture Notes in Mathematics no 551. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976
42. Quillen, D.: Finite generation of the groups K_i of rings of algebraic integers. Lecture Notes in Mathematics no 341, pp. 179–210. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
43. Quillen, D.: Cours à M.I.T., 1974–75
44. Raynaud, M.: Caractéristique d'Euler Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, dans «dix exposés sur la cohomologie des schémas», North Holland: Masson 1968
45. Séminaire de Géométrie Algébrique IV: Exposé VIII, A. Grothendieck, Lecture notes in Mathematics no 270. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
46. S.G.A. IV 1/2: Cohomologie étale: les points de départ, par P. Deligne, rédigé par J.F. Boutot. Lecture notes in Mathematics no 569. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
47. Serre, J-P.: Corps locaux. Hermann, Act. Scient. et Ind., 1968
48. Serre, J-P.: Cohomologie galoisienne. Lecture notes in Mathematics no. 5. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1964
49. Serre, J-P.: Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. Ann. of Maths. (2) **54**, 425–505 (1951)
50. Serre, J-P.: Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures). Séminaire Delange-Poitou-Pisot no 19, 1969/70
51. Soulé, C.: Addendum to the article «On the torsion in $K_*(\mathbb{Z})$». Duke Journal, pp. 131–132 (1978)
52. Soulé, C.: Classes de torsion dans la cohomologie des groupes arithmétiques. C.R. Acad. Sc. Paris, **284**, 1009–1011 (1977)
53. Soulé, C.: K-théorie de $\mathbb{Z}$ et cohomologie étale. C.R. Acad. Sc. Paris, **286**, 1179–1181 (1978)
54. Soulé, C.: Groupes arithmétiques et K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres. Thèse, Paris VII, 1978
55. Tate, J.: Relations between K_2 and Galois cohomology. Inventiones Math., **36**, 257–274 (1976)
56. Tate, J.: Algebraic cycles and poles of zeta functions, dans «Arithmetical Algebraic Geometry» (O.F.G. Schilling ed.), p. 93, 1963
57. Wagstaff, S.: The irregular primes to 125000. Math. Computations, p. 583, A.M.S. 1978
58. Waldhausen, F.: Algebraic K-theory of generalized free products, I et II. Annals of Maths., **108**, 135–204, 205–256 (1978)

Reçu le 26 février/Révisé le 21 juillet 1979