Werk

Titel: Majoration des potentiels de noyau 1/z.

Autor: Ferrier, J.-P.

Jahr: 1973

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0021|log23

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Inventiones math. 21, 311 – 317 (1973)
© by Springer-Verlag 1973

Majoration des potentiels du noyau $1/z$

J.-P. Ferrier (Nancy)

1. Le problème de majoration des potentiels du noyau $1/z$ que nous nous proposons d'étudier, s'introduit à l'occasion de l'approximation polynomiale pondérée. Pour cette raison, nous allons commencer par donner une démonstration du théorème classique de H. Pollard concernant l'approximation polynomiale pondérée sur la droite réelle, qui utilise de telles majorations. La méthode est essentiellement celle de la thèse de l'auteur [7], qui est également exposée dans [8]. Cependant, dans le cas particulier considéré de l'approximation sur la droite réelle, la démonstration se simplifie considérablement.

2. Nous désignons par $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$ et par $\mathscr{P}$ l'algèbre des polynômes. Rappelons qu'un *poids*, au sens de Bernstein [1], est une fonction w sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\mathscr{P}w \subset \mathscr{C}_0(\mathbb{R}),$$

c'est à dire une fonction continue w qui décroît plus vite à l'infini que toutes les puissances négatives de $|x|$. Un poids w est dit *fondamental* si $\mathscr{P}w$ est dense dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

Pour qu'un poids w soit fondamental, il est nécessaire qu'il ne s'annule pas; cela supposé, introduisons l'algèbre $\mathscr{C}_p(\mathbb{R})$ des fonctions continues à croissance polynomiale sur $\mathbb{R}$, c'est à dire des fonctions continues f qui vérifient

$$|f(x)| \leqq M(1+|x|)^N,$$

pour des constantes positives M, N dépendant de f. En utilisant la densité dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact, on remarque aisément que pour que w soit fondamental, il faut et il suffit que les polynômes soient denses dans $\mathscr{C}_p(\mathbb{R})$ pour la norme

$$\pi\colon\ f \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)\, w(x)|.$$

Sous cette dernière forme, il apparaît aussitôt par exemple que si w_1, w_2 sont des poids ne s'annulant pas tels que $|w_1| \leqq C\,|w_2|$ et si w_2 est fondamental, alors w_1 l'est aussi.

Divers critères suffisants pour qu'un poids soit fondamental ont été donnés en particulier par Carleman [2], Carleson [3], S. Mandelbrojt [12]. Une condition nécessaire et suffisante classique, due à Pollard [13] est la suivante:

Théorème 1. *Pour qu'un poids w ne s'annulant pas soit fondamental, il faut et il suffit qu'il vérifie*

$$\sup_{p\in\mathscr{P},\,|pw|\leqq 1}\int \log^+|p(x)|\,\frac{dx}{1+x^2}=+\infty.$$

La démonstration originale de H. Pollard est fort compliquée. Deux autres démonstrations plus simples ont été données presque simultanément par Mergelyan [11]. Celle qui suit a l'avantage d'être d'une part encore plus simple, d'autre part susceptible d'extension au cas complexe.

Condition suffisante. Tout d'abord, l'ensemble des fonctions $x\mapsto (x-a)^{-1}$, où a est non réel, est total dans $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$. Cela résulte, en effet, du théorème de Stone puisque le sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ engendré par ces fonctions est auto-adjoint et que c'est une algèbre, comme il résulte de la décomposition en éléments simples pour les produits $(x-a)^{-1}(x-b)^{-1}$ avec $a\neq b$, assortie d'un passage à la limite lorsque $a=b$. Puisque la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ implique celle pour π, et que les fonctions continues à support compact sont denses dans $\mathscr{C}_p(\mathbb{R})$, l'ensemble indiqué est lui-même total dans $\mathscr{C}_p(\mathbb{R})$.

Supposons, par l'absurde, que w ne soit pas fondamental. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe alors une forme linéaire μ sur $\mathscr{C}_p(\mathbb{R})$ continue pour π, orthogonale à $\mathscr{P}$ et telle que $\mu\big((x-a)^{-1}\big)\neq 0$ pour un certain a non réel. Il est bien connu que μ est l'intégrale pour la mesure bornée obtenue par restriction aux fonctions à support compact. Cela résulte de ce que le cône positif de $\mathscr{C}_p(\mathbb{R})$ est adapté et que toute forme linéaire sur $\mathscr{C}_p(\mathbb{R})$ continue pour π se décompose en formes linéaires positives (cf. [4]). De plus, pour tout polynôme p la mesure $p\mu$ est bornée et sa norme majorée par $\|\mu\|_\pi\cdot\pi(p)$. Nous supposerons, pour simplifier, que $\pi(1)\leqq 1$ et $\|\mu\|_\pi\leqq 1$.

Il est alors classique d'introduire la transformée de Cauchy $\hat{\mu}$ de μ qui est donnée pour $\operatorname{Im} z\neq 0$ par:

$$\hat{\mu}(z)=\int\frac{d\mu(x)}{x-z}.$$

Le fait que μ soit orthogonale aux polynômes et donc aux fonctions

$$x\mapsto\big(p(x)-p(z)\big)(x-z)^{-1},$$

se traduit par la propriété

$$\widehat{p\mu} = p\hat{\mu},$$

pour tout polynôme p.

En supposant, par exemple, $\operatorname{Im} a > 0$, plaçons-nous dans le demi-plan supérieur ouvert P. Pour tout polynôme p vérifiant $|pw| \leqq 1$, écrivons:

$$\log^+ |p| \leqq \log^+ |p\hat{\mu}| + \log^+ |\hat{\mu}| - \log |\hat{\mu}|,$$

d'où il résulte

$$\log^+ |p| \leqq |\hat{\nu}|^{\frac{1}{2}} + |\hat{\mu}|^{\frac{1}{2}} - \log |\hat{\mu}|,$$

si l'on a posé $\nu = p\mu$. On sait déjà que ν est une mesure bornée de norme au plus 1. Pour majorer $|\hat{\nu}|^{\frac{1}{2}}$, on se ramène au cas où ν est une mesure positive. Dans ce cas, puisque l'on a pour $x \in \mathbb{R}$ et $z \in P$,

$$\operatorname{Re}\left(e^{-i\pi/2}(x-z)^{-1}\right) > 0,$$

par intégration, il vient

$$\operatorname{Re}\left(e^{-i\pi/2}\,\hat{\nu}(z)\right) > 0.$$

En désignant alors par $\sqrt{\ }$ la détermination principale de la racine carrée définie pour z non réel négatif, clairement

$$\varphi = \operatorname{Re}\sqrt{e^{-i\pi/2}\,\hat{\nu}}$$

est une fonction harmonique positive dans P. De plus,

$$|\hat{\nu}|^{\frac{1}{2}} \leqq \sqrt{2}\,\varphi \leqq \sqrt{2}\left(\int \frac{d\nu(x)}{|x-z|}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \sqrt{2/\operatorname{Im} z}.$$

On obtient pour $|\hat{\mu}|^{\frac{1}{2}}$ une majoration analogue. Finalement, en changeant les notations et en tenant compte du fait que ν et μ sont a priori des mesures complexes, on a montré l'existence d'une fonction harmonique φ dans P vérifiant

$$|\hat{\nu}|^{\frac{1}{2}} + |\hat{\mu}|^{\frac{1}{2}} \leqq \varphi \leqq 8\sqrt{2/\operatorname{Im} z}.$$

Puisque $\hat{\mu}$ est holomorphe dans P, la fonction $-\log|\hat{\mu}|$ est surharmonique; par conséquent, $\varphi - \log|\hat{\mu}|$ est surharmonique et positive. Or, à cause des inégalités de Harnack, la mesure $(1+x^2)^{-1}\,dx$, qui est à un facteur près la mesure harmonique au point i relative au domaine P, est majorée par un multiple constant de la mesure harmonique μ_a^P au point a relative au même domaine. Par suite:

$$\begin{aligned}\int \log^+ |p(x)|\,\frac{dx}{1+x^2} &\leqq C\int \liminf_{z\in P,\, z\to x}\left(\varphi(z) - \log|\hat{\mu}(z)|\right) d\mu_a^P(x)\\ &\leqq C\left(\varphi(a) - \log|\hat{\mu}(a)|\right)\\ &\leqq C\left(8\sqrt{2/\operatorname{Im} a} - \log|\hat{\mu}(a)|\right),\end{aligned}$$

de sorte que le premier membre est majoré indépendamment de p.

Condition nécessaire. Supposons par l'absurde que l'on ait

$$\sup_{p\in\mathscr{P},\,|pw|\leqq 1}\int \log^+|p(x)|\,\frac{dx}{1+x^2}<+\infty,$$

et soit p un polynôme tel que $|pw|\leqq 1$. Si P désigne le demi-plan supérieur et μ_z^P la mesure harmonique au point z relative à P, il est classique d'écrire l'inégalité de sous-harmonicité

$$\log^+|p(z)|\leqq\int \log^+|p(x)|\,d\mu_z^P(x).$$

A cause des inégalités de Harnack, il en résulte que $\log^+|p(z)|$ est majoré indépendamment de p sur tout compact de P. De plus, en explicitant la mesure harmonique au point iy, où y est réel strictement positif, il vient

$$\log^+|p(iy)|\leqq\frac{1}{\pi}\int \log^+|p(x)|\,\frac{y\,dx}{x^2+y^2}.$$

La partie de l'intégrale du second membre qui correspond à $|x|\geqq 1$ est majorée par

$$2\,\frac{y}{\pi}\int \log^+|p(x)|\,\frac{dx}{1+x^2},$$

alors que celle qui correspond à $|x|\leqq 1$ est majorée par

$$\frac{1}{\pi}\int k(x)\,\frac{y\,dx}{x^2+y^2},$$

dès que k désigne une fonction continue positive à support compact sur $\mathbb{R}$ majorant $-\log w$ sur $[-1,+1]$. Or cette dernière intégrale exprime la valeur au point iy de la solution du problème de Dirichlet dans P avec valeur frontière k. Par conséquent, $\log^+|p(z)|$ se trouve majoré indépendamment de p sur tout compact du demi-axe imaginaire positif.

En effectuant une translation parallèle à l'axe réel, puis en considérant le demi-plan inférieur, on montre que $\log^+|p(z)|$ est majoré indépendamment de p sur tout compact du plan complexe. Si une suite (p_n) de polynômes converge alors pour π, sa limite est la trace sur $\mathbb{R}$ d'une fonction entière, ce qui n'est pas le cas de toutes les fonctions de $\mathscr{C}_p(\mathbb{R})$.

3. Divers auteurs, dont Mergelyan [11], Dzhrbashyan [5], ont étudié un problème d'approximation pondérée semblable dans lequel la droite réelle $\mathbb{R}$ est remplacée par un ensemble fermé F du plan complexe; les demi-plans supérieur et inférieur sont alors remplacés par les composantes connexes du complémentaire de F. Si Ω est une telle composante, le problème essentiel consiste alors à majorer dans Ω la transformée de Cauchy d'une mesure bornée μ portée par F.

De façon précise, lorsque Ω est un ouvert connexe du plan complexe et p un nombre réel strictement positif, on désigne par $H_p(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions holomorphes f dans Ω telles que $|f|^p$ admette une majorante harmonique dans Ω; on définit une topologie sur $H_p(\Omega)$ en choisissant un point a de Ω et en considérant le système fondamental de voisinages de zéro des ensembles $\{R^{\Omega}_{|f|^p}(a)<\varepsilon\}$, où R^{Ω}_k désigne l'enveloppe inférieure des fonctions hyperharmoniques positives dans Ω qui majorent k et ε parcourt l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Il est alors possible d'étendre la démonstration donnée dans le cas de $\mathbb{R}$, si l'on sait établir pour toute composante connexe Ω du complémentaire de F la propriété suivante:

(*) La transformation de Cauchy $\mu \mapsto \hat{\mu}$ est une application continue de l'espace $\mathcal{M}_1(F)$ des mesures bornées sur F dans l'espace $H_p(\Omega)$.

Il est aisé de vérifier que la transformée de Cauchy d'une mesure bornée appartient toujours à $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ pour $p<2$; en particulier $\hat{\mu}$ appartient à $L^p(\Omega)$ lorsque Ω est borné. L'appartenance à $H^p(\Omega)$ exige des majorations plus fines, qui sont relatives à une mesure portée par la frontière de Ω.

Il faut aussi noter que le problème semblable relatif au noyau $1/|z|$ a une solution triviale et négative. Si, par exemple, μ est la mesure de Lebesgue restreinte à un intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction f

$$z \mapsto \int \frac{d\mu(u)}{|u-z|}$$

tend vers $+\infty$ lorsque z s'approche d'un des points de l'intervalle considéré. Il ne peut donc exister, pour f^p, de majorante surharmonique dans le demi-plan supérieur.

Commençons par étudier le cas des mesures ponctuelles; la transformée de Cauchy de la mesure de Dirac ε_u au point u de F est simplement la fonction $\hat{\varepsilon}_u$ donnée par

$$\hat{\varepsilon}_u(z)=(u-z)^{-1}.$$

Lorsque Ω est simplement connexe, pour tout point u de F, la fonction $\hat{\varepsilon}_u$ prend ses valeurs dans un ouvert simplement connexe distinct de $\mathbb{C}$. La théorie classique des espaces de Hardy [6] permet de montrer que $\hat{\varepsilon}_u$ appartient à $H_p(\Omega)$ pour chaque $p<\frac{1}{2}$. Cette propriété ne peut pas être améliorée en général; par exemple, lorsque F est la demi-droite réelle positive, la fonction $\hat{\varepsilon}_0$ n'appartient pas à $H_{\frac{1}{2}}(\mathbb{C}\,F)$.

Pour passer aux mesures bornées quelconques, il pourrait être tentant d'écrire

$$\hat{\mu}=\int \hat{\varepsilon}_u\, d\mu(u).$$

Malheureusement, les espaces dans lesquels il faudrait définir cette intégrale ne sont pas localement convexes, ou bien encore il n'est pas possible de majorer pour $|p|<1$ la fonction $|\hat{\mu}|^p$ par l'intégrale $\int |\hat{\varepsilon}_u|^p \, d\mu(u)$.

Signalons qu'il est encore possible de se rapprocher davantage de $p=0$ en conduisant la démonstration comme dans [8], et de remplacer $H^p(\Omega)$ par l'algèbre $H_{\log}(\Omega)$ de Lumer [10] qui est constituée des fonctions holomorphes f dans Ω telles que

$$\lim_{n\to+\infty} R^{\Omega}_{\log|f|-n}(a)=0,$$

pour un point donné a de Ω. Il apparaît clairement, à l'aide de la fonction de Green, que la transformée de Cauchy de la mesure de Dirac en un point a de la frontière de Ω appartient à $H_{\log}(\Omega)$ si et seulement si a est un point régulier au sens de la théorie du potentiel. Dans le cas d'une mesure bornée quelconque μ, il s'agit de construire une majorante harmonique de la fonction

$$z\mapsto \log\left|\int (u-z)^{-1}\, d\mu(u)\right|.$$

Ce nouveau problème, plus faible, ne semble cependant pas susceptible d'une démonstration plus facile.

4. La démonstration du théorème 1 repose sur le fait élémentaire que la transformation de Cauchy est une application continue de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ dans $H^p(P)$ pour chaque $p<1$; la propriété cesse d'être vraie pour $p=1$, comme le montre l'exemple d'une mesure atomique. Le cas d'ensembles fermés F du plan complexe a été étudié par l'auteur [7, 8] et d'une manière différente par Kerkyacharian [9]. En utilisant des techniques analogues, il est possible de démontrer le résultat suivant qui sera publié ultérieurement.

Théorème 2. *Soit F une courbe dont la tangente est à variation bornée; alors pour tout nombre $p<\frac{1}{2}$ et toute composante connexe Ω du complémentaire de F, la transformation de Cauchy est une application continue de $\mathcal{M}_1(F)$ dans $H^p(\Omega)$.*

Il en résulte le

Corollaire. *Soient F une courbe dont la tangente est à variation bornée et w un poids ne s'annulant pas sur F. Alors pour que w soit un poids fondamental, il faut et il suffit que pour toute composante connexe Ω du complémentaire de F, on ait*

$$\sup_{p\in\mathcal{P},\,|pw|\le 1} \int \log^+ |p(u)|\, d\mu_a^{\Omega}(u)=+\infty,$$

pour un point a de Ω.

Bibliographie

1. Bernstein, S.: Sur les fonctions poids. Doklady Akad. Nauk **77**, 549–552 (1951)
2. Carleman, T.: Les fonctions quasi-analytiques. Paris: Gauthiers-Villars 1926
3. Carleson, L.: On Bernstein's approximation problem. Proc. Amer. math. Soc. **2** 953–951 (1951)
4. Choquet, G.: Le problème des moments. Séminaire Choquet 1961–62, no. 4.
5. Dzhrbashyan, M.M.: Quelques problèmes de la théorie de l'approximation polynominale pondérée dans le domaine complexe. Mat. Sbornik **36** (1955), en russe
6. Duren, P.L.: Theory of H^p spaces. New York: Academic Press 1970
7. Ferrier, J.-P.: Ensembles spectraux et approximation polynominale pondérée. Bull. Soc. Math. Fr. **96**, 289–335 (1968)
8. Ferrier, J.-P.: Séminaire d'Analyse Moderne. Université de Sherbrooke (Canada), 1972
9. Kerkyacharian, G.: Transformées de Cauchy et approximation polynominale pondérée sur les courbes de Jordan. C. R. Acad. Sc. Paris, A **275**, 279–281 (1972)
10. Lumer, G.: Séminaire d'Analyse Moderne. Université de Sherbrooke (Canada), 1971
11. Mergelyan, S.: Uniform approximation to functions of a complex variable. Translations Amer. Math. Soc. 2, **10**, 59–106 (1958)
12. Mandelbrojt, S.: Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications. Paris: Gauthier-Villars 1952
13. Pollard, H.: The Bernstein approximation problem. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 402–411 (1955)

J.-P. Ferrier
Université de Nancy I
U.E.R. Sc. Mathématiques
Case officielle 140
F-54037 Nancy, France

(Reçu le 25 mai 1973)