Werk

Titel: Über Erzeugende ebener diskontinuierlicher Gruppen.

Autor: Peczynski, N.; Rosenberger, G.

Jahr: 1975

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0029|log18

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Inventiones math. 29, 161 – 180 (1975)
© by Springer-Verlag 1975

Über Erzeugende ebener diskontinuierlicher Gruppen

Norbert Peczynski (Bochum), Gerhard Rosenberger (Hamburg),
Heiner Zieschang (Bochum)

Es wird der Rang bestimmt von ebenen diskontinuierlichen Gruppen, die kompakten Fundamentalbereich besitzen und keine Spiegelungen enthalten.

Der Rang einer Gruppe $\mathfrak{G}$, $r(\mathfrak{G})$, ist die Anzahl von Elementen in einem kleinsten Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$. Nielsen regte an, den Rang von Fuchsschen Gruppen

$$\mathfrak{G}=\left\langle s_1,\ldots,s_m,t_1,u_1,\ldots,t_g,u_g \mid s_1^{\alpha_1}=\cdots=s_m^{\alpha_m}=\prod_{i=1}^{m} s_i \prod_{j=1}^{g}[t_j u_j]=1\right\rangle$$

mit $\alpha_i \geqq 2$ und $m \geqq 3$ für $g=0$ zu bestimmen.

Auf Grund von geometrischen Argumenten liegt die Vermutung $r(\mathfrak{G})=2g+m-1$ $(m>0)$ nahe (vgl. § 4). In [3, Satz 4] wurde versucht, hierfür einen Beweis zu geben, der jedoch einen Fehler enthält. R. Burns, A. Karrass, A. Pietrowski und N. Purzitzky gaben uns als Gegenbeispiel an, daß $\mathfrak{G}$ mit $g=0$, m gerade, $\alpha_1=\cdots=\alpha_{m-1}=2$ und α_m ungerade von $2g+m-2$ Elementen erzeugt werden kann.

In dieser Arbeit wird [3, Satz 4] berichtigt, und wir zeigen, daß das oben erwähnte Gegenbeispiel das einzige ist.

Es gilt (Satz 3)

(a) $r(\mathfrak{G})=2g$ für $m=0$, $g \geqq 1$,

(b) $r(\mathfrak{G})=m-2$ für $g=0$, m gerade und alle $\alpha_i=2$ bis auf eins, das ungerade ist,

(c) $r(\mathfrak{G})=2g+m-1$ bei allen unter (a) und (b) nicht erfaßten Fällen.

In § 4 wird gezeigt, daß die Gruppen $\mathfrak{G}$ „geometrisch" von nicht weniger als von $2g+m-1$ Elementen erzeugt werden können $(m>0)$. Wir brauchen jedoch auch im Falle (b) von Satz 3 mindestens $2g+m-1$ „geometrisch Erzeugende", um $\mathfrak{G}$ zu erzeugen. Diese Tatsache mag mit ein Grund dafür gewesen sein, daß der Beweis von Satz 3 nicht durch geometrische Argumente durchsichtiger gemacht werden konnte.

Die Fehler im Beweis von [3, Satz 4] beschränken sich auf S. 24, Zeilen 12 – 17 (der Schluß versagt, falls $\alpha_i=2$ ist) und auf [3, S. 26, letzte Zeile] „Für $L(x_2)>1$ muß mindestens einmal eine Gl. (3.3) mit $L(x)>1$ gelten". Falls alle $\alpha_i>2$ sind, enthält [3] einen Beweis der Rangformel. Hieraus ließ sich jedoch nicht das allgemeine Resultat ableiten. Für [3, § 4] sowie [1, Satz 5] ist der Fehler belanglos. Die Arbeit verwendet die Terminologie und Bezeichnungsweise von [3]. Allerdings werden wir hier Gruppenbeschreibungen in der Form $\langle \cdots \mid \cdots \rangle$ schreiben, wo zunächst die Erzeugenden und dann die definierenden Relationen stehen. Wie in [3] gewinnen wir oft aus einem System $\{x_1,\ldots,x_n\}$ durch freie Übergänge ein neues und bezeichnen es mit denselben Symbolen.

Unser besonderer Dank gilt Herrn R. Lyndon, der durch seine genaue Durchsicht des Manuskriptes und seine kritischen Verbesserungsvorschläge einen wertvollen Beitrag zu dieser Arbeit geleistet hat.

§ 1. Vorbereitungen

Sei $\mathfrak{G}=\bigstar_{i=1}^{n}{}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{H}_i$ ein freies Produkt der Gruppen $\mathfrak{H}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ mit Amalgam $\mathfrak{A}$. Ferner sei in $\mathfrak{G}$ eine Ordnung und eine Länge L wie in [3, § 1] definiert. Die Ordnung genüge der Bedingung, daß vor einem Produkt von Restklassenvertretern $r_1 \ldots r_{m-1}r_m$ von $\mathfrak{A}$ in den $\mathfrak{H}_i$ nur endlich viele Produkte $r_1 \ldots r_{m-1}r$ liegen, wobei r ein Restklassenvertreter aus demselben Faktor $\mathfrak{H}_i$ wie r_m ist. Wir wollen ein System X von Elementen aus $\mathfrak{G}$ kleiner als Y nennen, falls es geeignete Indizierungen $X=\{g_j\}_{j\in J}$ und $Y=\{g'_j\}_{j\in J}$ gibt, so daß $g_j\leqq g'_j$; $j\in J$ bezüglich der durch die Länge und Ordnung auf $\mathfrak{G}$ definierten Relation gilt. Aus [3, Satz 1] erhalten wir folgenden Satz

(1.1) **Satz.** *Ist $X\subset\mathfrak{G}=\bigstar_{i=1}^{n}{}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{H}_i$ ein endliches System von Elementen aus $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{U}$ die von X in $\mathfrak{G}$ erzeugte Untergruppe, so gibt es einen freien Übergang von X zu einem System $Y=\{g_1,\ldots,g_k\}$, das einer der folgenden Bedingungen genügt.*

(1.2) *Jedes Element $w\in\mathfrak{U}$ besitzt eine Darstellung*

$$w=\prod_{i=1}^{l} g_{\nu_i}^{\varepsilon_i} \qquad \nu_i\in\{1,\ldots,k\}, \qquad \varepsilon_i=\pm 1, \qquad L(g_{\nu_i})\leqq L(w) \qquad \text{für } i=1,\ldots,l.$$

(1.3) *Es gibt Elemente $g_{\mu_i}\in A\cap Y$ $(i=1,\ldots,h)$ und ein $x\in\mathfrak{H}_\nu\setminus\mathfrak{A}$ für ein ν, so daß $(\prod_{i=1}^{h} g_{\mu_i}^{\varepsilon_i})\in x\mathfrak{A}x^{-1}$ ist.*

(1.4) *Für ein $q\in\mathfrak{G}$ und einen Faktor $\mathfrak{H}_\nu$ gibt es Elemente $g_{\mu_i}\in q\mathfrak{H}_\nu q^{-1}\cap Y$ $(i=1,\ldots,h)$, die nicht alle in $\mathfrak{A}$ liegen, so daß $\prod_{i=1}^{h} g_{\mu_i}^{\varepsilon_i}\in p\mathfrak{A}p^{-1}$ für ein $p\in\mathfrak{G}$.*

Der freie Übergang kann so gewählt werden, daß das System Y kleiner ist als X oder die Längen der Elemente von X erhalten bleiben. □

Wir wollen sagen, ein System $\{g_j\}_{j\in J}$ hat die *Nielsensche Eigenschaft* (bezüglich L), falls

(i) $L(g_i^{\varepsilon}g_j^{\mu})\geqq\max\{L(g_i),L(g_j)\}$, $\quad i,j\in J,\ \varepsilon,\mu=\pm 1$ und $i\neq j$ oder $i=j$ und $\varepsilon=\mu$.

(ii) $L(g_k^{\varepsilon}g_i g_j^{\mu})>L(g_k)-L(g_i)+L(g_j)$, $\quad k,i,j\in J,\ \varepsilon,\mu=\pm 1$ und $k\neq i\neq j$, $g_i\neq 1$ oder $k=i$ und $\varepsilon=1$ oder $i=j$ und $\mu=1$. □

(1.5) **Korollar.** *Ist $\mathfrak{A}=1$, also $\mathfrak{G}$ ein freies Produkt, so gibt es von X einen freien Übergang zu einem System Y, das die Nielsensche Eigenschaft besitzt, oder in dem ein Element in einer zu einem Faktor $\mathfrak{H}_\nu$ konjugierten Untergruppe von $\mathfrak{G}$ liegt.*

Zum Beweis vgl. [3, Hilfssatz 1]. □

(1.6) *Bemerkung.* Ist X ein endliches Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$, so folgt aus der Bedingung 1.2 $L(g_i)\leqq 1$ für $i=1,\ldots,k$.

Es sei $\mathfrak{G}=\bigstar_{i=1}^{n}{}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{H}_i$ und die Länge in $\mathfrak{G}$ sei durch diese Darstellung definiert [3, § 1]. $\{x_j\}_{j\in J}\subset\mathfrak{G}$ und x_j habe die Normalform $x_j=r_{j_1}\ldots r_{j_{m_j}}k_j l_{j_{m_j}}\ldots l_{j_1}$ $(r_{j_k}, l_{j_k}$

Links- und Rechtsrestklassenvertreter von $\mathfrak{A}$ in den $\mathfrak{H}_i$ [3, 1.3]). Eine *Stelle* von x_j sei eines der r_{j_i}, l_{j_i}, k_j.

(1.7) *Definition.* Eine Stelle v von x_j heißt *standhafte Stelle*, falls es in jedem freigekürzten Produkt P in den x_i mit $P=\prod_{i=1}^{M} x_{\nu_i}^{\varepsilon_i}=r_1 \dots r_m k l_m \dots l_1$ $(\varepsilon_i=\pm 1)$ zu jedem Index i_0 mit $\nu_{i_0}=j$ eine Stelle u gibt mit $u=a v^{\varepsilon_{i_0}} a'$, $(a, a' \in \mathfrak{A})$ oder $u=a v' v^{\varepsilon_{i_0}} a'$ bzw. $u=a v^{\varepsilon_{i_0}} v' a'$ $(a, a' \in \mathfrak{A}, v'$ eine Stelle in $x_{\nu_{i_0-1}}^{\varepsilon_{i_0-1}}$ bzw. in $x_{\nu_{i_0+1}}^{\varepsilon_{i_0+1}})$.

v und v' liegen dann natürlich im gleichen Faktor $\mathfrak{H}_i$. Eine standhafte Stelle wird also in keinem Produkt der x_i „gekürzt".

(1.8) **Hilfssatz.** *$\mathfrak{G}=\bigstar_{i=1}^{n} {}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{H}_i$ und $\{x_j\}_{j\in J} \subset \mathfrak{G}$ habe die Nielsensche Eigenschaft. Dann gibt es in jedem x_j eine standhafte Stelle* ([3, (2.21)]). □

§ 2. Eine Gleichung in dem freien Produkt zyklischer Gruppen

(2.1) **Hilfssatz.** *In $\mathfrak{G}=\bigstar_{i=1}^{m} \mathbb{Z}_{\alpha_i}=\langle s_1, \dots, s_m \mid s_1^{\alpha_1}=\dots=s_m^{\alpha_m}=1\rangle$ $(\alpha_i \geqq 2)$ sei eine Länge bzgl. der Darstellung von $\mathfrak{G}$ als freies Produkt definiert. X bezeichne die von $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathfrak{G}$ $(n \leqq m)$ erzeugte Untergruppe. Gilt*

$$\left(\prod_{i=1}^{m} s_i\right)^{\alpha} \in X, \qquad \alpha>0, \alpha \text{ minimal},$$

so ist $\{x_1, \dots, x_n\}$ frei äquivalent zu einem System $\{u_1, \dots, u_n\}$, das bis auf Konjugation in $\mathfrak{G}$ eine der folgenden Eigenschaften hat.

(a) *Ein u_i ist konjugiert zu einer Potenz eines s_i oder von $\prod_{i=1}^{m} s_i$.*

(b) *Die u_i haben die Nielsensche Eigenschaft und es gilt eine Gleichung $u_{\nu_1}^{\varepsilon_1} \dots u_{\nu_{2k}}^{\varepsilon_{2k}}=(\prod_{i=1}^{m} s_i)^{\alpha}$ wobei $\prod_{i=1}^{2k} u_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$ ein alternierendes Produkt ist, also jedes u_i, das vorkommt, genau einmal mit dem Exponenten $+1$ und -1 auftritt.*

Beweis [vgl. 3, Satz 3]. Es trete (a) nicht ein. Dann können wir nach (1.5) annehmen, daß die u_i die Nielsensche Eigenschaft haben. Es gilt also eine Gleichung $\prod_{i=1}^{q} u_{\nu_i}^{\varepsilon_i}=(\prod_{i=1}^{m} s_i)^{\alpha}$ und q sei minimal bezüglich des minimalen α gewählt.

Angenommen, es gibt zwei verschiedene Indizes i, j mit $\nu_j=\nu_i=l$ und $\nu_k \neq l$ für $j<k<i$ und $\varepsilon_i=\varepsilon_j$. (OBdA $\varepsilon_j=\varepsilon_i=1$.) Nach (1.8) gibt es für jedes u_i eine standhafte Stelle, die in dem Produkt der u_{ν_i} nicht gekürzt wird. Sei also $u_l=u s_\lambda^\beta v$, wobei s_λ^β die standhafte Stelle von u_l ist. Wir haben also folgende Gleichung

$$u_l\left(\prod_{i=j+1}^{i-1} u_{\nu_i}^{\varepsilon_i}\right) u_l = u s_\lambda^\beta v \left(\prod_{i=j+1}^{i-1} u_{\nu_i}^{\varepsilon_i}\right) u s_\lambda^\beta v = u s_\lambda^{\beta'} (s_\lambda \dots s_m s_1 \dots s_{\lambda-1})^\gamma s_\lambda^{\beta''} v.$$

Für $\gamma=0$ ergibt sich $j=i-1$ und es tritt Fall (a) ein. Sonst wäre das standhafte Zeichen von $u_{\nu_{j+1}}$ gleich einer Potenz von s_λ, die von beiden Seiten beeinflußt würde. Das ist ein Widerspruch zur Nielsenschen Eigenschaft.

Sei also $\gamma>0$. Dann gilt

$$\beta'+1 \equiv \beta \bmod \alpha_\lambda, \beta'' \equiv 1 \bmod \alpha_\lambda$$

oder

$$\beta'+1 \equiv 1 \bmod \alpha_\lambda, \beta'' \equiv \beta \bmod \alpha_\lambda.$$

Das folgt aus der Definition der standhaften Stelle. Um nämlich β'' zu 1 zu kürzen, kann man nur von einer Seite einen Beitrag leisten, analog für $\beta'+1$. Genauer:

Ist $\beta'+1 \not\equiv \beta \bmod \alpha_\lambda$, so ist s_λ^β in u_j von rechts beeinflußbar, also nach (1.7) nicht von links. Es folgt $\beta'' \equiv \beta$ und $\beta'+1 \equiv 1$. Ist $\beta'+1 \equiv \beta$ und $\beta \not\equiv 1$, so ist wieder nach (1.7) $\beta'' \equiv 1$. Für $\beta \equiv 1$ folgt ebenfalls $\beta'' \equiv 1$. Sonst wären β und β'' verschieden und die standhafte Stelle s_λ^β wäre von links beeinflußbar und nicht mehr von rechts. Das ist aber wegen $\beta'' \not\equiv 1$ ein Widerspruch.

Ist nun $\beta'+1 \equiv \beta$ und $\beta'' \equiv 1$, so erhalten wir

$$s_\lambda^\beta v \left(\prod_{\iota=j+1}^{i-1} u_{\nu_\iota}^{\varepsilon_\iota} \right) u s_\lambda^\beta = s_\lambda^\beta s_{\lambda+1} \dots s_m \left(\prod_{i=1}^{m} s_i \right)^{\gamma-1} s_1 \dots s_{\lambda-1} s_\lambda$$

also

$$\left(\prod_{\iota=j+1}^{i-1} u_{\nu_\iota}^{\varepsilon_\iota} \right) u_l = v^{-1} s_\lambda^{-1} \dots s_1^{-1} \left(\prod_{i=1}^{m} s_i \right)^{\gamma} (s_1 \dots s_{\lambda-1} s_\lambda v).$$

Wir können nun die u_i mit $(s_1 \dots s_\lambda v)$ konjugieren. Dann widerspricht die Gleichung der Minimalität von α, falls $0<\gamma<\alpha$. Sonst widerspricht sie der Minimalität von q. Ähnlich erledigt man den Fall $\beta'+1 \equiv 1$ und $\beta'' \equiv \beta$.

Es kann also kein u_j zweimal mit dem gleichen Exponenten auftreten. Also tritt jedes u_j genau einmal mit dem Exponenten $+1$ und -1 auf, da sonst (a) eintreten würde. Wir haben also ein alternierendes Produkt. □

Satz 1. *Sei* $\mathfrak{G} = \langle s_1, \dots, s_m \mid s_1^{\alpha_1} = \dots = s_m^{\alpha_m} = 1 \rangle$ $(\alpha_i \geqq 2)$, $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathfrak{G}$ $(n \leqq m)$ *und* X *die von* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *erzeugte Untergruppe von* $\mathfrak{G}$. *Gilt*

$$y^{-1} \left(\prod_{i=1}^{m} s_i \right)^{\alpha} y \in X \quad \text{für ein } \alpha \neq 0,\ y \in \mathfrak{G}$$

so tritt einer der folgenden Fälle ein.

(a) *Es gibt einen freien Übergang* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *zu einem System, in dem ein Element zu einer Potenz von* $\prod_{i=1}^m s_i$ *oder von einem* s_i *konjugiert ist.*

(b) $n=m$.

(c) *Es ist* m *ungerade,* $n=m-1$, *alle* $\alpha_i=2$. *Ferner gibt es einen freien Übergang von* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *zu einem System, das bis auf Konjugation in* $\mathfrak{G}$ *die Form* $\{s_1 s_2, s_1 s_3, \dots, s_1 s_m\}$ *hat. Das Produkt aller* s_i *liegt nicht in der von diesem System erzeugten Untergruppe von* $\mathfrak{G}$, *sondern nur die geraden Potenzen von* $\prod_{i=1}^m s_i$.

Beweis. Es trete nicht der Fall (a) oder (b) ein. Inbesondere ist dann $m>2$. Nach Hilfssatz (2.1) können wir – eventuell nach Konjugation und freien Übergängen – annehmen, daß die x_i die Nielsensche Eigenschaft haben und einem alternierenden Produkt $\prod_{i=1}^q x_{\nu_i}^{\varepsilon_i} = (\prod_{i=1}^m s_i)^\alpha$, mit $\alpha>0$, α und q minimal, genügen.

Wir definieren nun eine Folge $\{y_h\}$ auf folgende Weise. $y_1 = x_{\nu_1}^{\varepsilon_1}$; $y_{k+1} = x_{\nu_j}^{\varepsilon_j}$, falls $x_{\nu_j}^{\varepsilon_j}$ in dem Produkt auf y_k^{-1} folgt. Ist y_k^{-1} das letzte Zeichen des Produktes, so sei $y_{k+1}=1$, ebenso alle folgenden y_i.

Wir benötigen nun einige Hilfssätze, die über die mögliche Gestalt der x_i Auskunft geben

(2.2) **Hilfssatz.** *Für* $k<m$ *und* $y_k \neq 1$ *gilt* $y_k = v s_{j-1} w_k s_{l_k}^{\gamma_k} z$, *wobei* $v = (s_1 \dots s_m)^\beta \cdot s_1 \dots s_{j-2}$ *mit* $L(v) \geqq 0$, $j-1 \geqq 1$ *oder* $j-1 \equiv m \pmod m$ $(j \bmod m$ *genommen).*

$s_{l_k}^{\gamma_k}$ *ist die standhafte Stelle von* y_k. *Es hat* $s_{j-1} w_k s_{l_k}^{\gamma_k}$ *die Form*

$$s_{j-1} s_j^{\delta_0^k} \dots s_{j+r}^{\delta_r^k} \dots s_{j+p}^{\delta_p^k} s_{l_k}^{\gamma_k};\ (j+r \bmod m \text{ genommen});$$
$$l_k \equiv j+p+1 \pmod m,\ \delta_\nu^k \text{ eventuell } 0.$$

Es gilt entweder

(i) $w_k = w_{k-1}$, $l_k = l_{k-1}$ *oder* $l_k = l_{k-1}+1 \pmod m$ *oder*

(ii) $L(w_k) > L(w_{k-1})$ *und* $w_k = w_{k-1} s_{l_{k-1}}^{1+\gamma_{k-1}} s_{l_{k-1}+1} \dots s_{l_k-1}$.

Beweis des Hilfssatzes durch Induktion. $k=1$, $y_1 = v s_{j-1} s_j^{\gamma_1} z_1$, wobei $s_j^{\gamma_1}$ die standhafte Stelle von y_i ist und $L(v) \leqq L(z) \leqq L(v)+2$. Es ist $w_1 = 1$ und $l_1 = j$.

Sei die Aussage richtig für $1 \leqq i \leqq k < m-1$. Bei y_{k+1} sieht die Situation wie folgt aus.

$$y_k^{-1} y_{k+1} = z_k^{-1} s_{l_k}^{-\gamma_k} w_k^{-1} s_{j-1}^{-1} v^{-1} y_{k+1};\quad s_{l_k}^{\gamma_k} \text{ standhaft.}$$

Man kann nun zwei Fälle (2.3) und (2.4) unterscheiden, je nachdem wie weit y_k^{-1} gekürzt wird.

(2.3) y_{k+1} kürzt das ganze $w_k^{-1} s_{j-1}^{-1} v^{-1}$, d.h. $y_{k+1} = v s_{j-1} w_k \dots$.

Folgt dann bei y_{k+1} das standhafte Zeichen, so gleicht dieses entweder $s_{l_k}^{-\gamma_k}$ aus ($l_k = l_{k+1}$, $w_{k+1} = w_k$) oder es ist $-\gamma_k \equiv 1$ (α_{l_k}) und $l_{k+1} \equiv l_k + 1\,(m)$. Es tritt also (i) ein.

Folgt das standhafte Zeichen von y_{k+1} nicht direkt, so muß

$$w_{k+1} = w_k s_{l_k}^{1+\gamma_k} s_{l_k+1} \dots s_{l_{k+1}-1}$$

sein. Also der Fall (ii).

(2.4) y_{k+1} kürzt nicht das ganze $w_k^{-1} s_{j-1}^{-1} v^{-1}$. Das erste Zeichen von $w_k^{-1} s_{j-1}^{-1}$ wird also nicht weggekürzt.

War i die letzte Stelle vor k, wo (ii) eintrat, so gilt für l_i, l_k und den Index ρ des ersten Zeichens von $w_k^{-1} s_{j-1}^{-1}$:

$$\left.\begin{array}{ll} l_i - \rho \equiv 1\,(m) & \text{da bei } i \text{ bereits das Zeichen mit dem Index } \rho \\ & \text{stehenbleibt (es tritt (ii) ein)} \\ \rho \equiv l_k + 1\,(m) & \text{da das Zeichen stehenbleibt} \end{array}\right\} \Rightarrow l_i - l_k - 1 \equiv 1\,(m).$$

Es folgt $l_k - l_i + 2 \equiv 0\,(m)$

$$\Rightarrow l_k - l_i = m-2 \quad \text{oder} \quad l_k - l_i = -2.$$

Ferner gilt $l_i \leqq l_k \leqq l_i + (k-i)$ oder $1 \leqq l_k \leqq l_i + (k-i) - m$, da beim Eintreten von (i) der Index der standhaften Stelle höchstens um eins steigen kann.

$$\Rightarrow 0 \leqq l_k - l_i \leqq k-i \quad \text{oder} \quad l_k - l_i \leqq k-i-m \leqq 0$$

Insgesamt ergibt sich $m-2 \leqq k-i$ oder $-2 \leqq k-i-m$.

Das ist nur möglich für $k = m-1$; $i=1$. Es galt jedoch $k < m-1$. □

(2.5) Die standhafte Stelle eines $y_k \neq 1$ muß wegen der Nielsen-Eigenschaft in der Normalform von y_k in $\mathfrak{G}$ in der Mitte stehen bei ungerader Länge oder gleich einem der beiden mittleren Elemente sein bei gerader Länge.

Daraus folgt, daß sich die Indizes der standhaften Stellen von $y_l, \ldots, y_{l+k}$ für $l, l+k<m$, $y_i \neq 1$ bei jedem Schritt von y_j auf y_{j+1} um höchstens eins erhöhen können, falls $L(y_l)=\cdots=L(y_{l+k})$. Und umgekehrt, falls der Fall (ii) nicht eintritt, so unterscheiden sich die Längen von y_j, y_i mit $l \leqq j$, $i \leqq l+k$ um höchstens eins.

(2.6) **Hilfssatz.** *Sei $i<h<m$. Dann gilt $y_h \neq y_i^{-1}$ für $y_h \neq 1$.*

Beweis. Angenommen, es gilt $y_h = y_i^{-1}$, insbesondere ist dann $y_i \neq 1$. Das heißt nach Hilfssatz (2.2)

$$y_h = v s_{j-1} w_h s_{l_h}^{\gamma_h} x = y s_{l_i}^{-\gamma_i} w_i^{-1} s_{j-1}^{-1} v^{-1} = y_i^{-1};$$

Da es keine zwei standhaften Stellen in y_h geben kann ($m>2$), folgt

$$y_h = v s_{j-1} w_h s_{l_h}^{\gamma_h} w_i^{-1} s_{j-1}^{-1} v^{-1}.$$

Ist nun $L(w_h)=L(w_i)$, so folgt nach Hilfssatz (2.2) $w_i = w_h$ und y_h ist konjugiert zu $s_{l_h}^{\gamma_h}$ und es tritt der Fall (a) ein. Sei also $L(w_h)>L(w_i) \Rightarrow L(w_h)=L(w_i)+1$, da das standhafte Zeichen in der Mitte stehen muß. Nach Hilfssatz (2.2) (ii) folgt $w_h = w_i s_{l_k}^{\alpha}$. Nun gilt $l_i \equiv l_h (m)$. Nach (2.5) kann der Index des standhaften Zeichens von y_i bei dem Schritt von y_j auf y_{j+1} höchstens um eins steigen, bis auf die Stelle, wo sich die Länge von w_i vergrößert. Hier kann der Index um maximal 2 steigen.

Wegen $l_i \equiv l_h$ liegen y_i und y_h mindestens m Schritte auseinander. Das kann aber wegen $i, h<m$ nicht sein. □

Angenommen, eines der y_j für $j \leqq m$ sei gleich eins. Sei k minimal mit dieser Eigenschaft. Nach Definition der Folge $\{y_i\}$ ist dann y_{k-1}^{-1} das letzte Zeichen in dem Produkt der x_i. Es muß also y_{k-1}^{-1} mit s_m enden und damit y_{k-1} mit s_m^{-1} beginnen. Nach Hilfssatz (2.2) bleibt, da y_1 mit s_1 beginnt, als einzige Möglichkeit offen, daß s_1 die standhafte Stelle von y_1 ist. Tritt nun einmal der Fall (ii) von (2.2) ein, so beginnen alle weiteren y_l mit dem dort vor die standhafte Stelle vorgeschobenen Zeichen. Also kann (ii) erst eintreten, wenn bereits s_m vor die standhafte Stelle geschoben werden kann. Nach (2.5) erhöht sich der Index des standhaften Zeichens bei jedem Schritt von y_j auf y_{j+1} um höchstens eins. Um also s_m^{-1} als erstes Zeichen zu erhalten, brauchen wir mindestens m Schritte, wegen $k-1<m$ kann also y_{k-1} nicht mit s_m^{-1} beginnen.

Es ist also keines der y_j, $j \leqq m$, gleich 1. Ist dann $y_m \neq y_i^{-1}$ für alle $i<m$, so folgt wegen Hilfssatz (2.6) $m=n$ und Fall b) des Satzes tritt ein.

Wir haben also den Fall $m-1=n$ und bei der Folge der $\{y_i\}$ tritt jedes $x_{v_i}^{\varepsilon_i}$ genau einmal auf.

Analog zu den y_i definiert man sich nun eine Folge $\{z_n\}$ durch: z_1 ist das letzte Element in dem Produkt der x_j.

z_k sei dann das z_{k-1}^{-1} vorangehende x_ν^ε; ist z_{k-1}^{-1} das erste Zeichen des Produktes der x_i, so sei $z_j=1$, $j \geqq k$. Es folgt dann genau wie für die y_i

(2.7) **Hilfssatz.** *Für $k<m$ gilt $z_k = z s_{j_k}^{\beta_k} w_k' s_{l-1} v'$, wobei $v' = s_l \ldots s_m (s_1 \ldots s_m)^\gamma$ ist, oder $v'=1$. $s_{j_k}^{\beta_k}$ ist die standhafte Stelle von z_k und $s_{j_k}^{\beta_k} w_k' s_{l-1}$ hat die Form*

$s_{j_k}^{\beta_k} s_j^{\delta_\delta^k} s\, \delta_{1\,j-1}^k \ldots s_{j-r}^{\delta_r^k} \ldots s_{l-1}$ $(j-r \bmod m)$, δ_v^k *eventuell* 0 *oder ist gleich* 1. *Es gilt entweder*

(i) $w_k' = w_{k+1}'$, $j_k = j_{k-1}$ *oder* $j_k = j_{k-1} - 1 \bmod m$ *oder*

(ii) $L(w_k') > L(w_{k-1}')$ *und* $w_k' = s_{j_{k+1}} \ldots s_{j_k-1}^{1+\beta_{k-1}} s_{j_{k-1}} w_{k-1}'$. □

Ebenso erhält man für die z_j ein zu Hilfssatz (2.6) analoges Resultat.

Wir betrachten nun die folgenden beiden Fälle.

(2.8) $L(vs_{j-1}) \geqq 1$ und $L(s_{l-1}v') \geqq 1$.

(2.9) Mindestens eine der beiden Längen $L(vs_{j-1})$ bzw. $L(s_{l-1}v')$ ist Null.

Zu (2.8). Nach Hilfssatz (2.2) folgt, daß alle y_i, $i \leqq m-1$ mit s_1 beginnen und wegen (2.7) enden alle z_j, $j \leqq m-1$ mit s_m. Darum kann kein z_j für $j \leqq m-1$ invers zu einem y_i mit $i \leqq m-1$ sein. Alle y_i beginnen also mit s_1 und enden mit s_m. Die Situation sieht also bei y_m folgendermaßen aus:

$$y_{m-1}^{-1} y_m = \ldots s_1^{-1} y_m.$$

Da aber y_m invers zu einem y_i mit $i \leqq m-1$ sein muß $(n = m-1)$, beginnt y_m mit s_m^{-1}. Wegen $m \neq 2$ ist das ein Widerspruch.

Zu (2.9) O.B.d.A. sei $L(vs_{j-1}) = 0$. Das heißt, $y_1 = s_1^{\gamma_1} s_l^{\beta_1}$ und $s_1^{\gamma_1}$ ist das standhafte Zeichen. $\beta_1 \not\equiv 0(\alpha_1)$, da Satz 1 (a) nicht eintritt.

(2.10) y_1 kann nicht invers zu einem z_j mit $j \leqq m-1$ sein. Sonst hätte ein z_j die Gestalt $s_l^{-\beta_1} s_1^{-\gamma_1}$ und müßte das standhafte Zeichen hinten haben. Nach (2.7) wäre dann auch bei z_1 das s_m (d.h. das letzte Zeichen) standhaft. Um aber von s_m zu s_1 zu gelangen, brauchen wir mindestens m Schritte z_i, da der Index des standhaften Zeichens pro Schritt um höchstens 1 sinken kann. Es sollte aber $j \leqq m-1$ sein. Wegen (2.6) muß nun y_1 gleich einem der z_j mit $j \leqq m-1$ sein. Es gilt

$$y_1 = z_{m-1}. \tag{2.11}$$

Ist nämlich bei z_1 das letzte s_m nicht standhaft, so kann sich der Index des standhaften Zeichens bei jedem Schritt um höchstens eins senken $(L(y_1) = 2)$. Man benötigt aber genau $m-1$ Schritte, um von s_{m-1} zu s_1 als standhaftem Zeichen zu gelangen. Ist s_m standhaft bei z_1, so kann bei einem Schritt der Index um 2 sinken, da das standhafte Zeichen von y_1 vorne steht. Wegen $L(y_1) = 2$ kann das aber nur einmal geschehen. Da sonst der Index nur um eins sinken kann, brauchen wir genau $m-1$ Schritte, um s_1 als standhaftes Zeichen zu erhalten.

Die oberen Überlegungen zeigen, daß bei den z_k an einer Stelle der Index des standhaften Zeichens um 2 sinken muß (eventuell bei z_1, d.h. s_m ist nicht standhaft) und sonst bei jedem Schritt um eins. Somit hat $y_1 = z_{m-1}$ die Form $y_1 = s_1^{\gamma_1} s_l$, also $\beta_1 \equiv 1$. Das s_l kommt von der Stelle, an der der Index des standhaften Zeichens der z_k um 2 gesunken ist. Da er sonst nur um 1 sinkt, folgt

z_k endet mit $s_{m+1-k}^{\gamma_k}$ (standhaft) für $k < m+1-l$ $(k < m)$ und mit $s_{m-k}^{\gamma_k} s_l$ für $k \geqq m+1-l$. Analog folgt für die $y_j (j < m)$:

y_i beginnt mit $s_i^{\gamma_i}$ für $i < h$ (h der Index, für den der Index des standhaften Zeichens um 2 steigt) und mit $s_h s_{i+1}^{\gamma_i}$ für $i \geqq h$.

Die standhaften Zeichen der y_i sind alle untereinander verschieden und s_h taucht nicht als standhaftes Zeichen auf. Analog taucht s_l bei den z_k nicht als standhaftes Zeichen auf. Da die z_k gleich den y_i oder y_i^{-1} sein müssen und außer s_1 bzw. s_h alle s_i als standhafte Zeichen auftreten, folgt $l=h$. Durch Vergleichen der standhaften Zeichen der y_i mit denen der z_k erhält man

$$y_i = z_{m-i} \quad (i<m)$$

und damit

$$y_i = s_i^{\gamma_i} s_l, \quad i<l, \quad y_i = s_l s_{i+1}^{\gamma_i}, \quad m>i\geqq l.$$

Durch ähnliche Schlüsse erhält man dann induktiv $y_{m+i} = y_{1+i}^{-1}$, $i=0 \dots m-2$, alle $\alpha_j=2$, alle $\gamma_i=1$ und das Produkt hat folgende Form:

auf y_i folgt y_{m+i}, $i=1 \dots m-2$, y_{m-1} steht am Ende, auf y_{m+i} folgt y_{i+2}, $i=0 \dots m-3$, auf y_{2m-2} folgt y_m. m ist ungerade. Durch Anwendung der Nielsen-Transformationen sieht man, daß alle diese Systeme frei äquivalent zu dem unter (c) aufgeführten System sind. Das gleiche gilt für alle Systeme $\{zs_1 s_2 z^{-1}, \dots, zs_1 s_m z^{-1}\}$ $z\in\mathfrak{G}$. Damit ist Satz 1 bewiesen. □

Satz 2. $\mathfrak{G}=\langle s_1, s_2 \mid s_1^{\alpha_1}=s_2^{\alpha_2}=1\rangle$, $\alpha_1\geqq\alpha_2\neq 0$. *Ferner seien* x_1, $x_2\in\mathfrak{G}$ *mit* $[x_1, x_2]=(s_1 s_2)^{\alpha}$, $\alpha\neq 0$. *Dann ist* $\{x_1, x_2\}$ *frei äquivalent zu einem der folgenden Systeme:*

(*a*)	$\alpha_1=\alpha_2=2$,	$x_1=(s_1 s_2)^{\beta_1} s_1$,	$x_2=(s_2 s_1)^{\beta_2} s_2$,
(*b*)	$\alpha_1=4$; $\alpha_2=2$,	$x_1=s_1 s_2 s_1$,	$x_2=s_2 s_1^2$,
(c)	$\alpha_1=\alpha_2=3$,	$x_1=s_1 s_2^{-1}$,	$x_2=s_2^{-1} s_1$,
(d)	$\alpha_1=3$; $\alpha_2=2$,	$x_1=s_1 s_2 s_1^{-1} s_2$,	$x_2=s_2 s_1^{-1} s_2 s_1$.

Beweis. Durch freie Übergänge gelangt man von $\{x_1, x_2\}$ zu einem System, bei dem in $[x_1, x_2]$ kein x_i über die Hälfte gekürzt wird.

Die Situation sieht also folgendermaßen aus

$$\frac{x_1}{s_1 \dots s_i^{\delta}} \qquad \frac{x_2}{s_2^{-1} \dots s_j^{\gamma}} \qquad \frac{x_1^{-1}}{s_i^{-\delta} \dots s_1^{-1}} \qquad \frac{x_2^{-1}}{s_j^{-\gamma} \dots s_2}$$

$$0<\delta<\alpha_i; \quad 0<\gamma<\alpha_j.$$

Damit ein x_i in dem Kommutator von beiden Seiten gekürzt werden kann, muß $(i,j)=(1,1)$ oder $(i,j)=(2,2)$ gelten. Für $(i,j)=(1,1)$ folgt dann $\alpha_2=2$, $\delta=1$. Weil x_1^{-1} von beiden Seiten gekürzt werden soll, muß $\gamma-1\equiv-\gamma-1\equiv 0\,(\alpha_1)$ also $\alpha_1=2$ sein. Dann läßt sich ein x_i über die Hälfte kürzen im Gegensatz zur oberen Annahme.

Ähnlich ergibt $(i,j)=(2,2)$ einen Widerspruch.

Dieses spezielle Produkt der x_i genügt also auch der zweiten Bedingung der Nielsenschen Eigenschaft, das heißt $L(x_1 x_2 x_1^{-1})>L(x_1)-L(x_2)+L(x_1)$ und $L(x_2 x_1^{-1} x_2^{-1})>L(x_2)-L(x_1)+L(x_2)$. Wir wollen kurz sagen, das Produkt genügt der Nielsenschen Eigenschaft.

Betrachte nun die verschiedenen Möglichkeiten für (i,j)

$$(i,j)=(1,1)$$

Es folgt $\delta=1$ und $-1\equiv 1\ (\alpha_2)$, also $\alpha_2=2$. Ferner ist für $\kappa_i=0$ oder 1

$$\left.\begin{aligned}\gamma-1\equiv\gamma-\delta\equiv\kappa_1\ (\alpha_1)\\ -1-\gamma\equiv\kappa_2\ (\alpha_1)\end{aligned}\right\}\Rightarrow -2\equiv\kappa_1+\kappa_2\ (\alpha_1)$$

also $\alpha_1=2, 3, 4$.

Für x_1 gilt $x_1=(s_1s_2)^\beta s_1$ und $L(x_1)\geqq 3$ wegen der Nielsenschen Eigenschaft. Ist $L(x_2)>2$, so folgt $L(x_2)\geqq 4$, und es muß das zweite Zeichen in x_2 beide Male stehenbleiben, d.h. $s_1=s_1^{-1}$, $\alpha_1=2$. Dies ergibt einen Widerspruch zur Nielsenschen Eigenschaft.

Folglich ist $L(x_2)=2$. Ist $L(x_1)>3$, (d.h. $L(x_1)\geqq 5$), so bleiben alle Terme außer den beiden äußersten stehen. Also ist $\alpha_1=2$ und es ergibt sich ein Widerspruch wie oben. Damit gilt $L(x_1)=3$.

Es folgt $x_1=s_1s_2s_1$; $x_2=s_2s_1^\gamma$; $\alpha_2=2$. In dem Produkt darf weder $\gamma-1\equiv 0$ noch $-1-\gamma\equiv 0\ (\alpha_1)$ sein. Da $\alpha_1=2$ unmöglich ist, gilt $\alpha_1=4$, $\gamma=2$. Es tritt (b) ein.

$$(i,j)=(1,2)$$

Es folgt $\delta=1$; $\gamma=1$; $-\delta\equiv 1\ (\alpha_1)$; $-\gamma\equiv 1\ (\alpha_2)\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=2$, $x_1=(s_1s_2)^{\beta_1}s_1$; $x_2=(s_2s_1)^{\beta_2}s_2$. Es tritt (a) ein.

$$(i,j)=(2,1)$$

Es folgt $\gamma=1$; $-\delta\equiv 1\ (\alpha_2)$, also

$$-2\equiv 0, 1\ (\alpha_1)\Rightarrow\alpha_1=2, 3$$
$$-2\equiv 0, 1\ (\alpha_2)\Rightarrow\alpha_2=2, 3$$

$\alpha_1=\alpha_2=2$ führt zu Widerspruch wie oben. Wegen $\alpha_1\geqq\alpha_2$ ist also $\alpha_1=3$.

Für $L(x_2)>2$ bleibt das Inverse des vorletzten Zeichens von x_2 in beiden Fällen stehen.

Es folgt $\alpha_2=2$. Dann ist $L(x_1)\leqq 4$, sonst würde ein Widerspruch zu $\alpha_1=3$ erfolgen. $L(x_1)=2$ widerspricht der Nielsenschen Eigenschaft. Also ist $L(x_1)=4$. Wäre $L(x_2)>4$, so ergibt sich ein Widerspruch zu $\alpha_1=3$, d.h. $L(x_2)=4$.

Es folgt

$$x_1=s_1s_2s_1^\mu s_2;\quad x_2=s_2s_1^\nu s_2s_1,\quad \mu,\nu=\pm 1,$$

aber $\mu+\nu\equiv 1$ (3), d.h. $\mu=\nu=-1$. Es tritt also (d) ein.

Ist $\alpha_1=3$ und $L(x_2)=2$, so folgt $\alpha_2=3$. Ferner folgt, daß auch $L(x_1)=2$. Also $x_1=s_1s_2^{-1}$, $x_2=s_2^{-1}s_1$. Es tritt (c) ein.

Der Fall $(i,j)=(2,2)$ ist symmetrisch zu $(i,j)=(1,1)$. □

Der Vollständigkeit wegen soll hier noch einmal der Hilfssatz 4 aus [3] aufgeschrieben werden, der den Fall (1.3) aus Satz (1.1) für Fuchssche Gruppen behandelt.

(2.12) **Hilfssatz.** *Sei* $\mathfrak{G}=\langle s_1,\ldots,s_m\mid s_1^{\alpha_1}=\cdots=s_m^{\alpha_m}=s_1\ldots s_m=1\rangle$. *Wir schreiben* $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}_1\times_{\mathfrak{A}}\mathfrak{H}_2$ *mit*

$$\mathfrak{H}_1=\langle s_1,\ldots,s_l\mid s_1^{\alpha_1}=\cdots=s_l^{\alpha_l}=1\rangle,$$
$$\mathfrak{H}_2=\langle s_{l+1},\ldots,s_m\mid s_{l+1}^{\alpha_{l+1}}=\cdots=s_m^{\alpha_m}=1\rangle,$$
$$\mathfrak{A}=\langle(s_1\ldots s_l)\rangle=\langle(s_{l+1}\ldots s_m)^{-1}\rangle.$$

Dabei sei l, $m-l\geqq 2$. *Sei* $a=s_1\ldots s_l$.

Eine Gleichung

$$xa^{\gamma}x^{-1}=a^{\beta} \qquad \gamma\neq 0 \qquad x\in\mathfrak{G}$$

läßt nur die folgenden Möglichkeiten zu:

(a) $x=a^{\delta}$, $\gamma=\beta$,

(b) $l=2$, $\alpha_1=\alpha_2=2$, $x\in\mathfrak{H}_1$, $\gamma=-\beta$,

(c) $m-l=2$, $\alpha_{m-1}=\alpha_m=2$, $x\in\mathfrak{H}_2$, $\gamma=-\beta$,

(d) $l=m-l=2$, $\alpha_1=\cdots=\alpha_4=2$, $\gamma=-\beta$. □

§ 3. Der Rang ebener diskontinuierlicher Gruppen

Satz 3. *Die Gruppe*

$$\mathfrak{G}=\left\langle s_1,\ldots,s_m,t_1,u_1,\ldots,t_g,u_g \mid s_1^{\alpha_1}=\cdots=s_m^{\alpha_m}=s_1\ldots s_m\prod_{i=1}^{g}[t_i,u_i]=1\right\rangle$$

mit $\alpha_i\geqq 2$ *hat den Rang*

(a) $2g$ *falls* $m=0$, $g>1$,

(b) $m-2$ *falls* $g=0$, m *gerade und alle* α_i *bis auf eines gleich* 2 *sind und letzteres ungerade ist,*

(c) $2g+m-1$ *in allen unter* (a) *und* (b) *nicht erfaßten Fällen von unendlichen Gruppen, d.h. für:*

$g>0$, $m>0$,
$g=0$, $m\geqq 3$ *und mindestens zwei* $\alpha_i\neq 2$,
$g=0$, $m\geqq 3$ *und alle* $\alpha_i\equiv 0 \bmod 2$,
$g=0$, $m\geqq 3$ *und* m *ungerade.*

Bevor dieser Satz bewiesen wird, eine Folgerung.

Korollar. *Die Gruppe*

$$\mathfrak{G}=\left\langle s_1,\ldots,s_m,v_1,\ldots,v_g \mid s_1^{\alpha_1}=\cdots=s_m^{\alpha_m}=\prod_{i=1}^{m}s_i\prod_{j=1}^{g}v_j^2=1\right\rangle$$

hat für $g>0$ *und* $m\geqq 1$ *den Rang* $m+g-1$, *für* $g>0$ *und* $m=0$ *den Rang* g.

Beweis des Korollars. Für $m=0$ folgt die Behauptung durch Abelsch-Machen. Für $m=1$ setzen wir $s_1=1$ und die Behauptung folgt dann durch Abelsch-Machen. Sei nun $m\geqq 2$. Hier handelt es sich um eine ebene diskontinuierliche Gruppe, die orientierungsändernde Transformationen enthält, vgl. [4, Satz IV. 8]. Die Untergruppe U vom Index 2 der orientierungserhaltenden Elemente hat, wie aus dem Schreier-Verfahren folgt, vgl. [4, S. 21], die Form

$$\mathfrak{U}=\left\langle s_1,s_1',\cdots,s_m,s_m',x_1,y_1,\ldots,x_{g-1},y_{g-1} \mid s_1^{\alpha_1}=s_1'^{\alpha_1}=\cdots=s_m^{\alpha_m}=s_m'^{\alpha_m}=1,\right.$$
$$\left.\prod_{i=1}^{m}s_i\prod_{j=1}^{g-1}x_jy_j\left(\prod_{i=1}^{m}s_i'^{-1}\prod_{j=1}^{g-1}y_jx_j\right)^{-1}=1\right\rangle.$$

Für $g>1$ hat $\mathfrak{U}$ also den Rang $2(g-1)+2m-1$. Für $g=1$ besitzt $\mathfrak{U}$ eine gerade Zahl von Dreherzeugenden mit ungerader Ordnung, der Fall (b) aus Satz 3 kann also nicht auftreten, also ist der Rang von $\mathfrak{U}$ gleich $2m-1$.

Aus dem Reidemeister-Schreier-Verfahren folgt: Ist r der Rang von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vom Index c, so ist der Rang von $\mathfrak{U} \leqq c(r-1)+1$ (vgl. [4, Satz I.5 und II.2]). Es folgt also $2(g-1)+2m-1 \leqq 2(r-1)+1$, also $r \geqq m+g-1$. □

Der Rest des Paragraphen dient dem Beweis von Satz 3.

I. Der Fall $g=0$

Nach Voraussetzung ist $m \geqq 3$. Es sei k die Anzahl der α_i, die ungleich 2 sind. Wir ordnen nun die Paare (m, k) durch

$$(m, k) \leqq (m', k') \Leftrightarrow m \leqq m',\ k \leqq k'.$$

Der Beweis erfolgt mittels einer Induktion.

Im folgenden werden wir oftmals annehmen, daß die α_i in einer bestimmten Weise angeordnet sind. Dieses läßt sich bekanntlich erreichen, ohne den Isomorphietyp von $\mathfrak{G}$ zu ändern.

Zuerst zum Fall (b) von Satz 3.

(3.1) **Lemma.** *$\langle s_1, \ldots, s_m | s_1^2 = \cdots = s_{m-1}^2 = s_m^{2l+1} = s_1 \ldots s_m = 1\rangle$ hat den Rang $m-2$, wenn m gerade ist.*

Beweis. Durch Abelsch-Machen folgt, daß der Rang $\geqq m-2$ ist. Setze $x_{2i-1} = s_1 s_{2i}$, $x_{2i} = s_{2i+1} s_1$ für $i = 1, \ldots, \dfrac{m-2}{2} = n$. Dann ist

$$(*) \qquad \prod_{i=1}^{m-2} x_i = s_1 s_2 s_3 \ldots s_{m-1} s_1,$$

$$\prod_{i=1}^{m-2} x_i^{-1} = s_2 s_3 \ldots s_{m-1},$$

also

$$\prod_{i=1}^{m-2} x_i \cdot \prod_{i=1}^{m-2} x_i^{-1} = (s_1 \ldots s_{m-1})^2 = s_m^{-2}.$$

Da s_m ungerade Ordnung hat, liegt s_m in der von $x_1, \ldots, x_{2n}$ erzeugten Gruppe und somit ebenfalls $s_1 \ldots s_{m-1} = s_m^{-1}$.

Aus (*) folgt, daß auch s_1 zu dieser Untergruppe gehört, und deshalb auch $s_2, \ldots, s_{m-1}$. Also ist der Rang $\leqq m-2$. □

(3.2) **Lemma.** *Gilt die Behauptung für alle Paare (m', k') mit $m' \leqq 5$ oder $k' \leqq 3$ (bei $k'=1$, m ungerade), so gilt sie für alle Paare.*

Beweis. Sei (m, k) ein kleinstes Paar $\geqq (6, 4)$, für welches der Rang von $\mathfrak{G}$ kleiner als $m-1$ ist; dann ist der Rang wegen der Annahme des Lemmas gleich $m-2$. Wir schreiben $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \ast_{\mathfrak{A}} \mathfrak{H}_2$ mit

$$\mathfrak{H}_1 = \langle s_1, s_2, s_3 | s_1^{\alpha_1} = s_2^{\alpha_2} = s_3^{\alpha_3} = 1\rangle,$$

$$\mathfrak{H}_2 = \langle s_4, \ldots, s_m | s_4^{\alpha_4} = \cdots = s_m^{\alpha_m} = 1\rangle,$$

$$\mathfrak{A} \doteq \langle (s_1 s_2 s_3)\rangle = \langle (s_4 \ldots s_m)^{-1}\rangle,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5 \geqq 3$ sind.

Es sei $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ mit $n = m-2$.

Im folgenden wollen wir annehmen, daß sich $\{x_1, \ldots, x_n\}$ nicht mehr frei verkürzen läßt. Drücken wir nun nacheinander $s_1, \ldots, s_m$ durch $x_1, \ldots, x_n$ aus, so muß nach Satz (1.1) einer der folgenden Fälle vorliegen:

(3.3) Es tritt (1.3) oder (1.4) ein.

(3.4) Es tritt (1.2) ein. Also ist nach (1.6) $L(x_j) \leqq 1$, $j = 1, \ldots, n$.

(1.3) kann nicht eintreten; denn nach Hilfssatz (2.12) kann wegen $3 > 2$ und $m-3 > 2$ keine Beziehung $x a x^{-1} \in \mathfrak{A}$, $1 \neq a \in \mathfrak{A}$, $x \notin \mathfrak{A}$ gelten. Tritt (1.4) ein, so können wir nach geeigneter Konjugation Satz 1 anwenden, und das ergibt die folgenden Fälle:

(3.5) (a) Es gibt einen freien Übergang zu einem System, in dem ein x_i zu einer Potenz von einem s_i konjugiert ist.

(b) $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ist frei äquivalent zu einem System, in dem ein Element zu einer Potenz von $s_1 s_2 s_3$ oder $s_4 \ldots s_m$ konjugiert ist.

(c) Es tritt Satz 1(b) ein. Nach freien Übergängen liegen also 3 der x_i in $\mathfrak{H}_1$ bzw. $m-3$ Elemente in $\mathfrak{H}_2$.

(d) Es tritt Satz 1(c) ein.

Setzt man für (3.5) (a) $s_i = 1$ ein, so müssen $n-1$ Elemente eine Gruppe mit $m' = m-1$ erzeugen. Für die erhaltene Gruppe ist $k \geqq 3$. Wegen $n-1 < m-2$ steht das im Widerspruch zur Minimalität unseres Gegenbeispiels bzw. zu unserer Voraussetzung im Lemma. Für (3.5) (b) setzen wir $s_1 s_2 s_3 = 1$ und es läßt sich dann

$$\langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^{\alpha_1} = s_2^{\alpha_2} = s_3^{\alpha_3} = s_1 s_2 s_3 = 1 \rangle \ast \langle s_4, \ldots, s_m \mid s_4^{\alpha_4} = \cdots = s_m^{\alpha_m} = s_4 \ldots s_m = 1 \rangle$$

durch $n-1 < m-2$ Elemente erzeugen, was wegen des Satzes von Grushko ([3, Satz 2]) der Minimalität von m bzw. unseren Voraussetzungen widerspricht. Es ist nämlich in jedem der Faktoren $k \geqq 2$ ((3.1) kann also nicht eintreten). Für (3.5) (c) setzen wir wieder $s_1 s_2 s_3 = 1$, und es ergibt sich ein Widerspruch wie oben. Da in jedem $\mathfrak{H}_i$ von 2 verschiedene Exponenten auftreten, kann der Fall (3.5) (d) nicht auftreten. Insgesamt ist also (3.3) unmöglich.

Im Fall (3.4) muß ein x_i mit $L(x_i) = 0$ existieren. Nach (1.2) muß nämlich $s_1 s_2 s_3$ eine Darstellung in den x_j besitzen mit $L(x_j) \leqq L(s_1 s_2 s_3) = 0$.

Wir schließen dann wie unter (3.5) (b) durch Einsetzen von $s_1 s_2 s_3$. Damit ist Lemma (3.2) bewiesen. □

Zum Beweis des Satzes für $g = 0$ verbleiben nun noch folgende Fälle:

$m = 3$; $k = 0$; $m \geqq 4$, $k = 2, 3$; $k = 1$, m ungerade; $m = 4$, $k = 4$ und $m = 5$, $k = 4, 5$.

(3.6) **Lemma.** *Ist $g = 0$ und $m = 3$, so hat $\mathfrak{G}$ den Rang $m-1$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{G}$ nicht endlich, so ist $\mathfrak{G}$ nicht zyklisch. Denn sonst wäre $\mathfrak{G} \cong \mathbb{Z}$, d.h. hätte keine nichttrivialen Elemente endlicher Ordnung.

Ist $\mathfrak{G}$ endlich, so ist $\mathfrak{G}$ nicht zyklisch nach [4] S. VI. 19. □

(3.7) **Lemma.** *Ist $g = 0$ und sind alle α_i gerade, so hat $\mathfrak{G}$ den Rang $m-1$.*

Beweis durch Abelsch-Machen. □

(3.8) **Lemma.** *Ist $g = 0$ und $m = 4$ und $k > 1$, so hat G den Rang $m-1$.*

Beweis. Sei $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}_1 \times_{\mathfrak{A}} \mathfrak{H}_2$ mit

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_1&=\langle s_1, s_2 \mid s_1^{\alpha_1}=s_2^{\alpha_2}=1\rangle \qquad \alpha_1 \neq 2,\\ \mathfrak{H}_2&=\langle s_3, s_4 \mid s_3^{\alpha_3}=s_4^{\alpha_4}=1\rangle \qquad \alpha_4 \neq 2,\\ \mathfrak{A}&=\langle (s_1 s_2)\rangle=\langle (s_3 s_4)^{-1}\rangle.\end{aligned}$$

Angenommen, $\{x_1, x_2\}$ erzeugen $\mathfrak{G}$. Wegen (2.12) kann (1.3) nicht eintreten. Liegen beide x_i in einer zu einem $\mathfrak{H}_j$ konjugierten Untergruppe, so lassen sich Elemente außerhalb dieser Gruppe nicht erzeugen. Es kann also auch (1.2) nicht eintreten, denn dann müßte ein x_i in $\mathfrak{A}$ liegen und somit beide in einem Faktor. Es tritt also (1.4) ein. Ist dann nach Satz 1 ein x_i konjugiert zu einer Potenz eines s_j, so setzen wir $s_j=1$ und erhalten einen Widerspruch zu (3.6). Also muß, da Satz 1 (b) und (c) unmöglich sind, ein x_j nach Konjugation gleich $(s_1 s_2)^{\gamma}$ sein, etwa $x_1=(s_1 s_2)^{\gamma}$. Da $L(x_2)\leqq 1$ unmöglich ist, muß noch einmal eine Situation (1.4) eintreten. x_2 liegt also in einer zu $\mathfrak{H}_i$ konjugierten Untergruppe. Damit gilt $x_2=r_1 \ldots r_p k r_p^{-1} \ldots r_1^{-1}$ $(p>0)$. Weil x_1 und x_2 beide zur Bildung von s_1 benötigt werden, muß für ein $\beta \neq 0$ gelten: $r_1 (s_1 s_2)^{\beta\gamma} r_1^{-1} \in \mathfrak{A}$ oder $r_1 (s_3 s_4)^{\beta\gamma} r_1^{-1} \in \mathfrak{A}$, im Widerspruch dazu, daß (1.3) nicht eintreten kann, r_1 nicht in $\mathfrak{A}$ liegt und $(s_1 s_2)^{\beta\gamma}$ in $\mathfrak{G}$ nur mit Potenzen von $s_1 s_2$ kommutiert. □

(3.9) **Lemma.** *Für $m\geqq 5$, $k=2, 3$ oder $m\geqq 5$, $k=1$ und m ungerade ist der Rang von $\mathfrak{G}$ gleich $m-1$.*

Beweis (er wird erst vor (3.17) beendet). Sei $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}_1 \times_{\mathfrak{A}} \mathfrak{H}_2$ mit

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_1&=\langle s_1, s_2 \mid s_1^{\alpha_1}=s_2^{\alpha_2}=1\rangle,\\ \mathfrak{H}_2&=\langle s_3, \ldots, s_m \mid s_i^{\alpha_i}=1,\ i=3, \ldots, m\rangle,\\ \mathfrak{A}&=\langle (s_1 s_2)\rangle=\langle (s_3 \ldots s_m)^{-1}\rangle.\end{aligned}$$

Dabei sei $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{m-k}=2$. $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $n=m-2$, mögen $\mathfrak{G}$ erzeugen. Wir setzen als Induktionsannahme voraus, daß sich eine Gruppe der obigen Art mit Zahlen (m', k') nicht durch $m'-2$ Elemente erzeugen läßt, falls $m'<m$ und $2\leqq k'\leqq k$ oder falls $m'<m$ ungerade und $k'=1$ ist. Das ist nach (3.6), (3.7) und (3.8) für $m'\leqq 4$ gegeben. Für jedes System $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $n=m-2$, welches aus dem obigen durch freie Übergänge hervorgeht, gelten die Aussagen der Hilfssätze (3.10) und (3.11).

(3.10) **Hilfssatz.** (a) *Für $k=3$ ist kein x_j konjugiert zu einer Potenz irgendeines s_i.*

(b) *Für $k=2$ ist kein x_j konjugiert zu einem s_i mit $1\leqq i\leqq m-2$.*

(c) *Für $k=1$ ist kein x_i konjugiert zu einer Potenz von s_m.*

(d) *Für verschiedene Indizes j_1, j_2 sind die Elemente x_{j_1} und x_{j_2} nicht konjugiert zu Potenzen von Erzeugenden s_{i_1} bzw. s_{i_2}.*

(e) *Kein x_j ist konjugiert zu einer Potenz von $s_1 s_2=(s_3 \ldots s_m)^{-1}$.*

(f) *Es liegen keine zwei der x_i in zu $\mathfrak{H}_1$ konjugierten Untergruppen. (Die Konjugationsfaktoren dürfen verschieden sein!)*

(g) *Es liegen nicht alle x_j in zu $\mathfrak{H}_2$ konjugierten Untergruppen.*

Beweis durch Widerspruch. Es liege eine Situation vor, die einer Aussage (a)-(g) widerspricht. Kürzt man in Fall (a) und (b) das s_i heraus, kann man die Induktionsvoraussetzung anwenden und bekommt einen Widerspruch. Im Falle (c) erhält man nach Kürzen des s_m und Abelsch-Machen die Gruppe $\mathbb{Z}_2^{m-2}$, die sich von $n-1=m-3$ Elementen nicht erzeugen läßt. Die Situation (d) bedingt entweder einen Widerspruch zu (a), (b) oder (c) oder für $k=2$ sind i_1 und i_2 gleich $m-1$ und m (dann hilft derselbe Schluß wie für (c)) oder für $k=1$ sind $i_1, i_2<m$ (dann kürzen wir s_{i_1} und s_{i_2} heraus und bekommen wieder ein ungerades m'). Im Fall (e) setzen wir $s_1 s_2=1$ und erhalten die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \langle s_3, \ldots, s_m \mid s_i^{\alpha_i}= s_3 \ldots s_m=1\rangle$. Wegen des Satzes von Grushko und nach Induktionsannahme hat sie den Rang $m-2$, kann also nicht von $n-1$ Elementen erzeugt werden. Für (f) kommen wir auf die Induktionsannahme zurück, wenn wir $\mathfrak{H}_1$ herauskürzen. (g) gilt, weil nach Wegkürzen des von $\mathfrak{H}_2$ erzeugten Normalteilers die nichttriviale Gruppe $\mathbb{Z}_2$ entsteht. □

(3.11) **Hilfssatz.** *Es ist* $1 \leqq k \leqq 2$ *und es gibt einen freien Übergang, so daß ein* x_j *zu einer Potenz eines* s_i *konjugiert ist. Dabei ist*

$$i \geqq m-1 \quad \textit{falls } k=2,$$
$$i \leqq m-1 \quad \textit{falls } k=1.$$

Beweis. Wir wenden Satz (1.1) an. Wegen (3.10)(e) sind (1.2) und (1.3) nicht möglich. Da Satz 1 (c) weder für $\mathfrak{H}_1$ noch für $\mathfrak{H}_2$ eintreten kann, erhalten wir aus (1.4)

(3.12) Ein x_j ist konjugiert zu einer Potenz eines s_i oder von $s_1 s_2$.

(3.13) Zwei Elemente $\{x_{j_1}, x_{j_2}\}$ liegen in einer zu $\mathfrak{H}_1$ konjugierten Untergruppe oder $m-2$ (d.h. alle!) in einer zu $\mathfrak{H}_2$ konjugierten.

Wegen (3.10) bleiben als Möglichkeiten nur noch, daß $k=2$ und ein x_i konjugiert zu einer Potenz von s_{m-1} oder s_m ist oder daß $k=1$ und ein x_j zu einem s_i mit $i<m$ konjugiert ist. □

Nun bleiben nach Umnumerieren, Konjugieren und eventuellem Wurzelziehen nur die beiden folgenden Fälle:

(3.14) $$k=1 \quad \text{und} \quad x_n=s_1,$$

(3.15) $$k=2 \quad \text{und} \quad x_n=s_m.$$

Zu (3.14). Wir wenden wieder Satz (1.1) an. Wegen (3.10)(c) ist nur die Situation (1.4) möglich. Ist nun $s_1=x_n$ daran beteiligt, so müssen außer x_n noch andere x_i, etwa x_{i_0}, beteiligt sein, da s_1 nicht konjugiert zu einer Potenz von $s_1 s_2=(s_3 \ldots s_m)^{-1}$ sein kann. Es folgt dann $x_{i_0} \in \mathfrak{H}_1$ im Widerspruch zu (3.10)(*f*). Ist x_n nicht beteiligt, so folgt aus Satz 1 zusammen mit (3.10)(e), (f), (g), daß ein $x_i \neq x_n$ konjugiert zu einer Potenz eines s_j ist. Das ist ein Widerspruch zu (3.10)(d). Also ist (3.14) unmöglich.

Zu (3.15). Wir wählen eine neue Faktorisierung für $\mathfrak{G}=\mathfrak{R}_1 \times_{\mathfrak{B}} \mathfrak{R}_2$ mit

$$\mathfrak{R}_1=\langle s_1, \ldots, s_{m-2} \mid s_i^2=1, i=1, \ldots, m-2\rangle,$$
$$\mathfrak{R}_2=\langle s_{m-1}, s_m \mid s_{m-1}^{\alpha_{m-1}}=s_m^{\alpha_m}=1\rangle,$$
$$\mathfrak{B}=\langle (s_1 \ldots s_{m-2})\rangle=\langle (s_{m-1} s_m)^{-1}\rangle.$$

Analog zu (3.10) erhalten wir für diese Faktorisierung

(3.16) (a) Kein x_j ist konjugiert zu einer Potenz eines s_i mit $i<m$.
(b) Kein x_j ist konjugiert zu einer Potenz von $(s_{m-1}s_m)^{-1}=(s_1\dots s_{m-2})$.
(c) Es liegen keine zwei der x_j in zu $\mathfrak{R}_2$ konjugierten Untergruppen.

Gilt nämlich (a) nicht, so kürzen wir für $i<m-1$ das s_i heraus und erhalten einen Widerspruch. Für $i=m-1$ und die Fälle (b) und (c) kürzen wir $\mathfrak{R}_2$ heraus, machen abelsch und erhalten die $m-3$-fache direkte Summe von $\mathbb{Z}_2$, haben aber nur $n-2=m-4$ Erzeugende.

Nun wenden wir Satz (1.1) an. Wegen (3.16) ist nur noch (1.4) möglich und x_n ist nicht daran beteiligt. Wegen (3.16) ist von Satz 1 nur noch der Fall (c) möglich. Das heißt, $x_1,\dots,x_{n-1}$ liegen in einer zu $\mathfrak{R}_1$ konjugierten Untergruppe und ein Produkt in ihnen ist konjugiert zu einer Potenz von $s_1\dots s_{m-2}$. Nach Satz 1 (c) lassen sich aber nur Potenzen von $(s_1\dots s_{m-2})^2$ darstellen. Fügen wir also die Relation $(s_1\dots s_{m-2})^2=1$ hinzu, so läßt sich s_{m-1} nicht mehr als Produkt der x_i darstellen, da $x_1,\dots,x_{n-1}$ nicht mehr helfen können. Also ist auch (3.15) unmöglich.

Das beendet den Beweis von (3.9). □

(3.17) **Lemma.** *Für $m=5$, $k=4,5$ hat $\mathfrak{G}$ den Rang $m-1$.*

Beweis. Wir zerlegen $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}_1\ast_{\mathfrak{A}}\mathfrak{H}_2$ mit

$$\mathfrak{H}_1=\langle s_1,s_2\,|\,s_1^{\alpha_1}=s_2^{\alpha_2}=1\rangle \quad \text{eventuell } \alpha_1=2,$$
$$\mathfrak{H}_2=\langle s_3,s_4,s_5\,|\,s_3^{\alpha_3}=s_4^{\alpha_4}=s_5^{\alpha_5}=1\rangle,$$
$$\mathfrak{A}=\langle(s_1s_2)\rangle=\langle(s_3s_4s_5)^{-1}\rangle.$$

Angenommen, x_1,x_2,x_3 erzeugen $\mathfrak{G}$. Nach Satz (1.1) tritt eine der Situationen (1.2) bis (1.4) ein. (1.3) ist nach Hilfssatz (2.12) unmöglich. Tritt (1.2) ein, so hat eines der x_i die Länge 0, liegt also im Amalgam und die anderen haben eine Länge $\leqq 1$. Es liegen also entweder zwei x_i in $\mathfrak{H}_1$ oder alle in $\mathfrak{H}_2$. Im ersten Fall kürzen wir $\mathfrak{H}_1$ und erhalten einen Widerspruch zu (3.6). Im zweiten Fall können wir Elemente außerhalb $\mathfrak{H}_2$ nicht darstellen. Also ist (1.2) auch nicht möglich. Es muß (1.4) eintreten.

Wir wenden nun Satz 1 an. Wegen des oben erwähnten Arguments kann Fall (b) nicht eintreten, und wegen $k=4,5$ ist auch Satz 1 (c) unmöglich. Ist nun (a) folgend ein x_i konjugiert zu einer s_j-Potenz, so erhalten wir durch Kürzen des s_j einen Widerspruch zu (3.8). Es bleibt nur noch die Möglichkeit, daß ein x_i, etwa x_1, konjugiert zu einer Potenz von $s_1s_2=(s_3s_4s_5)^{-1}$ ist. Wir konjugieren dann die x_i und erhalten ein System mit $x_1\in\mathfrak{A}$.

Nun wenden wir wieder Satz (1.1) an und es muß wie oben (1.4) eintreten. Ist nun x_1 nicht daran beteiligt, so muß nach Satz 1 ein weiteres x_i konjugiert zu einer Potenz von $s_1s_2=(s_3s_4s_5)^{-1}$ sein und wir erhalten durch Kürzen von $\mathfrak{A}$ einen Widerspruch.

Also ist x_1 an (1.4) beteiligt. Dann muß aber mindestens ein weiteres x_i, etwa x_2, daran beteiligt sein. Es folgt $L(x_2)\leqq 1$ und damit $x_2\in\mathfrak{H}_2$, da sonst zwei der x_i in $\mathfrak{H}_1$ liegen würden. Wäre auch x_3 an (1.4) beteiligt, so müßte $x_3\in\mathfrak{H}_2$ sein und wir erhalten einen Widerspruch, da alle x_i in $\mathfrak{H}_2$ liegen.

x_3 ist also nicht beteiligt. Wir betrachten nun (1.4) in $\mathfrak{H}_2$ wie in Hilfssatz (1.2), dabei sei in $\mathfrak{H}_2$ eine Länge Λ bzgl. der Faktorisierung $Z_{\alpha_3} \ast Z_{\alpha_4} \ast Z_{\alpha_5}$ definiert. Es kann x_2 weder zu einem Element aus $\mathfrak{A}$ konjugiert sein noch zu einer s_i-Potenz. Da auch x_1 nicht zu einer s_i-Potenz konjugiert sein kann, können wir annehmen, daß das System $\{x_1, x_2\}$ die Nielsensche Eigenschaft bezüglich Λ hat. Wir wenden nun das Verfahren von Hilfssatz (2.1) an und konjugieren x_1, x_2, so daß ein Produkt in den neuen x_1, x_2 in $\mathfrak{A}$ liegt. Liegt nach dem Konjugieren x_1 nicht in $\mathfrak{A}$, so erhalten wir durch das Verfahren in Hilfssatz (2.1) ein alternierendes Produkt und mit dem Beweis von Satz 1 den Widerspruch $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 2$ (Fall (c)).

Also ist bereits ein freigekürztes Produkt der ursprünglichen x_1, x_2 aus $\mathfrak{A}$. (x_2 tritt in dem Produkt auf.) Durch Anwenden des Verfahrens von (2.1) erhalten wir ein Produkt, in dem x_2 genau einmal mit Exponenten $+1$ und -1 auftritt. Die Situation sieht also folgendermaßen aus:

$a x_2^{\varepsilon} a' x_2^{-\varepsilon} a'' \in \mathfrak{A}$ (a, a', a'' sind Potenzen von x_1) $\Rightarrow x_2^{\varepsilon} a' x_2^{-\varepsilon} \in \mathfrak{A}$. Da (1.3) nicht eintreten kann (Hilfssatz (2.12)), folgt $x_2 \in \mathfrak{A}$, und das ergibt einen Widerspruch.

Damit ist Lemma (3.17) bewiesen. □

(3.18) Für den Fall $g = 0$ gilt also der Satz.

II. Der Fall $g > 0$

(3.19) **Lemma.** *Ist $g > 0$ und $m = 0, 1$, so hat $\mathfrak{G}$ den Rang $2g$.*

Beweis ergibt sich durch Abelsch-Machen. □

(3.20) **Lemma.** *Ist $g > 0$, $m \geqq 3$ und sind entweder mindestens zwei Ordnungen $\alpha_i \neq 2$ oder sind alle Ordnungen gerade oder ist m ungerade, so ist der Rang von $\mathfrak{G}$ gleich $2g + m - 1$.*

Beweis. Das freie Produkt

$$\langle s_1, \ldots, s_m | s_i^{\alpha_i} = s_1 \ldots s_m = 1 \rangle \ast \left\langle t_1, u_1, \ldots, t_g, u_g \middle| \prod_{i=1}^{g} [t_i, u_i] = 1 \right\rangle$$

ist eine Faktorgruppe und sie hat den Rang $m - 1 + 2g$, was aus (3.18) und dem davor Bewiesenen wegen des Satzes von Grushko folgt. □

(3.21) Es bleiben nur noch die Fälle

(i) $m = 2,\ g > 0$

(ii) m gerade, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 2,\ \alpha_m$ ungerade, $g > 0$.

Wir nehmen wieder die Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \ast_{\mathfrak{A}} \mathfrak{H}_2$ mit

$$\mathfrak{H}_1 = \langle s_1, \cdots, s_m | s_i^{\alpha_i} = 1, i = 1, \ldots, m \rangle,$$
$$\mathfrak{H}_2 = \langle t_1, u_1, \cdots, t_g, u_g \rangle,$$
$$\mathfrak{A} = \langle (s_1 \ldots s_m) \rangle = \left\langle \left(\prod_{i=1}^{g} [t_i, u_i] \right)^{-1} \right\rangle.$$

Sei (m, g) das kleinste Paar, für welches die Behauptung nicht stimmt. (m, g) stehe dabei vor (m', g'), falls $m \leqq m'$, $g \leqq g'$ und $m + g < m' + g'$.

(3.22) **Hilfssatz.** *Erzeugen* $x_1, \ldots, x_n$ *mit* $n=2g+m-2$ *die Gruppe* $\mathfrak{G}$, *so gilt:*

(a) *Kein* x_i *ist konjugiert zu einer Potenz eines* s_i.

(b) *Kein* x_i *ist konjugiert zu einer Potenz von* $s_1 \ldots s_m$.

(c) *Für* $g>1$ *ist kein* x_i *konjugiert zu einer Potenz eines* t_i *oder* u_i.

(d) *Es liegen höchstens* $(m-2)$ *der* x_i *in Untergruppen konjugiert zu* $\mathfrak{H}_1$.

Beweis durch Widerspruch. Es liege die Situation vor, die einer Aussage (a)–(d) widerspricht. Im Falle (a) kommt man durch Wegkürzen des s_i zu einem Widerspruch gegen (3.19) oder (3.20). Bei (b) kürzen wir $s_1 \ldots s_m$ heraus. Ist $m>2$, so hat die Faktorgruppe wegen des Satzes von Grushko nach (3.18) und (3.19) einen Rang $\geqq 2g+m-2$, aber es stehen nur noch $n-1=2g+m-3$ Elemente zur Verfügung. Für $m=2$ entsteht eine Gruppe vom Rang $\geqq 2g$, es bleiben aber nur $2g+m-2-1=2g-1$ Erzeugende. Im Falle (c) entsteht nach dem Kürzen des t_i bzw. u_i das freie Produkt einer zyklischen Gruppe mit einer der von uns betrachteten Gruppen mit m Dreherzeugenden und dem Geschlecht $g-1$. Nach Induktionsannahme hat es den Rang $1+(2(g-1)+m-1)=2g+m-2$ und läßt sich nicht durch $n-1=2g+m-3$ Elemente erzeugen. Für (d) kürzen wir $\mathfrak{H}_1$ weg und erhalten eine Gruppe vom Rang $2g$, die sich durch weniger als $n-(m-2)=2g+m-2-m+2=2g$ Elemente erzeugen lassen müßte. □

(3.23) **Lemma.** *Für* $m=2$, $g>0$ *hat* $\mathfrak{G}$ *den Rang* $2g+1$.

Beweis. Wir wenden Satz (1.1) an. (1.2) ist unmöglich, da eines des x_i in $\mathfrak{A}$ liegen müßte, was (3.22)(b) widerspricht. (1.3) ist aus dem gleichen Grunde unmöglich. Setzen wir nun s_1 und s_2 gleich Eins und machen abelsch, so bleiben $\{x_1, \ldots, x_n\}$ unabhängig. Also kann (1.4) nur eintreten, wenn die benötigten x_i in einer zu $\mathfrak{H}_2$ konjugierten Untergruppe liegen. Nach [3, Satz 5] sind dann aber $2g$ Elemente, d.h. alle x_i nötig, und es kann nicht ganz $\mathfrak{G}$ erzeugt werden. □

(3.24) **Lemma.** *Ist* $g>0$, m *gerade und* $\alpha_1=\cdots=\alpha_{m-1}=2$ *und* α_m *ungerade, so hat* $\mathfrak{G}$ *den Rang* $2g+m-1$.

Beweis. Wir wenden Satz (1.1) an. Wegen (3.22)(b) sind (1.2) und (1.3) unmöglich. Es tritt also (1.4) ein. Liegen die daran beteiligten Elemente in einer zu $\mathfrak{H}_1$ konjugierten Untergruppe, so ergibt sich aus Satz 1 ein Widerspruch zu (3.22)(a), (b) oder (d). Tritt (1.4) in $\mathfrak{H}_2$ ein, so können wir [3, Satz 5] anwenden und erhalten für $g>1$ einen Widerspruch zu (3.22)(c). Für $g=1$ können wir nach [3, Satz 5] annehmen, daß t_1, u_1 unter $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sind und daß die restlichen x_i mit einem Element aus $\mathfrak{H}_2$ weder beginnen noch enden und es zwischen ihnen keine verkürzenden Übergänge mehr gibt ((1.3) und (1.4) sind in zu $\mathfrak{H}_1$ konjugierten Untergruppen nicht möglich). Dann können größere Verkürzungen zwischen ihnen nicht durch t_1, u_1 bewirkt werden. Da (1.4) unmöglich ist, muß die Länge dieser $x_i \leqq$ eins sein und sie müssen zusammen mit $(s_1 \ldots s_m)^{-1}$ das $\mathfrak{H}_1$ erzeugen. $\mathfrak{H}_1$ ist aber das freie Produkt von m zyklischen Gruppen und kann deshalb nicht von $2g+m-2-2g+1$ Elementen erzeugt werden. □

Das beendet den Fall g>0. Satz 3 ist damit bewiesen.

§ 4. Der geometrische Rang ebener diskontinuierlicher Gruppen

Sei $\mathfrak{G}$ eine diskontinuierliche Gruppe von semilinearen oder glatten Homöomorphismen der euklidischen oder hyperbolischen Ebene $\mathbb{E}$ (bzw. der Sphäre) auf sich. Eine Menge $F \subset \mathbb{E}$ heiße Fundamentalbereich zu $\mathfrak{G}$, wenn gilt:

(a) F ist abgeschlossen und es ist $\overline{\mathring{F}} = F$, wo $\mathring{}$ das Innere und den $\bar{}$ Abschluß bezeichnet.

(b) $\bigcup_{g \in \mathfrak{G}} gF = \mathbb{E}$. (Hier bezeichnet gF das Bild von F unter g.)

(c) Zu jedem Punkt aus $\mathbb{E}$ gibt es eine Umgebung U, so daß $U \cap gF \neq \emptyset$ nur für endlich viele $g \in \mathfrak{G}$ ist.

(d) Aus $gF \cap \mathring{F} \neq \emptyset$ für $g \in \mathfrak{G}$ folgt $g = 1$.

(e) $\mathring{F}$ ist zusammenhängend.

(f) Der Rand von F sei stückweise glatt.

Dann ist F einfach-zusammenhängend. Ferner ist für $x \in \mathfrak{G}$, $x \neq 1$, der Durchschnitt $F \cap xF$ entweder leer oder ein Punkt oder eine einfache (nicht geschlossene) Kurve. Einen Beweis dafür findet man in [2] oder [4, S. 66], allerdings nur für kompakte F, die Argumente dort lassen sich leicht auf den allgemeinen Fall übertragen.

Als Nachbarn von F bezeichnen wir diejenigen Bereiche xF, für die $F \cap xF$ ein Weg ist. Geometrische Erzeugende von $\mathfrak{G}$ relativ F heißen die Paare $x, x^{-1} \in \mathfrak{G}$, für die xF und folglich auch $x^{-1}F$ Nachbarn von F sind. (Daß diese Elemente erzeugen, folgt aus dem Zusammenhang von $\mathbb{E}$.) Ihre Zahl sei r_F. Der geometrische Rang von $\mathfrak{G}$ sei das Minimum der r_F, wenn F über alle möglichen Fundamentalbereiche variiert.

Satz 4. $\mathfrak{G} = \langle s_1, \ldots, s_m, t_1, u_1, \ldots, t_g, u_g \mid s_1^{\alpha_1} = \cdots = s_m^{\alpha_m} = \prod_{i=1}^{m} s_i \prod_{i=1}^{g} [t_j, u_j] = 1 \rangle$ $(\alpha_i \geqq 2)$ *hat den geometrischen Rang*

$$\begin{array}{ll} 2g & \textit{falls } m = 0, \\ 2g + m - 1 & \textit{falls } g \geqq 0,\ m > 0 \textit{ oder } g = 0,\ m \geqq 3 \textit{ ist.} \end{array}$$

$\langle s_1, \ldots, s_m, v_1, \ldots, v_g \mid s_1^{\alpha_1} = \cdots s_m^{\alpha_m} = \prod_{i=1}^{m} s_i \prod_{j=1}^{g} v_j^2 = 1 \rangle$ *hat den geometrischen Rang*

$$\begin{array}{ll} g & \textit{falls } m = 0, \\ g + m - 1 & \textit{falls } m > 0,\ g > 0. \end{array}$$

Beweis. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ operiert auf der Sphäre, der euklidischen oder hyperbolischen Ebene als Gruppe von Bewegungen. (Für die folgenden Schlüsse kann $\mathfrak{G}$ auch eine Gruppe von glatten oder semilinearen Homöomorphismen sein; sie ist dann „geometrisch isomorph" einer Gruppe von Bewegungen, vgl. [2] oder [4].) Da die Behauptung für den sphärischen Fall offenbar richtig ist, wollen wir ihn im folgenden ausschließen.

Sei nun F ein Fundamentalbereich von $\mathfrak{G}$. Wir zeigen zunächst:

F ist kompakt. Aus dem Klassifikationssatz für ebene diskontinuierliche Gruppen folgt, daß $\mathfrak{G}$ einen kompakten Fundamentalbereich F_0 besitzt. Nach (*c*) gibt es zu jedem $x \in F_0$ eine offene Umgebung $U(x)$, so daß $H(x) := \{g \in \mathfrak{G} \mid U(x) \cap g^{-1}F \neq \emptyset\}$

endlich ist. Da F_0 kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n \in F_0$, so daß $F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i)$.

Sei $H := \bigcup_{i=1}^{n} H(x_i)$. Zu $y \in F$ gibt es ein $g \in \mathfrak{G}$, so daß $x := g^{-1}(y) \in F_0$ ist, und deshalb ein i, $1 \leqq i \leqq n$, so daß $x \in U(x_i)$. Dann ist $x \in U(x_i) \cap g^{-1}F$, also $g \in H(x_i) \subset H$ und $y = g(x) \in gF_0$. Es folgt $F \subset \bigcup_{h \in H} hF_0$. Da F_0 kompakt und H endlich ist, ist $\bigcup_{h \in H} hF_0$ kompakt und deshalb – wie behauptet – die abgeschlossene Teilmenge F. (In diesem Nachweis der Relativ-Kompaktheit von F wurde nur die Bedingung (c) an Fundamentalbereiche benutzt.)

Nun definieren wir auf $\mathbb{E}$ einen Komplex: Als Kanten des Fundamentalbereiches F nehmen wir die Durchschnitte $F \cap xF$, wo xF die Nachbarn von F durchläuft, und die Bilder dieser Kanten unter $\mathfrak{G}$. Die Endpunkte der so erhaltenen Kanten sowie die Fixpunkte von Drehungen aus $\mathfrak{G}$ nehmen wir als Ecken. (Die Fixpunkte von Drehungen liegen stets auf den Kanten; wenn die Drehordnung größer als 2 ist, ist der Drehpunkt automatisch Eckpunkt einer Kante. Die Zusatzbedingung erfordert also höchstens das Unterteilen gewisser Kanten durch die Fixpunkte von Drehungen der Ordnung 2.) Die Mengen xF, $x \in \mathfrak{G}$, sind Scheiben, und sie seien die 2-Zellen unseres Komplexes.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ operiert auf dem Komplex, und zwar einfach-transitiv auf den 2-Zellen. Identifizieren wir unter $\mathfrak{G}$ äquivalente Punkte, so erhalten wir die Fläche $\mathbb{E}/\mathfrak{G}$ und auf ihr einen Komplex. Dieser hat mindestens m 0-Zellen, nämlich für jede Klasse von Fixpunkten der Drehungen mindestens eine. Er hat r_F 1-Zellen und eine 2-Zelle. Ferner hat die Fläche das Geschlecht g und ist orientierbar bzw. nicht-orientierbar, je nachdem, ob $\mathfrak{G}$ die erste oder zweite Beschreibung aus Satz 4 besitzt. Für die Eulersche Charakteristik folgt dann

$$2-2g \geqq m-r_F+1 \quad \text{bzw.} \quad 2-g \geqq m-r_F+1$$

also

$$r_F \geqq 2g+m-1 \quad \text{bzw.} \quad r_F \geqq g+m-1.$$

Falls $m=0$ ist, muß mindestens eine 0-Zelle in $\mathbb{E}/\mathfrak{G}$ vorkommen; und es folgt

$$2-2g \geqq 1-r_F+1 \quad \text{bzw.} \quad 2-g \geqq 1-r_F+1. \quad \square$$

Bemerkung. Satz 3 und Satz 4 besagen, daß der Rang einer ebenen diskontinuierlichen Gruppe nicht mit dem geometrischen Rang zusammenfallen muß. Satz 3 liefert ferner ein Gegenbeispiel gegen die naheliegende Formel

$$\text{Rang}(\mathfrak{H}_1 \times_{\mathfrak{A}} \mathfrak{H}_2) \geqq \text{Rang}\,\mathfrak{H}_1 + \text{Rang}\,\mathfrak{H}_2 - \text{Rang}\,\mathfrak{A}:$$

Setze $\mathfrak{H}_1 = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = 1 \rangle$, $\mathfrak{H}_2 = \langle s_3, \ldots, s_m \mid s_3^2 = \cdots = s_{m-1}^2 = s_m^{2k+1} = 1 \rangle$
$\mathfrak{A} = \langle (s_1 s_2) \rangle = \langle (s_3 \ldots s_m)^{-1} \rangle$ mit geradem m. Dann ist $\text{Rang}(\mathfrak{H}_1 \times_{\mathfrak{A}} \mathfrak{H}_2) = m-2 < 2+(m-2)-1 = \text{Rang}\,\mathfrak{H}_1 + \text{Rang}\,\mathfrak{H}_2 - \text{Rang}\,\mathfrak{A}$.

Literatur

1. Rosenberger, G.: Automorphismen und Erzeugende für Gruppen mit einer definierenden Relation. Math. Z. **129**, 259–267 (1972)
2. Zieschang, H.: Diskrete Gruppen von Bewegungen der Ebene und ebene Gruppenbilder. Uspechi Math. Nauk **21**, 195–212 (1966)

3. Zieschang, H.: Über die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam. Inventiones math. **10**, 3 – 37 (1970)
4. Zieschang, H., Vogt, E., Coldewey, H.-D.: Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen. Lecture Notes in Mathematics **122**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970

N. Peczynski
Institut für Mathematik
Ruhr-Universität
D-4630 Bochum
Universitätsstraße 150
Bundesrepublik Deutschland

G. Rosenberger
Mathematisches Seminar
der Universität
D-2000 Hamburg 13
Rothenbaumchaussee 67
Bundesrepublik Deutschland

H. Zieschang
Department of Mathematics
University of Wisconsin
213 Van Vleck Hall
Madison, Wisconsin 53706, USA
und
Institut für Mathematik
Ruhr-Universität
D-4630 Bochum
Universitätsstraße 150
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 3. September 1973/20. Februar 1975)