Werk

Titel: Invarianten quasihomogener vollständiger Durchschnitte.

Autor: Hamm, Helmut A.; Greuel, Gert-M.

Jahr: 1978

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0049|log6

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Inventiones math. 49, 67–86 (1978)

Inventiones mathematicae
© by Springer-Verlag 1978

Invarianten quasihomogener vollständiger Durchschnitte

Gert-Martin Greuel[1] und Helmut A. Hamm[2]

[1] Mathematisches Institut der Universität Bonn, Wegeler Straße 10, D-5300 Bonn
[2] Mathematisches Institut der Universität Münster, Roxeler Straße 64, D-4400 Münster/Westf., Bundesrepublik Deutschland

§ 1. Allgemeines zur Poincaréreihe 68
§ 2. Allgemeines über quasihomogene vollständige Durchschnitte . . 69
§ 3. Numerische Resultate 72
§ 4. Zur semiuniversellen Deformation 78
§ 5. Semi-quasihomogene vollständige Durchschnitte 82
Literatur 86

Ist f ein quasihomogenes Polynom im $\mathbb{C}^n$ mit isolierter Singularität, dann hängt der lokale topologische Typ dieser Singularität nur von den positiven, ganzzahligen Gewichten und von dem quasihomogenen Grad von f ab. Insbesondere lassen sich die Milnorzahl und das charakteristische Polynom der Picard-Lefschetz-Monodromie von f durch die Gewichte und den Grad eindeutig charakterisieren. Dies wurde von J. Milnor und P. Orlik in [6] durchgeführt, und sie erhielten dabei sehr einfache Formeln.

Die vorliegende Arbeit dient unter anderem dazu, ihre Resultate auf vollständige Durchschnitte zu verallgemeinern. Unsere Methode, die auf Resultaten aus [2] beruht, unterscheidet sich jedoch wesentlich von der von Milnor und Orlik. Insbesondere erhalten wir einen einheitlichen Beweis der Formeln für die Milnorzahl und das charakteristische Polynom der Monodromie (Satz 3.7 und Korollar 3.8). Dabei meinen wir die Monodromie des durch die S^1-Aktion definierten Elements in der Fundamentalgruppe des Komplements der Diskriminante. Die sich hierbei ergebenden Formeln wurden von dem zweiten der beiden Autoren schon vor mehreren Jahren auf topologischem Wege gefunden, für den Beweis waren jedoch einschneidende Zusatzvoraussetzungen erforderlich. Die Struktur unserer Formeln ist sehr einfach; es handelt sich stets um einen geeigneten Koeffizienten einer Potenzreihe (in einer Variablen), deren Koeffizienten nur von den Gewichten und den Graden der definierenden Gleichungen abhängen. Da wir vor allem Wert auf Anwendbarkeit der Ergebnisse legen, rechnen wir diese Koeffizienten explizit aus, und zwar auf verschiedene äquivalente Weisen, die jeweils für unterschiedliche Spezialfälle wichtig sind (Korollare 3.9 und 3.10).

0020-9910/78/0049/0067/$04.00

Darüber hinaus betrachten wir die Diskriminante der Abbildung, die den vollständigen Durchschnitt definiert, wie auch die Diskriminante der semiuniversellen Deformation und zeigen, daß eine gewisse Potenz des durch die S^1-Aktion definierten Elements im Zentrum der Fundamentalgruppe des Komplements dieser Diskriminanten liegt (Satz 4.1). Außerdem berechnen wir den quasihomogenen Grad (Satz 4.7) wie auch die gewöhnliche Multiplizität der Diskriminante (Lemma 4.4, 4.5 und Korollar 4.8). Wir bemerken noch, daß für quasihomogene vollständige Durchschnitte positiver Dimension die Dimension des Basisraumes der semiuniversellen Deformation gleich der Milnorzahl ist, wie der erste der beiden Autoren gezeigt hat (unveröffentlicht).

Im letzten Paragraphen zeigen wir, daß fast alle Ergebnisse richtig bleiben, wenn man die definierenden Gleichungen durch Terme höheren quasihomogenen Grades stört. Diese vollständigen Durchschnitte nennen wir nach V.I. Arnold [1], der den Hyperflächenfall behandelt hat, semi-quasihomogen. Insbesondere ändern sich die Milnorzahl und das charakteristische Polynom (bez. eines geeignet zu definierenden Elements in der Fundamentalgruppe des Komplements der Diskriminante) nicht (Satz 5.1 und Korollar 5.3). Die Gleichheit der Multiplizität der Diskriminanten folgt nur unter gewissen Zusatzvoraussetzungen (Satz 5.5).

Ein Teil der Ergebnisse wurde von dem ersten der beiden Autoren ohne Beweise in den Noten des Séminaire F. Norguet (1975–76) veröffentlicht. Die Milnorzahl einiger Spezialfälle, darunter Raumkurven, wurde unabhängig mit ganz anderen Methoden von M. Giusti (Ann. Inst. Fourier 27, 1977) berechnet. Bei der Fertigstellung dieser Arbeit erhielten wir ein Preprint von R. Randell, in dem ebenfalls die Milnorzahl und das charakteristische Polynom der Monodromie berechnet werden, allerdings unter der einschneidenden Voraussetzung, daß alle Funktionen den gleichen quasihomogenen Grad haben.

§ 1. Allgemeines zur Poincaréreihe

Sei $A=\bigoplus_{\nu\in\mathbb{Z}^n} A_\nu$ ein graduierter Vektorraum mit $\dim A_\nu<\infty$ für alle ν. Dann heißt die formale Laurentreihe in n Variablen

$$P_A(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}(\dim A_\nu)\,x^\nu$$

Poincaréreihe von A. Dabei ist $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $x^\nu=x_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\nu_n}$. Die folgenden Eigenschaften sind leicht zu verifizieren:

Lemma 1.1. a) $\dim A=P_A(1,\ldots,1)$, *falls A endlichdimensional ist.*

b) *Ist $0\to A\to B\to C\to 0$ eine exakte Sequenz graduierter Vektorräume, so ist $P_A-P_B+P_C=0$. Dabei wird unter einem Morphismus $\varphi\colon A\to B$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(A_\nu)\subset B_\nu$ für alle ν verstanden.*

c) $P_{A\otimes B}(x,y)=P_A(x)\,P_B(y)$. *Dabei ist $(A\otimes B)_{\mu\nu}=A_\mu\otimes B_\nu$.*

d) *Sei $A^{[l]}$ der Vektorraum A mit der Graduierung $A^{[l]}_\nu=A_{\nu-l}$. Dann ist $P_{A^{[l]}}(x)=x^l P_A(x)$.*

e) *Sei $\psi\colon\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}^r$ linear, A^ψ der Vektorraum A, zusammen mit der Graduierung $A^\psi_\mu=\bigoplus_{\psi(\nu)=\mu} A_\nu$, $\mu\in\mathbb{Z}^r$. Ist A^ψ_μ endlichdimensional für alle μ und sind $a_1,\ldots,a_n$ die Spalten der Matrix von ψ, so ist $P_{A^\psi}(y)=P_A(y^{a_1},\ldots,y^{a_n})$ mit $y=(y_1,\ldots,y_r)$.*

Auch für filtrierte Vektorräume läßt sich die Poincaréreihe einführen. Sei A jetzt ein absteigend filtrierter Vektorraum (mit Indexmenge $\mathbb{Z}$): $A=\bigcup_{\nu\in\mathbb{Z}} A_\nu$ mit $\ldots\supset A_{\nu-1}\supset A_\nu\supset A_{\nu+1}\supset\ldots$ und $\bigcap_{\nu\in\mathbb{Z}} A_\nu=\{0\}$. Die Poincaréreihe von A ist dann diejenige des zugehörigen graduierten Vektorraums $\mathrm{Gr}\,A$ mit $(\mathrm{Gr}\,A)_\nu=A_\nu/A_{\nu+1}$, sofern diese definiert ist. Ein Morphismus $\varphi\colon A\to B$ filtrierter Vektorräume vom Grad l ist eine lineare Abbildung mit $\varphi(A_\nu)\subset B_{\nu+l}$ für alle ν; φ heißt *strikt*, falls für alle ν gilt: $\varphi(A_\nu)=\varphi(A)\cap B_{\nu+l}$. Unter Morphismen (ohne Angabe des Grades) werden solche vom Grad 0 verstanden. Ein Morphismus $\varphi\colon A\to B$ vom Grad l ist nichts anderes als ein Morphismus $\varphi\colon A^{[l]}\to B$ vom Grad 0, wobei $A^{[l]}$ der Vektorraum A mit der Filtrierung $A^{[l]}_\nu=A_{\nu-l}$ ist. Offenbar gilt:

Lemma 1.2. a) *Ist A endlichdimensional, so ist* $\dim A=\dim \mathrm{Gr}\,A$.

b) *Ist $0\to A\to B\to C\to 0$ eine exakte Sequenz filtrierter Vektorräume mit strikten Morphismen, so ist die zugehörige Sequenz $0\to \mathrm{Gr}\,A\to \mathrm{Gr}\,B\to \mathrm{Gr}\,C\to 0$ exakt.*

c) $\mathrm{Gr}(A^{[l]})=(\mathrm{Gr}\,A)^{[l]}$.

§ 2. Allgemeines über quasihomogene vollständige Durchschnitte

Seien $w_1,\ldots,w_m,d_1,\ldots,d_k$ positive ganze Zahlen, und seien $f_1,\ldots,f_k\in\mathbb{C}[z_1,\ldots,z_m]$ Polynome derart, daß f_j *quasihomogen* vom Grad d_j bezüglich der Gewichte $w_1,\ldots,w_m$ ist für $j=1,\ldots,k$. Dies bedeutet, daß f_j eine Linearkombination von Monomen $z_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot z_m^{i_m}$ mit $i_1w_1+\cdots+i_mw_m=d_j$ ist. Es wird vorausgesetzt, daß die Faser von $f=(f_1,\ldots,f_k)\colon\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^k$ über 0 die Dimension $m-k$ hat, also ein vollständiger Durchschnitt ist, und daß sie im Ursprung eine isolierte Singularität besitzt.

Sei $\varepsilon>0$ klein, $\delta>0$ entsprechend klein gewählt, $S=\{s\in\mathbb{C}^k\mid\|s\|<\delta\}$, $X=\{z\in\mathbb{C}^m\mid\|z\|<\varepsilon,\ f(z)\in S\}$, D die Menge der kritischen Werte von $f|X\colon X\to S$, $S'=S-D$. Dann gilt (vgl. [5]):

Satz 2.1. *$f|X-f^{-1}(D)\colon X-f^{-1}(D)\to S'$ definiert ein lokal triviales C^∞-Faserbündel, dessen Fasern F_s den Homotopietyp eines Bouquets von $(m-k)$-dimensionalen Sphären haben.*

Die Anzahl dieser Sphären heißt die *Milnorzahl* μ. Sei χ die Eulercharakteristik von F_s; dann folgt wegen Satz 2.1:

Korollar 2.2. $\chi=1+(-1)^{m-k}\mu$.

Für die Milnorzahl gibt es eine analytische Beschreibung [2], an die wir hier erinnern wollen. Sei $\Omega^\cdot=\{\Omega^p,d\}_{p=0,1,\ldots}$ der Komplex der Keime holomorpher Differentialformen auf $(\mathbb{C}^m,0)$ und $\Omega^\cdot_f$ der Quotientenkomplex, der aus den Keimen relativer holomorpher Differentialformen auf $(\mathbb{C}^m,0)$ besteht:

$$\Omega^p_f=\Omega^p/df_1\wedge\Omega^{p-1}+\cdots+df_k\wedge\Omega^{p-1}.$$

Satz 2.3 ([2] Proposition 4.6). *$\Omega^{m-k}_f/d\Omega^{m-k-1}_f$ ist ein freier $\mathcal{O}_{S,0}$-Modul vom Rang μ für $m>k$ bzw. $\mu+1$ für $m=k$.*

Dabei ist die $\mathcal{O}_{S,0}$-Modul-Struktur natürlich mit Hilfe von f definiert. Wegen dieses Satzes ist μ die Dimension des komplexen Vektorraums

$$V = \Omega_f^{m-k}/d\Omega_f^{m-k-1} + \sum_{j=1}^{k} f_j \Omega_f^{m-k}.$$

Um $\dim V$ zu bestimmen, berechnen wir die Poincaréreihe von V bezüglich einer geeigneten Filtrierung. Diese wird durch die folgende Filtrierung des Komplexes $\Omega^\cdot$ induziert: Ω_q^p sei der $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}$-Untermodul von Ω^p, der von allen Elementen erzeugt wird, die sich in der Form

$$z_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot z_m^{i_m} \frac{dz_{j_1}}{z_{j_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_{j_p}}{z_{j_p}} \quad \text{mit} \quad i_1 w_1 + \cdots + i_m w_m \geqq q, \; i_{j_1}, \ldots, i_{j_p} \geqq 1$$

schreiben lassen. (D.h.: z_i und dz_i erhalten den Grad w_i.)

Die Berechnung von P_V erfolgt im nächsten Paragraphen. Den Ausgangspunkt bilden die Poincaréreihen von Ω^p und von $f^*\mathcal{O}_{S,0}$, wobei $f^*\mathcal{O}_{S,0}$ das Bild von $f^*\colon \mathcal{O}_{S,0} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0} = \Omega^0$ bezeichnet. Um Lemma 1.1b) anwenden zu können, muß V mit Ω^p und $f^*\mathcal{O}_{S,0}$ durch exakte Sequenzen in einen Zusammenhang gebracht werden. Um bezüglich k induktiv vorgehen zu können, setzen wir in Satz 2.4 nicht voraus, daß $f^{-1}(0)$ im Ursprung eine isolierte Singularität besitzt. Sein $\mathrm{Sing}(f)$ die Menge der kritischen Punkte von f. Für $k>0$ sei $f' = (f_1, \ldots, f_{k-1})$, also $\Omega_{f'}^p = \Omega^p/df_1 \wedge \Omega^{p-1} + \cdots + df_{k-1} \wedge \Omega^{p-1}$.

Satz 2.4. *Ist $k>0$ und $p \leqq m - \dim \mathrm{Sing}(f)$, so ist*

$$0 \to \Omega_{f'}^0 \xrightarrow{df_k \wedge \ldots} \Omega_{f'}^1 \xrightarrow{df_k \wedge \ldots} \cdots \xrightarrow{df_k \wedge \ldots} \Omega_{f'}^p \to \Omega_f^p \to 0$$

exakt. Dabei ist die Multiplikation mit df_k strikt vom Grad d_k, und die Quotientenabbildung $\Omega_{f'}^p \to \Omega_f^p$ ist strikt vom Grad 0.

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus einer Verallgemeinerung eines Lemmas von de Rham ([2] Lemma 1.6). Die Striktheit ist einfach zu beweisen.

Wir setzen von nun an wieder voraus, daß $f^{-1}(0)$ in 0 eine isolierte Singularität hat. Dann ist $\dim \mathrm{Sing}(f) = k-1$.

Satz 2.5. *Ist $m>k$, so hat man eine exakte Sequenz strikter Morphismen*

$$0 \to f^*\mathcal{O}_{S,0} \hookrightarrow \Omega_f^0 \xrightarrow{d} \Omega_f^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega_f^{m-k} \to \Omega_f^{m-k}/d\Omega_f^{m-k-1} \to 0.$$

Beweis. Vgl. [2] Satz 2.7.

Proposition 2.6. *Sei*

$$V^\kappa = \Omega_f^{m-k}/d\Omega_f^{m-k-1} + \sum_{j=1}^{\kappa} f_j \Omega_f^{m-k},$$

dann ist $0 \to V^{\kappa-1} \xrightarrow{f_\kappa} V^{\kappa-1} \to V^\kappa \to 0$ für $1 \leqq \kappa \leqq k$ exakt. Dabei ist die Quotientenabbildung $V^{\kappa-1} \to V^\kappa = V^{\kappa-1}/f_\kappa V^{\kappa-1}$ strikt vom Grad 0 und f_κ strikt vom Grad d_κ.

Beweis. Dies folgt aus Satz 2.3.

Damit ist der Weg zur Berechnung der Poincaréreihe von V skizziert. Mit Hilfe von P_V läßt sich nun nicht nur die Milnorzahl, sondern noch eine weitere wichtige Invariante bestimmen. Wegen Satz 2.1 operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(S', s)$ auf der reduzierten Kohomologiegruppe $\tilde{H}^{m-k}(F_s; \mathbb{C})$. Die so definierte Gruppenaktion heißt Picard-Lefschetz-Monodromie. Wir berücksichtigen nun die Voraussetzung, daß $f_1, \ldots, f_k$ quasihomogen sind, und führen auf X und S die folgenden S^1-Aktionen ein: $\alpha \circ (z_1, \ldots, z_m) := (\alpha^{w_1} z_1, \ldots, \alpha^{w_m} z_m)$, $\alpha \circ (s_1, \ldots, s_k) := (\alpha^{d_1} s_1, \ldots, \alpha^{d_k} s_k)$ für $\alpha \in S^1 \subset \mathbb{C}$, $(z_1, \ldots, z_m) \in X$, $(s_1, \ldots, s_k) \in S$. Dann gilt offenbar:

Lemma 2.7. *$f | X \to S$ ist äquivariant.*

Daher ist D invariant, und die Einschränkung der S^1-Aktion auf S' ist wohldefiniert. Für $s \in S'$ können wir daher den folgenden *kanonischen geschlossenen Weg* γ_s in S' betrachten:

$$\gamma_s(\tau) := e^{2\pi i \tau/d} \circ s, \qquad 0 \leqq \tau \leqq 1.$$

Dabei sei d der größte gemeinsame Teiler von $d_1, \ldots, d_k$. Die Picard-Lefschetz-Monodromie ergibt für $[\gamma_s] \in \pi_1(S', s)$ einen Endomorphismus $\tilde{h}_s$ von $\tilde{H}^{m-k}(F_s; \mathbb{C})$.

Lemma 2.8. a) *Die Restklasse von γ_s in $\pi_1(S', s)/[\pi_1(S', s), \pi_1(S', s)] \cong H_1(S'; \mathbb{Z})$ hängt nicht von s ab.*

b) *Das charakteristische Polynom von $\tilde{h}_s$ hängt nicht von s ab.*

c) *$\tilde{h}_s$ wird durch die Abbildung $F_s \to F_s$ mit $z \mapsto e^{2\pi i/d} \circ z$ induziert.*

Beweis. a) Wie üblich entspricht γ_s einer auf S^1 definierten Abbildung; deren Homotopieklasse hängt offensichtlich nicht von s ab.

b) folgt aus a); c) folgt mit Hilfe von Lemma 2.7.

Im nächsten Paragraphen wird nun außer der Milnorzahl der Divisor $\tilde{\Delta} \in \mathbb{Z}[\mathbb{C}^*]$ des charakteristischen Polynoms von $\tilde{h}_s$ berechnet. Gleichbedeutend damit ist die Bestimmung der alternierenden Summe $\Delta = \sum_{p=0}^{2m-2k} (-1)^p \Delta^p$, wobei Δ^p den Divisor des charakteristischen Polynoms für den Endomorphismus von $H^p(F_s; \mathbb{C})$ bezeichnet, der durch $z \mapsto e^{2\pi i/d} \circ z$ ($z \in F_s$) induziert wird. Wegen Satz 2.1 gilt:

Proposition 2.9. $\Delta = \langle 1 \rangle + (-1)^{m-k} \tilde{\Delta}$.

Dabei bezeichnet allgemein $\langle c_1 \rangle + \cdots + \langle c_\mu \rangle \in \mathbb{Z}[\mathbb{C}^*]$ den Divisor des Polynoms $(x - c_1) \cdot \ldots \cdot (x - c_\mu) \in \mathbb{C}[x]$.

Um $\tilde{\Delta}$ oder Δ zu berechnen, genügt es natürlich, Δ^{m-k} zu bestimmen; es ist $\Delta^{m-k} = \tilde{\Delta}$ für $m > k$ und $\Delta^{m-k} = \tilde{\Delta} + \langle 1 \rangle$ für $m = k$.

Satz 2.10. $\Delta^{m-k} = P_V(\langle e^{2\pi i/d} \rangle)$.

Beweis. Für $(\mathrm{Gr}\, V)_q$ läßt sich eine Basis finden, die durch Differentialformen $\omega_{q1}, \ldots, \omega_{qr_q}$, $r_q = \dim(\mathrm{Gr}\, V)_q$, der Gestalt

$$z_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot z_m^{i_m} \frac{dz_{j_1}}{z_{j_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{dz_{j_{m-k}}}{z_{j_{m-k}}} \quad \text{mit} \quad i_1 w_1 + \cdots + i_m w_m = q,$$

$i_{j_1}, \ldots, i_{j_{m-k}} \geqq 1$ repräsentiert wird. Durchläuft q die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$, so erhält man Repräsentanten einer Basis von V und damit auch von $H^{m-k}(F_s; \mathbb{C})$, wenn $s \in S'$ genügend klein ist. Andererseits geht ω_{qv} unter der Transformation $z \mapsto e^{2\pi i/d} \circ z$ in $e^{2\pi i q/d}\, \omega_{qv}$ über, $v = 1, \ldots, r_q$.

Bemerkung. d war als gemeinsamer Teiler von $d_1, \ldots, d_k$ gewählt worden, damit $\tau \mapsto e^{2\pi i \tau/d} \circ s$, $\tau \in [0, 1]$, einen geschlossenen Weg definiert. Gibt es Punkte s in S', für die nicht alle Koordinaten von Null verschieden sind, so braucht d lediglich Teiler derjenigen d_κ zu sein, für die die entsprechende Koordinate s_κ von s von Null verschieden ist. Satz 2.10 bleibt dann richtig.

§ 3. Numerische Resultate

Unter Verwendung der Bezeichnungen aus § 2 soll gezeigt werden:

Satz 3.1.

$$P_V(x) = \operatorname{res}_{t=0} \frac{t^{-m+k-1}}{t+1} \left[\prod_{v=1}^{m} \frac{1+t\,x^{w_v}}{1-x^{w_v}} \prod_{\kappa=1}^{k} \frac{1-x^{d_\kappa}}{1+t\,x^{d_\kappa}} + t \right].$$

Der Beweis erfolgt in mehreren Etappen. Wir lassen in Lemma 3.2 bis Lemma 3.4 die Voraussetzung fallen, daß $f^{-1}(0)$ im Ursprung eine isolierte Singularität besitzt, und berechnen zunächst $P_{\Omega^p}(x)$.

Lemma 3.2. $P_{\Omega^p}(x) = \operatorname{res}_{t=0} t^{-p-1} \prod_{v=1}^{m} \dfrac{1+t\,x^{w_v}}{1-x^{w_v}}$.

Beweis. Sei $\tilde{\Omega} = \bigoplus_{p \geqq 0} \tilde{\Omega}^p$ der Ring der Differentialformen auf $\mathbb{C}^m$ mit Polynomen als Koeffizienten. Wir führen auf $\tilde{\Omega}$ eine Graduierung ein; unter Benutzung des Tensorproduktes genügt es, diese für den Fall $m = 1$ anzugeben. Dann sei $\tilde{\Omega} = \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} \tilde{\Omega}_{pq}$; für $q \geqq 0$ sei $\tilde{\Omega}_{0q}$ der von z^q, $\tilde{\Omega}_{1,q+1}$ der von $z^q\, dz$ erzeugte Untervektorraum; für $p \neq 0, 1$ oder $q < p$ sei $\tilde{\Omega}_{pq} = 0$. Offenbar ist in diesem Fall

$$P_{\tilde{\Omega}}(t, x) = \frac{1}{1-x} + t\frac{x}{1-x} = \frac{1+t\,x}{1-x}.$$

Für beliebiges m ergibt sich nach Lemma 1.1 c):

$$P_{\tilde{\Omega}}(t_1, x_1, \ldots, t_m, x_m) = \prod_{v=1}^{m} \frac{1+t_v\,x_v}{1-x_v}.$$

Sei $\psi : \mathbb{Z}^{2m} \to \mathbb{Z}^2$ definiert durch $\psi(p_1, q_1, \ldots, p_m, q_m) = (p_1 + \cdots + p_m, w_1 q_1 + \cdots + w_m q_m)$. Nach Lemma 1.1 e) gilt:

$$P_{\tilde{\Omega}^\psi}(t, x) = P_{\tilde{\Omega}}(t, x^{w_1}, \ldots, t, x^{w_m}) = \prod_{v=1}^{m} \frac{1+t\,x^{w_v}}{1-x^{w_v}}.$$

Legt man auf Ω^p die in § 2 definierte Filtrierung zugrunde, so gilt offenbar: $\tilde{\Omega}^\psi_{pq} = \operatorname{Gr}_q \Omega^p$. Damit ist Lemma 3.2 bewiesen.

Lemma 3.3. $P_{f^*\mathcal{O}_{S,0}}(x)=\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{1}{1-x^{d_\kappa}}$.

Beweis. Es ist die Poincaréreihe von $\mathbb{C}[f_1,\ldots,f_k]$ zu berechnen. Dies geht wie in Lemma 3.2, wenn man dort $p=0$ setzt.

Lemma 3.4. *Für* $p\leqq m-\dim \mathrm{Sing}(f)$ *ist*

$$P_{\Omega_f^p}(x)=\mathrm{res}_{t=0}\,t^{-p-1}\prod_{\nu=1}^{m}\frac{1+t\,x^{w_\nu}}{1-x^{w_\nu}}\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{1}{1+t\,x^{d_\kappa}}.$$

Beweis. Durch Induktion über k. $k=0$: vgl. Lemma 3.2. Schluß von $k-1$ auf k: Wir verwenden die exakte Sequenz aus Satz 2.4. Ist $q\leqq p\leqq m-\dim \mathrm{Sing}(f)$, so läßt sich auf $\Omega_{f'}^q$ die Induktionsvoraussetzung anwenden, denn es ist $\mathrm{Sing}(f')\subset\mathrm{Sing}(f)$ für $k\geqq 2$. Wegen Lemma 1.1, 1.2 und Satz 2.4 gilt daher:

$$P_{\Omega_f^p}(x)=\mathrm{res}_{t=0}\,t^{-p-1}\prod_{\nu=1}^{m}\frac{1+t\,x^{w_\nu}}{1-x^{w_\nu}}\prod_{\kappa=1}^{k-1}\frac{1}{1+t\,x^{d_\kappa}}\sum_{\nu=0}^{p}(-t\,x^{d_\kappa})^\nu.$$

Hieraus folgt die Behauptung, denn es ist

$$\sum_{\nu=0}^{p}(-t\,x^{d_\kappa})^\nu=\frac{1-(-t\,x^{d_\kappa})^{p+1}}{1+t\,x^{d_\kappa}}\equiv\frac{1}{1+t\,x^{d_\kappa}}\ \mathrm{mod}(t^{p+1}).$$

Von nun ab wird wieder vorausgesetzt, daß $f^{-1}(0)$ in 0 eine isolierte Singularität besitzt.

Lemma 3.5.

$$P_{\Omega_f^{m-k}/d\Omega_f^{m-k-1}}(x)=\mathrm{res}_{t=0}\frac{t^{-m+k-1}}{1+t}\left[\prod_{\nu=1}^{m}\frac{1+t\,x^{w_\nu}}{1-x^{w_\nu}}\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{1}{1+t\,x^{d_\kappa}}+t\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{1}{1-x^{d_\kappa}}\right].$$

Beweis. Für $m=k$ ist $\Omega_f^{m-k}/d\Omega_f^{m-k-1}=\Omega_f^{m-k}$, also folgt die Behauptung aus Lemma 3.4 wegen $\frac{1}{1+t}\equiv 1\ \mathrm{mod}(t)$. Für $m>k$ verwenden wir die exakte Sequenz aus Satz 2.5, bei der alle Homomorphismen strikt vom Grad 0 sind. Wegen Lemma 3.3 und 3.4 folgt:

$$P_{\Omega_f^{m-k}/d\Omega_f^{m-k-1}}(x)$$
$$=\left[\mathrm{res}_{t=0}\,t^{-m+k-1}\prod_{\nu=1}^{m}\frac{1+t\,x^{w_\nu}}{1-x^{w_\nu}}\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{1}{1+t\,x^{d_\kappa}}\sum_{\nu=0}^{m-k}(-t)^\nu\right]-(-1)^{m-k}\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{1}{1-x^{d_\kappa}}.$$

Nun ist

$$\sum_{\nu=0}^{m-k}(-t)^\nu\equiv\frac{1}{1+t}\ \mathrm{mod}(t^{m-k+1})\quad\text{und}\quad-(-1)^{m-k}=\mathrm{res}_{t=0}\frac{t^{-m+k-1}}{1+t}\cdot t.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Beweis von Satz 3.1. Aus Proposition 2.6 folgt:

$$P_{V_j}(x)=P_{V_{j-1}}(x)\,(1-x^{d_j}),\qquad j=1,\ldots,k.$$

Daher ist

$$P_V(x)=P_{\Omega_f^{m-k}/d\Omega_f^{m-k-1}}(x)\prod_{j=1}^{k}(1-x^{d_j}).$$

Mit Hilfe von Lemma 3.5 ergibt sich daher die Behauptung.

Im Hinblick auf die Berechnung von μ und χ (vgl. Korollar 2.2 und Satz 2.3) sowie von Δ und $\tilde{\Delta}$ (vgl. Proposition 2.9) ist die folgende Definition zweckmäßig:

$$P(x):=\begin{cases}P_V(x) & \text{für } m>k\\ P_V(x)-1 & \text{für } m=k,\end{cases}\qquad Q(x):=1+(-1)^{m-k}P(x).$$

Offensichtlich gilt dann (vgl. Satz 2.10):

Lemma 3.6. $\mu=P(1)$, $\chi=Q(1)$, $\tilde{\Delta}=P(\langle e^{2\pi i/d}\rangle)$, $\Delta=Q(\langle e^{2\pi i/d}\rangle)$.

Satz 3.7.

a)
$$\begin{aligned}Q(x)&=\operatorname{res}_{t=0}\frac{t^{-m+k-1}}{1+t}\prod_{\nu=1}^{m}\frac{t\,x^{w_\nu}+1}{x^{w_\nu}-1}\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{x^{d_\kappa}-1}{t\,x^{d_\kappa}+1}\\&=\operatorname{res}_{\tau=0}\tau^{-m+k-1}\prod_{\nu=1}^{m}\frac{1+\tau(x^{w_\nu}-1)}{x^{w_\nu}-1}\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{x^{d_\kappa}-1}{1+\tau(x^{d_\kappa}-1)}\\&=\operatorname{res}_{\xi=0}\xi^{-m+k-1}\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{x-1}{x^{w_\nu}-1}+\xi\right)\prod_{\kappa=1}^{k}\left(\frac{x-1}{x^{d_\kappa}-1}+\xi\right)^{-1}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}P(x)&=\sum_{s_0\in\mathbb{C}(x)-\{-1\}}\operatorname{res}_{s=s_0}\frac{1}{1+s}\prod_{\nu=1}^{m}\frac{s+x^{w_\nu}}{1-x^{w_\nu}}\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{1-x^{d_\kappa}}{s+x^{d_\kappa}}\\&=\sum_{\sigma_0\in\mathbb{C}(x)-\{0\}}\operatorname{res}_{\sigma=\sigma_0}\frac{1}{\sigma}\prod_{\nu=1}^{m}\frac{\sigma-(x^{w_\nu}-1)}{x^{w_\nu}-1}\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{x^{d_\kappa}-1}{\sigma-(x^{d_\kappa}-1)}\\&=\sum_{\zeta_0\in\mathbb{C}(x)-\{0\}}\operatorname{res}_{\zeta=\zeta_0}\frac{1}{\zeta}\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{x-1}{x^{w_\nu}-1}\zeta-1\right)\prod_{\kappa=1}^{k}\left(\frac{x-1}{x^{d_\kappa}-1}\zeta-1\right)^{-1}\end{aligned}$$

c)
$$\chi=\operatorname{res}_{\xi=0}\xi^{-m+k-1}\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{1}{w_\nu}+\xi\right)\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{1}{\frac{1}{d_\kappa}+\xi}$$

$$\mu=\sum_{\zeta_0\in\mathbb{C}-\{0\}}\operatorname{res}_{\zeta=\zeta_0}\frac{1}{\zeta}\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{\zeta}{w_\nu}-1\right)\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{1}{\zeta/d_\kappa-1}$$

d)
$$\Delta=\operatorname{res}_{\xi=0}\xi^{-m+k-1}\prod_{\nu=1}^{m}(\xi+v_\nu^{-1}\Lambda_{u_\nu})\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{1}{d/d_\kappa+\xi}$$

$$\tilde{\Delta}=\sum_{\zeta_0\in\mathbb{C}-\{0\}}\operatorname{res}_{\zeta=\zeta_0}\frac{1}{\zeta}\prod_{\nu=1}^{m}(v_\nu^{-1}\Lambda_{u_\nu}\zeta-1)\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{1}{\zeta\dfrac{d}{d_\kappa}-1}.$$

Dabei ist $u_\nu, v_\nu\in\mathbb{N}$ *mit* $d/w_\nu=u_\nu/v_\nu$, $(u_\nu,v_\nu)=1$; Λ_n *ist der Divisor des Polynoms* x^n-1, *und das neutrale Element* $\langle 1\rangle\in\mathbb{Z}[\mathbb{C}^*]$ *ist einfach* 1 *geschrieben.*

Beweis. Die erste Gleichung unter a) folgt unmittelbar aus Satz 3.1; b) folgt aus a) mit Hilfe des Residuensatzes. Weiterhin werden in a) und b) die Substitutionen $\tau=\frac{t}{1+t}$, $\xi=\tau(x-1)$, $s=\frac{1}{t}$, $\sigma=-(s+1)=-\frac{1}{\tau}$, $\zeta=\frac{\sigma}{x-1}=-\frac{1}{\xi}$ verwendet. Setzt man in den für P und Q an letzter Stelle angegebenen Formeln $x=1$, so erhält man c); vgl. Lemma 3.6. In analoger Weise erhält man für $x=\langle e^{2\pi i/d}\rangle$ die Formeln unter d), jedoch geht man hierbei von den Formeln für P und Q aus, die sich bei der Substitution $\tilde{\xi}=\tau(x^d-1)$, $\tilde{\zeta}=-\frac{1}{\tilde{\xi}}$ ergeben:

$$Q(x)=\operatorname{res}_{\tilde{\xi}=0}\tilde{\xi}^{-m+k-1}\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{x^d-1}{x^{w_\nu}-1}+\tilde{\xi}\right)\prod_{\kappa=1}^{k}\left(\frac{x^d-1}{x^{d_\kappa}-1}+\tilde{\xi}\right)^{-1},$$

$$P(x)=\sum_{\tilde{\zeta}_0\in\mathbb{C}(x)-\{0\}}\operatorname{res}_{\tilde{\zeta}=\tilde{\zeta}_0}\frac{1}{\tilde{\zeta}}\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{x^d-1}{x^{w_\nu}-1}\tilde{\zeta}-1\right)\prod_{\kappa=1}^{k}\left(\frac{x^d-1}{x^{d_\kappa}-1}\tilde{\zeta}-1\right)^{-1}.$$

Es ist

$$\frac{x^{d_\kappa}-1}{x^d-1}=\sum_{\nu=0}^{d_\kappa/d-1}x^{\nu d},\qquad \frac{x^d-1}{x^{w_\nu}-1}=\left(\frac{x^{dv_\nu}-1}{x^d-1}\right)^{-1}\frac{x^{u_\nu w_\nu}-1}{x^{w_\nu}-1}.$$

Aus $\frac{x^{d_\kappa}-1}{x^d-1}$, $\frac{x^{dv_\nu}-1}{x^d-1}$ und $\frac{x^{u_\nu w_\nu}-1}{x^{w_\nu}-1}$ erhält man für $x=\langle e^{2\pi i/d}\rangle$ gerade $\frac{d_\kappa}{d}\cdot\langle 1\rangle$, $v_\nu\cdot\langle 1\rangle$ sowie Λ_{u_ν}.

Die Residuen in Satz 3.7 lassen sich leicht berechnen. Es gilt:

$$\prod_{\nu=1}^{m}(1+y_\nu\zeta)=\sum_{\lambda=0}^{m}W_\lambda(y_1,\ldots,y_m)\zeta^\lambda,$$

wobei

$$W_\lambda(y_1,\ldots,y_m)=\sum_{1\leqq\nu_1<\cdots<\nu_\lambda\leqq m}y_{\nu_1}\cdot\ldots\cdot y_{\nu_\lambda},\qquad W_0:=1$$

das λ-te elementarsymmetrische Polynom in $y_1,\ldots,y_m$ ist. Außerdem gilt:

$$\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{1}{1+z_\kappa\zeta}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda D_\lambda(z_1,\ldots,z_k)\zeta^\lambda,$$

wobei D_λ das folgende symmetrische Polynom vom Grad λ in $z_1,\ldots,z_k$ ist:

$$D_\lambda(z_1,\ldots,z_k)=\sum_{\substack{\nu_1,\ldots,\nu_k\geqq 0\\ \nu_1+\cdots+\nu_k=\lambda}}z_1^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot z_k^{\nu_k}.$$

Aus Satz 3.7 folgt daher

Korollar 3.8.

a) $$Q(x)=\prod_{\nu=1}^{m}\frac{x-1}{x^{w_\nu}-1}\prod_{\kappa=1}^{k}\frac{x^{d_\kappa}-1}{x-1}\sum_{\lambda=0}^{m-k}(-1)^\lambda D_\lambda\left(\frac{x^{d_1}-1}{x-1},\ldots,\frac{x^{d_k}-1}{x-1}\right)$$
$$\cdot W_{m-k-\lambda}\left(\frac{x^{w_1}-1}{x-1},\ldots,\frac{x^{w_m}-1}{x-1}\right),$$

b) $$\chi=\frac{d_1\cdot\ldots\cdot d_k}{w_1\cdot\ldots\cdot w_m}\sum_{\lambda=0}^{m-k}(-1)^\lambda D_\lambda(d_1,\ldots,d_k)\,W_{m-k-\lambda}(w_1,\ldots,w_m),$$

c) $$\Delta=\frac{d_1}{d}\cdot\ldots\cdot\frac{d_k}{d}\sum_{\lambda=0}^{m-k}(-1)^\lambda D_\lambda\left(\frac{d_1}{d},\ldots,\frac{d_k}{d}\right)W_{k+\lambda}(v_1^{-1}\Lambda_{u_1},\ldots,v_m^{-1}\Lambda_{u_m}).$$

Für die Spezialfälle $w_1=\cdots=w_m=1$ *bzw.* $d_1=\cdots=d_k=d$ *verwendet man die Formeln* $W_\lambda(y,\ldots,y)=\binom{m}{\lambda}y^\lambda$ *bzw.* $D_\lambda(z,\ldots,z)=\binom{k+\lambda-1}{\lambda}z^\lambda$.

Die Berechnung der Residuen für P, μ und $\tilde{\Delta}$ hängt wesentlich davon ab, ob die Grade $d_1,\ldots,d_k$ voneinander verschieden sind oder nicht. Seien $d_1,\ldots,d_k$ der Größe nach wie folgt numeriert:

$$d_1=\cdots=d_{k_1}<d_{k_1+1}=\cdots=d_{k_2}<d_{k_2+1}=\cdots<d_{k_{r-1}+1}=\cdots=d_{k_r}$$

mit $k_r=k$, $k_0:=0$, $h_\rho:=k_\rho-k_{\rho-1}-1$ für $\rho=1,\ldots,r$.

Außerdem setzen wir zur Abkürzung

$$D_{\lambda,\kappa}(z_1,\ldots,z_\kappa)=(-1)^\lambda z_1\cdot\ldots\cdot z_\kappa D_\lambda(z_1,\ldots,z_\kappa),\qquad D_{0,0}=1,\ D_{\lambda,0}=0\ \text{für}\ \lambda>0.$$

Korollar 3.9.

a) $$P(x)=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\lambda+\sigma+\nu=h_\rho}\binom{m-k+\lambda}{m-k}W_{m-\sigma}\left(\frac{x^{d_{k_\rho}}-x^{w_1}}{x^{w_1}-1},\ldots,\frac{x^{d_{k_\rho}}-x^{w_m}}{x^{w_m}-1}\right)$$
$$\cdot D_{\nu,k-h_\rho-1}\left(\frac{x^{d_1}-1}{x^{d_{k_\rho}}-x^{d_1}},\ldots,\frac{x^{d_{k_\rho-1}}-1}{x^{d_{k_\rho}}-x^{d_{k_\rho-1}}},\frac{x^{d_{k_\rho+1}}-1}{x^{d_{k_\rho}}-x^{d_{k_\rho+1}}},\ldots,\frac{x^{d_k}-1}{x^{d_{k_\rho}}-x^{d_k}}\right)$$

b) $$\mu=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\lambda+\sigma+\nu=h_\rho}\binom{m-k+\lambda}{m-k}W_{m-\sigma}\left(\frac{d_{k_\rho}}{w_1}-1,\ldots,\frac{d_{k_\rho}}{w_m}-1\right)$$
$$\cdot D_{\nu,k-h_\rho-1}\left(\frac{d_1}{d_{k_\rho}-d_1},\ldots,\frac{d_{k_\rho-1}}{d_{k_\rho}-d_{k_\rho-1}},\frac{d_{k_\rho+1}}{d_{k_\rho}-d_{k_\rho+1}},\ldots,\frac{d_k}{d_{k_\rho}-d_k}\right)$$
$$=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\lambda+\sigma+\nu=h_\rho}\frac{d_1\cdot\ldots\cdot d_k}{w_1\cdot\ldots\cdot w_m}d_{k_\rho}^{m-k}(-1)^\lambda W_{m-\sigma}\left(1-\frac{w_1}{d_{k_\rho}},\ldots,1-\frac{w_m}{d_{k_\rho}}\right)$$
$$\cdot D_{\nu,k-h_\rho-1}\left(\frac{d_{k_\rho}}{d_{k_\rho}-d_1},\ldots,\frac{d_{k_\rho}}{d_{k_\rho}-d_{k_\rho-1}},\frac{d_{k_\rho}}{d_{k_\rho}-d_{k_\rho+1}},\ldots,\frac{d_{k_\rho}}{d_{k_\rho}-d_k}\right)$$

c) $$\tilde{\Delta}=\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\lambda+\sigma+\nu=h_\rho}\binom{m-k+\lambda}{m-k}W_{m-\sigma}\left(\frac{d_{k_\rho}}{v_1 d}\Lambda_{u_1}-1,\ldots,\frac{d_{k_\rho}}{v_m d}\Lambda_{u_m}-1\right)$$
$$\cdot D_{\nu,k-h_\rho-1}\left(\frac{d_1}{d_{k_\rho}-d_1},\ldots,\frac{d_{k_\rho-1}}{d_{k_\rho}-d_{k_\rho-1}},\frac{d_{k_\rho+1}}{d_{k_\rho}-d_{k_\rho+1}},\ldots,\frac{d_k}{d_{k_\rho}-d_k}\right).$$

Beweis. Es sind die Residuen an den Stellen $\zeta=\zeta_\rho$ mit $\zeta_\rho=\frac{x^{d_{k_\rho}}-1}{x-1}$, $\rho=1,\ldots,r$, zu berechnen. Substituiert man in den einzelnen Summanden $\vartheta=\frac{\zeta-\zeta_\rho}{\zeta}$, so er-

hält man

$$P(x)=\sum_{\rho=1}^{r}\operatorname{res}_{\vartheta=0}(1-\vartheta)^{k-m-1}\prod_{\nu=1}^{m}\left(\vartheta-1+\frac{x^{d_{k_\rho}}-1}{x^{w_\nu}-1}\right)\prod_{\kappa=1}^{k}\left(\vartheta-1+\frac{x^{d_{k_\rho}}-1}{x^{d_\kappa}-1}\right)^{-1}.$$

Durch Entwicklung in Laurentreihen erhält man a), durch Einsetzen von $x=1$ und $x=\langle e^{2\pi i/d}\rangle$ erhält man die erste Formel unter b) sowie diejenige unter c). Substituiert man bei Satz 3.7 c) $\eta=\dfrac{\zeta}{d_{k_\rho}}-1$, so ergibt sich

$$\mu=\sum_{\rho=1}^{r}\frac{d_1\cdot\ldots\cdot d_k}{w_1\cdot\ldots\cdot w_m}d_{k_\rho}^{m-k}\operatorname{res}_{\eta=0}\frac{1}{1+\eta}\prod_{\nu=1}^{m}\left(\eta+1-\frac{w_\nu}{d_{k_\rho}}\right)\prod_{\kappa=1}^{k}\left(\eta+\frac{d_{k_\rho}-d_\kappa}{d_{k_\rho}}\right)^{-1}.$$

Durch Entwicklung in Laurentreihen gelangt man zur zweiten Formel unter b).

Hieraus ergeben sich einfache Formeln für wichtige Spezialfälle:

Korollar 3.10.

a) $k=1$ (Milnor, Orlik [6]):

$$\mu=\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{d}{w_\nu}-1\right),\qquad \tilde{\Delta}=\prod_{\nu=1}^{m}(v_\nu^{-1}\Lambda_{u_\nu}-1).$$

b) $d_1=\cdots=d_k=d$:

$$\mu=\sum_{\substack{m-k+1\leqq l\leqq m\\ 1\leqq\nu_1<\cdots<\nu_l\leqq m}}\binom{l-1}{m-k}\prod_{\lambda=1}^{l}\left(\frac{d}{w_{\nu_\lambda}}-1\right)$$

$$=(-1)^{m-k+1}+(-1)^{m-k}\frac{d^m}{w_1\cdot\ldots\cdot w_m}\sum_{\substack{0\leqq l\leqq m-k\\ 1\leqq\nu_1<\cdots<\nu_l\leqq m}}(-1)^l\prod_{\lambda=1}^{l}\left(1-\frac{w_{\nu_\lambda}}{d}\right)$$

$$\tilde{\Delta}=\sum_{\substack{m-k+1\leqq l\leqq m\\ 1\leqq\nu_1<\cdots<\nu_l\leqq m}}\binom{l-1}{m-k}\prod_{\lambda=1}^{l}(v_{\nu_\lambda}^{-1}\Lambda_{u_{\nu_\lambda}}-1).$$

c) $d_i\neq d_j$ für $i\neq j$:

$$\mu=\sum_{\rho=1}^{k}\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{d_\rho}{w_\nu}-1\right)\prod_{\substack{\kappa=1\\ \kappa\neq\rho}}^{k}\left(\frac{1}{\frac{d_\rho}{d_\kappa}-1}\right),$$

$$\tilde{\Delta}=\sum_{\rho=1}^{k}\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{d_\rho}{dv_\nu}\Lambda_{u_\nu}-1\right)\prod_{\substack{\kappa=1\\ \kappa\neq\rho}}^{k}\left(\frac{1}{\frac{d_\rho}{d_\kappa}-1}\right).$$

In dem Spezialfall von Brieskorn-Polynomen entspricht die erste Formel für μ in 3.10b) gerade Satz 4.2 in [4].

§ 4. Zur semiuniversellen Deformation

Es gelten die gleichen Voraussetzungen, die zu Beginn von § 2 gemacht wurden.

Es sei F: $(\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^p, 0) \to (\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^p, 0)$ die semiuniverselle Deformation der Faser von f: $(\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$, die wie folgt definiert ist: Seien g_i^j $(i=1, \ldots, k,$ $j=1, \ldots, p)$ holomorphe Funktionen in einer Umgebung von 0 in $\mathbb{C}^m$, so daß $(g_1^j, \ldots, g_k^j)$ eine $\mathbb{C}$-Basis des p-dimensionalen Vektorraumes

$$M = M_f = (m_{\mathbb{C}^m, 0})^k \Big/ \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_\nu}, \ldots, \frac{\partial f_k}{\partial z_\nu}\right) \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m, 0} + \sum_{i=1}^{k} f_i (\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m, 0})^k$$

repräsentieren, dann ist F definiert durch

$$\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^p \ni (x, t) \mapsto (F_1(x, t), \ldots, F_k(x, t), t) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^p$$

mit

$$F_i(x, t) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{p} t_j g_i^j(x).$$

Hierbei bezeichnet $m_{\mathbb{C}^m, 0}$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m, 0}$, und grundsätzlich setzen wir – wenn von der semiuniversellen Deformation die Rede ist – ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraus, daß die Funktionalmatrix von f in 0 verschwindet.

Bemerkung. Sei $\tau = k + p$ die Dimension des Basisraumes der semiuniversellen Deformation. Wie der erste der beiden Autoren mit völlig anderen als den hier verwendeten Methoden gezeigt hat, gilt $\tau = \mu$ für $m > k$ (und quasihomogene $f_1, \ldots, f_k$). Die in § 3 gefundenen Formeln lassen sich also auch zur Berechnung von τ verwenden.

F ist in einer kleinen Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^p$ definiert. Seien $0 < \delta, \delta' \ll \varepsilon$ hinreichend klein, $S = \{s \in \mathbb{C}^k \mid \|s\| < \delta\}$, $T = \{t \in \mathbb{C}^p \mid \|t\| < \delta'\}$, $B = \{x \in \mathbb{C}^m \mid \|x\| < \varepsilon\}$, $Y = B \times T \cap F^{-1}(S \times T)$ und F: $Y \to S \times T$ die Einschränkung. $D(F) \subset S \times T$ bezeichne die Menge der kritischen Werte von F. Dann können wir die in § 2 definierten S^1-Aktionen so auf Y und $S \times T$ erweitern, daß F äquivariant und daher $D(F)$ invariant wird:

Durch die Filtrierung $(\mathcal{O}^k_{\mathbb{C}^m, 0})_q := \bigoplus_{i=1}^{k} (\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m, 0})_{q + d_i}$ wird auf M eine Filtrierung induziert, und da M endlichdimensional ist, gilt $M \cong \mathrm{Gr}\, M$. Wir können daher eine Basis von M so wählen, daß die Funktionen g_i^j Monome vom Grad $q_j + d_i$ (bez. $w_1, \ldots, w_m$) sind, mit geeigneten $q_j \in \mathbb{Z}$. Geben wir der Variablen t_j das Gewicht $-q_j$, $j = 1, \ldots, p$, dann sind die Komponenten $F_1, \ldots, F_k, t_1, \ldots, t_p$ von F quasihomogene Polynome vom Grad $d_1, \ldots, d_k, -q_1, \ldots, -q_p$ (wobei jetzt allerdings eventuell auch Gewichte $-q_j$ zugelassen werden müssen, die nicht positiv sind). Dann ist F bezüglich der S^1-Aktionen $\alpha \circ (z_1, \ldots, z_m, t_1, \ldots, t_p)$ $= (\alpha^{w_1} z_1, \ldots, \alpha^{w_m} z_m, \alpha^{-q_1} t_1, \ldots, \alpha^{-q_p} t_p)$ auf Y und $\alpha \circ (s_1, \ldots, s_k, t_1, \ldots, t_p)$ $= (\alpha^{d_1} s_1, \ldots, \alpha^{d_k} s_k, \alpha^{-q_1} t_1, \ldots, \alpha^{-q_p} t_p)$ auf $S \times T$ äquivariant.

In § 2 haben wir den kanonischen Weg $\gamma_s = \gamma$ in $S' = S - D(f)$ betrachtet: $\gamma(\tau) = e^{2\pi i \tau / d} \circ s$, wobei d der größte gemeinsame Teiler von $d_1, \ldots, d_k$ ist. Sei j: $S - D(f) \to S \times T - D(F)$ die Inklusion. Es gilt (vgl. [7], Korollar 4.9):

Satz 4.1. a) $[\gamma]$ *liegt im Zentrum von* $\pi_1(S-D(f), s)$.

b) $j_*[\gamma]^{d/w}$ *liegt im Zentrum von* $\pi_1(S\times T-D(F),(s,0))$, *wobei* w *der größte gemeinsame Teiler von* $w_1,\ldots,w_m$ *ist. Die Monodromie von* $j_*[\gamma]^{d/w}$ *ist die Identität.*

Beweis. S^1 operiert auf $S-D(f)$ auch durch $(e^{2\pi i\tau}, s)\mapsto e^{2\pi i\tau/d}\circ s$, und auf $S\times T-D(F)$ operiert S^1 durch $e^{2\pi i\tau/w}\circ(s,t)$, da w ein Teiler von $d_1,\ldots,d_k, q_1,\ldots,q_p$ ist. Die Behauptung folgt jetzt aus dem folgenden Lemma.

Lemma 4.2. *Sei* G *eine topologische Gruppe, die auf dem topologischen Raum* X *operiert. Dann gibt es eine kanonische Abbildung* $\varphi\colon \pi_1(G,1)\to\pi_1(X,x)$, *nämlich* $[t\mapsto g(t)]\mapsto[t\mapsto g(t)\cdot x]$, *und* $\operatorname{Im}\varphi$ *liegt im Zentrum von* $\pi_1(X,x)$.

Beweis. Sei $[\gamma]\in\operatorname{Im}\varphi$ repräsentiert durch $t\mapsto\gamma(t)=g(t)\cdot x$, $g\colon [0,1]\to G$, $g(0)=g(1)=1$, und $[\alpha]\in\pi_1(X,x)$ repräsentiert durch $\alpha\colon [0,1]\to X$, $\alpha(0)=\alpha(1)=x$. Dann liefert die Komposition der Wege $(g(t)\cdot x,\ 0\leqq t\leqq\tau)*(g(\tau)\cdot\alpha(t),\ 0\leqq t\leqq 1)*(g(t)\cdot x,\ \tau\leqq t\leqq 1)$ für $0\leqq\tau\leqq 1$ eine Homotopie zwischen $\alpha*\gamma$ und $\gamma*\alpha$.

Wir wollen jetzt die Menge der kritischen Werte $D(f)$ bzw. $D(F)$ mit einer analytischen Struktur versehen: Sei $\mathscr{C}(f)$ das Ideal, das von allen $k\times k$-Unterdeterminanten der Jacobimatrix von f erzeugt wird. Aus [2] Lemma 1.9 folgt, daß $\mathcal{O}_{X,0}/\mathscr{C}(f)$ ein $\mathcal{O}_{S,0}$-Torsionsmodul der homologischen Dimension 1 ist. Folglich gibt es eine exakte Sequenz $0\to\mathcal{O}_{S,0}^r\xrightarrow{\Phi}\mathcal{O}_{S,0}^r\xrightarrow{\pi}\mathcal{O}_{X,0}/\mathscr{C}(f)\to 0$, und die Determinante $\delta(f)\in\mathcal{O}_{S,0}$ von Φ verschwindet genau auf $(D(f),0)$. $\delta(f)$ (bzw. $D(f)$ mit der durch $\delta(f)$ definierten Struktur) heißt *Diskriminante* von f. Diese Definition ist mit Basiswechsel verträglich. Entsprechend werde $\delta(F)$ definiert. $\delta(f)$ und $\delta(F)$ sind nur bis auf Einheiten eindeutig bestimmt.

Lemma 4.3. *Die Diskriminante* $\delta(f)$ (*bzw.* $\delta(F)$) *besitzt einen quasihomogenen Repräsentanten bezüglich der Gewichte* $d_1,\ldots,d_k$ (*bzw. bezüglich der Gewichte* $d_1,\ldots,d_k,-q_1,\ldots,-q_p$).

Beweis. Es gibt quasihomogene Erzeugende $g_1,\ldots,g_r$ von $\mathcal{O}_{X,0}/\mathscr{C}(f)$, die den Grad $v_1,\ldots,v_r$ haben mögen. Wir versehen den Urbildraum $\mathcal{O}_{S,0}^r$ von π mit der Filtrierung $(\mathcal{O}_{S,0}^r)_q=\bigoplus_{i=1}^{r}(\mathcal{O}_{S,0})_{q-v_i}$, wobei die Filtrierung in $\mathcal{O}_{S,0}$ durch die Gewichte $d_1,\ldots,d_k$ gegeben ist. π bilde die kanonische Basis von $\mathcal{O}_{S,0}^r$ auf $g_1,\ldots,g_r$ ab. Dann ist π strikt, da $\mathscr{C}(f)$ von quasihomogenen Elementen (bezüglich $w_1,\ldots,w_m$) erzeugt wird, und Kern π wird durch quasihomogene Elemente $h_1,\ldots,h_r$ erzeugt, die in $\mathcal{O}_{S,0}^r$ den Grad $u_1,\ldots,u_r$ haben mögen. Bildet Φ die kanonische Basis von $\mathcal{O}_{S,0}^r$ auf $h_1,\ldots,h_r$ ab, so sind die Matrixelemente Φ_{ij} von Φ bezüglich $d_1,\ldots,d_k$ quasihomogen vom Grad u_j-v_i. Daher ist $\det\Phi$ bezüglich $d_1,\ldots,d_k$ quasihomogen vom Grad $(u_1-v_1)+\cdots+(u_r-v_r)$.

Wir wollen nun die Multiplizität $m(\delta(f),0)$ der Diskriminante berechnen. Allgemein bezeichnen wir mit $m(g,0)$ die Multiplizität der holomorphen Funktion g in 0, d.h. den niedrigsten Grad der nichtverschwindenden homogenen Terme in der (gewöhnlichen) Potenzreihenentwicklung von g um 0. Zur Vorbereitung zeigen wir zwei Lemmata, bei denen wir voraussetzen, daß die Nullstellenmenge

$$X'=\{z\in X\mid f_1(z)=\cdots=f_{k-1}(z)=0\}$$

in 0 eine isolierte Singularität hat. Sei $\delta(f_k|X')$ die Diskriminante von $f_k|X'$, d.h. die Einschränkung von $\delta(f)$ auf $s_1=\cdots=s_{k-1}=0$; μ' sei die Milnorzahl von $(f_1,\ldots,f_{k-1})$.

Lemma 4.4. $m(\delta(f_k|X'),0)=\mu+\mu'=\dim_{\mathbb{C}}\Omega_f^{m-k+1}/f_1\Omega_f^{m-k+1}+\cdots+f_{k-1}\Omega_f^{m-k+1}$.

Beweis. Da die Definition der Diskriminante mit Basiswechsel verträglich ist, haben wir eine exakte Sequenz

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}^r\xrightarrow{\Phi'}\mathcal{O}_{\mathbb{C},0}^r\to\mathcal{S}_0\to 0$$

mit $\det\Phi'=\delta(f_k|X')$, $\mathcal{S}_0=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}/\mathscr{C}(f)+f_1\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}+\cdots+f_{k-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}$. Daher ist $m(\delta(f_k|X'),0)=\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{S}_0$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 5.3 und der darauffolgenden Bemerkung in [2].

Lemma 4.5.

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathbb{C}}\Omega_f^{m-k+1}/(f_1\Omega_f^{m-k+1}+\cdots+f_{k-1}\Omega_f^{m-k+1})\\&=\operatorname{res}_{\xi=0}\xi^{-m+k-2}d_k^{-1}\prod_{\nu=1}^{m}(w_\nu^{-1}-\xi)\prod_{\kappa=1}^{k}(d_\kappa^{-1}-\xi)^{-1}\\&=\frac{d_1\cdot\ldots\cdot d_{k-1}}{w_1\cdot\ldots\cdot w_m}\sum_{\lambda=0}^{m-k+1}(-1)^\lambda W_\lambda(w_1,\ldots,w_m)D_{m-k+1-\lambda}(d_1,\ldots,d_k).\end{aligned}$$

Beweis. Nach Voraussetzung bilden $f_1,\ldots,f_{k-1}$ eine Nichtnullteilerfolge von $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}/\mathscr{C}(f)$. Nach dem verallgemeinerten de Rham-Lemma (Lemma 1.6 aus [2]) ist $df_1\wedge\ldots\wedge df_{k-1}\wedge\ldots$:

$$\Omega_f^{m-k+1}/(f_1\Omega_f^{m-k+1}+\cdots+f_i\Omega_f^{m-k+1})\to\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}/(\mathscr{C}(f)+f_1\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}+\cdots+f_i\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0})$$

injektiv für $1\leqq i\leqq k-2$, und daher ist $f_1,\ldots,f_{k-1}$ auch eine Nichtnullteilerfolge von Ω_f^{m-k+1}. (Hierbei wurde Ω^m mit $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m,0}$ identifiziert.) Daher folgt aus Lemma 3.4 für die Poincaréreihe $P(x)$ von $\Omega_f^{m-k+1}/(f_1\Omega_f^{m-k+1}+\cdots+f_{k-1}\Omega_f^{m-k+1})$:

$$P(x)=\operatorname{res}_{t=0}t^{-m+k-2}\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{1+t\,x^{w_\nu}}{1-x^{w_\nu}}\right)\prod_{\kappa=1}^{k-1}\left(\frac{1-x^{d_\kappa}}{1+t\,x^{d_\kappa}}\right)\frac{1}{1+t\,x^{d_\kappa}}.$$

Die Substitutionen $\tau=t(1+t)^{-1}$ und $\xi=\tau(1-x)$ führen zu

$$P(x)=\operatorname{res}_{\xi=0}\xi^{-m+k-2}\frac{1-x}{1-x^{d_k}}\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{1-x}{1-x^{w_\nu}}-\xi\right)\prod_{\kappa=1}^{k}\left(\frac{1-x}{1-x^{d_\kappa}}-\xi\right)^{-1}.$$

Einsetzen von $x=1$ führt zu obiger Behauptung.

Bemerkung. Einen anderen Beweis von Lemma 4.5 erhält man, wenn man Lemma 4.4 benutzt und die Milnorzahlen μ und μ' gemäß § 3 berechnet. Umgekehrt läßt sich die Formel für μ in Satz 3.7 c) mit Hilfe von Lemma 4.4 und 4.5 induktiv neu herleiten. Um Zusatzvoraussetzungen zu vermeiden, wählt man zu diesem Zweck weitere quasihomogene Polynome $f_{k+1},\ldots,f_m$ derart, daß die Nullstellenmenge $\{z\in\mathbb{C}^m|f_1(z)=\cdots=f_\kappa(z)=0\}$ für $k<\kappa\leqq m$ ein $(m-\kappa)$-dimensionaler vollständiger Durchschnitt mit isolierter Singularität in 0 ist, und beweist die

Formel für μ durch Induktion über $m-k$ (m fest). Für $m=k$ kann man die Formel zeigen, indem man den Abbildungsgrad berechnet.

Wir setzen nun nicht mehr voraus, daß X' in 0 eine isolierte Singularität hat. Seien $d_1, \ldots, d_k$ der Größe nach geordnet und sei $1 \leqq k'' < k$ so, daß $d_1 \leqq d_2 \leqq \cdots \leqq d_{k''} \leqq d_{k''+1} = \cdots = d_k$ gilt. Sei

$$X'' = \{z \in X \mid f_1(z) = \cdots = f_{k''}(z) = 0\}.$$

Lemma 4.6. a) *$\delta(f)$ und $\delta(F)$ haben Repräsentanten, die bezüglich der Gewichte $d_1, \ldots, d_k$ bzw. $d_1, \ldots, d_k, -q_1, \ldots, -q_p$ quasihomogen vom gleichen Grad sind; wir bezeichnen diesen Grad mit d_δ.*

b) *Hat X'' eine isolierte Singularität in 0, so gilt:*

$$d_k\, m(\delta(f), 0) = d_k\, m(\delta(F), 0) = d_\delta.$$

Beweis. a) folgt aus der Verträglichkeit der Diskriminante mit Basiswechsel.

b) Wegen der Voraussetzung ist $\delta(f|X'') = \delta(f)|\{s \in \mathbb{C}^k \mid s_1 = \cdots = s_{k''} = 0\} \not\equiv 0$; wegen der Voraussetzung über die Anordnung der d_i ist $\delta(f|X'')$ homogen vom Grad $m(\delta(f), 0)$ und es gilt: $d_k\, m(\delta(f), 0) = d_\delta$. In gleicher Weise schließt man bei $\delta(F)$; auf Grund der Definition der q_i ist $-q_i < d_k$, $i = 1, \ldots, p$. (Die Gleichheit von $m(\delta(f), 0)$ und $m(\delta(F), 0)$ folgt auch aus Satz 2.1 in [3], sogar ohne die Voraussetzung, daß f quasihomogen ist.)

Satz 4.7. *Mit den Bezeichnungen von Korollar 3.9 gilt:*

$$\begin{aligned}
d_\delta &= \operatorname{res}_{\xi=0} \xi^{k-m-2} \prod_{\nu=1}^{m} (w_\nu^{-1} - \xi) \prod_{\kappa=1}^{k} (d_\kappa^{-1} - \xi)^{-1} \\
&= \frac{d_1 \cdot \ldots \cdot d_k}{w_1 \cdot \ldots \cdot w_m} \sum_{\lambda=0}^{m-k+1} (-1)^\lambda W_\lambda(w_1, \ldots, w_m)\, D_{m-k+1-\lambda}(d_1, \ldots, d_k) \\
&= \sum_{\rho=1}^{r} d_{k_\rho} \sum_{\lambda+\sigma+\nu=h_\rho} \binom{m-k+\lambda+1}{m+1-k} W_{m-\sigma}\left(\frac{d_{k_\rho}}{w_1} - 1, \ldots, \frac{d_{k_\rho}}{w_m} - 1\right) \\
&\quad \cdot D_{\nu,\, k-h_\rho-1}\left(\frac{d_1}{d_{k_\rho} - d_1}, \ldots, \frac{d_{k_\rho-1}}{d_{k_\rho} - d_{k_\rho-1}}, \frac{d_{k_\rho+1}}{d_{k_\rho} - d_{k_\rho+1}}, \ldots, \frac{d_k}{d_{k_\rho} - d_k}\right) \\
&= \frac{d_1 \cdot \ldots \cdot d_k}{w_1 \cdot \ldots \cdot w_m} \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{j=0}^{h_\rho} d_{k_\rho}^{m-k+1}\, W_{m-j}\left(1 - \frac{w_1}{d_{k_\rho}}, \ldots, 1 - \frac{w_m}{d_{k_\rho}}\right) \\
&\quad \cdot D_{h_\rho-j,\, k-h_\rho-1}\left(\frac{d_{k_\rho}}{d_{k_\rho} - d_1}, \ldots, \frac{d_{k_\rho}}{d_{k_\rho} - d_{k_\rho-1}}, \frac{d_{k_\rho}}{d_{k_\rho} - d_{k_\rho+1}}, \ldots, \frac{d_{k_\rho}}{d_{k_\rho} - d_k}\right).
\end{aligned}$$

Beweis. Für $(\beta_1, \ldots, \beta_k) \in \mathbb{C}^k - \{0\}$ betrachten wir die Abbildung $\tilde{b}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^k$ mit $\tilde{b}(s) = (\beta_1 s, \ldots, \beta_k s)$. Außerdem sei $\psi\colon \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ definiert durch $\psi(s_1, \ldots, s_k) = (s_1^{d_1}, \ldots, s_k^{d_k})$, $b = \psi \circ \tilde{b}$. Dann ist $\psi^{-1}(D(f))$ die Nullstellenmenge des homogenen Polynoms $\delta(f) \circ \psi$, und das Bild von $\tilde{b}$ ist eine Gerade. Wir wählen $\beta_1, \ldots, \beta_k$ so, daß diese Gerade $\psi^{-1}(D(f))$ nur in 0 schneidet; dann schneidet das Bild von b die Diskriminante $D(f)$ nur in 0.

Wegen der Verträglichkeit mit Basiswechsel ist $\delta(f) \circ b$ die Diskriminante

der Projektion von $\{(z,s)\in\mathbb{C}^m\times\mathbb{C}\,|\,f(z)=b(s)\}$ auf die letzte Koordinate. Sei $\tilde{f}_\kappa(z,s)=f_\kappa(z)-b_\kappa(s)=f_\kappa(z)-\beta_\kappa^{d_\kappa}s^{d_\kappa}$, $\kappa=1,\ldots,k$, $\tilde{f}_{k+1}(z,s)=s$. Wegen der Definition von b definiert $\tilde{f}_1=\cdots=\tilde{f}_k=0$ einen vollständigen Durchschnitt mit isolierter Singularität.

Die Polynome $\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_{k+1}$ sind bezüglich der Gewichte $w_1,\ldots,w_m,1$ quasihomogen vom Grad $d_1,\ldots,d_k,1$. Nach Lemma 4.3, 4.4 und 4.5 ist $\delta(f)\circ b$ homogen vom Grad

$$\operatorname{res}_{\xi=0}\,\xi^{-m+k-2}\prod_{\nu=1}^{m+1}(w_\nu^{-1}-\xi)\prod_{\kappa=1}^{k+1}(d_\kappa^{-1}-\xi)^{-1},$$

wobei wir einen quasihomogenen Repräsentanten von $\delta(f)$ zugrundegelegt und $w_{m+1}=d_{k+1}=1$ gesetzt haben. Offenbar ist der quasihomogene Grad von $\delta(f)$ der Grad von $\delta(f)\circ b$; damit ist die erste der behaupteten Formeln für d_δ gezeigt. Die übrigen ergeben sich hieraus in Analogie zu Korollar 3.8 und 3.9.

Korollar 4.8. *Sind $f_1,\ldots,f_k$ quasihomogen vom gleichen Grad d, so gilt:*

$$m(\delta(f),0)=m(\delta(F),0)=\frac{d^m}{w_1\cdot\ldots\cdot w_m}\sum_{1\leqq\nu_1<\cdots<\nu_{m-k+1}\leqq m}\prod_{\lambda=1}^{m-k+1}\left(1-\frac{w_{\nu_\lambda}}{d}\right).$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 4.6 und Satz 4.7.

§ 5. Semi-quasihomogene vollständige Durchschnitte

Seien $f_1,\ldots,f_k$ holomorphe Funktionen auf einer Umgebung U von $0\in\mathbb{C}^m$ mit $f_i(0)=0$. Dann heißt die Faser von

$$f=(f_1,\ldots,f_k)\colon\ U\to\mathbb{C}^k \text{ über } 0$$

ein *semi-quasihomogener vollständiger Durchschnitt*, falls es holomorphe Koordinaten $x_1,\ldots,x_m$ um $0\in\mathbb{C}^m$ und positive ganze Zahlen $w_1,\ldots,w_m$ (Gewichte) und $d_1,\ldots,d_k$ (Grade) gibt, so daß gilt:

Ist

$$f_i=f_i^0+f_i^1+f_i^2+\cdots,\qquad i=1,\ldots,k,$$

die quasihomogene Potenzreihenentwicklung von f_i bezüglich der Koordinaten $x_1,\ldots,x_m$ und Gewichte $w_1,\ldots,w_m$ (d.h. f_i^j ist quasihomogen vom Grad d_i+j), dann definieren die Anfangsterme $f_1^0,\ldots\ldots,f_k^0$ einen $(m-k)$-dimensionalen vollständigen Durchschnitt mit isolierter Singularität in 0. (Ein quasihomogener vollständiger Durchschnitt ist also genau dann semi-quasihomogen, falls er eine isolierte Singularität besitzt.) Die Abbildung f heißt in diesem Fall ebenfalls semi-quasihomogen. Ist von der semiuniversellen Deformation die Rede, so setzen wir wieder ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraus, daß die Funktionalmatrix von f in 0 verschwindet.

Wir legen einige Bezeichnungen fest: Es sei $f=f^0+f'\colon U\to\mathbb{C}^k$, $f^0=(f_1^0,\ldots,f_k^0)$, $f'=\left(\sum_{j=1}^{\infty}f_1^j,\ldots,\sum_{j=1}^{\infty}f_k^j\right)$. Weiter seien $0<\delta\ll\varepsilon$ hinreichend klein und $B=\{x\in\mathbb{C}^m|$

$\|x\|<\varepsilon\}\subset U$, $S=\{s\in\mathbb{C}^k\,|\,\|s\|<\delta\}$. Auf $\mathbb{C}^m$ und $\mathbb{C}^k$ haben wir die $\mathbb{C}^*$-Aktionen $\mathbb{C}^m\ni x\mapsto t\circ x=(t^{w_1}x_1,\ldots,t^{w_m}x_m)$ und $\mathbb{C}^k\ni s\mapsto t\circ s=(t^{d_1}s_1,\ldots,t^{d_k}s_k)$, $t\in\mathbb{C}^*$. Es sei $E=\{t\in\mathbb{C}\,|\,|t|<1+\varepsilon'\}$, wobei ε' so klein gewählt sei, daß $t\circ B\subset U$ für $t\in E$. Für alle weiteren Überlegungen wird die folgende Abbildung eine zentrale Rolle spielen:

$$\Phi\colon\ B\times E\to\mathbb{C}^k\times E,\qquad (x,t)\mapsto(\Phi_1(x,t),\ldots,\Phi_k(x,t),t),$$

$$\Phi_i(x,t)=t^{-d_i}f_i(t\circ x)=f_i^0(x)+tf_i^1(x)+t^2f_i^2(x)+\cdots,\qquad i=1,\ldots,k.$$

Es ist $\Phi^{-1}(0,0)\cong(f^0)^{-1}(0)\cap B$ und $\Phi^{-1}(0,1)\cong f^{-1}(0)\cap B$. Für $t\in E$ sei $\Phi^t\colon B\to\mathbb{C}^k$ definiert durch $\Phi^t(x)=(\Phi_1(x,t),\ldots,\Phi_k(x,t))$.

Satz 5.1. *Definiert $f=f^0+f'$ einen semi-quasihomogenen vollständigen Durchschnitt, dann gilt:*

a) *Die Faser $f^{-1}(0)$ ist ein $(m-k)$-dimensionaler vollständiger Durchschnitt mit isolierter Singularität in 0.*

b) *Die Milnorzahl $\mu(f)$ von f in 0 ist gleich der Milnorzahl $\mu(f^0)$ des quasihomogenen Anfangsterms f^0 in 0.*

Beweis. Für $0<|t|\leqq 1$ definiert $t\colon B\to t\circ B\subset B$, $x\mapsto t\circ x$, einen Isomorphismus, der einen Isomorphismus von $\Phi^{-1}(0,t)\subset B\times\{t\}$ auf $f^{-1}(0)\cap t\circ B$ induziert. Da Φ in $(0,0)$ und damit in einer kleinen Umgebung platt ist und $\Phi^{-1}(0,0)$ eine isolierte Singularität in $(0,0)$ hat, hat auch $\Phi^{-1}(0,t)$ für kleine t in $(0,t)$ die Dimension $m-k$ und eine isolierte Singularität. Dasselbe gilt dann für $f^{-1}(0)$ in 0.

Nach Satz 2.3 hängt die Milnorzahl nur von der Isomorphieklasse der Faser in dem singulären Punkt ab. Es genügt also zu zeigen, daß $\Phi^{-1}(0,t)$ in $(0,t)$ für kleine t die Milnorzahl $\mu(f^0)$ hat. Sei $T\subset\mathbb{C}$ eine hinreichend kleine Kreisscheibe um 0. Die Einschränkung $\Phi\colon\Phi^{-1}(S\times T)\to S\times T$ bezeichnen wir wieder mit Φ. Aus Proposition 2.6 und Proposition 4.6 von [2] folgt, daß die $\mathcal{O}_{S\times T}$-Garbe $\mathscr{H}'=\Phi_*\Omega_\Phi^{m-k}/d(\Phi_*\Omega_\Phi^{m-k-1})$ frei ist, und zwar vom Rang $\mu(f^0)$ für $m>k$ und $\mu(f^0)+1$ für $m=k$. Daher ist $\mathscr{H}'_{(0,t)}/\mathfrak{m}_{S\times T,(0,t)}\mathscr{H}'_{(0,t)}$ für $t\in T$ ein Vektorraum der Dimension $\mu(f^0)$ bzw. $\mu(f^0)+1$. Da die Faser $\Phi^{-1}(0,t)\cong f^{-1}(0)\cap t\circ B$ auf $(0,t)$ zusammenziehbar ist, ist dieser Vektorraum isomorph zu

$$(\Omega_\Phi^{m-k-1}{}_{(0,t)}/d\Omega_\Phi^{m-k-1}{}_{(0,t)})_{(0,t)}\cong(\Omega_f^{m-k-1}{}_{(0)}/d\Omega_f^{m-k-1}{}_{(0)})_0$$

(dies folgt wie im Beweis von Proposition 3.1 aus [2]) und hat nach Satz 2.3 die Dimension $\mu(f)$ (bzw. $\mu(f)+1$). Damit ist der Satz bewiesen. (Einen einfachen topologischen Beweis enthält der Beweis von Satz 5.2.)

Wir setzen jetzt $X=B\cap f^{-1}(S)$, $X^0=B\cap(f^0)^{-1}(S)$, und es seien $D(f)\subset S$ die Diskriminante von $f\colon X\to S$ sowie $D(f^0)$ die Diskriminante von $f^0\colon X^0\to S$.

Sei $s\in S-D(f^0)$ ein Basispunkt. Wir wollen für alle genügend kleinen $t\in\mathbb{C}^*$ einen Homomorphismus

$$\varphi_t\colon\ \pi_1(S-D(f^0),s)\to\pi_1(S-D(f),t\circ s)$$

definieren: Sei $\delta(f^0)\colon S\to\mathbb{C}$ die Diskriminante von f^0, $N_\beta:=\{s'\in S\,|\,|\delta(f^0)(s')|\geqq\beta\}$. Ist $\beta>0$ hinreichend klein, so induziert die Inklusion einen Isomorphismus

$\pi_1(S-N_\beta, s)\cong\pi_1(S-D(f^0), s)$. Für genügend kleines $t\in\mathbb{C}^*$ ist $D(\Phi^t)$ in N_β enthalten, daher hat man einen Homomorphismus $\pi_1(S-N_\beta, s)\to\pi_1(S-D(\Phi^t), s)$. Schließlich gilt $\pi_1(S-D(\Phi^t), s)\cong\pi_1(t\circ S-D(f), t\circ s)\cong\pi_1(S-D(f), t\circ s)$; die Isomorphismen werden durch t: $S\to t\circ S$ bzw. die Inklusion induziert. Durch Komposition erhält man φ_t.

Satz 5.2. *Sei $f=f^0+f'$ semi-quasihomogen, $s\in S-D(f^0)$ ein Basispunkt, $t\in\mathbb{C}^*$ genügend klein. Sei $h^0_{\gamma^0}$ die Monodromie eines Elementes $\gamma^0\in\pi_1(S-D(f^0), s)$ bezüglich f^0 und $h_{\varphi_t(\gamma^0)}$ die Monodromie von $\varphi_t(\gamma^0)\in\pi_1(S-D(f), t\circ s)$ bezüglich f. Dann gibt es einen durch einen Diffeomorphismus ψ_t: $(f^0)^{-1}(s)\to f^{-1}(t\circ s)$ induzierten kanonischen Isomorphismus ψ_t^*: $H^{m-k}(f^{-1}(t\circ s);\mathbb{Z})\to H^{m-k}((f^0)^{-1}(s);\mathbb{Z})$, so daß gilt:*

$$h_{\varphi_t(\gamma^0)}=(\psi_t^*)^{-1}\circ h^0_{\gamma^0}\circ\psi_t^*.$$

Beweis. Es gibt einen zur Inklusion homotopen Diffeomorphismus von $f^{-1}(t\circ s)\cap t\circ B$ auf $f^{-1}(t\circ s)\subset B$, andererseits wird $f^{-1}(t\circ s)\cap t\circ B$ mittels t^{-1} isomorph auf $(\Phi^t)^{-1}(s)\subset B$ abgebildet. Betrachtet man Φ nur über einer kleinen Umgebung $S\times T\subset\mathbb{C}^k\times E$ von 0, so erhält man über dem Komplement der Diskriminante ein lokal triviales C^∞-Faserbündel; daher identifiziert sich $\Phi^{-1}(s,t)$ mit $\Phi^{-1}(s,0)$ längs der Strecke von $(s,0)$ nach (s,t). Auf der Kohomologie ist der entsprechende Isomorphismus eindeutig bestimmt. Die Verträglichkeit mit der Monodromie folgt aus der Konstruktion.

Insbesondere sei nun $s^0\in S-D(f^0)$, γ^0 das durch die S^1-Aktion definierte kanonische Element in $\pi_1(S-D(f^0), s^0)$ und $t\in\mathbb{C}^*$ genügend klein. Dann ist $\varphi_t(\gamma^0)\in\pi_1(S-D(f), t\circ s^0)$. Sei $s\in S-D(f)$. Durch Wahl eines Weges w von $t\circ s^0$ nach s in $S-D(f)$ wird ein Isomorphismus $\pi_1(S-D(f), t\circ s^0)\cong\pi_1(S-D(f), s)$ definiert, der $\varphi_t(\gamma^0)$ auf ein Element γ abbildet, das bis auf Konjugation von der Wahl von s^0, t und w unabhängig ist, wie man sich unschwer klar macht.

Korollar 5.3. *Sei $f=f^0+f'$: $X\to S$ semi-quasihomogen, $s\in S-D(f)$, $\gamma\in\pi_1(S-D(f), s)$ das soeben definierte, bis auf innere Konjugation kanonisch festgelegte Element in $\pi_1(S-D(f), s)$. Dann berechnet sich der Divisor des charakteristischen Polynoms der Monodromie von γ bezüglich f nach Satz* 3.7 *bis Korollar* 3.10 *(wobei $w_1, \ldots, w_m$ die Gewichte und $d_1, \ldots, d_k$ die Grade des quasihomogenen Anfangsterms f^0 sind).*

Wir wollen jetzt die semiuniversellen Deformationen F von $f^{-1}(0)$ und F^0 von $(f^0)^{-1}(0)$ vergleichen:

Ist $p=\dim_{\mathbb{C}} M_f$ und $p^0=\dim_{\mathbb{C}} M_{f^0}$ (vgl. § 4), dann gilt $p\leqq p^0$ und nach einem Resultat von Teissier sogar $p<p^0$, falls $(f^{-1}(0), 0)$ nicht isomorph zu $((f^0)^{-1}(0), 0)$ ist. Seien $(g_1^j, \ldots, g_k^j)$, $j=1, \ldots, p^0$, Repräsentanten einer Basis von M_{f^0}, wobei $g_i^j(x)$ Monome vom quasihomogenen Grad q_j+d_i sind. Nach geeigneter Numerierung repräsentieren dann $(g_1^j, \ldots, g_k^j)$ für $j=1, \ldots, p$ für alle $t\in E-\{0\}$ eine Basis von M_{Φ^t}.

Sei F^t: $B\times\mathbb{C}^{p^0}\to\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^{p^0}$ definiert durch

$$F^t(x,u)=\left(\Phi^t(x)+\sum_{j=1}^{p^0}u_j(g_1^j(x), \ldots, g_k^j(x)), u\right)$$

mit $u=(u_1, \ldots, u_{p^0}) \in \mathbb{C}^{p^0}$. Dann definiert F^0 die semiuniverselle Deformation von $(f^0)^{-1}(0)$, F^1 eine verselle Deformation von $f^{-1}(0)$ und $F=F^1|B\times\mathbb{C}^p$: $B\times\mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^p$ die semiuniverselle Deformation von $f^{-1}(0)$. (Dabei identifizieren wir $\mathbb{C}^p$ mit $\mathbb{C}^p\times\{0\}\subset\mathbb{C}^p\times\mathbb{C}^{p^0-p}\cong\mathbb{C}^{p^0}$.)

Für $t\in\mathbb{C}^*$, $(s,u)\in\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^{p^0}$ sei

$$t\circ(s,u)=(t^{d_1}s_1, \ldots, t^{d_k}s_k, t^{-q_1}u_1, \ldots, t^{-q_{p^0}}u_{p^0}).$$

Sei nun $s\in S-D(f^0)$, $U\subset\mathbb{C}^{p^0}$ eine kleine offene Kugel um 0 und $U'=U\cap\mathbb{C}^p$; weiterhin sei $t\in\mathbb{C}^*$ hinreichend klein gewählt. Ist $\tilde{U}\subset\mathbb{C}^{p^0}$ eine Kugel um 0 mit $\tilde{U}\subset U$ und $t\circ\tilde{U}\subset U$, so definieren wir einen Homomorphismus

$$\psi_t\colon \pi_1(S\times U-D(F^0),(s,0)) \to \pi_1(S\times U'-D(F), t\circ(s,0))$$

mit Hilfe der Komposition

$$\pi_1(S\times U-D(F^0),(s,0))\cong\pi_1(S\times\tilde{U}-D(F^0),(s,0))\to$$
$$\pi_1(S\times U-D(F^1), t\circ(s,0))\cong\pi_1(S\times U'-D(F), t\circ(s,0)).$$

Der mittlere Homomorphismus wird analog zu φ_t erklärt, die beiden anderen werden durch die Inklusion induziert. Daß der letzte Homomorphismus ein Isomorphismus ist, sieht man so: Die beiden Gruppen sind sicher isomorph, da F^1 isomorph ist zu dem Produkt aus F und der Identität auf einem regulären Faktor. Die Diskriminante $D(F)$ der semiuniversellen Deformation F ist reduziert. Betrachtet man daher eine generische Gerade L in $\mathbb{C}^k\times\mathbb{C}^p$, die einen genügend kleinen Abstand zum Ursprung besitzt, so hat diese in $S\times U'$ mit $D(F)$ genau $m(\delta(F),0)=m(\delta(F^1),0)$ Punkte gemeinsam. Durch geeignete Wahl von Wegen in L erhält man nach Wechsel des Basispunkts gleichzeitige Erzeugende für $\pi_1(S\times U-D(F^1), t\circ(s,0))$ und $\pi_1(S\times U'-D(F), t\circ(s,0))$. Daraus folgt die Surjektivität, also auch die Bijektivität.

ψ_t ist ebenfalls surjektiv, da $D(F^0)$ reduziert ist. Seien

$$j_*^0\colon \pi_1(S-D(f^0), s)\to\pi_1(S\times U-D(F^0),(s,0)) \quad \text{und}$$
$$j_*\colon \pi_1(S-D(f), t\circ s)\to\pi_1(S\times U'-D(F), t\circ(s,0))$$

die durch die Inklusionen induzierten Abbildungen. Dann gilt: $j_*\varphi_t=\psi_t j_*^0$.

Falls $D(f^0)$ (und damit $D(f)$) reduziert ist, so sind nach dem gleichen Argument wie oben φ_t, j_* und j_*^0 surjektiv. Wir bemerken, daß $D(f^0)$ genau dann reduziert ist, falls über jeder irreduziblen Komponente von $D(f^0)$ generisch die Faser von f^0 nur eine quadratische Singularität hat. Seien γ und γ^0 wie vor Korollar 5.3 erklärt, sei d der größte gemeinsame Teiler von $d_1, \ldots, d_k$ und w der größte gemeinsame Teiler von $w_1, \ldots, w_m$. Wir erhalten daher aus Satz 4.1:

Proposition 5.4. a) $(j_*\gamma)^{d/w}$ *liegt im Zentrum von* $\pi_1(S\times U'-D(F),(s,0))$.

b) *Ist* $D(f^0)$ *reduziert, so sind sogar* γ, $j_*\gamma$ *und* $j_*^0\gamma^0$ *zentral. Insbesondere ist dann* γ *eindeutig bestimmt.*

Wir kommen jetzt zu einem Vergleich der Multiplizitäten. Es gilt stets

$$m(\delta(F),0)=m(\delta(f),0)\leqq m(\delta(f^0),0)=m(\delta(F^0),0).$$

Zur ersten und letzten Gleichung vgl. Satz 2.1 aus [3] bzw. Lemma 4.6. Zwischen den Diskriminanten $\delta(f)$ und $\delta(f^0)$ besteht eine einfache Beziehung. Wir nehmen an, daß $d_1\leqq\cdots\leqq d_{k''}\leqq d_{k''+1}=\cdots=d_k$ der Größe nach numeriert sind, mit $1\leqq k''<k$. Sei

$$X''^0=\{x\in X^0\mid f_1^0(x)=\cdots=f_{k''}^0(x)=0\},\qquad X''=\{x\in X\mid f_1(x)=\cdots=f_{k''}(x)=0\}.$$

Satz 5.5. *Sei $f=f^0+f'$ semi-quasihomogen, $f^0=(f_1^0,\ldots,f_k^0)$ quasihomogen vom Grad $(d_1,\ldots,d_k)$. Dann gilt:*

a) *Der Anfangsterm $\delta^0(f)$ der quasihomogenen Potenzreihenentwicklung von $\delta(f)$ bezüglich der Gewichte $d_1,\ldots,d_k$ ist die Diskriminante von f^0, d.h. $\delta^0(f)=\delta(f^0)$.*

b) *Hat X''^0 eine isolierte Singularität in 0, so stimmen die Multiplizitäten von $\delta(f)$ und $\delta(f^0)$ in 0 überein, und für $d_k\cdot m(\delta(f),0)$ gelten die in Satz 4.7 angegebenen Formeln.*

c) *Korollar 4.8 gilt auch für semi-quasihomogene Funktionen.*

Beweis. Gibt man der Variablen t in der Abbildung Φ das Gewicht -1, dann ist Φ quasihomogen, und ebenso ist $\delta(\Phi)$ bei geeigneter Wahl des Repräsentanten quasihomogen bezüglich der Gewichte $d_1,\ldots,d_k,-1$ (vgl. Lemma 4.3). Die Behauptung a) folgt nun aus der Verträglichkeit der Diskriminante mit Basiswechsel. Hat X''^0 eine isolierte Singularität in 0, so ist $\delta(f^0|X''^0)\not\equiv 0$; daher ist $\delta(f^0|X''^0)$ der homogene Anfangsterm von $\delta(f|X'')$ und ist vom Grad $m(\delta(f^0),0)$. Hieraus folgen b) und c).

Literatur

1. Arnol'd, V.I.: Normal'nye formy funkcií v okrestnosti vyroždennyh kritičeskih toček. Uspehi Mat. Nauk **29**, vyp. 2, 11–49 (1974)
2. Greuel, G.-M.: Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten. Math. Ann. **214**, 235–266 (1975)
3. Greuel, G.-M., Lê D.T.: Spitzen, Doppelpunkte und vertikale Tangenten in der Diskriminante verseller Deformationen von vollständigen Durchschnitten. Math. Ann. **222**, 71–88 (1976)
4. Hamm, H.A.: Exotische Sphären als Umgebungsränder in speziellen komplexen Räumen. Math. Ann. **197**, 44–56 (1972)
5. Hamm, H.A.: Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume. Math. Ann. **191**, 235–252 (1971)
6. Milnor, J., Orlik, P.: Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials. Topology **9**, 385–393 (1970)
7. Saito, K.: Einfach-elliptische Singularitäten. Inventiones math. **23**, 289–325 (1974)

Eingegangen am 24. Mai 1978