Inventiones math. 52, 149–162 (1979)

Inventiones mathematicae

Variations sur un thème de Mahler

Gilles Lachaud

Université Paris VII, U.E.R. de Mathématiques, 2, place Jussieu, F-75221 Paris Cedex 05, France

1. Introduction

Soit $S=\{p_1, \dots, p_s\}$ un ensemble fini de nombres premiers, et $P=p_1 \dots p_s$; on note $\mathbf{Z}^n(S)$ l'ensemble des vecteurs $x=(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{Z}^n$ dont les coordonnées sont premières à P dans leur ensemble, c'est-à-dire sont telles que le p.g.c.d. de $x_1, \dots, x_n$, P soit égal à 1.

Soit, d'autre part, $F(x)=F(x_1, \dots, x_n)$ une forme homogène à n variables et à coefficients entiers, de degré d. On s'intéresse ici au nombre $v_S(m)$ de vecteurs $x=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{Z}^n(S)$ tels qu'il existe des entiers positifs $u_1, \dots, u_s$ permettant d'écrire:

$$|F(x_1, \dots, x_n)| = m\, p_1^{u_1} \dots p_s^{u_s}. \tag{1}$$

Dans cette relation il est naturel de supposer que m et P sont premiers entre eux et que $m \geqq 1$.

Pour tout premier p, on note $|x|_p$ la valeur absolue de $x \in \mathbf{Q}$ associée à la place définie par p. On note $|x|_0$ la valeur absolue archimédienne de $\mathbf{Q}$, et si $x \in \mathbf{Q}^n$, on pose:

$$F_S(x) = |F(x)|_0 \prod_{p \in S} |F(x)|_p. \tag{2}$$

Avec ces notations, on a, si $(m, P)=1$:

$$v_S(m) = \# \{x \in \mathbf{Z}^n(S) \mid F_S(x) = m\}. \tag{3}$$

Posons, pour $t \in \mathbf{R}_+$,

$$N_S(t) = \# \{x \in \mathbf{Z}^n(S) \mid F_S(x) \leqq t\}, \tag{4}$$

de telle sorte que:

$$N_S(t) = \sum_{\substack{m \leqq t \\ (m,P)=1}} v_S(m); \tag{5}$$

0020-9910/79/0052/0149/$02.80

on se propose de donner une formule asymptotique pour $N_S(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

Kurt Mahler a démontré en 1934 (cf. [7]) le résultat suivant. Lorsque F est une forme binaire de degré $d \geqq 3$ et irréductible sur $\mathbf{Q}$, alors $N_S(t)$ est fini pour tout $t \in \mathbf{R}_+$; et si pour tout $p \in S$ la forme F est anisotrope sur $\mathbf{Q}_p$, c'est-à-dire si $F(x) \neq 0$ dès que $x \neq 0$ dans $\mathbf{Q}_p$, alors on a

$$N_S(t) = V_S\, t^{2/d} + O(t^{1/(d-1)}), \tag{6}$$

avec une constante V_S convenable (cf. la définition (12) ci-dessous).

Cette question a été reprise par May (cf. [17], puis par Ramachandra (cf. [10]) dans le cas où F est une forme normique (cf. le § 2), et où il n'y a pas de places ultramétriques.

On va démontrer le résultat suivant:

Théorème. *Avec les notations précédentes, supposons la forme F anisotrope sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{Q}_p$ lorsque $p \in S$. Alors*

$$N_S(t) = V_S\, t^{n/d} + O(t^{(n-\theta)/d}),$$

où V_S est le nombre défini par la formule (12) *ci-dessous et où $\theta > 1$.*

On peut d'ores et déjà remarquer les faits suivants. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{Q}_p^n$, on pose:

$$\|x\|_p = \max(|x_1|_p, \ldots, |x_n|_p).$$

Si la forme F est anisotrope sur $\mathbf{Q}_p$, il existe un nombre $c_p > 0$ tel que

$$|F(x)|_p \geqq c_p \tag{7}$$

lorsque $x \in \mathbf{Q}_p^n$ et $\|x\|_p = 1$; si la forme F est anisotrope sur $\mathbf{Q}_p$ pour tout $p \in S$, on a donc, en notant c_S le produit des c_p, la relation

$$F_S(x) \geqq c_S\, |F(x)|_0 \tag{8}$$

lorsque $x \in \mathbf{Z}^n(S)$, puisque si $x \in \mathbf{Z}^n(S)$ on a $\|x\|_p = 1$ pour tout $p \in S$.

Si F est anisotrope sur $\mathbf{R}$, elle ne change pas de signe; on supposera dans ce qui suit que $F(x) > 0$ si $x \in \mathbf{R}^n$ est non nul. En notant c_0 la borne inférieure de F sur la sphère $\|x\|_0 = 1$, il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ on a

$$F(x) \geqq c_0\, \|x\|_0^d. \tag{9}$$

Les relations (8) et (9) impliquent que $F_S(x)$ tend vers l'infini lorsque $\|x\|_0$ tend vers l'infini, pour $x \in \mathbf{Z}^n(S)$; les hypothèses du théorème impliquent donc que *le nombre $N_S(t)$ est fini pour tout $t > 0$.*

Soit dx la mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p^n$ telle que la boule $\|x\|_p \leqq 1$ soit de volume 1. On pose

$$V_p = \int_{\|x\|_p = 1} |F(x)|_p^{-n/d}\, dx; \tag{10}$$

la formule (7) assure la convergence de cette intégrale. On pose encore:

$$V_0 = \mathrm{vol}\{x \in \mathbf{R}^n \mid F(x) \leqq 1\}; \tag{11}$$

ce volume est fini puisque c'est celui d'un compact, vu la relation (9); ceci permet de définir

$$V_S = V_0 \prod_{p \in S} V_p. \tag{12}$$

Remarques 1. Le théorème implique que la série

$$Z_S(z, F) = \sum_{(m,P)=1} \frac{v_S(m)}{m^z} = \sum \frac{1}{F_S(x)^z},$$

où la deuxième sommation se fait sur $\mathbf{Z}^n(S)$, converge pour $\mathrm{Re}\, z > n/d$ et se prolonge méromorphiquement au demi-plan $\mathrm{Re}\, z > (n-\theta)/d$ avec un seul pôle en $z = n/d$, qui est simple et de résidu $\frac{n}{d} V_S$. On peut montrer (cf. [4]) que la série $Z_S(z, F)$ se prolonge en fait au plan complexe tout entier avec n/d comme seul pôle.

2. Lorsqu'il n'y a pas de places ultramétriques, c'est-à-dire lorsque $S = \phi$, le résultat précédent s'interprète comme suit. Notons

$$F(D) = F\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

l'opérateur différentiel défini par F. Si F est anisotrope l'opérateur $F(D)$ est *elliptique* et définit un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n)$. Les valeurs propres de cet opérateur sont les entiers $m \in F(\mathbf{Z}^n)$, et la multiplicité de m est $v(m)$. Le nombre $N(t)$ est donc égal au nombre de valeurs propres de cet opérateur inférieures à t. Dans ce cas, le résultat est démontré, par exemple, dans [3], [11], [12], [16].

3. On aurait pu, sans plus de difficultés, se placer comme dans [4] sous l'hypothèse où la forme F est *semi-homogène*, c'est-à-dire vérifie la relation

$$F(T^{d_1} X_1, \ldots, T^{d_n} X_n) = T^d F(X_1, \ldots, X_n)$$

avec des entiers d, $d_1, \ldots, d_n$, mais entre la description la plus générale et la présentation la plus claire, on a opté pour le second parti.

4. Les intégrales V_p aux places finies peuvent se calculer en fonction du nombre de solutions de l'équation définie par la forme F sur le corps résiduel $\mathbf{F}_p$, en utilisant la théorie d'Ono (cf. [9]). Soit $d\sigma_y$ la forme différentielle sur la variété de $\mathbf{Q}_p^n$ d'équation $F(x) = y$ telle que $d\sigma_y \wedge dF = dx$, et ψ la fonction caractéristique de l'ensemble $\{x \in \mathbf{Q}_p^n \mid \|x\|_p = 1\}$; la *fonction d'Ono*

$$\psi_F(y) = \int_{F(x)=y} \psi(x)\, d\sigma_y(x)$$

se calcule explicitement; si, par exemple, $\|\operatorname{grad} F(x)\|_p = 1$ dès que $\|x\|_p = 1$, on a $\psi_F(y) = 0$ si $y \notin \mathbf{Z}_p$, et $\psi_F(y) = p^{1-n} N(\tilde{y})$ sinon, en notant $\tilde{y}$ la classe de $y \bmod p$, et en posant, pour $\alpha \in \mathbf{F}_p$,

$$N(\alpha) = \{\beta \in \mathbf{F}_p^n - \{0\} \mid F(\beta) = \alpha\}.$$

Avec ces notations, on a

$$V_p = \int_{\mathbf{Q}_p} |y|^{-n/d} \psi_F(y)\, dy;$$

La fonction ψ_F intervient comme facteur local de la série singulière de Hardy-Littlewood.

Voici comment est défini le nombre θ figurant dans l'énoncé du théorème. Notons H l'hypersurface de $\mathbf{R}^n$ d'équation $F(x) = 1$, qui est sans singularités puisque F est homogène en vertu de l'équation d'Euler.

On dispose, sur H, d'une forme différentielle $d\sigma$, définie par la relation $d\sigma \wedge dF = dx$, de telle sorte que

$$\int_{F(x) \leqq 1} f(x)\, dx = \int_0^1 t^{(n-d)-1} \int_H f(t^{1/d} x)\, d\sigma(x)\, dt, \tag{13}$$

si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}^n$. Et alors, en vertu du théorème de Lebesgue, la fonction

$$J_f(\xi) = \int_H f(x)\, e^{-2i\pi\langle x, \xi\rangle}\, d\sigma(x) \tag{14}$$

tend vers 0 à l'infini.

Définition. *Sous les conditions et avec les notations précédentes, on dira que la forme F est d'ordre α si*

$$J_f(\xi) \ll \|\xi\|_0^{-\alpha} \tag{15}$$

lorsque ξ tend vers l'infini pour toute fonction f de classe C^∞.

On va démontrer le théorème pour

$$\theta = n/(n-\alpha)$$

si F est d'ordre α.

Toute forme anisotrope est d'ordre 0 au moins. En fait, l'intégrale J_f se ramène, par une représentation paramétrique de l'hypersurface H, à des intégrales oscillantes de la forme

$$I(\tau) = \int_{R^n} g(x)\, e^{i\tau h(x)}\, dx$$

en posant $|\xi| = \tau$, avec $g \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ et h analytique sur R^n. Malgrange (cf. [8]) a démontré que de telles intégrales admettent un développement asymptotique

$$I(\tau) = \tau^{-a}(\log \tau)^b + \ldots$$

avec $a \in \mathbf{Q}$, $a > 0$, et $b \in \mathbf{N}$, $0 \leqq b \leqq n-1$. Il s'ensuit que toute forme anisotrope est d'ordre strictement positif; en ce cas θ est toujours strictement supérieur à 1 et on obtient ainsi l'analogue de l'estimation de Gauss pour le problème du cercle: le nombre de points entiers contenus dans un domaine est égal à l'aire de ce domaine, avec une erreur de l'ordre de la longueur de la courbe qui le délimite.

Remarques 5. Soit $W(x)$ la restriction de la Hessienne de F à l'hyperplan tangent à H en x. Si k est la borne inférieure du rang de W lorsque x parcourt H, autrement dits s'il y a toujours k rayons de courbure non nuls, alors F est d'ordre $k/2$. En particulier, toute forme strictement convexe est d'ordre $(n-1)/2$ (cf, [6] et [15]), ce qui est le meilleur résultat possible; dans ce cas, $\theta = 1 + (n-1)/(n+1)$, ce qui fournit une estimation analogue à celle de Van der Corput pour le problème du cercle.

6. Supposons $n=2$ et soit q l'ordre maximal d'annulation de la courbure de la courbe H; alors F est d'ordre $1/(q+2)$ (cf. [2]).

7. La forme d'Euler

$$F(x) = x_1^d + \ldots + x_n^d$$

est d'ordre $(n-1)/d$ (cf. [12]).

8. On pourrait obtenir de meilleures estimations en effectuant une partition de $\mathbf{R}^n$ en sous-espaces V_i coniques dans lesquels on a

$$\lambda(\tau\omega) \ll \phi_i(\omega) |\tau|^{-\alpha_i}$$

pour τ tendant vers l'infini, et $\omega \in V_i \cap S^{n-1}$, avec une fonction ϕ_i sous-harmonique et intégrable; (cf. [12]) pour le cas de la forme d'Euler et [2] pour le cas générique.

2. Les formes normiques

Soit K un corps de nombres algébriques de degré d, sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels. On note ξ un élément primitif entier de K, et $N(x)$ la norme de $x \in K$ pour l'extension de K sur $\mathbf{Q}$.

Par ailleurs, soit h un entier positif; pour $x = (x_0, \ldots, x_h) \in \mathbf{Z}^{h+1}$ on pose

$$F(x) = N(x_0 + x_1 \xi + \ldots + x_h \xi^h). \tag{16}$$

Cette forme *normique* de degré d est irréductible sur $\mathbf{Q}$ et à coefficients entiers (cf. [1], Ch. 2).

Voici un critère permettant d'affirmer que la forme normique (16) est anisotrope sur $\mathbf{Q}_p$, si p est une place ultramétrique. Supposons le premier p non ramifié dans K et écrivons, en notant $\mathbf{O}_K$ l'anneau des entiers de K,

$$p\mathbf{O}_K = P_1 \ldots P_g \tag{17}$$

la décomposition en idéaux premiers de K de l'idéal $p\mathbf{O}_K$ engendré par p; notons f_i le degré résiduel de P_i, et f_p le plus petit des entiers f_i.

Proposition. *Si $h<f_p$, la forme F est anisotrope sur Q_p.*

Soit K_i le complété de K pour la valuation définie par P_i; c'est une extension de $\mathbf{Q}_p$, engendrée par ξ et de degré f_i; en notant N_i la norme de K_i sur $\mathbf{Q}_p$, on a

$$F(x_0,\ldots,x_h)=\prod_{1\leqq i\leqq d} N_i(x_0+\ldots+x_h\xi^h) \tag{18}$$

pour tout vecteur $(x_0,\ldots,x_h)\in\mathbf{Q}^{h+1}$ (pour tout ceci, cf. [1], ch. 4, n° 2); et la formule (18) reste vraie si les coordonnées x_i sont dans $\mathbf{Q}_p$.

Si on avait $F(x_0,\ldots,x_h)=0$ pour un vecteur de $\mathbf{Q}_p^{h+1}$, il s'ensuivrait que

$$x_h\xi^h+\ldots+x_0=0$$

dans l'un des K_i, donc que ξ vérifie une équation de degré h, ce qui est impossible puisque K_i est une extension de degré $f_i>h$ par hypothèse et dont ξ est un élément primitif sur $\mathbf{Q}_p$.

Exemple 2.1. Prenons $h=1$ et soit $K=\mathbf{Q}(\zeta)$, où ζ est une racine primitive q-ième de l'unité. On a

$$N_K(x-\zeta)=\phi_q(x),$$

où ϕ_q est le q-ième polynôme cyclotomique; si $(p,q)=1$, il est bien connu que p est non ramifié dans K et que f_p est égal au plus petit entier f tel que $p^f\equiv 1 \pmod q$; la densité des nombres premiers p tels que $f_p>1$ est donc égale, par le théorème de Dirichlet, à $1-(1/\phi(q))$; la forme

$$F(X,Y)=N_K(aX+b\zeta Y)$$

où a et b sont des entiers strictement positifs, est anisotrope dans $\mathbf{Q}_p$ pour une infinité de nombre premiers; puisque ϕ_q n'a aucune recine réelle, la forme F est également anisotrope sur $\mathbf{R}$ et satisfait donc aux hypothèses du théorème.

3. Démonstration du théorème

Pour ce faire, on va utiliser des méthodes élémentaires d'analyse harmonique sur l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$. Pour un exposé de ces méthodes et une démonstration des résultats utilisés ici, on renvoie à [5], ch. XIV et à [14], ch. VII, ainsi qu'à [9].

Pour tout premier p, on note ϕ_p (resp. ψ_p) la fonction caractéristique de l'ensemble $\|x\|_p\leqq 1$ (resp. $\|x\|_p=1$) de $\mathbf{Q}_p^n$. Soit $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$; pour $x=(x_p)\in\mathbf{A}^n$, on pose

$$\psi_S(x)=\prod_{p\in S}\psi_p(x_p)\prod_{p\notin S}\phi_p(x_p). \tag{19}$$

Ainsi en identifiant un $x\in\mathbf{Q}^n$ à son image dans $\mathbf{A}^n$ de la manière habituelle on a

$$\mathbf{Z}^n(S)=\{x\in\mathbf{Q}^n \mid \psi_S(x)=1\}. \tag{20}$$

Pour $x\in\mathbf{A}^n$ on pose

$$F_S(x)=|F(x_0)|_0\prod_{p\in S}|F(x_p)|_p; \tag{21}$$

si $x\in\mathbf{Q}^n$, on retrouve la définition (2).

Si $t\geqq 1$, on note $\gamma(t,x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble des $x\in\mathbf{A}^n$ qui vérifient $F_S(x)\leqq t$, ce qui permet de définir la fonction

$$\tau(t,x)=\psi_S(x)\,\gamma(t,x). \tag{22}$$

Ceci posé, il vient

$$N_S(t)=\sum_{x\in\mathbf{Q}^n}\tau(t,x). \tag{23}$$

La relation (23) va permettre d'estimer $N_S(t)$ en utilisant la formule de Poisson adélique. Cette méthode est essentiellement celle de Van der Corput lorsque $S=\emptyset$ et $F(x,y)=x^2+y^2$; elle a été reprise notamment par Hörmander (cf. [3]) et Randol (cf. [13]). Tout d'abord, on va régulariser la fonction τ à la place archimédienne.

Soit k une fonction C^∞ positive sur $\mathbf{R}^n$, à support dans la boule unité, telle que $k(0)=1$, et d'intégrale totale 1. Pour $x\in\mathbf{R}^n$ et $\varepsilon>0$, on pose $k_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}k(x/\varepsilon)$ et

$$\tau_\varepsilon(t,x)=\psi_S(x_f)\int_{\mathbf{R}^n}k_\varepsilon(y)\,\tau(t,x-y)\,dy \tag{24}$$

en notant x_f la projection de $x\in\mathbf{A}^n$ sur le sous-espace $\mathbf{A}^n_f$ des adèles dont la composante archimédienne vaut 1.

Propositions 3.1. *Sous les conditions et notations précédentes, supposons* $0<\varepsilon\leqq 1$. *Il existe alors* $a>0$ *tel que si* $\delta=a\varepsilon t^{(d-1)/d}$, *on ait*

$$\tau_\varepsilon(t-\delta,x)\leqq\tau(t,x)\leqq\tau_\varepsilon(t+\delta,x) \tag{25}$$

pour tout $x\in A^n$.

Démonstration. Soit $x_0\in\mathbf{R}^n$ et posons $F(x_0)=T$. Si $y\in\mathbf{R}^n$ est tel que $\|y\|_0<\varepsilon$, alors

$$|F(x_0+y)-F(x_0)|_0\leqq a_0\varepsilon T^{(d-1)/d}, \tag{26}$$

où a_0 ne dépend que de F. En effet, on a, par la formule de Taylor,

$$F(x_0+y)-F(x_0)=\sum(F^{(\alpha)}(x)/\alpha!)\,y, \tag{27}$$

où la somme porte sur les dérivées partielles de F définies par les multiindices α de longueur $d-1$ au plus. Pour tout multi-indice α, on a:

$$|F^{(\alpha)}(x_0)|_0\leqq c_\alpha\|x_0\|_0^{d-|\alpha|},$$

avec des nombres $c_\alpha > 0$. Mais puisque F est anisotrope sur $\mathbf{R}$, on dispose de la relation (9), à savoir

$$|F(x_0)|_0 \geqq c_0 \, \|x_0\|^d;$$

si $|\alpha| \geqq 1$, on a donc

$$|F^{(\alpha)}(x_0)|_0 \leqq c \, |F(x_0)|_0^{(d-1)/d} = c \, T^{(d-1)/d},$$

et si on applique cette dernière estimation à (27), la relation (26) s'ensuit.

Soit $x \in \mathbf{A}^n$ tel que $\tau(t-\delta, x) = 1$. Ceci implique que $\psi_S(x_f) = 1$ et que $F_S(x) \leqq t - \delta$. Puisque F est anisotrope sur $\mathbf{Q}_p$, la relation (7) montre que si $\psi_S(x_f) = 1$, on a $F_S(x_f) \geqq c_S$, et donc

$$F(x_0) = F_S(x) \, F_S(x_f)^{-1} \leqq c_S^{-1} \, t.$$

Ainsi, si $\|y\|_0 < \varepsilon$, on a, vu la relation (26),

$$|F(x_0 + y) - F(x_0)| \leqq a \varepsilon t^{(d-1)/d},$$

où le nombre a ne dépend que de a_0 et c_S.

L'inégalité précédente se réécrit

$$F(x_0 + y) \leqq F(x_0) + \delta,$$

ce qui implique, en multipliant par $F_S(x_f)$,

$$F_S(x + y) \leqq F_S(x) + \delta = (t - \delta) + \delta = t,$$

puisque $y_f = 1$ et que $F_S(x_f) \leqq 1$. On a donc démontré que si $\tau(t-\delta, x) = 1$ et $\|y\|_0 < \varepsilon$, alors $\tau(t, x+y) = 1$, ce qui se réécrit

$$\operatorname{Supp} \tau(t-\delta, x) + \operatorname{Supp} k_\varepsilon(x) \subset \operatorname{Supp} \tau(t, x),$$

en notant $\operatorname{Supp} f(x)$ le support d'une fonction $f(x)$; mais puisque

$$\operatorname{Supp} \tau_\varepsilon(t-\delta, x) \subset \operatorname{Supp} \tau(t-\delta, x) + \operatorname{Supp} k_\varepsilon(x),$$

il s'ensuit que si $\tau_\varepsilon(t-\delta, x) \neq 0$ alors $\tau(t, x) = 1$, ce qui prouve la première inégalité de la proposition; la seconde se démontre de façon symétrique.

La fonction $\tau_\varepsilon(t, x)$ est à support compact sur $\mathbf{A}^n$; on va calculer sa transformée de Fourier. Posons

$$\mathbf{Q}_S^n = \prod_{p \in S} \mathbf{Q}_p^n, \qquad d x_S = \prod_{p \in S} d x_p,$$

où $d x_p$ est la mesure produit sur $\mathbf{Q}_p^n$ de la mesure de Haar sur $\mathbf{Q}_p$ introduite au §1; on notera χ_p le caractère de Tate de $\mathbf{Q}_p$, de telle sorte que la fonction ϕ_p est sa propre transformée de Fourier; si $x_S \in \mathbf{Q}_S$, on pose

$$\chi_S(x_S) = \prod_{p \in S} \chi_p(x_p),$$

et enfin

$$U_S = \{x_S \in \mathbf{Q}_S^n \mid \|x_p\|_p = 1 \text{ pour } p \in S\}.$$

Puisque la fonction ϕ_p est sa propre transformée de Fourier, et que $\hat{k}_\varepsilon(\xi_0) = \hat{k}(\varepsilon\xi_0)$ pour $\xi_0 \in \mathbf{R}^n$, il vient, lorsque $\xi \in \mathbf{A}^n$,

$$\hat{\tau}_\varepsilon(t,\xi) = \hat{\tau}_S(t,\xi)\,\hat{k}(\varepsilon\xi_0) \prod_{p \notin S} \phi_p(\xi_p) \tag{28}$$

avec

$$\hat{\tau}_S(t,\xi) = \int_{U_S} \chi_S(\langle x_S, \xi_S\rangle) \int_{F_S(x)\leqq t} \exp(-2i\pi\langle x_0,\xi_0\rangle)\,dx_0\,dx_S \tag{29}$$

en notant $\langle x,\xi\rangle$ le produit scalaire dans l'espace à n dimensions, et ξ_S la projection de $\xi \in \mathbf{A}^n$ sur $\mathbf{Q}_S^n$.

Lemme 3.2. *On a*

$$\hat{\tau}_S(t,0) = t^{n/d}\,V_S, \tag{30}$$

où V_S est défini par la relation (12).

Démonstration. On a

$$\hat{\tau}_S(t,0) = \int_{U_S} \int_{F_S(x)\leqq t} dx_0\,dx_S,$$

mais

$$\int_{F_S(x)\leqq t} dx_0 = \int_{F(x_0)\leqq t F_S(x_S)^{-1}} dx_0 = [t\,F_S(x_S)^{-1}]^{n/d} \int_{F(x_0)\leqq 1} dx_0,$$

puisque F est homogène de degré d et donc

$$\tau_S(t,0) = t^{n/d}\,V_0 \int_{U_S} F_S(x_S)^{-n/d}\,dx_S,$$

mais l'intégrale sur U_S se décompose en un produit d'intégrales sur les ensembles $\|x_p\|_p = 1$, chacune de ces intégrales étant égale à

$$V_p = \int_{\|x_p\|_p = 1} |F(x_p)|^{-n/d}\,dx_p,$$

intégrale déjà définie par la relation (10), ce qui démontre le lemma 3.2.

Lemme 3.3. *Supposons que la forme F soit d'ordre α, au sens de la définition du* § 1. *Si $\xi \in \mathbf{A}^n$, et $\xi \neq 0$, on a*

$$\hat{\tau}_S(t,\xi) \ll t^{(n-\alpha-1)/d}\,\|\xi_0\|_0^{-\alpha-1}. \tag{31}$$

Démonstration. Posons, pour $T > 0$, et $\xi_0 \in \mathbf{R}^n$,

$$I(T,\xi_0) = \int_{|F(x_0)|_0 \leqq T} e^{-2i\pi\langle x_0,\xi_0\rangle}\,dx_0.$$

En posant $x_0 = T^{1/d} y_0$ il vient

$$I(T, \xi_0) = T^{n/d} \int_{|F(y_0)|_0 \leqq 1} \exp(-2i\pi \langle T^{1/d} y_0, \xi_0 \rangle) \, d y_0. \tag{32}$$

Considérons le champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^n$:

$$A(x_0) = \xi_0 \exp(-2i\pi \langle x_0, \xi_0 \rangle);$$

on a

$$\operatorname{div} A(x_0) = -2i\pi \|\xi_0\|_0^2 \exp(-2i\pi \langle x_0, \xi_0 \rangle),$$

le théorème de Gauss permet donc d'affirmer que

$$\begin{aligned} &-2i\pi \|\xi_0\|_0^2 \int_{|F(x_0)|_0 \leqq 1} \exp(-2i\pi \langle x_0, \xi_0 \rangle) \, d x_0 \\ &= \int_{|F(x_0)|_0 = 1} \exp(-2i\pi \langle x_0, \xi_0 \rangle)(\xi_0 | n(x_0)) \, d\sigma(x_0) \end{aligned} \tag{33}$$

en notant $n(x_0)$ le vecteur normal en x_0 à l'hypersurface $|F(x_0)|_0 = 1$; il vient donc en reportant la relation (33) dans (32) et en posant $\xi_0 / \|\xi_0\|_0 = \omega$,

$$T^{-n/d} I(T, \xi_0) = (-2i\pi T^{1/d} \|\xi_0\|_0)^{-1} A,$$

avec

$$A = \int_{F=1} (\omega | n(x_0)) \exp(-2i\pi T^{1/d} \langle x_0, \xi_0 \rangle) \, d\sigma(x_0).$$

Puisque F est d'ordre α, on déduit de la relation (15) que

$$I(T, \xi_0) \ll T^{(n-\alpha-1)/d} \|\xi_0\|_0^{-\alpha-1},$$

et puisque la formule (29) se réécrit

$$\hat{\tau}_S(t, \xi) = \int_{U_S} \chi_S(\langle x_S, \xi_S \rangle) \, I(t F_S(x_S)^{-1}, \xi_0) \, d x_S,$$

il vient

$$\tau_S(t, \xi) \ll t^{(n-\alpha-1)/d} \|\xi\|_0^{-\alpha-1} B$$

avec

$$B = \int_{U_S} F_S(x_S)^{(\alpha+1-n)/d} \, d x_S,$$

ce qui établit la formule (31) et démontre le lemme, puisque l'intégrale B est convergente, parce que F est anisotrope sur $\mathbf{Q}_p$ pour $p \in S$.

Lemme 3.4. *Pour tout $p \in S$, il y a un sous-espace compact ouvert K_p de $\mathbf{Q}_p^n$ tel que $\hat{\tau}_S(t, \xi) = 0$ si $\xi_p \notin K_p$.*

Démonstration. Puisque F est anisotrope sur $\mathbf{Q}_p$, on dispose de la relation (7) qui affirme que

$$|F(x_p)|_p \geqq c_p$$

lorsque $\|x_p\|_p=1$. La formule de Taylor montre que la fonction F est continue sur $\mathbf{Q}_p^n$; il existe donc un nombre $\delta_p>0$ tel que si $y_p\in\mathbf{Q}_p^n$ et $\|y_p\|_p\leqq\delta_p$, alors

$$|F(x_p+y_p)-F(x_p)|_p<c_p$$

lorsque $\|x_p\|_p=1$; l'inégalité ultramétrique implique alors

$$|F(x_p+y_p)|_p=|F(x_p)|_p;$$

on a donc $F_S(x+y_p)=F_S(x)$ si $x\in U_S$ et si y_p est dans le sous-espace compact ouvert L_p défini par la relation $\|y_p\|\leqq\delta_p$.

Si $\delta_p<1$, on a aussi, toujours en vertu de l'inégalité ultramétrique,

$$\psi_S(x+y_p)=\psi_S(x);$$

puisque, par la définition (22),

$$\tau(t,x)=\psi_S(x)\,\gamma(t,x)$$

où $\gamma(t,x)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $F_S(x)\leqq t$, il s'ensuit que la fonction $\tau(t,x)$ est constante sur les classes $x+L_p$; si λ_p est la fonction constante sur L_p, nulle hors de L_p, et d'intégrale totale 1, on a donc

$$\int\tau(t,x-y_p)\,\lambda_p(y_p)\,d\,y_p=\tau(t,x),$$

autrement dit la fonction $\tau(t,x)$ ne change pas lorsqu'on la convole avec λ_p; la transformée de Fourier de λ_p est constante sur un sous-espace compact ouvert K_p, et nulle hors de ce sous-espace; il vent donc

$$\hat{\tau}(t,\xi)\,\hat{\lambda}_p(\xi_p)=\hat{\tau}(t,\xi),$$

ce qui prouve que $\hat{\tau}(t,\xi)$ est nulle si $\xi_p\notin K_p$,et démontre le lemme.

Lemme 3.5. *La fonction $\hat{\tau}_\varepsilon(t,\xi)$ est intégrable sur $\mathbf{A}^n$ et on a*

$$\sum_{\xi\in\mathbf{Q}^n-\{0\}}|\hat{\tau}_\varepsilon(t,\xi)|\ll(\varepsilon^{-1}t^{1/d})^{n-\alpha-1}. \tag{34}$$

Démonstration. Puisque la fonction k est à support compact, on a

$$\hat{k}(\varepsilon\xi_0)\ll(1+\varepsilon\|\xi_0\|_0)^{-N}$$

pour tout $N>0$, ce qui, joint à la relation (31) du lemme 3.3, et vu la relation (28), permet d'affirmer que

$$\hat{\tau}_\varepsilon(t,\xi)\ll t^{(n-\alpha-1)/d}\|\xi_0\|_0^{-\alpha-1}(1+\varepsilon\|\xi_0\|_0)^{-N}. \tag{35}$$

Par ailleurs, soit K le sous-espace ouvert compact

$$K=\prod_{p\notin S}\mathbf{Z}_p^n\cdot\prod_{p\in S}K_p,$$

où pour $p\in S$, les K_p sont ceux du lemme 3.4. Il résulte de (28) et du lemme 3.4

que la fonction $\hat{\tau}_\varepsilon(t, \xi)$ est nulle si $\xi_f \notin K$; ce qui, joint à la relation (35), montre que la fonction $\hat{\tau}_\varepsilon(t, \xi)$ est intégrable puisque dominée par une fonction décomposable intégrable. On a donc établi la première assertion du lemme. Pour prouver la seconde, remarquons que $K \cap \mathbf{Q}^n$ est inclus dans un réseau Γ dans lequel $\mathbf{Z}^n$ est d'indice fini; si $\Gamma \subset w\mathbf{Z}^n$, où $w \in \mathbf{Q}$, on a

$$\sum_{\xi \in \mathbf{Q}^n} \tau_\varepsilon(t, \xi) \ll \sum_{\xi \in \mathbf{Z}^n} \tau_\varepsilon(t, w\xi). \tag{36}$$

Par ailleurs, lorsque ε tend vers 0, on a

$$\sum_{\xi \in \mathbf{Z}^n - \{0\}} (1 + \varepsilon \|\xi\|_0)^{-N} \|\xi\|_0^{-\alpha-1} \ll \varepsilon^{\alpha-n+1}, \tag{37}$$

comme on le voit en comparant cette série à l'intégrale analogue.

Les relations (35), (36), (37) impliquent la relation (34) et le lemme 3.5 est démontré.

On peut maintenant terminer la démonstration du théorème. Le lemme 3.5 et le fait que la fonction $\tau_\varepsilon(t, x)$ soit à support compact impliquent que l'on peut appliquer la formule de Poisson à cette dernière; il vient

$$\sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \tau_\varepsilon(t+\delta, x) = \hat{\tau}_\varepsilon(t+\delta, 0) + \sum_{\xi \neq 0} \hat{\tau}_\varepsilon(t+\delta, \xi). \tag{38}$$

La relation (30) du lemme (3.2) implique

$$\hat{\tau}_\varepsilon(t+\delta, 0) = V_S (t+\delta)^{n/d}, \tag{39}$$

vu la relation (28), puisque $\phi_p(0) = \hat{k}(0) = 1$.

Dès que $\delta \ll t$, on a

$$(t+\delta)^{n/d} = t^{n/d} + O(\delta t^{(n-d)/d}),$$

et si on pose $\delta = a\varepsilon t^{(d-1)/d}$ comme dans le lemme 3.1, il vient

$$(t+\delta)^{n/d} = t^{n/d} + O(\varepsilon t^{(n-1)/d}). \tag{40}$$

Les relations (38), (39), (40) et (34) du lemme 3.5 impliquent

$$\sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \tau_\varepsilon(t+\delta, x) = V_S t^{n/d} + O(\varepsilon t^{(n-1)/d}) + O(\varepsilon^{-(n-\alpha-1)} t^{(n-\alpha-1)/d}). \tag{41}$$

On va déterminer ε en fonction de t pour que les deux restes soient égaux; si on pose

$$\varepsilon = t^{-\beta/d},$$

on veut

$$n - 1 - \beta = (n - \alpha - 1)(\beta + 1),$$

d'où on tire

$$\beta = \alpha/(n-\alpha).$$

Puisque α est strictement positif, ε tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. L'exposant de t dans les restes figurant dans la relation (41) est alors

$$(n/d)(1-1/(n-\alpha))=(n-\theta)/d,$$

si on pose, comme au § 1,

$$\theta=n/(n-\alpha).$$

On a donc

$$\sum_{x\in\mathbf{Q}^n}\tau_\varepsilon(t+\delta,x)=V_S t^{n/d}+O(t^{(n-\theta)/d});$$

la proposition 3.1 montre que l'on a aussi

$$\sum_{x\in\mathbf{Q}^n}\tau(t,x)=V_S t^{n/d}+O(t^{(n-\theta)/d})$$

et puisque par la relation (23) la somme de gauche de cette expression est égale à $N_S(t)$, le théorème est établi.

Bibliographie

1. Borevitch, Z.I., Chafarevitch, I.R.: Théorie des Nombres, Paris: Gauthier-Villars 1967
2. Colin de Verdière, Y.: Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domaines de $\mathbf{R}^n$, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **10**, 559–576 (1977)
3. Hormander, L.: On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators, Recent Advances in the Basic Sciences, Yeshiva University Conference, 155–202 (1966)
4. Lachaud, G.: Le prolongement analytique d'un type de fonctions Zêta généralisées, Journées Arithmétiques de Marseille (1978), Astérisque **61**, 109–119 (1979)
5. Lang, S.: Algebraic Number Theory. Reading: Addison-Wesley 1970
6. Littman, W.: Fourier Transforms of surface-carried measures and differentiability of surface averages. Bull. A.M.S., **69**, 766–770 (1963)
7. Mahler, K.: Zur Approximation Algebraischer Zahlen III, Acta Math. **62**, 91–166 (1934)
8. Malgrange, B.: Intégrales asymptotiques et monodromie, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., (4), **7**, 405–430 (1974)
9. Ono, T.: Gauss Transforms and Zeta Functions, Ann. of Math. **91**, 332–361 (1970)
10. Ramachandra, K.: A Lattice Point Problem for Norm Forms in several Variables, J. Number Theory **1**, 534–555 (1969)
11. Randol, B.: A lattice point problem I, Trans. A.M.S. **121**, 257–268 (1966)
12. Randol, B.: A Lattice point problem II, Trans. A.M.S. **125**, 101–113 (1966)
13. Randol, B.: On the Fourier transform of the indicator function of a planar set, Trans. A.M.S. **139**, 271–278 (1969)
14. Weil, A.: Basic Number Theory. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967
15. Agmon, S., Hörmander, L.: Asymptotic properties of solutions of differential equations with simple characteristics, Journ. Anal. Math. **30**, 1–38 (1976)
16. Bérard, P.: On the number of lattice points in some domains, Comm. in partial differential equations, **3**, 335–347 (1978)
17. May, W.L.: Binary forms over number fields, Ann. of Math. **79**, 597–615 (1964)

Reçu le 29 décembre 1978

Note ajoutee aux épreuves

Le théorème énoncé au numéro 1 permet de conjecturer le résultat suivant: Si F est une forme homogène quelconque, à coefficients entiers, à n variables et de degré d, et si, avec les notations de ce numéro:

a) le nombre $v_S(m)$ est fini pour tout entier m;

b) le nombre V_S est fini;

alors la conclusion du théorème reste vraie, si on suppose seulement $\theta > 0$.

Avec les notations du numéro 2, les formes normiques définies par la relation (16) vérifient la condition a) lorsque $d > 2h$, d'après les résultats obtenus par Schmidt et Schlickewei; et elles vérifient la condition b) lorsque $d > h + 1$ et lorsque $h < f_p$.

D'ailleurs, lorsqu'il n'y a pas de places ultramétriques, on se trouve dans la situation étudiée par Ramachandra dans [10].