Werk

Titel: Relativ analytische Räume.

Autor: Kiehl, Reinhardt

Jahr: 1972

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0016|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Inventiones math. 16, 40 – 112 (1972)
© by Springer-Verlag 1972

Relativ analytische Räume*

Reinhardt Kiehl (Frankfurt am Main)

Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit *relativ analytischen Räumen über Fréchet-geringten Räumen* $(S, \mathcal{O}_S)$.

Ein Fréchet-geringter Raum ist ein topologischer Raum zusammen mit einer Strukturgarbe $\mathcal{O}_S$ von topologischen $\mathbb{C}$-Algebren, so daß die Familie $\mathfrak{F}(S)$ derjenigen offenen Mengen von S, für die $\mathcal{O}_S(U)$ Fréchet-Algebra ist, eine Basis für die Topologie bildet. Eine große Rolle spielt ein weiteres Axiom, das *Axiom* (**B**), das die Existenz „genügend vieler" beschränkter multiplikativ abgeschlossener Mengen in $\mathcal{O}_S$ sichert ([12]).

Endlich oder unendlich oft differenzierbare Mannigfaltigkeiten haben die Eigenschaft (**B**).

In den §§ 1 – 3 wird die Theorie dieser Räume bzw. die Theorie der relativ analytischen Räume und relativ pseudokohärenten Komplexe auf solchen relativ analytischen Räumen entwickelt.

In § 4 werden Endlichkeitssätze vom Typ des Schwartzschen Lemmas für L-F-Moduln über einer L-F-Algebra bewiesen. Mit Hilfe dieser Endlichkeitssätze wird dann im letzten Paragraphen ein Analogon zum Grauertschen Projektionssatz für eigentliche relativ analytische Räume über einem Grundraum $(S, \mathcal{O}_S)$ bewiesen.

Dazu sind zusätzliche Voraussetzungen über den Grundraum $(S, \mathcal{O}_S)$ nötig:

Entweder man fordert die Existenz genügend vieler „Steinscher" offener Teilmengen in S und die Endlichkeit der topologischen Dimension von $(S, \mathcal{O}_S)$[1];

oder man setzt voraus, daß die Halme $\mathcal{O}_{S,s}$ separierte topologische Vektorräume sind.

Die für den zweiten Fall entwickelten Methoden können auch verwendet werden, um Kohärenzsätze für Douady-Räume zu beweisen (Anhang zu § 5); dazu wird die auf natürliche Weise in der Strukturgarbe dieser Räume erklärte „*Bornologie*" benutzt; die Garbe der holomorphen

---

* Herrn Professor Dr. K. Stein zu seinem 60. Geburtstag gewidmet.

[1] Forster und Knorr beweisen ebenfalls unter diesen Voraussetzungen den Projektionssatz ([4]).

Funktionen auf einem Banach-Raum ist im allgemeinen keine Garbe von Fréchet-Algebren.

Im Verlaufe dieser Arbeit wurde dem Verfasser klar, daß die Theorie der relativ analytischen Räume nach einer alten Idee von *Houzel* nicht über einem topologisch geringten Raum, sondern über einem *„bornologisch" geringten Grundraum* entwickelt werden sollte.

Inhalt

§1. Glatte analytische Räume über einem Fréchet-geringten Raum 41
§2. Pseudokohärente und relativ pseudokohärente Komplexe von Garben auf relativ analytischen Räumen über einem Fréchet-geringten Raum 63
§3. Steinsche Teilmengen eines Fréchet-geringten Raumes; das Cartansche Verheftungslemma 68
§4. Endlichkeitssätze für Komplexe über einer topologischen Algebra 75
§5. Der Kohärenzsatz 92

§ 1. Glatte analytische Räume über einem Fréchet-geringten Raum

Alle im folgenden betrachteten topologischen Vektorräume sind lokal konvexe topologische Vektorräume über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Topologische Algebren sind immer lokal konvexe unitäre Algebren über $\mathbb{C}$, topologische Moduln über solchen Algebren unitär und lokal konvex, Homomorphismen von topologischen Algebren bzw. topologischen Moduln stets unitäre stetige Algebrahomomorphismen bzw. stetige unitäre Modulhomomorphismen.

Sei M eine beschränkte, abgeschlossene, absolut konvexe Teilmenge eines topologischen Vektorraumes V. Wir erklären die *„Halbnorm"*

$$\| \ \|_M \colon V \to R^+ \cup \infty$$

durch

$$\|x\|_M = \inf_{\substack{\lambda \geqq 0 \\ \lambda x \in M}} \lambda^{-1}.$$

Sei V separiert. Dann ist

$$V_M = \{x \in V;\ \|x\|_M < \infty\}$$

versehen mit der Halbnorm $\| \ \|_M$ ein normierter Raum; ist V *vollständig, so ist* V_M (mit $\| \ \|_M$!) *sogar ein Banach-Raum.*

Definition 1.1. a) Eine beschränkte, abgeschlossene, absolut konvexe Teilmenge M einer topologischen Algebra A heißt (B)-Menge, wenn sie das Einselement 1 enthält und wenn es eine Konstante c gibt mit

$$M \cdot M \subseteq c\,M.$$

Ist A vollständig separiert, so ist A_M (mit einer zu $\| \ \|_M$ äquivalenten Norm) eine Banach-Algebra ([12]).

b) Ein Homomorphismus $A \to B$ von topologischen Algebren heißt (B)-Homomorphismus, wenn es zu jeder beschränkten Menge N in A eine (B)-Menge M in B gibt, die das Bild von N in B enthält.

Definition 1.2. Es sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe $\mathcal{G}$ auf X heißt Garbe von topologischen Vektorräumen bzw. Garbe von topologischen Algebren, wenn $\mathcal{G}$ Garbe ist mit Werten in der Kategorie der topologischen Vektorräume bzw. in der Kategorie der topologischen Algebren. Das bedeutet insbesondere: Alle Einschränkungsabbildungen sind stetig; ist U eine offene Teilmenge $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U, so ist die natürliche Bijektion

$$\mathcal{G}(U) \to \operatorname{Kern}\Big(\prod_{i \in I} \mathcal{G}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,\, j \in I} \mathcal{G}(U_i \cap U_j)\Big)$$

ein Homöomorphismus.

Ist Y eine Teilmenge von X mit

$$\mathcal{G}(Y) = \varinjlim \mathcal{G}(U) \qquad U \text{ durchläuft die offenen Umgebungen von } Y,$$

so versieht man $\mathcal{G}(Y)$ mit der induktiven lokal konvexen Limestopologie.

$\mathcal{G}$ heißt Garbe von Fréchet-Räumen, bzw. Garbe von Fréchet-Algebren, kurz von F-Räumen bzw. F-Algebren, wenn die Familie derjenigen offenen Mengen U von X, für die $\mathcal{G}(U)$ sogar Fréchet-Raum ist eine Basis der Topologie von X ist. Eine Garbe von topologischen Moduln über einer Garbe von F-Algebren heißt Garbe von Fréchet-Moduln, wenn sie eine Garbe von F-Räumen ist.

Definition 1.3. a) Ein Fréchet-geringter Raum $S = (S, \mathcal{O}_S)$, kurz ein F-geringter Raum, ist ein topologischer Raum S versehen mit einer Strukturgarbe $\mathcal{O}_S$ von Fréchet-Algebren.

b) Sei

$$f = (f, \varphi)\colon S = (S, \mathcal{O}_S) \to T = (T, \mathcal{O}_T)$$

ein Morphismus geringter Räume. Dieser Morphismus heißt Morphismus F-geringter Räume, wenn S und T F-geringt sind und wenn für alle offenen Teilmengen U von T die natürliche Abbildung

$$\mathcal{O}_T(U) \to \mathcal{O}_S\big(f^{-1}(U)\big)$$

stetig ist.

c) Sei $S = (S, \mathcal{O}_S)$ F-geringt. Man sagt, S hat die Eigenschaft (**B**), wenn es zu jedem Punkt $s \in S$ und jeder offenen Umgebung U von s eine offene Umgebung V von s gibt, die in U enthalten ist, so daß die Einschränkungsabbildung

$$\mathcal{O}_S(U) \to \mathcal{O}_S(V)$$

(B)-Homomorphismus ist. Wir nennen einen F-geringten Raum der diese Eigenschaft besitzt auch F-(B)-geringten Raum ([12]).

Bemerkung. *Die Eigenschaft* (**B**) *ist offenbar lokaler Natur.*

Sei $S=(S, \mathcal{O}_S)$ F*-geringt. Dann bezeichnet* $\mathfrak{F}(S)$ *die Familie derjenigen offenen Teilmengen* U *von* X*, für die* $\mathcal{O}_S(U)$ *Fréchet-Algebra ist. Sie enthält die Familie* $\mathfrak{K}(S)$ *aller offenen Teilmengen, die abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen sind.*

Definition 1.4. Sei A eine topologische kommutative Algebra. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Spec}(A)$ die Gesamtheit aller (stetigen!) Algebrahomomorphismen

$$\varphi\colon A \to \mathbb{C}.$$

Bemerkung. *Ist* A *eine (unitäre!) kommutative Banach-Algebra, so ist* $\mathrm{Spec}(A)$ *auf natürliche Weise ein nicht leerer kompakter topologischer Raum.*

Lemma 1.5. *Sei* $(S, \mathcal{O}_S)$ *ein kommutativ* F-(B)*-geringter Raum,* s *ein Punkt aus* S*. Wir betrachten folgendes auf natürliche Weise gerichtete System*

$$I=\{\alpha=(U, M);\ s\in U\in\mathfrak{F}(S),\ M \text{ ist } (B)\text{-Menge aus } \mathcal{O}_S(U)\}$$

$$\alpha=(U, M)\leqq\beta=(U', M') \Leftrightarrow U\supseteq U', \text{ das Bild von } M \text{ in } \mathcal{O}_S(U')$$

ist in M' *enthalten.*

Für $\alpha=(U, M)$ *aus* I *sei* $A_\alpha=\mathcal{O}_S(U)_M$.

Die Familie $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ *ist auf natürliche Weise ein induktives System von kommutativen (unitären) Banach-Algebren. Wegen Axiom* (**B**) *ist die natürliche stetige Abbildung*

$$\varinjlim_\alpha A_\alpha \to \mathcal{O}_{S,s}$$

bijektiv.

Behauptung. Die induzierte Abbildung

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}) \to \varprojlim_\alpha \mathrm{Spec}\, A_\alpha$$

ist bijektiv. Insbesondere ist $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ projektiver Limes eines projektiven Systems kompakter nicht leerer topologischer Räume.

Beweis. Sei $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in I}$ ein Element aus $\varprojlim_\alpha \mathrm{Spec}(A_\alpha)$.

Da der Homomorphismus

$$\varinjlim_\alpha A_\alpha \to \mathcal{O}_{S,s}$$

bijektiv ist, induziert dieses Element einen Ringhomomorphismus

$$\varphi\colon \mathcal{O}_{S,s} \to \mathbb{C}.$$

Es muß gezeigt werden, daß φ stetig ist. Es genügt, für jede Umgebung U von s, die in $\mathfrak{F}(S)$ enthalten ist, zu zeigen, daß die zusammengesetzte Abbildung

$$\tilde{\varphi}\colon \mathcal{O}_S(U) \to \mathcal{O}_{S,s} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$$

stetig ist. Sei $a_1, a_2, \ldots$ eine Nullfolge in $\mathcal{O}_S(U)$. Weil $\mathcal{O}_S(U)$ ein F-Raum ist, gibt es eine Nullfolge $b_1, b_2, \ldots$ in $\mathcal{O}_S(U)$ und eine Nullfolge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von komplexen Zahlen mit $\lambda_i\, b_i = a_i$ $i = 1, 2, \ldots$.

Wegen Axiom (**B**) gibt es eine Umgebung V von s, die in U enthalten ist und zu $\mathfrak{F}(S)$ gehört und eine (B)-Menge M in $\mathcal{O}_S(V)$, die die Bilder $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots$ von $b_1, b_2, \ldots$ in $\mathcal{O}_S(V)$ enthält. Die Folge der Bilder $\tilde{a}_1 = \lambda_1 \tilde{b}_1$, $\tilde{a}_2 = \lambda_2 \tilde{b}_2, \ldots$ der Elemente $a_1, a_2, \ldots$ in $\mathcal{O}_S(V)$ konvergiert dann bereits in der Banach-Algebra $A_\alpha - \alpha = (V, M)$ – gegen Null.

Da

$$\varphi_\alpha\colon A_\alpha \to \mathbb{C}$$

nach Voraussetzung stetig ist, gilt:

$$\tilde{\varphi}(a_i) = \varphi_\alpha(\tilde{a}_i) \to 0 \quad \text{für } i \to \infty.$$

Folgerung 1.6. *$(S, \mathcal{O}_S)$ sei ein kommutativ F-(B)-geringter Raum, U eine offene Teilmenge von S, h ein Element aus $\mathcal{O}_S(U)$. Für einen Punkt s aus S bezeichne h_s den Keim von h in $\mathcal{O}_{S,s}$.*

a) *Für alle s aus S ist* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ *nicht leer. Genauer:* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ *trägt auf natürliche Weise (als projektiver Limes der Räume* $\mathrm{Spec}(A_\alpha)$*) die Struktur eines nicht leeren kompakten topologischen Raumes.*

b) *Für einen Punkt s aus U und jedes Element φ aus* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ *sei*

$$\varphi(h_s) \neq 0.$$

Dann gibt es eine Umgebung V von s, die in U enthalten ist, so daß die Einschränkung $h|V$ von h auf V invertierbar ist.

c) *Für einen Punkt s aus U und jedes Element φ aus* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ *sei*

$$|\varphi(h_s)| < 1.$$

Dann gibt es eine in U enthaltene offene Umgebung V von s, so daß $h|V$ topologisch nilpotent ist (d.h. $(h|V)^i \to 0$ für $i \to \infty$). Genauer: Man kann sogar eine Umgebung V finden, die zu $\mathfrak{F}(S)$ gehört, eine (B)-Menge M in $\mathcal{O}_S(V)$, und eine reelle Zahl ρ mit $0 < \rho < 1$, so daß $(\rho^{-1} h|V)^i$ in M enthalten ist für $i = 1, 2, \ldots$.

d) *Für jeden Punkt s aus U und jedes Paar φ, ψ aus* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ *sei*

$$\varphi(h_s)=\psi(h_s).$$

Dann ist die Funktion

$$\tilde{h}: U \to \mathbb{C}$$

$$s \mapsto \varphi(h_s), \qquad \varphi \text{ irgendein Element von } \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_{S,s}$$

stetig.

Beweis. a) der projektive Limes eines gerichteten Systems kompakter nicht leerer Räume ist nicht leer.

b) Setze $K_\alpha = \mathrm{Spec}(A_\alpha)\ \alpha \in I$

$$K = \varprojlim_{\alpha} K_\alpha = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s}).$$

Es sei h_s Bild eines Elementes h_{α_0} aus A_{α_0}. h_{α_0} induziert eine stetige Funktion $\tilde{h}_{\alpha_0}: K_{\alpha_0} \to \mathbb{C}$.

Sei

$$\tilde{K} = \mathrm{Bild}\ (K \to K_{\alpha_0})$$

$$\tilde{K}_\alpha = \mathrm{Bild}\ (K_\alpha \to K_{\alpha_0}) \qquad \text{für } \alpha \geqq \alpha_0.$$

Dann ist

$$\tilde{K} = \bigcap_{\alpha \geqq \alpha_0} \tilde{K}_\alpha.$$

Nach Voraussetzung ist $\tilde{h}_{\alpha_0}(x) \neq 0$ für alle Punkte x aus $\tilde{K}$. Deshalb gibt es eine offene Umgebung U von $\tilde{K}$ in $\tilde{K}_{\alpha_0}$, so daß $\tilde{h}_{\alpha_0}(x) \neq 0$ ist für alle $x \in U$.

Wegen

$$\tilde{K} = \bigcap_{\alpha \geqq \alpha_0} \tilde{K}_\alpha \subseteq U$$

gibt es einen Index $(V, M) = \alpha_1 \geqq \alpha_0$, so daß $\tilde{K}_{\alpha_1}$ in U enthalten ist:

$$\tilde{h}_{\alpha_0}(x) \neq 0 \qquad x \in \tilde{K}_{\alpha_1}.$$

Sei h_{α_1} das Bild von h_{α_0} in A_{α_1}. Die durch h_{α_1} induzierte Funktion

$$K_{\alpha_1} \to \mathbb{C}$$

verschwindet nirgends. Also ist

$$h_{\alpha_1} = h \mid V$$

bereits in $A_{\alpha_1} = \mathcal{O}_S(V)_M$ invertierbar.

c) Wird wie b) bewiesen.

d) Sei s_0 ein Punkt aus U.

Behauptung. $\tilde{h}$ ist in s_0 stetig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen:

$$\tilde{h}(s_0)=0.$$

Sei $\varepsilon>0$. Dann gibt es nach c) eine in U enthaltene offene Umgebung V, so daß $\varepsilon^{-1} h|V$ topologisch nilpotent ist. Dann ist aber auch $\varepsilon^{-1} h_s$ topologisch nilpotent in $\mathcal{O}_{S,s}$ für $s\in V$. Sei φ irgendein Element aus $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$, $s\in V$

$$\varepsilon^{-1}\tilde{h}(s)=\varphi(\varepsilon^{-1} h_s)$$

ist topologisch nilpotent. Daraus folgt:

$$|\varepsilon^{-1}\tilde{h}(s)|<1$$

also

$$|\tilde{h}(s)|<\varepsilon \quad \text{für } s\in V.$$

Definition 1.7. $(S, \mathcal{O}_S)$ sei F-geringt.

a) Das Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S)$ von $\mathcal{O}_S$:

$$\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S)(U)=\{h\in\mathcal{O}_S(U);\ \underset{V\subset U}{\forall} h|V \text{ ist im Zentrum von } \mathcal{O}_S(V) \text{ enthalten}\}.$$

b) Die Garbe $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)$:

$$\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)(U)=\{h\in\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S)(U);\ \underset{s\in U,\ \varphi,\ \psi\in\operatorname{Spec}(\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S)_s)}{\forall} \varphi(h_s)=\psi(h_s)\}.$$

Satz 1.8. a) *$(S, \mathcal{O}_S)$ sei F-geringt. Dann sind die Räume $(S, \mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S))$ und $(S, \mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S))$ kommutativ F-geringt. Ist $(S, \mathcal{O}_S)$ F-(B)-geringt, so sind auch die Räume $(S, \mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S))$ und $(S, \mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S))$ F-(B)-geringt.*

b) *Sei $(S, \mathcal{O}_S)$ F-(B)-geringt. Dann ist $(S, \mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S))$ lokal geringt. Der Restklassenkörper eines Halmes $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)_s$ ist kanonisch isomorph zu $\mathbb{C}$.*

Sei U offene Teilmenge von S. Jedes Element h aus $\mathcal{O}_S(U)$, das bereits in $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)(U)$ enthalten ist, definiert auf natürliche Weise eine stetige Funktion

$$\tilde{h}\colon U\to\mathbb{C}$$
$$x\mapsto\varphi_s(h_s)=h_s \bmod m_s.$$

Dabei ist h_s der Keim von h in $\mathcal{O}_{S,s}$, φ_s das einzige Element von $\operatorname{Spec}(\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)_s)$, m_s das maximale Ideal von $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)_s$.

Bemerkung. *S sei lokal kompakt. Dann ist die Abbildung*

$$\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)(U)\to C(U)$$
$$h\mapsto\tilde{h}$$

stetig. Dabei ist $C(U)$ der Raum der komplexwertigen stetigen Funktionen auf U, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen.

Sei jetzt $X=(X, \mathcal{O}_X)$ eine komplexanalytische – der Einfachheit halber im Unendlichen abzählbare – Mannigfaltigkeit, versehen mit der Garbe $\mathcal{O}_X$ der holomorphen Funktionen. X ist dann auf natürliche Weise ein F-(B)-geringter Raum. Ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{G}$ ist auf natürliche Weise eine Garbe von Fréchet-Moduln über $\mathcal{O}_X$. Für eine offene Menge U aus X ist $\mathcal{G}(U)$ sogar *nuklearer topologischer Vektorraum* ([15], 6.4).

Alle offenen Teilmengen des $\mathbb{C}^n$ sind solche komplexen Mannigfaltigkeiten, insbesondere der *n-dimensionale Polyzylinder* $P(a, \rho)$ *mit Mittelpunkt*

$$a=(a_1, \ldots, a_n)\in\mathbb{C}^n$$

und Polyradius

$$\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_n) \qquad (\rho_i>0)$$

$$P(a, \rho)=\{z=(z_1, \ldots, z_n)\in\mathbb{C}^n;\ |z_i-a_i|<\rho_i,\ i=1, \ldots, n\}.$$

Der Ring der holomorphen Funktionen auf $P(a, \rho)$ kann dargestellt werden als Ring von Potenzreihen in den Variablen $z_1, \ldots, z_n$:

1.9.

$$\mathcal{O}_{P(a,\rho)}(P(a, \rho))=\{h(z)=\sum_{\nu\geqq 0} c_\nu((z-a)/\rho)^\nu$$

$$=\sum_{\nu\geqq 0} c'_\nu(z-a)^\nu;\ c_\nu\in\mathbb{C},\ c'_\nu=c_\nu\rho^{-\nu},\ \|h\|_q<\infty\ 0<q<1\}.$$

Dabei ist

$$(z-a)^\nu=(z_1-a_1)^{\nu_1}\ldots(z_n-a_n)^{\nu_n}, \qquad (z-a/\rho)^\nu=(z_1-a_1/\rho_1)^{\nu_1}\ldots(z_m-a_n/\rho_n)^{\nu_n},$$

$$\|h\|_q=\sum_{\nu\geqq 0}|c_\nu|\,q^{|\nu|}=\sum_\nu|c'_\nu|\,\rho^\nu\,q^{|\nu|} \qquad |\nu|=\nu_1+\cdots+\nu_n.$$

Die Halbnormen $\|\ \|_q$ *definieren die Topologie auf* $\mathcal{O}_{P(a,\rho)}(P(a, \rho))$.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{St}(X)$ die Familie der offenen Steinschen Teilmengen der komplexen Mannigfaltigkeit X.

Sei jetzt $(S, \mathcal{O}_S)=S$ ein Fréchet-geringter Raum, $\mathcal{G}$ eine kohärente Garbe auf der komplexen Mannigfaltigkeit $(X, \mathcal{O}_X)=X$. Wir erklären auf

$$\mathfrak{F}(S)\times\mathfrak{St}(X)=\{U\times V\subseteq S\times X;\ U\in\mathfrak{F}(S),\ V\in\mathfrak{St}(X)\}$$

ein Garbendatum

$$\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{G}$$

von Fréchet-Moduln über dem Garbendatum $\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_X$ von Fréchet-Algebren:

$$U\times V\in\mathfrak{F}(S)\times\mathfrak{St}(X)\colon \mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{G}(U\times V)=\mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\mathcal{G}(V)=\mathcal{O}_S(U)\underset{\varepsilon=\pi}{\hat{\otimes}}\mathcal{G}(V)$$

(ε- *und* π-*Topologie stimmen überein, da* $\mathcal{G}(V)$ *nuklear ist* ([15], 7.4).

Die Einschränkungsabbildungen von $\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{G}$ sind dabei die Tensorprodukte der Einschränkungsabbildungen von $\mathcal{O}_S$ bzw. $\mathcal{G}$. Ist $\mathcal{M}$ ein Garbendatum auf einer Basis von offenen Mengen eines topologischen Raumes, so bezeichnen wir mit $\tilde{\mathcal{M}}$ die *assoziierte Garbe* ([5]).

Satz 1.10. (1) *Das soeben erklärte Garbendatum $\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{G}$ ist eine Garbe auf $\mathfrak{F}(S) \times \mathfrak{St}(X)$; d.h.:*

$U \times V \in \mathfrak{F}(S) \times \mathfrak{St}(X) \Rightarrow$ Die natürliche Abbildung

$$\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{G}(U \times V) \to \widetilde{\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{G}}(U \times V)$$

ist ein Isomorphismus.

Daher kann $\mathcal{O}_S \otimes \mathcal{G}$ eindeutig zu einer Garbe auf $S \times X$ fortgesetzt werden, die wieder mit $\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{G}$ bezeichnet wird. $\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{G}$ kann auf natürliche Weise mit der Struktur einer Garbe von Fréchet-Räumen (bzw. Algebren, Moduln) versehen werden; dabei ist für $U \times V \in \mathfrak{F}(S) \times \mathfrak{St}(X)$ die Topologie von $\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{G}(U \times V)$ die auf dem Garbendatum bereits erklärte Topologie.

(2) *Für einen Polyzylinder $P = P(a, \rho)$ der Dimension n und U aus $\mathfrak{F}(S)$ gilt:*

$$\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U \times P)$$

ist auf natürliche Weise isomorph zu

$$\{h(z) = \sum_{\nu \geqq 0} c'_\nu (z-a)^\nu;\ c'_\nu \in \mathcal{O}_S(U)$$

$$P_q(h) < \infty \text{ für alle stetigen Halbnormen } P(_) \text{ auf } \mathcal{O}_S(U) \text{ und } 0 < q < 1\}.$$

Dabei ist

$$P_q(h) = \sum_{\nu \geqq 0} P(c'_\nu)\, \rho^\nu\, q^{|\nu|}.$$

Diese Halbnormen definieren die Topologie auf

$$\mathcal{O}_S(U) \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(P).$$

Für unsere Zwecke ist es ausreichend, den Satz für lokal freie kohärente Garben $\mathcal{G}$ zu beweisen.

Beweis. Die Behauptung (2) ergibt sich unmittelbar aus 1.9 und der Definition der π-Topologie auf einem Tensorprodukt. Für das Folgende ist ein Lemma nützlich:

Lemma 1.11. *Gegeben sei ein projektives System*

$$\cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1$$

von F-Räumen und ein weiterer F-Raum V. Das Bild von $F = \varprojlim_n F_n$ in F_n sei dicht für $n = 1, 2, \ldots$.

Entweder sei V oder es seien alle F_n nuklear. Dann ist die natürliche Abbildung

$$V\hat{\otimes}F\to\varprojlim_n V\hat{\otimes}F_n$$

ein (topologischer) Isomorphismus.

Insbesondere gilt: Sei $(F_i)_{i\in I}$ eine höchstens abzählbare Familie von F-Räumen, V ein weiterer F-Raum. Entweder V oder alle F_i seien nuklear. Dann ist

$$V\hat{\otimes}\prod_{i\in I}F_i\cong\prod_{i\in I}(V\hat{\otimes}F_i).$$

Beweis. Die kanonische Abbildung

$$j\colon V\otimes F\to\varprojlim_n V\hat{\otimes}F_n$$

ist jedenfalls injektiv. Nach Voraussetzung ist das Bild von $V\otimes F$ in $V\otimes F_n$, damit in $V\hat{\otimes}F_n$ dicht für alle n; damit ist auch das Bild von $V\hat{\otimes}F$ in $\varprojlim_n V\hat{\otimes}F_n$ dicht.

Andererseits rechnet man sofort nach, daß die ε-Topologie von $V\otimes F$ durch die von $\varprojlim_n V\hat{\otimes}F_n$ induziert wird.

Wir wollen zunächst annehmen, daß $\mathscr{G}=\mathscr{O}_X$ ist.

a) Wir zeigen, daß die kanonische Abbildung

$$\mathscr{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{O}_X(U\times V)\to\widetilde{\mathscr{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{O}_X}(U\times V)$$

für $U\times V$ aus $\mathfrak{F}(S)\times\mathfrak{St}(X)$ injektiv ist.

Sei zunächst V isomorph zu einem Polyzylinder. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $V=P(0,\rho)$ ist.

Sei

$$f=\sum_{\nu\geqq 0}c_\nu z^\nu$$

ein Element aus $\mathscr{O}_S(U)\hat{\otimes}\mathscr{O}_X(V)$, dessen Bild in $\widetilde{\mathscr{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{O}_X}(U\times V)$ verschwindet. Dann gibt es zu jedem Punkt s aus U eine offene Umgebung U_s, die in $\mathfrak{F}(U)$ enthalten ist und einen Polyradius $\rho_s\leqq\rho$, so daß $f|U_s\times P(0,\rho_s)$ verschwindet. Das bedeutet aber:

$$c_\nu|U_s=0\qquad s\in U.$$

Dann verschwindet aber c_ν selbst für alle ν und damit f. Sei jetzt $U\times V$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{F}(S)\times\mathfrak{St}(X)$. Dann gibt es eine höchstens abzählbare Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ von V durch zu Polyzylindern isomorphe Mengen. Die natürliche Abbildung

$$\mathscr{O}_X(V)\to\prod_{i\in I}\mathscr{O}_X(V_i)$$

ist ein Isomorphismus auf einen abgeschlossenen Unterraum, nämlich auf

$$\mathrm{Ker}\left(\prod_i \mathcal{O}_X(V_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{O}_X(V_i \cap V_j)\right).$$

Da $\mathcal{O}_X(V)$ nuklear ist, ist auch die Abbildung

$$\mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\prod_{i\in I}\mathcal{O}_X(V_i)$$

injektiv. Wegen Lemma 1.11 ist

$$\mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\prod_{i\in I}\mathcal{O}_X(V_i) \cong \prod_{i\in I}\mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}_X(V_i).$$

Man hat damit ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to \mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}_X(V) & \to & \prod_{i\in I}\mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}_X(V_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to \widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_X}(U\times V) & \to & \prod_{i\in I}\widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_X}(U\times V_i). \end{array}$$

Es wurde bereits bewiesen, daß für alle $i\in I$

$$\mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}_X(V_i) \to \widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_X}(U\times V_i)$$

injektiv ist; also ist auch die Abbildung

$$\mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}_X(V) \to \widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_X}(U\times V)$$

injektiv.

b) Wir wollen zeigen, daß für einen Polyzylinder $P\subseteq\mathbb{C}^n$ und ein Element U aus $\mathfrak{F}(S)$ die kanonische Abbildung

$$\mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}_X(P) \to \widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_X}(U\times P)$$

sogar bijektiv ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$P = P(0,\rho).$$

Sei α ein Element aus $\widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_X}(U\times P)$.

b_1) Wir wollen annehmen, daß es eine Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von U durch Elemente U_i aus $\mathfrak{F}(U)$ gibt und eine Familie $(h_i)_{i\in I}$ von Elementen h_i aus $\mathcal{O}_S(U_i)\hat{\otimes}\mathcal{O}_X(P)$, deren Bilder in $\widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_X}(U_i\times P)$ gerade die Einschränkungen $\alpha|U_i\times P$ von α auf $U_i\times P$ sind. Wegen 1.10 (2) ist

$$h_i = \sum_{\nu\geq 0} c_\nu^{(i)} z^\nu \qquad i\in I,\ c_\nu^{(i)}\in\mathcal{O}_S(U_i).$$

Wegen a) ist für jedes Indexpaar und jedes in $U_i\cap U_j$ enthaltene Element W aus $\mathfrak{F}(S)$

$$h_i|W\times P = h_j|W\times P;$$

das bedeutet aber

$$c_\nu^{(i)}|W = c_\nu^{(j)}|W \quad \text{für alle } i, j$$

und alle W aus $\mathfrak{F}(S)$, die in $U_i \cap U_j$ enthalten sind. Also gibt es zu jedem ν ein Element c_ν in $\mathcal{O}_S(U)$ mit

$$c_\nu|U_i = c_\nu^{(i)} \quad \text{für alle } i \text{ und } \nu.$$

Sei $P(_)$ eine stetige Halbnorm auf einem Raum $\mathcal{O}_S(U_i)$. Die Zusammensetzung mit der Einschränkungsabbildung

$$\mathcal{O}_S(U) \to \mathcal{O}_S(U_i)$$

bezeichnen wir mit $\tilde{P}(_)$. Sei $0 < q < 1$.

$$\sum_{\nu \geqq 0} \tilde{P}(c_\nu)\, \rho^\nu\, q^{|\nu|} = \sum_{\nu \geqq 0} P(c_\nu^{(i)})\, \rho^\nu\, q^{|\nu|} < \infty.$$

Da aber die Topologie von $\mathcal{O}_S(U)$ projektiver Limes der Topologien von $\mathcal{O}_S(U_i)$ $i \in I$ ist (1.2), definieren die so erhaltenen Halbnormen $\tilde{P}(_)$ die Topologie von $\mathcal{O}_S(U)$. Also liegt

$$h(z) = \sum_\nu c_\nu z^\nu$$

in

$$\mathcal{O}_S(U) \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(P)$$

und nach Konstruktion ist

$$h|U_i \times P = h_i.$$

b_2) Wir wollen annehmen, daß es eine Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ von P durch Steinsche offene Teilmengen V_i und eine Familie $(h_i)_{i \in I}$ von Elementen h_i aus $\mathcal{O}_S(U) \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(V_i)$ gibt, so daß das Bild von h_i in $\widetilde{\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_X}(U \times V_i)$ gerade die Einschränkung $\alpha|U \times V_i$ ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß es einen Index i_0 gibt, so daß $V_{i_0} = P(0, \tilde{\rho}) = \tilde{P}$ ist. Wegen a) gilt

$$h_i|U \times V_i \cap V_j = h_j|U \times V_i \cap V_j.$$

Sei

$$\varphi\colon\ \mathcal{O}_S(U) \to \mathbb{C}$$

ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{O}_S(U)$. Für irgendeine Steinsche Menge $W \subseteq P$ induziert φ eine stetige lineare Abbildung

$$\varphi_W\colon\ \mathcal{O}_S(U) \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(W) \xrightarrow{\varphi \otimes \mathrm{Id}} \mathbb{C} \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(W) = \mathcal{O}_X(W).$$

Sei

$$h_{i_0} = \sum_\nu c_\nu z^\nu.$$

Es gilt

$$\varphi_{V_{i_0}}(h_{i_0}) = \sum_{\nu} \varphi(c_\nu)\, z^\nu$$

$$\varphi_{V_i}(h_i) | V_i \cap V_j = \varphi_{V_j}(h_j) | V_i \cap V_j .$$

Die Familie $(\varphi_{V_i}(h_i))_{i \in I}$ definiert deshalb eine in ganz P holomorphe Funktion, die notwendig durch die Potenzreihe

$$\sum_{\nu} \varphi(c_\nu)\, z^\nu$$

dargestellt wird. Also konvergiert

$$\sum_{\nu} \varphi(c_\nu)\, z^\nu$$

in ganz P!

Sei jetzt $0 < q < q' < 1$. Da

$$\sum_{\nu} \varphi(c_\nu)\, z^\nu \quad \text{in } P = P(0, \rho)$$

konvergiert, ist die Familie

$$(\varphi(c_\nu)\, \rho^\nu\, q'^{|\nu|})_{\nu \geqq 0}$$

eine beschränkte Menge von komplexen Zahlen. Da das für jedes stetige lineare Funktional

$$\varphi\colon\ \mathcal{O}_S(U) \to \mathbb{C}$$

gilt, ist die Familie

$$(c_\nu\, \rho^\nu\, q'^{|\nu|}) \qquad \nu \geqq 0$$

schwach beschränkt, damit sogar stark beschränkt in $\mathcal{O}_S(U)$ ([15], 0.6).

Sei $P(_)$ eine stetige Halbnorm auf $\mathcal{O}_S(U)$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$P(c_\nu\, \rho^\nu\, q'^{|\nu|}) \leqq C .$$

Daraus folgt

$$\sum_{\nu \geqq 0} P(c_\nu)\, \rho^\nu\, q^{|\nu|} = \sum_{\nu \geqq 0} P(c_\nu)\, \rho^\nu\, q'^{|\nu|} (q/q')^{|\nu|} \leqq C \sum_{\nu \geqq 0} (q/q')^{|\nu|} < \infty .$$

Also ist

$$h(z) = \sum_{\nu \geqq 0} c_\nu\, z^\nu$$

in

$$\mathcal{O}_S(U) \hat{\otimes} \mathcal{O}_S(X)$$

enthalten. Für alle stetigen Funktionale

$$\varphi\colon\ \mathcal{O}_S(U) \to \mathbb{C}$$

ist

$$\varphi_{V_i}(h|U\times V_i)=\varphi_{V_i}(h_i)\qquad i\in I.$$

Daraus folgt, daß $h|V_i=h_i$ für alle $i\in I$ ist. Also ist α das Bild von h in $\widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_X}$.

b_3) Gegeben sei $\tilde{\rho}<\rho$ ($\tilde{\rho}_i<\rho_i$). Dann ist $P(0,\tilde{\rho})$ relativ kompakt in P. Zu jedem Punkt $s\in U$ gibt es daher eine Umgebung U_s von s in U, die zu $\mathfrak{F}(S)$ gehört, eine endliche Steinsche Überdeckung $\{V_1^{(s)},\ldots,V_{r_s}^{(s)}\}$ von $P(0,\tilde{\rho})$ und eine Familie $(h_i^{(s)})_{i=1,\ldots,r_s}$ von Elementen in $\mathcal{O}_S(U_s)\hat{\otimes}\mathcal{O}_X(V_i^{(s)})$, deren Bilder in $\widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_X}(U_s\times V_i^{(s)})$ gerade die Einschränkungen $\alpha|U_s\times V_i^{(s)}$ sind. Also gibt es nach b_2) zu jedem s ein Element b_s in $\mathcal{O}_S(U_s)\hat{\otimes}\mathcal{O}_X(P(0,\tilde{\rho}))$, dessen Bild in $\widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_X}(U_s\times P(0,\tilde{\rho}))$ gerade $\alpha|U_s\times P(0,\tilde{\rho})$ ist. Nach b_1) gibt es dann in $\mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}_X(P(0,\tilde{\rho}))$ ein Element $c_{\tilde{\rho}}$, dessen Bild in $\widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_X}(U\times P(0,\tilde{\rho}))$ gerade $\alpha|U\times P(0,\tilde{\rho})$ ist.

Weil

$$P(0,\rho)=\bigcup_{\tilde{\rho}<\rho}P(0,\tilde{\rho})$$

ist, ist deshalb nach b_2) α Bild eines Elementes aus

$$\mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}_X(P).$$

Damit ist die Behauptung b) bewiesen. Man erhält daraus sofort:

c) Sei $\mathcal{G}$ eine freie kohärente Garbe auf X, U ein Element aus $\mathfrak{F}(S)$, V isomorph zu einem Polyzylinder. Dann ist die kanonische Abbildung

$$\mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\mathcal{G}(V)\to\widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{G}}(U\times V)$$

bijektiv.

d) $\mathcal{G}$ sei eine kohärente lokal freie Garbe auf X. Sei U aus $\mathfrak{F}(S)$, Y Steinsche offene Teilmenge von X; es wird folgende zusätzliche Voraussetzung über Y gemacht: Y hat in allen Punkten die gleiche Dimension n; es gibt eine endliche (d.h. Fasern-endliche und eigentliche) Abbildung $\varphi\colon Y\to P$ auf einen Polyzylinder der Dimension n.

Behauptung. $\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{G}(U\times Y)$ ist kanonisch isomorph zu

$$\widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{G}}(U\times Y).$$

Da Y und P singularitätenfrei und von gleicher Dimension sind, ist

$$\varphi_*(\mathcal{O}_Y)_p=\prod_{y\in\varphi^{-1}(p)}\mathcal{O}_{Y,y}$$

Cohen-Maccaulay-Modul über $\mathcal{O}_{P,p}$, damit freier $\mathcal{O}_{P,p}$-Modul für alle $p\in P$, also $\varphi_*(\mathcal{G})$ lokal freier $\mathcal{O}_P$-Modul. Da alle komplexanalytischen Vektorraumbündel auf P trivial sind, ist dann $\varphi_*(\mathcal{G})=\mathcal{F}$ sogar freier

endlicher $\mathcal{O}_P$-Modul. Auf $\mathfrak{F}(S)\times\mathfrak{St}(P)$ hat man das Garbendatum $\mathscr{H}=\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{F}$. $\tilde{\mathscr{H}}$ sei die assoziierte Garbe. Da $\mathscr{F}$ freier $\mathcal{O}_P$-Modul ist, folgt aus c), daß die natürliche Abbildung

$$\mathscr{H}(U\times P)\to\tilde{\mathscr{H}}(U\times P)$$

ein Isomorphismus ist.

Andererseits ist für $V\in\mathfrak{F}(S)$, $W\in\mathfrak{St}(P)$ $\mathscr{H}(V\times W)$ kanonisch isomorph zu $\mathcal{O}_X\hat{\otimes}\mathscr{G}(V\times\varphi^{-1}(W))$.

Sind A, B disjunkte offene Steinsche Teilmengen von Y, so ist $\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{G}(V\times A\cup V\times B)$ kanonisch isomorph zum direkten Produkt

$$\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{G}(V\times A)\times\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{G}(V\times B).$$

Da $\varphi\colon Y\to P$ endlich ist, ergibt sich daraus, daß

$$(\mathrm{Id}\times\varphi)_*\,\widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{G}}|S\times Y$$

kanonisch isomorph ist zu $\tilde{\mathscr{H}}$.

Insgesamt:

$$\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{G}(U\times Y)\cong\mathscr{H}(U\times P)\cong\tilde{\mathscr{H}}(U\times P)\cong\widetilde{\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{G}}(U\times P).$$

e) Jede Steinsche Mannigfaltigkeit ist direkte Summe von reindimensionalen Steinschen Mannigfaltigkeiten. Zu jeder reindimensionalen (im Unendlichen abzählbaren) Steinschen Mannigfaltigkeit Y gibt es eine aufsteigende Kette offener Steinscher Teilmengen

$$Y_1\subseteq Y_2\subseteq Y_3\subseteq\cdots$$

und endliche Abbildungen

$$Y_\nu\to P^{(\nu)}$$

auf Polyzylinder der gleichen Dimension mit $\bigcup_\nu Y_\nu=Y$ und:

Das Bild von $\mathscr{G}(Y)$ ist dicht in $\mathscr{G}(Y_\nu)$ für alle ν ([7]; VII, B, Th. 3). Die Behauptung des Lemmas ergibt sich also aus d) und Hilfssatz 1.11.

Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{G}$ (wenigstens für lokal freies $\mathscr{G}$) Garbe auf $\mathfrak{F}(S)\times\mathfrak{St}(X)$ ist. $\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{G}$ läßt sich damit eindeutig zu einer Garbe auf $S\times X$ fortsetzen, die wir wieder mit $\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{G}$ bezeichnen.

Sei jetzt $\{U_i\times V_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von $U\times V$, $\{U_{ik}^j\times V_{ik}^j\}_{j\in J_{ik}}$ eine Überdeckung von

$$U_i\cap U_k\times V_i\cap V_k$$

$$U_i\times V_i,\qquad U_{ik}^j\times V_{ik}^j,\qquad U\times V\in\mathfrak{F}(S)\times\mathfrak{St}(X).$$

Wir müssen noch zeigen, daß die stetige bijektive Abbildung

$$\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{G}(U\times V)\to\mathrm{Ker}\Big(\prod_i\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{G}(U_i\times V_i)\rightrightarrows\prod_{i,k,j}\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathscr{G}(U_{ik}^j\times V_{ik}^j)\Big)$$

ein topologischer Isomorphismus ist. Das folgt aus dem Satz von Banach, wenn I abzählbar ist. Der allgemeine Fall läßt sich darauf zurückführen, wenn man berücksichtigt:

Weil $(S, \mathcal{O}_S)$ Fréchet-geringt ist, gibt es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ einer offenen Teilmenge U von S, die zu $\mathfrak{F}(S)$ gehört durch Teilmengen U_i, die zu $\mathfrak{F}(S)$ gehören, eine höchstens abzählbare Teilfamilie $(U_{i_\alpha})_{\alpha\in A}$, so daß die Abbildung

$$\mathcal{O}_S(U)\to\prod_{\alpha\in A}\mathcal{O}_S(U_{i_\alpha})$$

ein topologischer Isomorphismus auf das Bild ist.

Definition 1.12. $S=(S, \mathcal{O}_S)$ sei ein F-geringter Raum, $X=(X, \mathcal{O}_X)$ eine komplexe Mannigfaltigkeit. Wir versehen das kartesische Produkt $S\times X$ mit der Struktur eines F-geringten Raumes: $\mathcal{O}_{S\times X}=\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_X$.

$$S\times X=(S\times X, \mathcal{O}_{S\times X})$$

ist dann auf natürliche Weise ein F-geringter Raum über S; d.h. man hat eine Projektionsabbildung

$$(S\times X, \mathcal{O}_{S\times X})\to(S, \mathcal{O}_S)$$
$$(s, x)\mapsto s$$
$$\mathcal{O}_{S\times X}(U\times X)\ni a\otimes 1\leftarrow\!\shortmid a\in\mathcal{O}_S(U),\qquad U\in\mathfrak{F}(S).$$

Definition 1.13. Gegeben sei ein F-geringter Raum $(S, \mathcal{O}_S)$ und ein F-geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ über $(S, \mathcal{O}_S)$, d.h. ein Morphismus

$$f\colon (X, \mathcal{O}_X)\to(S, \mathcal{O}_S)$$

F-geringter Räume. X heißt glatter analytischer Raum über S, wenn es zu jedem Punkt $x\in X$ eine Umgebung U, eine Umgebung V des Bildpunktes $f(x)$, eine komplexe Mannigfaltigkeit Y und einen Isomorphismus F-geringter Räume

$$(V\times Y, \mathcal{O}_{V\times Y})\xrightarrow{\cong}(U, \mathcal{O}_U)$$

gibt, so daß folgendes natürliche Diagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccc}(V\times Y, \mathcal{O}_{V\times Y}) & \longrightarrow & (U, \mathcal{O}_U)\\ \downarrow & & \downarrow\\ (V, \mathcal{O}_V) & \longrightarrow & (S, \mathcal{O}_S)\end{array}$$

(d.h. daß der Isomorphismus eine Abbildung über S ist).

Bemerkung. *Man kann immer annehmen, daß Y ein Polyzylinder ist.*

Satz 1.14. *Sei $(S, \mathcal{O}_S)$ ein F-geringter Raum.*

a) *$(Y, \mathcal{O}_Y)$ sei eine komplexe Mannigfaltigkeit; dann ist*

$$\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_Y) = \mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S) \hat{\otimes} \mathcal{O}_Y$$
$$\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_Y) = \mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S) \hat{\otimes} \mathcal{O}_Y.$$

b) *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ glatter analytischer Raum über $(S, \mathcal{O}_S)$. Dann wird bei der Strukturabbildung $\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_X$ $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S)$ in $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_X)$ und damit $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)$ in $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_X)$ abgebildet. $(X, \mathfrak{Z}(\mathcal{O}_X))$ is glatter analytischer Raum über $(S, \mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S))$, $(X, \mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_X))$ über $(S, \mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S))$. Besitzt $(S, \mathcal{O}_S)$ die Eigenschaft* (**B**), *so auch $(X, \mathcal{O}_X)$.*

Beweis der letzten Behauptung. Da die Behauptung lokaler Natur ist, genügt es, folgendes zu zeigen: Sei $s \in S$, U eine Umgebung von s, die zu $\mathfrak{F}(S)$ gehört, V eine weitere in U enthaltene Umgebung, die ebenfalls zu $\mathfrak{F}(S)$ gehört, so daß die Einschränkungsabbildung

$$\mathcal{O}_S(U) \to \mathcal{O}_S(V)$$

ein (B)-Homomorphismus ist und $P(0, \rho) = P$, $P(0, \tilde{\rho}) = \tilde{P}$ Polyzylinder der Dimension n mit

$$\tilde{\rho} < \rho \qquad (\text{d.h. } \tilde{\rho}_i < \rho_i;\ i = 1, \ldots, n).$$

Dann ist die Abbildung

$$\mathcal{O}_S(U) \hat{\otimes} \mathcal{O}_P(P) \to \mathcal{O}_S(V) \hat{\otimes} \mathcal{O}_P(\tilde{P})$$

ein (B)-Homomorphismus.

Wir stellen diese Ringe als Potenzreihenringe in den Variablen z dar (1.10.(2)).

Wähle q mit $0 < q < 1$ und $\tilde{\rho} < q \cdot \rho$. Sei M eine beschränkte Menge in $\mathcal{O}_S(U) \hat{\otimes} \mathcal{O}_P(P)$. Für jede stetige Halbnorm $p(_)$ auf $\mathcal{O}_S(U)$ gibt es dann eine Konstante C_p, so daß für jedes Element

$$h(z) = \sum_{\nu \geqq 0} a_\nu (z/\rho)^\nu \qquad \text{aus } M$$

gilt:

$$p_q(h(z)) = \sum_{\nu \geqq 0} p(a_\nu)\, q^{|\nu|} \leqq C_p.$$

Nach [15], 1.5.8 gibt es dann in $\mathcal{O}_S(U)$ eine beschränkte absolut konvexe abgeschlossene Menge N mit

$$\sum_{\nu \geqq 0} \|a_\nu\|_N\, q^{|\nu|} = \sum_{\nu \geqq 0} \|a_\nu\, q^{|\nu|}\|_N \leqq 1$$

für alle Elemente

$$h(z)=\sum_{\nu\geqq 0} a_\nu(z/\rho)^\nu$$

aus

$$M\subseteq \mathcal{O}_S(U)\hat{\otimes}\mathcal{O}_P(P).$$

Nach Voraussetzung gibt es dann in $\mathcal{O}_S(V)$ eine (B)-Menge $\tilde{N}$, die das Bild von N in $\mathcal{O}_S(V)$ enthält.

$$\tilde{M}=\{\sum_{\nu\geqq 0} b_\nu(z/\tilde{\rho})^\nu;\ b_\nu\in\mathcal{O}_S(V),\ \sum_\nu \|b_\nu\|_{\tilde{N}}\leqq 1\}$$

ist eine (B)-Menge.

Sie enthält das Bild von M in $\mathcal{O}_S(V)\hat{\otimes}\mathcal{O}_p(P)$: Sei

$$h(z)=\sum_{\nu\geqq 0} a_\nu(z/\rho)^\nu$$

Element aus M. Wir bezeichnen mit $\tilde{a}_\nu$ das Bild von a_ν in $\mathcal{O}_S(V)$; dann ist

$$\sum_{\nu\geqq 0}\tilde{a}_\nu(\tilde{\rho}/\rho)^\nu(z/\tilde{\rho})^\nu$$

das Bild von $h(z)$ in $\mathcal{O}_S(V)\hat{\otimes}\mathcal{O}_P(P)$)

$$\sum_{\nu\geqq 0}\|\tilde{a}_\nu(\tilde{\rho}/\rho)^\nu\|_{\tilde{N}}=\sum_{\nu\geqq 0}\|\tilde{a}_\nu\|_{\tilde{N}}(\tilde{\rho}/\rho)^\nu\leqq\sum_{\nu\geqq 0}\|a_\nu\|_N q^{|\nu|}\leqq 1.$$

Satz 1.15. *Gegeben sei ein Morphismus*

$$(g,\psi):\ (S,\mathcal{O}_S)\to(T,\mathcal{O}_T)$$

von F-(B)-Räumen; bei der Strukturabbildung werde $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_T)$ *in* $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S)$, *damit* $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_T)\to\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)$ *abgebildet. Sei*

$$(f,\varphi):\ (S,\mathcal{O}_S)\to(T\times\mathbb{C}^n,\mathcal{O}_{T\times\mathbb{C}^n})$$

ein Morphismus über $(T,\mathcal{O}_T)$. *Dann wird* $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_{T\times\mathbb{C}^n})$ *in* $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S)$, *damit* $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_{T\times\mathbb{C}^n})$ *in* $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)$ *abgebildet.* α_i *sei das Bild der Variablen* z_i *bei der induzierten Abbildung*

$$\mathcal{O}_{T\times\mathbb{C}^n}(T\times\mathbb{C}^n)\to\mathcal{O}_S(S).$$

Dann liegt α_i *in* $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)(S)$.

Die Zuordnung

$$(f,\varphi)\mapsto(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

stiftet eine Bijektion zwischen der Menge $\mathrm{Hom}_T(S,T\times\mathbb{C}^n)$ *der Morphismen* $S\to T\times\mathbb{C}^n$ *über* T *auf*

$$\underbrace{\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)(S)\times\cdots\times\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)(S)}_{n\text{-mal}}.$$

Beweis. Wir konstruieren zu einem gegebenen n-Tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von Elementen $\alpha_i \in \mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)(S)$ einen T-Morphismus

$$(f, \varphi)\colon (S, \mathcal{O}_S) \to (T \times \mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{T \times \mathbb{C}^n}).$$

Wie in 1.8.b bezeichne $\tilde{\alpha}_i(s)$ die Restklasse des Keimes α_{is} im Restklassenkörper $\mathbb{C}$ von $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)_s$.

Die Abbildung

$$f_i\colon S \to \mathbb{C}$$
$$s \mapsto \tilde{\alpha}_i(s)$$

ist nach 1.8.b stetig; damit ist auch

$$f\colon S \to T \times \mathbb{C}^n$$
$$s \mapsto (g(s), f_1(s), \ldots, f_n(s))$$

stetig.

Es soll dazu eine Garbenabbildung

$$\varphi\colon \mathcal{O}_T \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \to \mathcal{O}_S$$

konstruiert werden.

Sei $P = P(a, \rho)$ ein Polyzylinder in $\mathbb{C}^n$, $V \in \mathfrak{F}(T)$, U eine offene Teilmenge von S aus $\mathfrak{F}(S)$, deren Bild bei f in $V \times P$ liegt. Wir wollen einen stetigen Homomorphismus

$$\varphi_{U,V,P}\colon \mathcal{O}_T \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(V \times P) \to \mathcal{O}_S(U)$$

konstruieren.

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_T \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(V \times P) &= \mathcal{O}_T(V) \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(P)\\ &= \Big\{ \sum_{\nu \geqq 0} c_\nu ((z-a)/\rho)^\nu;\ c_\nu \in A = \mathcal{O}_S(U)\\ &\qquad \sum_{\nu \geqq 0} p(c_\nu)\, q^{|\nu|} < \infty \ \text{ für } 0 < q < 1\\ &\qquad \text{und jede stetige Halbnorm } p \text{ auf } A \Big\}.\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\tilde{\alpha}_i(s) \in P(a, \rho)$, d.h.

$$\left|(\tilde{\alpha}_i(s) - a_i)\, \rho_i^{-1}\right| < 1 \underset{s \in U}{\forall}.$$

Dann gibt es aber zu $s \in U$ eine reelle Zahl q_s mit $0 < q_s < 1$ mit

$$\left|(\tilde{\alpha}_i(s) - a_i)\, \rho_i^{-1}\, q_s^{-1}\right| < 1.$$

Nach Satz 1.6.c gibt es damit zu jedem $s \in U$ eine in U enthaltene Umgebung, U_s, so daß

$$(\alpha_i - a_i)\, \rho_i^{-1}\, q_s^{-1} \mid U_s$$

topologisch nilpotent ist.

Sei $p(_)$ eine stetige Halbnorm auf $\mathcal{O}_S(U_s)$. Dann gibt es eine Konstante C_p, so daß

$$p([\alpha_i - a_i]^j \mid U_s)\, \rho_i^{-j} q_s^{-j} \leqq C_p$$

bzw.

$$p(([\alpha_i - a_i]\, \rho_i^{-1})^j \mid U_s) \leqq q_s^j\, C_p$$

ist. Da $\mathcal{O}_S$ eine Garbe von topologischen Vektorräumen ist, trägt $\mathcal{O}_S(U)$ die durch alle Abbildungen $\mathcal{O}_S(U) \to \mathcal{O}_S(U_s)\, s \in U$ induzierte Topologie.

Es gibt deshalb zu *jeder stetigen Halbnorm* p auf $\mathcal{O}_S(U)$ eine Konstante K_p und eine Konstante τ_p mit $0 < \tau_p < 1$, so daß gilt

$$p(((\alpha_i - a_i)\, \rho_i^{-1})^j \mid U) \leqq \tau_p^j\, K_p \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Zu jeder stetigen Halbnorm p auf $\mathcal{O}_S(U)$ gibt es eine stetige Halbnorm p' auf $\mathcal{O}_S(U)$ mit

$$p(X_0 \ldots X_r) \leqq p'(X_0) \ldots p'(X_r)$$
$$X_0, \ldots, X_r \in \mathcal{O}_S(U) \qquad r \leqq n.$$

Daraus erhält man schließlich:

$$p(c_\nu((\alpha - a)\, \rho^{-1})^\nu \mid U) = p\left(c_{\nu_1 \ldots \nu_n} \left(\frac{\alpha_1 - a_1}{\rho_1}\right)^{\nu_1} \ldots \left(\frac{\alpha_n - a_n}{\rho_n}\right)^{\nu_n} \middle| U\right) \leqq p'(c_\nu)\, \tau_{p'}^{|\nu|}\, K_{p'}.$$

Aus dieser Abschätzung erhält man, daß folgende Abbildung wohldefiniert und stetig ist

$$\varphi_{U,V,P}\colon \mathcal{O}_T \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(V \times P) \to \mathcal{O}_S(U)$$
$$\sum_{\nu \geqq 0} b_\nu\, [(z - a)/\rho]^\nu \to \sum_{\nu \geqq 0} \psi(b_\nu)\, [(\alpha - a)/\rho]^\nu \mid U.$$

Die Abbildungen $\varphi_{U,V,P}$ sind miteinander verträglich und definieren die gesuchte Garbenabbildung

$$\mathcal{O}_T \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \to \mathcal{O}_S$$

über T.

Folgerung 1.16. *(Kartesische Produkte glatter analytischer Räume.)* *$(S, \mathcal{O}_S)$ sei F-(B)-geringt,*

$$(X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S) \quad \textit{und} \quad (Y, \mathcal{O}_Y) \to (S, \mathcal{O}_S)$$

glatte analytische Räume über $(S, \mathcal{O}_S)$.

Dann gibt es einen glatten analytischen Raum

$$(X, \mathcal{O}_X) \underset{S}{\times} (Y, \mathcal{O}_Y) = (X \underset{S}{\times} Y, \mathcal{O}_{X \underset{S}{\times} Y}) \quad \text{über } (S, \mathcal{O}_S)$$

und Morphismen $(X \underset{S}{\times} Y, \mathcal{O}_{X \underset{S}{\times} Y}) \to (X, \mathcal{O}_X), (X \underset{S}{\times} Y, \mathcal{O}_{X \underset{S}{\times} Y}) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ *über* S, *so daß für alle F-(B)-geringten Räume* $(T, \mathcal{O}_T)$ *über* $(S, \mathcal{O}_S)$, *für die* $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S)$ *bei der Strukturabbildung in* $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_T)$ *abgebildet wird, die natürliche Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_S(T, X \underset{S}{\times} Y) \to \mathrm{Hom}_S(T, X) \times \mathrm{Hom}_S(T, Y)$$

bijektiv ist. Der unterliegende topologische Raum dieses Produktes ist das kartesische Produkt der unterliegenden topologischen Räume von X *und* Y *über* S.

Spezialfall. Z_1, Z_2 *seien komplexe Mannigfaltigkeiten. Dann ist*

$$\begin{aligned}(S \times Z_1, \mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_{Z_1}) &\underset{S}{\times} (S \times Z_2, \mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_{Z_2}) \\ &= (S \times (Z_1 \times Z_2), \mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_{Z_1 \times Z_2}).\end{aligned}$$

Später werden wir folgenden Satz über die Topologie der Halme eines analytischen Raumes benötigen.

Satz 1.17. *$f: (X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S)$ sei ein glatter analytischer Raum über dem F-geringten Raum $(S, \mathcal{O}_S)$. a sei ein Punkt aus X, s sein Bildpunkt in S. $\mathcal{O}_{S,s}$ sei separiert, s besitze einen abzählbaren Umgebungsfilter. Dann ist auch der Halm $\mathcal{O}_{X,a}$ separiert (s. Definition* 1.2).

Folgerung 1.18. *$f: (X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S)$ sei ein glatter analytischer Raum über dem F-geringten Raum $(S, \mathcal{O}_S)$, K eine Teilmenge von X mit*

$$\mathcal{O}_X(K) = \varinjlim \mathcal{O}_X(U) \qquad U \text{ Umgebung von } K.$$

Das ist z.B. für jede kompakte Teilmenge K richtig, wenn X separiert ist. Für jeden Punkt $a \in K$ sei $\mathcal{O}_{S, f(a)}$ separiert, und $f(a)$ besitze einen abzählbaren Umgebungsfilter. Dann ist $\mathcal{O}_X(K)$ separiert.

Beweis der Folgerung. Die stetigen linearen Abbildungen

$$\mathcal{O}_X(K) \to \mathcal{O}_{X,a} \qquad a \in K$$

trennen die Elemente von $\mathcal{O}_X(K)$.

Beweis des Satzes. Da die Behauptung des Satzes lokaler Natur ist, können wir annehmen, daß

$$X = S \times P(0, \rho)$$

und

$$a = (s, 0)$$

ist.

Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebungsbasis

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \cdots$$

von s mit

$$U_i \in \mathfrak{H}(S) \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Wir bezeichnen mit φ_i die natürliche Abbildung

$$\mathcal{O}_S(U_i) \to \mathcal{O}_{S,s} = \varinjlim_i \mathcal{O}_S(U_j).$$

Es ist:

$$\mathcal{O}_{S \times P(0,\rho),(s,0)} = \lim_{\substack{i \to \infty \\ \tilde{\rho} \leqq \rho, \tilde{\rho} \to 0}} \mathcal{O}_{S \times P(0,\rho)}(U_i \times P(0, \tilde{\rho})).$$

Sei $v = (v_1, \ldots, v_n) \geqq 0$ ein n-Tupel ganzer Zahlen, $i = 1, 2, \ldots, \tilde{\rho} \leqq \rho$.

Wir konstruieren eine stetige lineare Abbildung

$$\psi^v_{i\tilde{\rho}} \colon \mathcal{O}_{S \times P(\alpha,\rho)}(U_i \times P(0, \tilde{\rho})) \to \mathcal{O}_{S,s}.$$

Sei

$$h(z) = \sum_{\mu \geqq 0} a_\mu (z/\tilde{\rho})^\mu$$

ein Element aus $\mathcal{O}_{S \times P(0,\rho)}(U_i \times P(0, \tilde{\rho}))$

$$a_\mu \in \mathcal{O}_S(U_i) \ldots \qquad (1.10(2)).$$

Dann ist

$$\psi^v_{i\tilde{\rho}}(h(z)) = \varphi_i(a_v \tilde{\rho}^{-v}).$$

Bei festgehaltenem v bilden die Abbildungen $\psi^v_{i\tilde{\rho}}$ ein induktives System stetiger linearer Abbildungen, definieren also eine stetige lineare Abbildung

$$\psi^v \colon \mathcal{O}_{S \times P(0,\rho),(s,0)} \to \mathcal{O}_{S,s}.$$

Behauptung. Die Abbildungen ψ^v trennen die Elemente aus

$$\mathcal{O}_{S \times P(0,\rho),(s,0)}.$$

Sei

$$\alpha \in \mathcal{O}_{S \times P(0,\rho),(s,0)}$$

und

$$\psi^v(\alpha) = 0 \qquad \text{für alle } v.$$

α wird dann repräsentiert durch ein Element

$$h(z)=\sum_{\nu\geqq 0} a_\nu (z/\tilde{\rho})^\nu$$

aus

$$\mathcal{O}_{S\times P(0,\tilde{\rho})}(U_{i_0}\times P(0,\tilde{\rho})).$$

Es ist dann

$$\varphi_{i_0}(a_\nu \tilde{\rho}^{-\nu})=0 \qquad \text{für alle } \nu,$$

also

$$\varphi_{i_0}(a_\nu)=0 \qquad \text{für alle } \nu.$$

Nach (4.7.a) gibt es dann ein $i_1\geqq i_0$, so daß

$$a_\nu | U_{i_1}=0 \qquad \text{ist für alle } \nu.$$

Dann verschwindet aber die Einschränkung von $h(z)$ auf $U_{i_1}\times P(0,\tilde{\rho})$. Also verschwindet auch α.

Wir benötigen noch einige Resultate über die *homologische* Dimension *lokal kompakter* Räume.

Siehe dazu auch [18] und [5], Kap. II, § 4.

Definition 1.19. $(S, \mathcal{O}_S)$ sei ein geringter Raum, der unterliegende topologische Raum lokal kompakt und parakompakt. Wir nennen topologische Dimension $\dim\mathrm{top}(S,\mathcal{O}_S)=\mathcal{O}_S\text{-}\dim\mathrm{top}(S)$ die kleinste Zahl $r(=0,1,2,\ldots,\infty)$, so daß jeder $\mathcal{O}_S$-Modul $\mathcal{G}$ eine Auflösung

$$0\to\mathcal{G}\to\mathcal{F}_0\to\mathcal{F}_1\to\cdots\to\mathcal{F}_r\to 0$$

der Länge r durch weiche Garben (faisceaux mous [5]) $\mathcal{F}_\nu$ besitzt. Wir sagen: $(S,\mathcal{O}_S)$ hat endliche topologische Dimension, wenn $\dim\mathrm{top}\,(S,\mathcal{O}_S)<\infty$ ist. $(S,\mathcal{O}_S)$ hat lokal endliche Dimension, wenn jeder Punkt $s\in S$ eine Umgebung $U_s\in\mathfrak{R}(S)$ besitzt, so daß $\dim\mathrm{top}(U_s,\mathcal{O}_S|U_s)<\infty$ ist.

Ist $\mathcal{O}_S$ die konstante Garbe Z, so schreibt man auch $\dim\mathrm{top}\,S=\dim\mathrm{top}(S,\mathcal{O}_S)$.

Bemerkung 1.20. 1) *Es genügt, nur Auflösungen durch $\mathcal{O}_S$-Moduln zuzulassen.*

2) $\dim\mathrm{top}(S,\mathcal{O}_S)\leqq r\Leftrightarrow H^\nu(S,\mathcal{G})=0$ *für* $\nu\geqq r+1$ *und jeden* $\mathcal{O}_S$*-Modul* $\mathcal{G}$.

3) $\dim\mathrm{top}(S,\mathcal{O}_S)\leqq r\Leftrightarrow$ *zu jedem Punkt* $s\in S$ *gibt es eine Umgebung* U_s, *so daß* $\dim\mathrm{top}\,(U_s,\mathcal{O}_S|U_s)\leqq r$ *ist.*

4) $\dim\mathrm{top}\,(S,\mathcal{O}_S)\leqq r$; *$U$ sei lokalabgeschlossene parakompakte Teilmenge von S. Dann ist* $\dim\mathrm{top}(U,\mathcal{O}_S|U)\leqq r$.

5) $f\colon (X,\mathcal{O}_X)\to(S,\mathcal{O}_S)$ *sei ein Morphismus geringter Räume. Die unterliegenden topologischen Räume seien lokal kompakt und parakompakt. Dann gilt:*

$$\dim\mathrm{top}\,(X,\mathcal{O}_X)\leqq\dim\mathrm{top}(S,\mathcal{O}_S)+\sup_{s\in S}\dim\mathrm{top}\left(f^{-1}(s),\mathcal{O}_X|f^{-1}(s)\right).$$

Beispiel. *Wenn $\mathcal{O}_S$ selbst weiche Garbe, damit feine Garbe ist, so gilt* $\dim\mathrm{top}(S, \mathcal{O}_S)=0$.

Da im R^n jede Garbe eine weiche Auflösung von einer Länge kleiner oder gleich n besitzt ([5]) erhält man

Satz 1.21. *Gegeben sei ein analytischer Raum*

$$f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S)$$

über einem F-geringten Raum $(S, \mathcal{O}_S)$. K sei eine kompakte Teilmenge von X, Y eine komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension n. Dann gilt

a) *S sei lokal kompakt* $\Rightarrow \dim\mathrm{top}(S\times Y, \mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_Y) \leqq 2n + \dim\mathrm{top}(S, \mathcal{O}_S)$.

b) *Wenn $(S, \mathcal{O}_S)$ lokal endliche topologische Dimension hat, so auch $(X, \mathcal{O}_X)$.*

c) $$\dim\mathrm{top}(K, \mathcal{O}_X | K) \leqq \dim\mathrm{top}\big(f(K), \mathcal{O}_S | f(K)\big) + \sup_{s\in f(K)} \dim\mathrm{top}\big(K\cap f^{-1}(s), \mathcal{O}_X | K\cap f^{-1}(s)\big).$$

Ist $\dim\mathrm{top}\big(f(K), \mathcal{O}_S | f(K)\big)$ *endlich, so auch* $\dim\mathrm{top}(K, \mathcal{O}_X | K)$.

Bemerkung. *Man kann zeigen, daß $\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_Y$ flach über $\mathcal{O}_Y$ ist.*

Mit Hilfe der Dolbeault-Auflösung von $\mathcal{O}_X$ ([2]) und mit Hilfe des Satzes von der Flachheit der Garbe der C^∞-Funktionen über der Garbe $\mathcal{O}_Y$ der holomorphen Funktionen auf Y folgt:

$$\dim\mathrm{top}(\{s\}\times Y, \mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_Y | \{s\}\times Y) \leqq n.$$

§ 2. Pseudokohärente und relativ pseudokohärente Komplexe von Garben auf relativ analytischen Räumen über einem Fréchet-geringten Raum

Definition 2.1. $(S, \mathcal{O}_S) = S$ sei ein geringter Raum.

a) $f^\bullet\colon \mathcal{M}^\bullet \to \mathcal{N}^\bullet$ sei ein Homomorphismus von Komplexen von $\mathcal{O}_S$-Moduln. $f^\bullet$ heißt *n-Quasiisomorphismus*, wenn die induzierten Abbildungen

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{M}^\bullet) \to \mathcal{H}^i(\mathcal{N}^\bullet)$$

Isomorphismen sind für $i>n$ und wenn $\mathcal{H}^n(\mathcal{M}^\bullet) \to \mathcal{H}^n(\mathcal{N}^\bullet)$ surjektiv ist.

$f^\bullet$ heißt *Quasiisomorphismus*, wenn $\mathcal{H}^i(\mathcal{M}^\bullet) \to \mathcal{H}^i(\mathcal{N}^\bullet)$ für alle i Isomorphismus ist.

Äquivalente Definitionen. Sei $C(f^\bullet)$ *der Abbildungskegel von* $f^\bullet$ ([8]; I, 2). $f^\bullet$ ist n-Quasiisomorphismus genau wenn $\mathcal{H}^i\big(C^\bullet(f^\bullet)\big)=0$ für $i\geqq n$ ist.

b) Ein Komplex $\mathscr{K}^\bullet$ von Garben auf $(S, \mathcal{O}_S)$ heißt nach oben beschränkt mit der Schranke r, wenn $\mathscr{K}^i = 0$ für $i > r$ ist.

c) Ein Komplex $\mathscr{K}^\bullet$ von $\mathcal{O}_S$-Moduln heißt *n-pseudokohärent*, wenn es zu jedem Punkt $s \in S$ eine Umgebung U, einen nach oben beschränkten Komplex $\mathscr{F}^\bullet$ von freien endlichen $\mathcal{O}_U$-Moduln und einen n-Quasiisomorphismus

$$\mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{K}^\bullet | U$$

gibt. $\mathscr{K}^\bullet$ heißt *pseudokohärent*, wenn $\mathscr{K}^\bullet$ n-pseudokohärent für alle ganzen n ist.

Lemma 2.2. *$\mathscr{K}^\bullet$ sei ein n-pseudokohärenter Komplex von $\mathcal{O}_S$-Moduln auf dem geringten Raum $(S, \mathcal{O}_S)$, Y eine kompakte Teilmenge von S; ferner sei ein Homomorphismus*

$$f^\bullet : \mathscr{M}^\bullet \to \mathscr{K}^\bullet$$

eines weiteren n-pseudokohärenten Komplexes von $\mathcal{O}_S$ Moduln in $\mathscr{K}^\bullet$ gegeben. $f^\bullet | Y$ sei ein n-Quasiisomorphismus. Dann gibt es eine Umgebung U von Y, so daß auch $f^\bullet | U$ noch n-Quasiisomorphismus ist.

Lemma 2.3. *$(S, \mathcal{O}_S)$ sei ein geringter Raum, $\mathfrak{S}$ eine Basis von offenen Mengen für die Topologie von S, $\mathscr{K}^\bullet$ sei ein Komplex von Garbendaten von $\mathcal{O}_S$-Moduln auf $\mathfrak{S}$, $\tilde{\mathscr{K}}^\bullet$ der assoziierte Komplex von $\mathcal{O}_S$-Moduln. Gegeben sei ein n-Quasiisomorphismus $M^\bullet \to \mathscr{K}^\bullet(S)$ eines nach oben beschränkten Komplexes $M^\bullet$ von endlichen freien $\mathcal{O}_S(S)$-Moduln in den Komplex $\mathscr{K}^\bullet(S)$ von $\mathcal{O}_S(S)$-Moduln* (§ 4, 4.1).

Für alle Y aus $\mathfrak{S}$ sei die natürliche Abbildung

$$\mathcal{O}_S(Y) \underset{\mathcal{O}_S(S)}{\otimes} M^\bullet \to \mathscr{K}^\bullet(Y)$$

ein n-Quasiisomorphismus. Dann ist $\tilde{\mathscr{K}}^\bullet$ n-pseudokohärent.

Lemma 2.4. *S sei kompakt, $(S, \mathcal{O}_S)$ ein geringter Raum der topologischen Dimension Null* (§ 1, 1). *Genau dann ist ein Komplex $\mathscr{M}^\bullet$ von $\mathcal{O}_S$-Moduln n-pseudokohärent, wenn der Schnittkomplex $\mathscr{M}^\bullet(S)$ über dem Ring $\mathcal{O}_S(S)$ n-pseudokohärent ist.*

Satz 2.5. *$(S, \mathcal{O}_S)$ sei ein geringter Raum; S sei separiert und jeder Punkt von S besitze eine abzählbare Umgebungsbasis. $\mathscr{M}^\bullet$ sei ein Komplex von $\mathcal{O}_S$-Moduln, n eine ganze Zahl. Für jede kompakte Teilmenge Y mit höchstens einem Häufungspunkt — d.h. Y ist Vereinigung einer konvergenten Folge mit ihrem Grenzwert — sei $\mathscr{M}^\bullet(Y)$ ein n-pseudokohärenter Komplex von $\mathcal{O}_S(Y)$-Moduln.*

Dann ist $\mathscr{M}^\bullet$ pseudokohärent.

Beweis. Aus dem vorhergehenden Lemma folgt, daß für die Y der angegebenen Art $\mathscr{M}^\bullet | Y$ n-pseudokohärent ist.

Sei s ein Punkt von S. $\mathscr{M}^\bullet|\{s\}$ ist n-pseudokohärent; also gibt es eine Umgebung U, einen nach oben beschränkten Komplex $\mathscr{F}^\bullet$ von endlichen freien $\mathcal{O}_U$-Moduln und einen Komplexhomomorphismus $\mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{M}^\bullet|U$, dessen Einschränkung $\mathscr{F}^\bullet|\{s\} \to \mathscr{M}^\bullet|\{s\}$ n-Quasiisomorphismus ist.

Behauptung. Es gibt eine kleinere Umgebung V von s, so daß

$$\mathscr{F}^\bullet|V \to \mathscr{M}^\bullet|V$$

n-Quasiisomorphismus wird.

Angenommen, das wäre nicht der Fall; dann gäbe es eine gegen s konvergierende Folge $s_1, s_2, \ldots$ von Punkten aus U, so daß

$$\mathscr{F}^\bullet|\{s_i\} \to \mathscr{M}^\bullet|\{s_i\}$$

kein n-Quasiisomorphismus ist. Sei $Y=\{s, s_1, s_2, \ldots\}$.

Nach Voraussetzung ist $\mathscr{M}^\bullet|Y$ n-pseudokohärent. Also gibt es nach Lemma 2.2 eine Umgebung V von s in U, so daß

$$\mathscr{F}^\bullet|Y\cap V \to \mathscr{M}^\bullet|Y\cap V$$

n-Quasiisomorphismus, damit

$$\mathscr{F}^\bullet|\{s_i\} \to \mathscr{M}^\bullet|\{s_i\}$$

n-Quasiisomorphismus ist für alle $i>r$. Das ist ein Widerspruch!

Sei jetzt wieder $S=(S, \mathcal{O}_S)$ wie in § 1 ein *Fréchet-geringter Raum mit der Eigenschaft* (**B**) (1.3).

Lemma 2.6. *Gegeben sei ein Morphismus $f: S \to S\times\mathbb{C}$ Fréchet-geringter Räume, $p: S\times\mathbb{C} \to S$ sei die natürliche Projektion und $p\circ f=\mathrm{Id}$. f ist also ein Schnitt von $S\times\mathbb{C} \to S$. Dann ist $f_*(\mathcal{O}_S)$ pseudokohärent auf $(S\times\mathbb{C}, \mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_\mathbb{C})$.*

Beweis. α sei das Bild der Variablen z in $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_S)(S)$. Dann ist $f(s)=\tilde{\alpha}(s)$ (§1, 1.15), $\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_\mathbb{C}$ ist $\mathcal{O}_S$-Algebra. Man zeigt: $f_*(\mathcal{O}_S)$ ist kanonisch isomorph zum Kokern der Multiplikationsabbildung mit $z-\alpha$:

$$\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_\mathbb{C} \to \mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_\mathbb{C};$$

d.h. $f_*(\mathcal{O}_S)$ ist quasiisomorph zu einem endlichen Komplex aus endlichen freien $\mathcal{O}_S\hat{\otimes}\mathcal{O}_\mathbb{C}$-Moduln.

Sei $X \to S$ ein glatter analytischer Raum über S, $f: S \to X$ ein Schnitt. Durch Lokalisierung und mehrmalige Anwendung von Lemma 2.6 ergibt sich $f_*(\mathcal{O}_S)$ *ist pseudokohärent auf X.*

Wie im algebraischen Falle folgert man daraus leicht ([17]):

Satz 2.7. *$X \to S$ sei ein glatter analytischer Raum über S, $f\colon S \to X$ ein Schnitt. Ein Komplex $\mathscr{M}^\bullet$ von $\mathcal{O}_S$-Moduln ist genau dann n-pseudokohärent, wenn $f_*(\mathscr{M}^\bullet)$ n-pseudokohärenter Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln ist.*

Definition 2.8. Ein Morphismus $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ Fréchet-geringter Räume heißt eine *abgeschlossene Einbettung*, wenn X homöomorph auf einen abgeschlossenen topologischen Unterraum von Y abgebildet wird, wenn $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_Y)$ in $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_X)$ abgebildet wird und wenn die induzierte Garbenabbildung

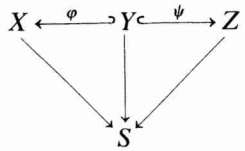
$$f_*(\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_X)) \leftarrow \mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_Y)$$

surjektiv ist.

Definition 2.9. Gegeben sei ein Morphismus $f\colon X \to S$ Fréchet-geringter Räume. $X \to S$ heißt *analytischer Raum* über S, wenn es zu jedem Punkt x von X eine Umgebung U von x, einen glatten analytischen Raum $W \to S$ und eine abgeschlossene Einbettung $U \hookrightarrow W$ über S gibt.

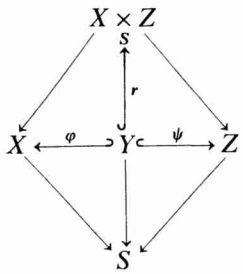
Bemerkung. *Man kann immer annehmen, daß $W = V \times P$ das Produkt einer Umgebung V von $f(s)$ mit einem Polyzylinder P ist. Ist $X \to S$ ein analytischer Raum über S, so wird immer $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_S)$ in $\mathfrak{Z}(\mathcal{O}_X)$ abgebildet!*

Lemma 2.10. *Gegeben sei ein kommutatives Diagramm von Morphismen Fréchet-geringter Räume über einem F-(B)-geringten Raum S*



X, Z seien glatte analytische Räume über S, φ und ψ abgeschlossene Einbettungen. $\mathscr{M}^\bullet$ sei ein Komplex von $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Genau dann ist $\varphi_*(\mathscr{M}^\bullet)$ n-pseudokohärent, wenn $\psi_*(\mathscr{M}^\bullet)$ n-pseudokohärent ist (s. [17]; SGA III).

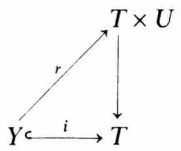
Beweis. Man ergänzt das Diagramm auf natürliche Weise zu:



(siehe 1.16)

Da r auch abgeschlossene Einbettung und $X \underset{S}{\times} Z$ glatter analytischer Raum über X und Z ist, genügt es folgendes zu zeigen:

Gegeben sei ein kommutatives Diagramm



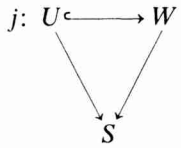
U sei offen in $\mathbb{C}^n$; i sei eine Einbettung. $\mathcal{M}^\bullet$ sei Komplex von $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Dann gilt:

$$r_*(\mathcal{M}^\bullet) \text{ ist } n\text{-pseudokohärent} \Leftrightarrow i_*(\mathcal{M}^\bullet) \text{ ist } n\text{-pseudokohärent}.$$

Das Problem ist lokaler Natur. Sei $y \in Y$. Wegen der Surjektivität von $\mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_T)_{i(y)} \to \mathfrak{Z}^0(\mathcal{O}_Y)_y$ kann man nach Übergang zu geeigneten Umgebungen von y bzw. $i(y)$ bzw. $r(y)$ annehmen (Satz 1.15), daß es einen Schnitt $\varphi\colon T \to T \times U$ gibt, so daß $\varphi \circ i = r$ ist. Wende Satz 2.7 an.

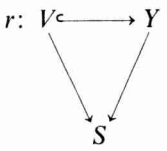
Man kann jetzt definieren:

Definition 2.11. $(S, \mathcal{O}_S)$ sei F-(B)-geringt. Sei $X \to S$ ein analytischer Raum über S, $\mathcal{M}^\bullet$ ein Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln. $\mathcal{M}^\bullet$ heißt *relativ (bez. S) n-pseudokohärent* bzw. relativ pseudokohärent, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt und eine abgeschlossene Einbettung über S



von U in einen glatten analytischen Raum W, so daß $j_*(\mathcal{M}^\bullet|U)$ n-pseudokohärent bzw. pseudokohärent ist.

Bemerkung. *Ist dann*



eine beliebige abgeschlossene Einbettung von einer offenen Teilmenge V in einen glatten analytischen Raum Y über S, so ist $r_*(\mathcal{M}^\bullet|V)$ n-pseudokohärent bzw. pseudokohärent.

§ 3. Steinsche Teilmengen eines Fréchet-geringten Raumes; das Cartansche Verheftungslemma

Wir übernehmen die Bezeichnung von § 1.

$\mathfrak{F}(S)$ sei wieder die Familie derjenigen offenen Teilmengen U eines Fréchet-geringten Raumes $S=(S, \mathcal{O}_S)$, für die $\mathcal{O}_S(U)$ Fréchet-Raum ist, $\mathfrak{K}(S)$ die Familie der im unendlichen abzählbaren lokalkompakten Teilmengen.

Axiom ($\mathfrak{St}$). *$(S, \mathcal{O}_S)$ sei ein lokal kompakter Fréchet-geringter Raum. Es gibt eine Familie $\mathfrak{St}(S)$ von offenen Mengen, die zu $\mathfrak{K}(S)$ gehören mit folgenden Eigenschaften*

1) *$\mathfrak{St}(S)$ ist eine Basis der Topologie von S.*

2) *$U, V \in \mathfrak{St}(S) \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{St}(S)$.*

3) *$U \in \mathfrak{St}(S) \Rightarrow \mathcal{O}_S|U$ ist azyklisch d.h.: $H^i(U, \mathcal{O}_S)=0$ für $i \geqq 1$.*

Beispiele. 1) *$(X, \mathcal{O}_X)$ sei ein komplexer Raum. Dann erfüllt die Familie $\mathfrak{St}(X)$ aller offenen Steinschen, im unendlichen abzählbaren Teilmengen alle Forderungen.*

2) *$(S, \mathcal{O}_S)$ besitze eine weiche Strukturgarbe, sei z.B. eine r-mal stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit ($0 \leqq r \leqq \infty$). Dann kann man $\mathfrak{St}(S)=\mathfrak{K}(S)$ setzen.*

Satz 3.1. *$S=(S, \mathcal{O}_S)$ sei ein Fréchet-geringter Raum, $X=(X, \mathcal{O}_X)$ eine im unendlichen abzählbare Steinsche Mannigfaltigkeit, Q ein Steinsches Kompaktum in X (d.h. Q ist Durchschnitt der Steinschen offenen Umgebungen).*

a) *S sei separiert, K eine lokal kompakte Teilmenge, so daß die topologische Dimension von*

$$(K, \mathcal{O}_S|K) \qquad (\S\,1,\ 1.19)$$

verschwindet (z.B. eine kompakte Teilmenge mit höchstens einem Häufungspunkt). Dann ist

$$\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}|K \times Q$$

azyklisch.

b) *S sei lokal kompakt und erfülle Axiom ($\mathfrak{St}$). Dann ist $\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_X|U \times X$ azyklisch für jedes U aus $\mathfrak{St}(S)$.*

Folgerung 3.2. *$S=(S, \mathcal{O}_S)$ genüge dem Axiom ($\mathfrak{St}$), $X=(X, \mathcal{O}_X)$ sei eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann erfüllt $S \times X$ das Axiom ($\mathfrak{St}$).*

Folgerung 3.3. *$(S, \mathcal{O}_S)$ genüge lokal dem Axiom ($\mathfrak{St}$), $X \to S$ sei ein glatter analytischer Raum über S. Dann erfüllt auch X lokal das Axiom ($\mathfrak{St}$).*

Beweis. Den Beweis von b) findet man in [9a]. Wir wollen den Beweis von a) durchführen. Er beruht auf folgender Eigenschaft nuklearer Räume:

3.4. *Gegeben sei eine kurze exakte Folge von F-Räumen:*

$$0 \to F_1 \to F_2 \to F_3 \to 0$$

und ein weiterer F-Raum V. Entweder V oder F_1 sei nuklear. Dann ist auch die Folge

$$0 \to F_1 \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} V \to F_2 \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} V \to F_3 \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} V \to 0$$

exakt.

a) Zunächst sei $K = \{s\}$ ein Punkt.

Sei U offene Umgebung von s, $U \in \mathfrak{F}(S)$. $\tilde{Q}$ sei eine Steinsche offene Umgebung von Q, $(V_1, \ldots, V_r) = \mathfrak{V}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von $\tilde{Q}$. Dann ist der orientierte Čech-Komplex $\check{\mathfrak{C}}^\bullet(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$ azyklisch über

$$\mathcal{O}_X(Q) = H^0(\tilde{Q}, \mathcal{O}_X).$$

Alle auftretenden Vektorräume sind nuklear. Also ist

$$\check{\mathfrak{C}}^\bullet(U \times \mathfrak{V}, \mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_S(U) \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \check{\mathfrak{C}}^\bullet(\mathfrak{V}, \mathcal{O}_X)$$

azyklisch über

$$\mathcal{O}_S(U) \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\tilde{Q}) = \mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(U \times \tilde{Q})$$

$$0 = \varinjlim_{\tilde{Q}, \mathfrak{V}, U} H^i\big(\check{\mathfrak{C}}^\bullet(U \times \mathfrak{V}, \mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_X)\big) = H^i(\{s\} \times Q, \mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_X) \quad \text{für } i \geqq 1.$$

Der allgemeine Fall wird darauf zurückgeführt: Betrachte die Projektion

$$f\colon K \times Q \to K$$

$$s \in K\colon \mathscr{R}^i f_*(\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_X | K \times Q)_s = H^i\big(f^{-1}(s), \mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_X\big) = 0 \quad i \geqq 1.$$

Daraus folgt: $i \geqq 1\ \mathscr{R}^i f_*(\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_X | K \times Q) = 0$; also ist

$$H^i(K \times Q, \mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_X) = H^i\big(K, f_*(\mathcal{O}_S \hat{\otimes} \mathcal{O}_X | K \times Q)\big) = 0 \quad \text{für } i \geqq 1,$$

weil die topologische Dimension von K Null ist!

Wir identifizieren im folgenden den n-dimensionalen komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem $2n$-dimensionalen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^{2n}$, etwa mittels der Abbildung

$$\underset{(z_1, \ldots, z_n)}{\mathbb{C}^n} \to \underset{(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)}{\mathbb{R}^{2n}}.$$

Dabei ist $\operatorname{Re} z$ der Realteil der komplexen Zahl z, $\operatorname{Im} z$ der Imaginärteil.

Eine Teilmenge K von $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ heißt (kompakter) *Quader*, wenn es reelle Zahlen

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}, \quad \beta_1, \ldots, \beta_{2n}$$

gibt mit

$$\alpha_i \leqq \beta_i \quad \text{für } 1 \leqq i \leqq 2n$$

und so daß gilt:

$$K=\{(t_1,\ldots,t_{2n})\in R^{2n};\ \alpha_i\leqq t_i\leqq\beta_i,\ i=1,\ldots,2n\}.$$

Die Anzahl derjenigen i für die $\alpha_i<\beta_i$ ist heißt Dimension dim K von K.

Sei i_0 ein Index zwischen 1 und $2n$, $\gamma\leqq\gamma'$ reelle Zahlen zwischen α_{i_0} und β_{i_0}. Dann sind

$$K'=\{(t_1,\ldots,t_{2n})\in\mathbb{R}^{2n};\ \alpha_i\leqq t_i\leqq\beta_i \text{ für } i\neq i_0,\ \alpha_{i_0}\leqq t_{i_0}\leqq\gamma'\}$$
$$K''=\{(t_1,\ldots,t_{2n})\in\mathbb{R}^{2n};\ \alpha_i\leqq t_i\leqq\beta_i \text{ für } i\neq i_0,\ \gamma\leqq t_{i_0}\leqq\beta_i\}$$
$$K'''=K'\cap K''=\{(t_1,\ldots,t_{2n})\in\mathbb{R}^{2n};\ \alpha_i\leqq t_i\leqq\beta_i \text{ für } i\neq i_0,\ \gamma\leqq t_{i_0}\leqq\gamma'\}$$

ebenfalls Quader. Es ist

$$K'\cup K''=K.$$

Für einen Ring A bezeichne $M_n(A)$ den Ring der Matrizen von n Reihen und n Spalten mit den Elementen in A, $Gl(n, A)$ die Gruppe der in $M_n(A)$ invertierbaren Matrizen.

Lemma 3.5 *(Cartan). A sei eine Banach-Algebra. Für irgendeine offene Teilmenge U aus* $\mathbb{C}^n$ *sei*

$$O(U, A)=A\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U).$$

Gegeben sei eine Umgebung U von $K'''=K'\cap K''$ *und ein Element* $a\in Gl(m, O(U, A))$.

Dann gibt es Umgebungen V bzw. W von K' bzw. K'' und Elemente $b\in Gl(n, O(V, A))$, $c\in Gl(m, O(W, A))$ *mit*

$$\bar{b}^{-1}\bar{c}=\bar{a}.$$

Dabei sind $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ *die Bilder von a, b, c in* $Gl(m, O(U\cap V\cap W, A))$.

Der Beweis erfolgt wörtlich wie im klassischen Falle $A=\mathbb{C}$; s. [7], Chap. VI, Sec. E oder [2], 6.2.

Lemma 3.6. *$(S, \mathcal{O}_S)$ sei F-(B)-geringter Raum. T sei eine kompakte Teilmenge von S, K''' ein Quader im* $\mathbb{C}^n$, *U eine Umgebung von K''', V eine Umgebung von* $T, f_1, \ldots, f_r$ *seien endlich viele Elemente aus* $\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}(V\times U)$. *Dann gibt es eine Umgebung* $V'\subseteq V$ *von T, die zu* $\mathfrak{F}(S)$ *gehört, eine Steinsche Umgebung* $U'\subseteq U$ *von K''', eine (B)-Menge* (1.1) *M in* $\mathcal{O}_S(V')$, *so daß die Bilder von* $f_1, \ldots, f_r$ *in* $\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}(V'\times U')$ *bereits in*

$$A\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U')\left(\subseteq\mathcal{O}_S(V')\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U')=\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}(V'\times U')\right)$$

enthalten sind.

Dabei ist A die Banach-Algebra

$$A=\{x\in\mathcal{O}_S(V');\ \|x\|_M<\infty\}\qquad(1.1).$$

Beweis. Nach dem kleinen Riemannschen Abbildungssatz besitzt der Quader K''' beliebig kleine Umgebungen, die konform äquivalent sind zu einem Polyzylinder $P=P(0,\rho)$ der Dimension n. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $f_1,\ldots,f_r$ Elemente aus $\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}}(V\times P)$, $K'''=Q$ irgendeine kompakte Teilmenge von P, $V\in\mathfrak{F}(S)$

$$f_i=\sum_{\nu=(\nu_1\ldots\nu_n)\geqq 0} a_\nu^{(i)}(z/\rho)^\nu \qquad i=1,\ldots,r.$$

Wähle reelle Zahlen q_1, q_2 mit

$$0<q_2<q_1<1$$
$$K'''\subseteq P(0,q_2\rho).$$

Da die Potenzreihen f_i in $\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}(V\times P)$ liegen, ist die Menge

$$N=\{a_\nu^{(i)}\cdot q_1^{|\nu|};\ i=1,\ldots,r,\ \nu\geqq 0\}\cup\{1\}$$

beschränkt in $\mathcal{O}_S(V)$ (s. § 1).

Wegen Axiom (B) gibt es eine Umgebung $V'\in\mathfrak{F}(S)$ von T, die in V enthalten ist und eine (B)-Menge M in $\mathcal{O}_S(V')$, so daß die Bilder $\bar{a}^{(i)}q_1^{|\nu|}$ der Elemente $a^{(i)}q_1^{|\nu|}$ in $\mathcal{O}_S(V')$ bereits in M liegen.

Die Bilder $\bar{f}_i$ der Potenzreihen f_i in

$$\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}\big(V'\times P(0,q_2\rho)\big)$$

sind

$$\bar{f}_i=\sum_{\nu\geqq 0}(\bar{a}^{(i)}q_1^{|\nu|})\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{|\nu|}\left(\frac{z}{q_2\rho}\right)^\nu.$$

Es gilt

$$\sum_{\nu\geqq 0}\left\|(\bar{a}^{(i)}q_1^{|\nu|})\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{|\nu|}\right\|_M\leqq\sum_{\nu\geqq 0}\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{|\nu|}<\infty.$$

Also liegen die Potenzreihen $\bar{f}_i$ bereits in

$$A\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(P(0,q_2\rho))$$
$$A=\{x\in\mathcal{O}_S(V');\ \|x\|_M<\infty\}.$$

Gegeben sei wieder ein Quader K im $\mathbb{C}^n$ und eine Zerlegung in Teilquader K' und K'' wie in Lemma 3.5

$$K=K'\cup K'',\qquad K'''=K'\cap K''.$$

Ferner sei $(S,\mathcal{O}_S)$ ein Fréchet-geringter Raum, der die Eigenschaft (B) besitze.

T sei ein Kompaktum in S, V eine offene Umgebung von T, U eine offene Umgebung von K''' und a ein Element aus $Gl(m, \mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}(V\times U))$. Wir wenden Lemma 6 auf die Matrizenkoeffizienten von a und a^{-1} an und erhalten:

Es gibt Umgebungen $V'\in\mathfrak{V}(S)$ und U' von T bzw. K''' mit

$$V'\subseteq V, \quad U'\subseteq U,$$

außerdem eine (B)-Menge

$$M \quad \text{in} \quad \mathcal{O}_S(V'),$$

so daß das Bild a' von a in

$$Gl(m, \mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}(V'\times U'))$$

bereits in $Gl(m, A\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U'))$ enthalten ist

$$A=\{x\in\mathcal{O}_S(V'); \|x\|_M<\infty\}.$$

Wir wenden auf a' in $Gl(m, A\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U'))$ Lemma 3.5 an:

Es gibt Umgebungen W' von K' und W'' von K'', ferner Elemente

$$b\in Gl(m, A\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W'))$$
$$c\in Gl(m, A\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(W''))$$

mit $\bar{a}'=\bar{b}^{-1}\bar{c}$. Dabei sind $\bar{a}', \bar{b}, \bar{c}$ die Bilder von a', b, c in

$$Gl(m, A\hat{\otimes}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U'\cap W'\cap W'')).$$

Für die kanonischen Bilder von a bzw. b in

$$Gl(m, \mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}(V'\times W'))$$

bzw.

$$Gl(m, \mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}(V'\times W''))$$

gilt dann erst recht: Der Quotient der Einschränkungen auf $U'\cap W'\cap W''$ ist die Einschränkung von a' auf $U'\cap W'\cap W''$. Dies Ergebnis kann auch anders interpretiert werden:

Lemma 3.7. *Der Fréchet-geringte Raum $(S, \mathcal{O}_S)$ besitze die Eigenschaft (B). $K=K'\cup K''$ sei eine Zerlegung des Quaders $K\subseteq\mathbb{C}^n$ in Teilquader K', K'' wie in Lemma 3.5, T sei kompakte Teilmenge von S. $\mathcal{F}$ sei ein in einer Umgebung von $T\times K$ definierter $\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}$-Modul. Die Einschränkung von $\mathcal{F}$ auf eine Umgebung von $T\times K'$ sei endlich frei, ebenso die Einschränkung auf eine Umgebung von $T\times K''$.*

Dann gibt es eine Umgebung $V\times U$ von $T\times K$, so daß $\mathcal{F}|V\times U$ endlicher freier $\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n}$-Modul ist.

Durch mehrmalige Anwendung von Lemma 7 erhält man in bekannter Weise (s. z.B. [2], 6).

Sei s ein Punkt aus S, V eine Umgebung von s, K ein Quader in $\mathbb{C}^n$, U eine Umgebung von K.

1) F sei ein lokal freier und lokal endlich erzeugter $\mathcal{O}_{V\times U}$-Modul. Dann gibt es eine in $V\times U$ enthaltene Umgebung $V'\times U'$ von $\{s\}\times K$, so daß $\mathcal{F}|V'\times U'$ endlich frei ist.

2) $\mathcal{F}$ sei ein *r-pseudokohärenter* $\mathcal{O}_{V\times U}$-Modul $(0<r<\infty)$ (s. § 2, 2.1.c). Dann gibt es eine in $V\times U$ enthaltene Umgebung $V'\times U'$ von $\{s\}\times K$ und eine exakte Folge

$$\mathcal{F}_r\to\mathcal{F}_{r-1}\to\cdots\to\mathcal{F}_0\to F|V'\times U'\to 0.$$

Dabei sind die Garben $\mathcal{F}_i$ endliche freie $\mathcal{O}_{V'\times U'}$-Moduln.

Da nach dem kleinen Riemannschen Abbildungssatz jeder abgeschlossene Polyzylinder im $\mathbb{C}^n$ beliebig kleine Umgebungen besitzt, die konform äquivalent sind zu Quadern, folgt:

Theorem 3.8. *$(S,\mathcal{O}_S)$ sei ein Fréchet-geringter Raum, der die Eigenschaft* **(B)** *besitzt, s ein Punkt aus S. P sei ein Polyzylinder in $\mathbb{C}^n$, $\bar{P}$ sein Abschluß. $\mathcal{F}$ sei ein $\mathcal{O}_{V\times U}$-Modul auf einer Umgebung $V\times U$ von $\{s\}\times\bar{P}$. Dann gilt:*

a) *$\mathcal{F}$ sei lokal frei und endlich. Dann gibt es eine Umgebung V' von s, die in V enthalten ist, so daß $\mathcal{F}|V'\times P$ sogar endlicher freier $\mathcal{O}_{V'\times P}$-Modul ist.*

b) *$\mathcal{F}$ sei r-pseudokohärent* (2.1). *Dann gibt es eine in V enthaltene Umgebung V' von s und eine exakte Folge*

$$\mathcal{F}_r\to\mathcal{F}_{r-1}\to\cdots\to\mathcal{F}_0\to\mathcal{F}|V'\times P\to 0.$$

Dabei sind die Garben $\mathcal{F}_i$ endliche freie $\mathcal{O}_{V'\times P}$-Moduln.

Aus Satz 3.1 *und Theorem* 3.8, *Teil* b) *erhält man:*

Theorem 3.9. *Der lokalkompakte Fréchet-geringte Raum $(S,\mathcal{O}_S)$ genüge dem Axiom* **(B)**. *V sei eine offene Teilmenge, $\mathcal{O}_V$ die Einschränkung von $\mathcal{O}_S$ auf V. Die topologische Dimension* (1.19) *von $(V,\mathcal{O}_V)$ sei endlich; $(V,\mathcal{O}_V)$ genüge dem Axiom* (Ŝt). *s sei Punkt von V, P ein Polyzylinder in $\mathbb{C}^n$, $\bar{P}$ sein Abschluß, U eine Umgebung von $\bar{P}$. $\mathcal{F}$ sei pseudokohärenter $\mathcal{O}_{V\times U}$-Modul. Dann gibt es eine in $\hat{S}t(V)$ enthaltene Umgebung W von s, so daß für jede Steinsche offene Teilmenge Y von P und jedes Element W' aus $\hat{S}t(V)$, das in W enthalten ist, gilt:*

$$\mathcal{F}|W'\times Y$$

ist azyklisch, d.h.:

$$H^\nu(W'\times Y,\mathcal{F})=0\quad\text{für }\nu\geqq 1.$$

Beweis. Nach 1.21 ist die topologische Dimension auch von $(V \times \mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{V \times \mathbb{C}^n})$ endlich, sagen wir kleiner oder gleich d. $d < \infty$. Sei $r \geqq d$.

Aus Theorem 3.8 b) folgt:

Es gibt in V eine Umgebung W, die in $\mathfrak{St}(V)$ gewählt werden kann und eine exakte Folge

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F}_r \to \mathcal{F}_{r-1} \to \cdots \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}|W \times P \to 0. \qquad (*)$$

Dabei sind die Garben $\mathcal{F}_i$ endlich frei. Sei Y Steinsche offene Teilmenge von P, W' ein in W enthaltenes Element aus $\mathfrak{St}(V)$.

$$0 \to \mathcal{G}|W' \times Y \to \mathcal{F}_r|W' \times Y \to \cdots \to \mathcal{F}_0|W' \times Y \to F|W' \times Y \to 0$$

ist exakt. Die Garben $\mathcal{F}_i|W \times Y$ sind nach Satz 3.1 azyklisch. Also gilt:

$$\nu \geqq 1\colon\ H^\nu(W' \times Y, \mathcal{F}) = H^{\nu+r+1}(W' \times Y, \mathcal{G}) = 0.$$

Wir wollen nun die zusätzliche Voraussetzung machen, daß $\mathcal{F}$ eine *Garbe von Fréchet-Moduln* ist: d.h. $\mathcal{F}$ ist eine Garbe von topologischen Vektorräumen; für jedes T aus $\mathfrak{R}(V \times U)$ ist $\mathcal{F}(T)$ Fréchet-Modul über der Fréchet-Algebra $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}(T)$ (§ 1, 1.2). Alle Garben die in der Folge $(*)$ auftreten sind in natürlicher Weise Garben von Fréchet-Moduln, da es die Strukturgarbe $\mathcal{O}_{S \times \mathbb{C}^n}$ selbst ist. Mit den Bezeichnungen des Beweises gilt:

$$t = r - d$$

$$\mathcal{F}_t(W' \times Y) \to \cdots \to \mathcal{F}_0(W' \times Y) \to \mathcal{F}(W' \times Y) \to 0$$

ist exakt; $\mathcal{F}_\nu(W' \times Y) = \mathcal{O}_S(W') \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_S(W)} \mathcal{F}_\nu(W \times Y)$ (§ 1, 1.10).

Man erhält daraus:

Folgerung 3.10. *Voraussetzungen und Bezeichnungen seien die gleichen wie in Theorem 3.9. $\mathcal{F}$ sei Garbe von Fréchet-Moduln. Dann gibt es zu $t > 0$ eine Umgebung W von s, die in $\mathfrak{St}(V)$ enthalten ist mit:*

Sei $W' \in \mathfrak{St}(V)$ $W' \subseteq W$ $Y \subseteq P$ Y Steinsche offene Menge in $\mathbb{C}^n$. Dann ist $\mathcal{O}_S(W') \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_S(W)} \mathcal{F}(W \times Y) = \mathcal{F}(W' \times Y)$.

Es gibt endliche freie $\mathcal{O}_{W \times P}$-Moduln $\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_t$ und eine exakte Folge

$$\mathcal{F}_t(W \times Y) \to \cdots \to \mathcal{F}_0(W \times Y) \to \mathcal{F}(W \times Y) \to 0$$

von Fréchet-Moduln, so daß auch

$$\mathcal{O}_S(W') \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_S(W)} \mathcal{F}_t(W \times Y) \to \cdots \to \mathcal{O}_S(W') \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_S(W)} \mathcal{F}_0(W \times Y) \to \mathcal{O}_S(W') \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_S(W)} \mathcal{F}(W \times Y) \to 0$$

exakt ist (*s. auch* [13], § 1: $\widehat{\mathrm{Tor}}^i_{\mathcal{O}_S(W)}(\mathcal{O}_S(W'), \mathcal{F}(W \times Y)) = 0$ $1 \leqq i < t$).

§4. Endlichkeitssätze für Komplexe über einer topologischen Algebra

Wir stellen zunächst einige Begriffe über Komplexe zusammen (s. [8], Chap. I; SGA [17]).

Definition 4.1. a)

$$X^\bullet: \quad \cdots \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} \cdots$$

sei ein Komplex von Moduln über einem Ring A. Man erklärt den verschobenen Komplex $X^\bullet[1]=Y^\bullet$:

$$Y^n = X^{n+1} \qquad \text{für alle } n.$$

Das Differential $d_Y^\bullet$: $d_Y^n = -d_X^{n+1}$

$$\cdots \to Y^n \xrightarrow{-d_X^{n+1}} Y^{n+1} \to \cdots.$$

Durch Iteration erklärt man $X^\bullet[r]$.

b) Ein Komplex $X^\bullet$ von A-Moduln heißt nach oben beschränkt mit der Schranke r, wenn $X^i=0$ für $i>r$ ist. Eine Familie $(X_\nu^\bullet)$ von Komplexen heißt gleichmäßig nach oben beschränkt mit der Schranke r, wenn alle Komplexe $X_\nu^\bullet$ nach oben mit der Schranke r beschränkt sind.

c) $f^\bullet: X^\bullet \to Y^\bullet$ sei ein Homomorphismus von Komplexen über dem Ring A. Man definiert den

Abbildungskegel $C^\bullet(f)$.

$$C^n(f) = X^{n+1} \oplus Y^n$$
$$C^\bullet(f): \quad \cdots \to X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \to \cdots$$
$$(x, y) \mapsto \left(-d_X^{n+1}(x),\ f^{n+1}(x) + d_Y^n(y)\right).$$

Bemerkung. *Man hat eine natürliche exakte Folge*

$$\cdots \to H^n(X^\bullet) \xrightarrow{H^n(f^\bullet)} H^n(Y^\bullet) \to H^n\left(C^\bullet(f)\right) \to H^{n+1}(X^\bullet) \to \cdots.$$

d) *Ein Homomorphismus*

$$f^\bullet: X^\bullet \to Y^\bullet$$

von Komplexen heißt n-Quasiisomorphismus, wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1) $H^r\left(C^\bullet(f)\right)=0 \quad r \geqq n$

2) $H^r(X^\bullet) \to H^r(Y^\bullet)$ *ist Isomorphismus für* $r>n$, *Epimorphismus für* $r=n$.

$f^\bullet$ *heißt Quasiisomorphismus, wenn* $H^r(X^\bullet) \to H^r(Y^\bullet)$ *Isomorphismus für alle r ist.*

Definition 4.2. Ein Komplex $X^\bullet$ von A-Moduln heißt

a) *n-pseudokohärent*, wenn es einen nach oben beschränkten Komplex $F^\bullet$ von endlichen freien A-Moduln F^r gibt und einen n-Quasiisomorphismus

$$F^\bullet \to X^\bullet;$$

b) *pseudokohärent*, wenn er n-pseudokohärent ist für jedes n.

Alle im folgenden betrachteten Algebren sind unitäre topologische lokal konvexe Algebren über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen; Homomorphismen solcher Algebren sind stetige Algebrahomomorphismen. Ferner sind alle Moduln über solchen Algebren lokal konvexe topologische Moduln, Homomorphismen solcher Moduln immer stetige Homomorphismen.

Alle auftretenden topologischen Vektorräume sind separiert.

Eine Algebra A bzw. ein Modul M heißt F-Algebra bzw. F-Modul, wenn A bzw. M als topologischer Vektorraum Fréchet-Raum ist.

Definition 4.3. Ein F-Modul M über einer F-Algebra A heißt *streng frei*, wenn er isomorph ist zum A-Modul

$$l^1_I\{A\} = A \mathbin{\hat{\otimes}}_{\mathbb{C}} l^1_I\{\mathbb{C}\}$$

aller absolut summierbaren Familien von Elementen aus A über einer höchstens abzählbaren Indexmenge I ([15], Kap. I, 1.4.1).

Es gibt dann eine beschränkte Familie $(e_i)_{i\in I}$ von Elementen aus M, so daß sich jedes Element x aus M eindeutig schreiben läßt als

$$x = \sum_{i\in I} a_i e_i$$

für jede stetige Halbnorm p auf A ist

$$p(x) \underset{\text{def}}{=} \sum_{i\in I} p(a_i) < \infty.$$

Diese so auf M erklärten Halbnormen definieren die Topologie von M.

Schreibweise.

$$M = \hat{\bigoplus_{i\in I}} A\, e_i.$$

Die Familie $(e_i)_{i\in I}$ heißt auch Basis von M.

In [13] (Definition 2.3) wurde der Begriff eines *nuklearen Homomorphismus* $f\colon M \to N$ eines F-Moduls M über einer F-Algebra A in einen zweiten F-Modul N erklärt:

4.3. *f heißt nuklearer Homomorphismus, wenn es eine beschränkte Folge $n_1, n_2, \ldots$ von Elementen aus N, eine Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von komplexen Zahlen mit $\sum_i |\lambda_i| < \infty$ und eine Folge $h_1, h_2, \ldots$ von gleichgradig stetigen Homomorphismen*

$$h_i\colon M \to A$$

gibt, so daß für alle x aus M gilt:

$$f(x)=\sum_i \lambda_i \cdot h_i(x) \cdot n_i .$$

Schreibweise.

$$f=\sum_i \lambda_i n_i \otimes h_i .$$

Gleichgradig stetig bedeutet: Zu jeder stetigen Halbnorm q auf A gibt es eine stetige Halbnorm p auf M mit

$$\sup_{x\in V,\, p(x)\leqq 1} q(h_i(x)) = \|h_i\|_{pq} \leqq 1 \quad \text{für alle } i.$$

In [13] (§3) bzw. in [11] werden Pseudokohärenzsätze für Komplexe von F-Moduln über einer F-Algebra bewiesen.

Sie sollen hier noch einmal in einer etwas anderen Weise – ohne Nuklearitätsvoraussetzungen über die auftretenden Moduln – formuliert werden:

Theorem 4.4. *Zu jeder ganzen Zahl t gibt es eine natürliche Zahl $N(t)$ mit folgenden Eigenschaften. Gegeben seien (B)-Homomorphismen von Fréchet-Algebren* (§1, 1.1)

$$A=A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_s .$$

Über A seien durch die Schranke m gleichmäßig nach oben beschränkte Komplexe von F-Moduln $K_1^\bullet, \ldots, K_r^\bullet$ und nukleare n-Quasiisomorphismen

$$K_1^\bullet \to K_2^\bullet \to \cdots \to K_r^\bullet$$

gegeben. Auch die A_j-Homomorphismen

$$A_j \mathbin{\hat{\otimes}}_A K_1^\bullet \to \cdots \to A_j \mathbin{\hat{\otimes}}_A K_r^\bullet$$

seien noch n-Quasiisomorphismen für $j=1, \ldots, s$. Für eine weitere F-Algebra B über A_r seien auch die Abbildungen

$$B \mathbin{\hat{\otimes}}_A K_1^\bullet \to \cdots \to B \mathbin{\hat{\otimes}}_A K_r^\bullet$$

noch n-Quasiisomorphismen.

Dann gilt: a) *Sei*

$$H^i(K_r^\bullet)=0 \quad \text{für } i>n \quad \text{und} \quad r\geqq N(m-n).$$

Der zusammengesetzte Homomorphismus von Komplexen

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_1^n & \longrightarrow & K_1^{n+1} & \longrightarrow & K_1^{n+2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
K_r^{n-1} & \longrightarrow & K_r^n & \longrightarrow & K_r^{n+2} & \longrightarrow & K_r^{n+2} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

ist dann nullhomotop; die Homotopie kann nuklear gewählt werden.

b) *Sei* $r, s \geqq N(m-n)$.

Dann ist $A_s \hat{\otimes}_A K_r^\bullet$ *n-pseudokohärent.*

c) $r, s \geqq N(m-n)$.

Sei $F^\bullet \to A_s \hat{\otimes}_A K_r$ *ein n-Quasiisomorphismus,* $F^\bullet$ *ein nach oben beschränkter Komplex aus lauter endlichen freien* A_s*-Moduln* F^i.

Auch $B \hat{\otimes}_{A_s} F^\bullet \to B \hat{\otimes}_{A_s} (A_s \hat{\otimes}_A K_r)$ *ist n-Quasiisomorphismus.*

Der Beweis ist im wesentlichen in [13] (§ 2, 3) enthalten. Anders als in dieser Arbeit erhält man c) aus a), nicht durch Transversalitätsargumente.

Der Beweisgang ergibt sich auch aus der Verallgemeinerung auf L-F-Moduln, die nun dargestellt werden soll.

Die im folgenden betrachteten *induktiven (gerichteten) Systeme* $(M_i)_{i \in J}$ *von topologischen Vektorräumen bzw. Moduln sollen immer höchstens abzählbar sein;* man kann dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit das Indexsystem I nach eventuellem Übergang zu einem kofinalen Teilsystem durch $\mathbb{N}$, das gerichtete System der natürlichen Zahlen ersetzen. *Der induktive Limes* $\varinjlim_i M_i = M$ *wird immer mit der lokalkonvexen Limestopologie versehen* ([16], V, 2).

Das System heißt *separiert*, wenn M separiert ist.

Definition 4.5. Ein (separierter) topologischer Vektorraum V heißt L-F-Raum, wenn es ein induktives System $(V_i)_{i \in J}$ von F-Räumen V_i gibt, so daß V isomorph als topologischer Vektorraum zu $\varinjlim_i V_i$ ist.

Definition 4.6. Eine Algebra A heißt L-F-Algebra, wenn es ein induktives System $(A_i)_{i \in J}$ von Fréchet-Algebren A_i (und Algebrahomomorphismen) gibt mit

$$A \cong \varinjlim_i A_i.$$

Ein Modul M über einer L-F-Algebra heißt L-F-Modul, wenn es ein induktives System $(A_i)_{i \in J}$ von Fréchet-Algebren A_i und ein induktives System $(M_i)_{i \in J}$ von Fréchet-Moduln M_i über A_i (und Modulhomomorphismen) gibt mit

$$A \cong \varinjlim_i A_i$$

$$M \cong \varinjlim_i M_i.$$

Aus dem Baireschen Kategoriensatz bzw. aus dem Satz von Banach-Schauder (das Bild eines F-Raumes bei einer stetigen nicht surjektiven linearen Abbildung in einen zweiten F-Raum ist mager!) folgt leicht:

Lemma 4.7. *Gegeben sei ein induktives System $(M_i)_{i\in J}$ von F-Räumen, eine stetige lineare Abbildung*

$$\varphi\colon\ M=\varinjlim_i M_i \to N$$

in einen (separierten) Vektorraum N und eine stetige lineare Abbildung

$$\psi\colon\ V\to N$$

eines F-Raumes in N.

Sei $\varphi_i=(M_i\to N)$. Wir betrachten das induktive System

$$(P_i)_{i\in J}$$

von F-Räumen

$$P_i=M_i\underset{N}{\times} V=\{(x,y)\in M_i\times V;\ \varphi_i(x)=\psi(y)\}.$$

Man hat dann natürliche kommutative Diagramme:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \longrightarrow & N \\ \uparrow & & \uparrow \\ P_i & \longrightarrow & V \end{array}$$

Es gilt: a) *φ sei injektiv. Dann gibt es zu jedem Index i einen Index $\bar{i}\geqq i$ mit*

$$\operatorname{Ker}(M_i\to N)=\operatorname{Ker}(M_i\to M_{\bar{i}}).$$

b) *φ sei surjektiv. Dann gibt es einen Index $i_0\in J$, so daß die Abbildung*

$$P_i\to V$$

für $i\geqq i_0$ surjektiv und damit insbesondere offen ist. Ist φ sogar bijektiv, so gibt es zu jedem Index $i\geqq i_0$ einen Index $\bar{i}\geqq i$, so daß

$$\operatorname{Ker}(P_i\to V)=\operatorname{Ker}(P_i\to P_{\bar{i}})$$

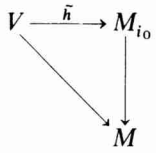
ist; also ist insbesondere V kanonisch isomorph zu $P_i/\operatorname{Ker}(P_i\to P_{\bar{i}})$.

c) *φ sei surjektiv, alle Abbildungen $\varphi_i\colon M_i\to N$ injektiv. Dann gibt es einen Index i_0, so daß für $i\geqq i_0$ die Abbildung $P_i\to V$ ein Isomorphismus ist.*

Lemma 4.8. *Sei (M_i) ein separiertes induktives System von F-Räumen, $M=\varinjlim_i M_i$. $h\colon V\to M$ eine stetige lineare Abbildung eines F-Raumes V in M. Dann gibt es einen Index i_0 und eine stetige lineare Abbildung*

$$\tilde{h}\colon\ V\to M_{i_0},$$

so daß das natürliche Diagramm



kommutativ wird.

Beweis. Nach Lemma 4.7.b) gibt es einen Index i_1 und einen Index $i_0 \geqq i_1$, so daß die Projektion

$$M_{i_1} \underset{M}{\times} V \to V$$

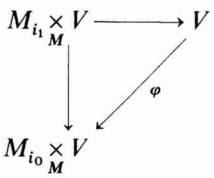
surjektiv ist und

$$\operatorname{Ker}\left(M_{i_1} \underset{M}{\times} V \to V\right) = \operatorname{Ker}\left(M_{i_1} \underset{M}{\times} V \to M_{i_0} \underset{M}{\times} V\right).$$

Es gibt deshalb eine stetige lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ V \to M_{i_0} \underset{M}{\times} V,$$

so daß das natürliche Diagramm



kommutativ wird. Sei $p\colon M_{i_0} \underset{M}{\times} V \to M_{i_0}$ die Projektion auf den Faktor M_{i_0}. Dann hat $\tilde{h} = p \circ \varphi$ alle gewünschten Eigenschaften.

Definition 4.9. Eine Familie $(h_\alpha)_{\alpha \in A}$ von stetigen linearen Abbildungen $h_\alpha\colon M \to N$ eines topologischen Vektorraumes M in einen L-F-Raum N heißt *streng gleichgradig stetig*, wenn es zu jeder stetigen linearen Abbildung

$$V \xrightarrow{\varphi} M$$

eines F-Raumes V in M eine stetige lineare Abbildung

$$W \xrightarrow{\psi} N$$

eines F-Raumes W in N gibt und eine *gleichgradig stetige* Familie $(\tilde{h}_\alpha)_{\alpha \in A}$ von linearen Abbildungen

$$\tilde{h}_\alpha\colon\ V \to W$$

mit $\psi \circ \tilde{h}_\alpha = h_\alpha \circ \varphi$ (s. auch 4.3).

Aus Lemma 4.8 folgt unmittelbar

Lemma 4.10. *Gegeben sei ein separiertes induktives System von F-Räumen* $(N_j)_{j\in J}$, *ein topologischer Vektorraum* M *und eine Familie* $\mathfrak{H}=(h_\alpha)_{\alpha\in A}$ *von stetigen linearen Abbildungen*

$$h_\alpha\colon\ M\to N=\varinjlim_j N_j.$$

a) $\mathfrak{H}$ *ist genau dann streng gleichgradig stetig, wenn es zu jeder stetigen linearen Abbildung* $\varphi\colon V\to M$ *eines F-Raumes* V *in* M *einen Index* j_0 *und eine gleichgradig stetige Familie* $(\tilde h_\alpha)_{\alpha\in A}$ *von linearen Abbildungen*

$$\tilde h_\alpha\colon\ V\to N_{j_0}$$

gibt, so daß die natürlichen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde h_\alpha} & N_{j_0} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{h_\alpha} & N \end{array}$$

kommutativ werden.

b) M *sei ebenfalls induktiver Limes eines separierten induktiven Systems* $(M_i)_{i\in I}$ *von F-Räumen. Dann ist* $\mathfrak{H}$ *genau dann streng gleichgradig stetig, wenn es zu jedem Index* i_0 *einen Index* j_0 *und eine gleichgradig stetige Familie* $(\tilde h_\alpha)_{\alpha\in A}$ *von linearen Abbildungen*

$$\tilde h_\alpha\colon\ M_{i_0}\to N_{j_0}$$

gibt, so daß die natürlichen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_{i_0} & \xrightarrow{\tilde h_\alpha} & N_{j_0} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{h_\alpha} & N \end{array}$$

kommutativ werden.

c) *Gegeben sei eine stetige lineare Abbildung*

$$\varphi\colon\ M'\to M$$

eines topologischen Vektorraumes M' *in* M *und eine stetige lineare Abbildung*

$$\psi\colon\ N\to N'$$

in einen L-F-Raum N'. $\mathfrak{H}$ *sei streng gleichgradig stetig, dann sind die Familien* $(h_\alpha\circ\varphi)_{\alpha\in A}$ *und* $(\psi\circ h_\alpha)_{\alpha\in A}$ *streng gleichgradig stetig.*

Bemerkung 4.11. *Jede endliche Familie $\mathfrak{F}$ von stetigen linearen Abbildungen eines topologischen Vektorraumes M in einen L-F-Raum N ist wegen Lemma* 4.9 *streng gleichgradig stetig.*

Definition 4.12. Gegeben sei ein topologischer Vektorraum M.

a) Eine Folge $x_1, x_2, \ldots$ von Elementen aus M heißt strenge Nullfolge, wenn es eine stetige lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ V \to M$$

eines F-Raumes V in M gibt und eine Nullfolge $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots$ in V mit

$$\varphi(\tilde{x}_i) = x_i.$$

b) Eine Menge $\mathfrak{F}$ von Elementen aus M heißt streng beschränkt, wenn es eine stetige lineare Abbildung

$$\varphi\colon\ V \to M$$

eines F-Raumes V in M gibt und eine beschränkte Menge $\tilde{\mathfrak{F}}$ in V mit

$$\varphi(\tilde{\mathfrak{F}}) = \mathfrak{F}.$$

Bemerkung 4.12. c) *Eine endliche Menge ist immer streng beschränkt, da sie in einem endlichen Unterraum liegt.*

4.12. d) *Das Bild einer strengen Nullfolge bzw. einer streng beschränkten Menge bei einer stetigen linearen Abbildung ist strenge Nullfolge bzw. streng beschränkt.*

4.12. e) *Ist eine L-F-Algebra, M ein L-F-Modul über A, X eine streng beschränkte Menge in A, Y streng beschränkte Menge in M, so ist $X \cdot Y$ streng beschränkt (wegen* 4.13. c).

Satz 4.13. *Gegeben sei ein separiertes induktives System $(M_i)_{i \in I}$ von F-Räumen und eine stetige surjektive lineare Abbildung*

$$f\colon\ M = \varinjlim_i M_i \to N.$$

$\varphi_i\colon M_i \to M$ sei die natürliche Abbildung von M_i in den Limes M.

$x_1, x_2, \ldots$ sei eine strenge Nullfolge in N, $\mathfrak{F}$ eine streng beschränkte Menge in N.

a) **Liften strenger Nullfolgen.** *Es gibt einen Index i_0 und eine Nullfolge $y_1, y_2, \ldots$ in M_{i_0} mit $f\varphi_{i_0}(y_h) = x_h$ $h = 1, 2, \ldots$. Insbesondere ist $(x_h)_{h=1,2,\ldots}$ Bild einer strengen Nullfolge in M.*

b) *f sei sogar bijektiv. Dann gibt es einen Index i_0 und eine beschränkte Menge $\mathfrak{H}$ in M_{i_0} mit*

$$f\varphi_{i_0}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{F}.$$

Bemerkung 4.13. c) *Insbesondere folgt: Eine Folge* $m_1, m_2, \ldots$ *von Elementen aus* $M = \varinjlim_i M_i$ *bzw. eine Menge* $\mathfrak{F}$ *aus* M *ist strenge Nullfolge bzw. streng beschränkt, wenn es einen Index* i_0 *gibt, so daß* $m_1, m_2, \ldots$ *bzw.* $\mathfrak{F}$ *Bild einer Nullfolge aus* M_{i_0} *bzw. einer beschränkten Menge aus* M_{i_0} *ist.*

Beweis von Satz 4.13.

$$\psi\colon V \to N$$

sei eine stetige lineare Abbildung eines F-Raumes V in N, so daß im Falle a) $x_1, x_2, \ldots$ Bild einer Nullfolge $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots$ aus V, im Falle b) $\mathfrak{F}$ Bild einer beschränkten Menge $\tilde{\mathfrak{F}}$ aus V ist. Nach Lemma 4.7. b) gibt es einen Index $i_0 \in I$, so daß die Projektion

$$p\colon M_{i_0} \underset{N}{\times} V \to V$$

surjektiv und damit offen ist.

a) Da $M_{i_0} \underset{M}{\times} V$ ein F-Raum ist, gibt es in $M_{i_0} \underset{N}{\times} V$ eine Nullfolge $z_1, z_2, \ldots$ mit $p(z_1) = \tilde{x}_1$, $p(z_2) = \tilde{x}_2, \ldots$. Das Bild dieser Nullfolge in M_{i_0} ist die gesuchte Folge.

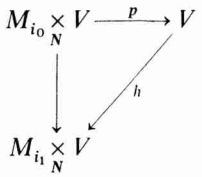
b) In diesem Falle ist f bijektiv; also gibt es nach 4.7. b) einen weiteren Index $i_1 \geqq i_0$, so daß

$$\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}\left(M_{i_0} \underset{N}{\times} V \to M_{i_1} \underset{N}{\times} V\right)$$

ist. Deshalb gibt es eine stetige lineare Abbildung

$$h\colon V \to M_{i_1} \underset{N}{\times} V,$$

so daß das natürliche Diagramm



kommutativ wird.

$$q\colon M_{i_1} \underset{N}{\times} V \to M_{i_1}$$

sei die Projektion auf M_{i_1}. Dann ist $\mathfrak{H} = q(h(\tilde{\mathfrak{F}}))$ die gesuchte Menge.

Definition 4.14 (vgl. 4.3). Gegeben sei eine L-F-Algebra A und ein A-Homomorphismus

$$f\colon M \to N.$$

f heißt nuklearer A-Homomorphismus, wenn es eine höchstens abzählbare Indexmenge I, eine Familie $(n_i)_{i \in I}$ von Elementen aus N, eine Familie

$(h_i)_{i\in I}$ von A-Homomorphismen $M \to A$ und eine Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ von komplexen Zahlen mit folgenden Eigenschaften gibt:

1) $(n_i)_{i\in I}$ ist streng beschränkt.

2) $(h_i)_{i\in I}$ ist streng gleichgradig stetig (als Familie linearer Abbildungen.)

3) $\sum_{i\in I} |\lambda_i| < \infty$.

4) $\forall_{x\in M} f(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i h_i(x) n_i$.

Wir schreiben dann auch

$$f = \sum_{i\in I} \lambda_i n_i \otimes h_i .$$

Bemerkung 4.14. a) *Gegeben sei ein L-F-Modul N über einer L-F-Algebra A, ein weiteres A-Modul M, eine streng beschränkte Familie $(n_i)_{i\in I}$ von Elementen aus N, eine streng gleichgradig stetige Familie $(h_i)_{i\in I}$ von A-Homomorphismen*

$$h_i \colon M \to A$$

und eine Familie $(\lambda_i)_{i\in I}$ von komplexen Zahlen mit

$$\sum_{i\in I} |\lambda_i| < \infty .$$

Sei x ein festes Element aus M. Dann ist die Familie $(h_i(x))_{i\in I}$ streng beschränkt in A. Also ist auch die Familie $(h_i(x) \cdot n_i)_{i\in I}$ streng beschränkt (4.12.e). *Also konvergiert die Reihe*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i h_i(x) n_i$$

in N als stetiges Bild einer konvergenten Reihe aus einem F-Raum. Die nukleare Abbildung

$$f = \sum_{i\in I} \lambda_i n_i \otimes h_i$$

ist also wohl definiert in diesem Fall.

Lemma 4.15. *$f\colon M \to N$ sei ein nuklearer A-Homomorphismus. Dann gibt es eine strenge Nullfolge $n_1, n_2, \ldots$ in N, eine streng gleichgradig stetige Folge $h_1, h_2, \ldots$ von A-Homomorphismen $M \to A$ und eine Folge von komplexen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ mit*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$$

und

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i n_i \otimes h_i .$$

Beweis. Sei

$$f=\sum_{i\in I}\lambda_i n_i\otimes h_i$$

wie in Definition 4.14 dargestellt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß $I=\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ist. Es gibt dann eine Nullfolge $\rho_1, \rho_2, \ldots$ von Null verschiedener komplexer Zahlen, so daß

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(\lambda_i/\rho_i)|<\infty$$

ist.

Dann ist $\tilde{n}_1=\rho_1 n_1, \tilde{n}_2=\rho_2 n_2, \ldots$ eine strenge Nullfolge. Es gilt:

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_i/\rho_i)\tilde{n}_i\otimes h_i.$$

Aus 4.10.c) bzw. 4.12.d) ergeben sich folgende Permanenzeigenschaften:

Lemma 4.16. *Gegeben seien eine L-F-Algebra A und A-Homomorphismen*

$$M\xrightarrow{\varphi}M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{\psi}N,$$

f sei ein nuklearer A-Homomorphismus. Dann sind auch $f\circ\varphi$ *und* $\psi\circ f$ *nukleare A-Homomorphismen.*

Lemma 4.17. *Gegeben sei eine L-F-Algebra A, ein nuklearer A-Homomorphismus*

$$f\colon\ M\to N$$

und ein surjektiver A-Homomorphismus

$$g\colon\ P\to N$$

eines L-F-Moduls P in N.

Dann gibt es einen nuklearen A-Homomorphismus

$$\tilde{f}\colon\ M\to P$$

mit

$$g\circ\tilde{f}=f.$$

Beweis. Wir stellen f wie in Lemma 4.15 dar:

$$f=\sum_{i=1}\lambda_i n_i\otimes h_i.$$

Dabei ist also $n_1, n_2, \ldots$ eine strenge Nullfolge in N. Nach Satz 4.13.a) gibt es dann in P eine strenge Nullfolge $p_1, p_2, \ldots$ mit

$$g(p_i)=n_i \qquad i=1,2,\ldots.$$

Setze

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i p_i\otimes h_i$$

(s. auch 4.14.a).

Gegeben sei eine L-F-Algebra A, A-Homomorphismen

$$M^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} N^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} P^\bullet$$

von Komplexen von A-Moduln und eine ganze Zahl n. Außerdem seien

$$h^i\colon\ N^i\to P^{i-1}\qquad i\geqq n+1$$

A-Homomorphismen mit

$$d^{i-1}\circ h^i+h^{i+1}\circ d^i=g^i\qquad i\geqq n+1. \tag{$*$}$$

Dabei bezeichnet $d^\bullet$ die Differentiation in allen Komplexen.

P^{n-1} sei ein L-F-Modul, $f^n\colon M^n\to N^n$ nuklearer A-Homomorphismus. Es sei

$$H^n(P^\bullet)=0.$$

Sei $Z=\mathrm{Kern}(P^n\to P^{n+1})=\mathrm{Bild}(P^{n-1}\to P^n)$, $Z\overset{j}{\hookrightarrow}P^n$ die Einbettungsabbildung. Wegen $(*)$ ist

$$d^n\circ(g^n-h^{n+1}\circ d^n)=0.$$

Das Bild von $g^n-h^{n+1}\circ d^n$ ist also in Z enthalten. Deshalb gibt es einen A-Homomorphismus

$$k\colon\ N^n\to Z$$

mit

$$j\circ k=g^n-h^{n+1}\circ d^n.$$

$k\circ f^n\colon M^n\to Z$ ist nuklear, $P^{n-1}\to Z$ ein surjektiver Homomorphismus eines L-F-Moduls P^{n-1} in Z.

Aus Lemma 4.17 folgt:

Es gibt einen nuklearen Homomorphismus

$$\tilde{h}^n\colon\ M^n\to P^{n-1}$$

mit

$$d^{n-1}\circ\tilde{h}^n=(g^n-h^{n+1}\circ d^n)\circ f^n.$$

Setze

$$\tilde{h}^i=h^i\circ f^i\qquad\text{für } i\geqq n+1.$$

Dann gilt:

$$d^{i-1}\circ\tilde{h}^i+\tilde{h}^{i+1}\circ d^i=g^i\circ f^i\qquad i\geqq n.$$

Durch Iteration dieser Schlußweise erhält man folgendes Resultat:

Satz 4.18. *A sei eine L-F-Algebra. Gegeben seien s Homomorphismen*

$$M_s^\bullet \xrightarrow{f_s^\bullet} M_{s-1}^\bullet \xrightarrow{f_{s-1}^\bullet} \cdots \to M_0^\bullet$$

von Komplexen von A-Moduln. Diese Komplexe seien gleichmäßig durch die Schranke m nach oben beschränkt (4.1). $M_0^\bullet$ *sei ein Komplex von L-F-Moduln,* $H^i(M_0^\bullet)=0$ *für* $i \geqq n$, f_j^i *nuklear für* $i \geqq n$ *und* $s \geqq j \geqq 1$. *Sei*

$$s \geqq m+1-n.$$

Dann ist der Komplexhomomorphismus

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & M_s^n & \to & M_s^{n+1} & \to & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^n} & & \downarrow{\scriptstyle g^{n+1}} & & \\ \cdots & \to & M_0^{n-1} & \to & M_0^n & \to & M_0^{n+1} \to \cdots \end{array}$$

nullhomotop; die Homotopie kann nuklear gewählt werden. Dabei ist

$$g^\bullet = f_1^\bullet \circ \cdots \circ f_s^\bullet.$$

Definition 4.19. Eine L-F-Algebra A heißt (B)-L-F-Algebra, wenn es ein separiertes induktives System $(A_i)_{i \in I}$ von F-Algebren A_i (und Algebrenhomomorphismen $A_i \to A_{i'}$ für $i' \geqq i$) gibt mit folgenden Eigenschaften

a) $A = \varinjlim_i A_i$.

b) Zu jedem Index i gibt es einen Index $j \geqq i$, so daß der Algebrahomomorphismus

$$A_i \to A_j$$

die Eigenschaft (**B**) hat (§1, 1.1).

Lemma 4.20. *A sei eine* (B)-*L-F-Algebra,*

$$f, g\colon M \rightrightarrows N$$

zwei A-Homomorphismen. M sei L-F-Modul, g surjektiv, f nuklear. Dann ist $N/(g+f)(M)$ *endlicher A-Modul.*

Folgerung 4.21. *A sei eine* (B)-*L-F-Algebra,*

$$f\colon M \to N$$

ein A-Homomorphismus und $g\colon P \to N$ *ein nuklearer A-Homomorphismus. M und P seien L-F-Moduln. Es sei* $f(M)+g(P)=N$. *Dann ist* $N/f(M)$ *ein endlicher A-Modul.*

Beweis von Lemma 4.20. Aus Lemma 4.17 folgt: Es gibt einen nuklearen A-Homomorphismus $\tilde{f}$: $M \to M$ mit

$$g \circ \tilde{f} = f.$$

Also ist $g + f = g \circ (\mathrm{Id} + \tilde{f})$. Es genügt zu zeigen:

$$M/(\mathrm{Id} + \tilde{f})(M)$$

ist ein endlicher A-Modul. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir also annehmen, daß $M = N$ und $g = \mathrm{Id}$ ist. Sei $A = \varinjlim_i A_i$ eine Darstellung von A im Sinne von Definition 4.19. Wir bezeichnen mit φ_i: $A_i \to A$ die zugehörige Abbildung von A_i in den induktiven Limes A. Sei

$$f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu m_\nu \otimes h_\nu$$

wie in Lemma 4.15. Es gibt dann eine stetige lineare Abbildung ψ: $V \to M$ eines F-Raumes V in M und eine Nullfolge $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \ldots$ in V mit $\psi(\tilde{m}_\nu) = m_\nu$ $\nu = 1, 2, \ldots$. Weil die Familie $(h_\nu)_{\nu=1,2,\ldots}$ streng gleichgradig ist, gibt es einen Index i_0 und eine gleichgradig stetige Familie

$$\tilde{h}_\nu\colon\ V \to A_{i_0} \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

von linearen Abbildungen, so daß

$$h_\nu \circ \psi = \varphi_{i_0} \circ \tilde{h}_\nu \qquad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots$$

ist (4.10.a).

Wegen Definition 4.19 kann man den Index so wählen, daß es eine (B)-Menge (§ 1, 1.1) X in A_{i_0} gibt, die alle Elemente $\tilde{h}_\nu(\tilde{m}_\mu) = \alpha_{\nu\mu}$ $\nu, \mu = 1, 2, \ldots$ enthält. Sei

$$B = (A_{i_0})_X = \{a \in A_{i_0};\ \|a\|_X < \infty\}$$

die zugehörige Banach-Algebra,

$$D = \bigoplus_{\nu,\mu=1}^{\infty} B\, e_{\nu\mu}$$

der streng freie B-Modul mit den Basiselementen $e_{\nu\mu}$ (4.3). Wir machen D zu einer Banach-Algebra mit Hilfe der Multiplikation

$$a\, e_{ij} \cdot b\, e_{rk} = b\, \alpha_{jr}\, a\, e_{ik}.$$

D operiert auf M durch:

$$\left(\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}\, e_{ij}\right)(m) = \sum_{i,j=1}^{\infty} h_j(m)\, \varphi_{i_0}(a_{ij})\, m_i. \qquad (*)$$

Diese Reihe konvergiert absolut: Nach Voraussetzung ist nämlich

$$\sum_{i,j} \|a_{ij}\|_X < \infty .$$

Es gibt daher eine Familie $(\lambda_{ij})_{ij=1,2,\ldots}$ von komplexen Zahlen mit

$$\sum_{i,j} |\lambda_{ij}| < \infty$$

und so, daß $a_{ij}/\lambda_{ij} = b_{ij}$ in der in A_{i_0} beschränkten Menge X enthalten ist. Die Familien $(\varphi_{i_0}(b_{ij}))_{i,j}$ und $(m_i)_i$ sind streng beschränkt; also ist auch die Familie $(\varphi_{i_0}(b_{ij})\, m_i)_{i,j}$ in M streng beschränkt (4.12.e). Nach 4.14.a) konvergiert dann

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij}\, h_j(m)\, \varphi_{i_0}(b_{ij})\, m_i = \sum_{i,j} h_j(m)\, \varphi_{i_0}(a_{ij})\, m_i .$$

M ist Modul über der Banach-Algebra D. Zu D adjungiert man ein 1-Element. M ist dann ebenfalls Modul über der Banach-Algebra $E = \mathbb{C} \oplus D$.

Sei

$$\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\, e_{ii} .$$

Da

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, e_{ii} \quad \text{für } r \to \infty$$

in der Banach-Algebra E gegen β konvergiert, gibt es einen Index r, so daß

$$1 + \sum_{i=r+1}^{\infty} \lambda_i\, e_{ii} = \gamma$$

in E *invertierbar* wird. Es gilt:

$$e_{ii}(x) = h_i(x)\, m_i$$

$$\beta(x) = f(x) \quad \text{für } x \text{ aus } M$$

$$1 + \beta = \gamma + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, e_{ii}$$

$$M = \gamma(M) \subseteq (1+\beta)(M) + \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, e_{ii} \right)(M)$$

$$\subseteq (\mathrm{Id} + f)(M) + \sum_{i=1}^{r} A\, m_i .$$

Also ist $M/(\mathrm{Id}+f)M$ endlicher A-Modul.

Folgerung 4.22. *Gegeben seien eine (B)-L-F-Algebra A und nukleare n-Quasiisomorphismen von Komplexen von L-F-Moduln über A:*

$$M^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} P^\bullet \to Q^\bullet_{(s)} \to \cdots \to Q^\bullet_{(1)} \to N^\bullet.$$

Alle Komplexe seien nach oben durch die Schranke m gleichmäßig beschränkt. Es sei $s \geqq m-n$ *und*

$$H^i(N^\bullet)=0 \quad \text{für } i \geqq n+1.$$

Dann ist $H^n(N^\bullet)$ *endlicher A-Modul.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $g^\bullet$ die zusammengesetzte Abbildung

$$P^\bullet \to \cdots \to N^\bullet.$$

Aus Satz 4.18 folgt, daß die Komplexabbildung

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P^{n+1} & \longrightarrow & P^{n+2} & \to & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g^{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle g^{n+2}} & & \\ \cdots \to N^n & \longrightarrow & N^{n+1} & \longrightarrow & N^{n+2} & \to & \cdots \end{array}$$

nullhomotop ist; die zugehörige Homotopie ist gegeben durch

$$h^i\colon\ P^i \to P^{i-1} \qquad i \geqq n+1$$

mit

$$d^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d^i = g^i \qquad i \geqq n+1.$$

Sei

$$Z = \operatorname{Ker}(N^n \to N^{n+1}), \qquad j\colon\ Z \hookrightarrow N^n$$

die zugehörige Einbettung.

Es ist

$$d^n \circ (g^n - h^{n+1} \circ d^n) = 0.$$

Also gibt es einen A-Homomorphismus

$$t\colon\ P^n \to Z$$

mit

$$j \circ t = g^n - h^{n+1} \circ d^n$$

$$t \circ f^n = \varphi\colon\ M^n \to Z$$

ist nuklear, weil f^n nuklear ist. Sei

$$\psi\colon\ N^{n-1} \to Z$$

der A-Homomorphismus mit

$$j \circ \psi = d^{n-1}$$

und

$$Z' = \operatorname{Ker}(M^n \to M^{n+1}).$$

Weil $g^\bullet \circ f^\bullet$ n-Quasiisomorphismus ist, gilt:

$$Z = g^n \circ f^n(Z') + d^{n-1}(N^{n-1}).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\psi(N^{n-1}) + \varphi(M^n) &\supseteq \psi(N^{n-1}) + t \circ f^n(Z') \\ &= d^{n-1}(N^{n-1}) + (g^n - h^{n+1} \circ d^n) \circ f^n(Z') \\ &= d^{n-1}(N^{n-1}) + g^n \circ f^n(Z') = Z.\end{aligned}$$

Aus Folgerung 4.21 ergibt sich daher, daß

$$H^n(N^\bullet) = Z/\psi(N^{n-1})$$

endlicher A-Modul ist.

Das Ergebnis der gerade bewiesenen Folgerung kann folgendermaßen verwendet werden:

Die induzierte Abbildung

$$H^n(M^\bullet) \to H^n(N^\bullet)$$

ist surjektiv. Es gibt daher eine natürliche Zahl r und endlich viele Zyklen $z_1, \ldots, z_r$ in M^n, deren natürliche Bilder in $H^n(N^\bullet)$ diesen Modul über A erzeugen. Man konstruiert dann einen Homomorphismus eines endlichen freien A-Moduls F in M^n:

$$\begin{aligned}F = A \oplus \cdots \oplus A &\to M^n \\ (a_1, \ldots, a_r) &\to a_1 z_1 + \cdots + a_r z_r.\end{aligned}$$

Da die Elemente z_i Zyklen sind, induziert diese Abbildung einen Komplexhomomorphismus

$$F^\bullet \to M^\bullet.$$

Dabei ist $F^\bullet$ der Komplex, der an der Stelle n den Modul F, an den anderen Stellen den Nullmodul hat. Durch Zusammensetzen mit den Komplexhomomorphismen

$$M^\bullet \to P^\bullet, \quad M^\bullet \to Q^\bullet_{(s)}, \ldots, M^\bullet \to N^\bullet$$

erhält man Komplexhomomorphismen

$$F^\bullet \to P^\bullet, \quad F^\bullet \to Q^\bullet_{(s)}, \ldots, F^\bullet \to N^\bullet.$$

Bezeichnet man mit

$$\tilde{M}^\bullet, \ \tilde{P}^\bullet, \ \tilde{Q}^\bullet_{(s)}, \ldots, \tilde{N}^\bullet$$

die Abbildungskegel (4.1) der Abbildungen

$$F^\bullet \to M^\bullet, \quad F^\bullet \to P^\bullet, \ldots,$$

so erhält man eine Folge nuklearer Homomorphismen

$$\tilde{M}^\bullet \to \tilde{P}^\bullet \to \tilde{Q}^\bullet_{(s)} \to \cdots \to \tilde{Q}_{(1)} \to \tilde{N}^\bullet.$$

Nach Konstruktion ist $H^i(\tilde{N}^\bullet)=0$ für $i \geqq n$. Sind die Homomorphismen

$$M^\bullet \to P^\bullet \to Q^\bullet_{(s)} \to \cdots \to N^\bullet$$

sogar $(n-1)$-Quasiisomorphismen, so auch die Homomorphismen

$$\tilde{M}^\bullet \to \tilde{P}^\bullet \to \cdots \to \tilde{N}^\bullet.$$

Durch wiederholte Anwendung der Folgerung 4.22 erhält man

Theorem 4.23. *Zu jeder ganzen Zahl r gibt es eine natürliche Zahl $N(r)$ mit folgenden Eigenschaften: Gegeben sei eine (B)-L-F-Algebra A und eine Kette nuklearer n-Quasiisomorphismen*

$$M^\bullet_{(s)} \to \cdots \to M^\bullet_{(0)} = M^\bullet$$

von Komplexen von L-F-Moduln über A. Die Komplexe seien nach oben durch die Schranke m beschränkt. Es sei

$$s \geqq N(m-n).$$

Dann ist $M^\bullet$ n-pseudokohärent.

§ 5. Der Kohärenzsatz

Wir wiederholen einige Begriffe aus der Theorie der simplizialen Objekte ([2a, 5]).

Sei k eine natürliche Zahl. Wir bezeichnen mit $S|k$ die *Kategorie der simplizialen Typen der Stufe k:* Objekte sind die Mengen

$$\Delta_n = [0, 1, \ldots, n] \qquad 0 \leqq n \leqq k.$$

Die Abbildungen $[\Delta_n, \Delta_m]$ von Δ_n in Δ_m sind die monoton wachsenden Abbildungen.

Beispiele von solchen Abbildungen:

$$\varepsilon^i_n\colon \Delta_n \to \Delta_{n+1} \qquad 0 \leqq i \leqq n+1$$
$$\nu \to \begin{cases} \nu & 0 \leqq \nu \leqq i-1 \\ \nu+1 & i \leqq \nu \leqq n \end{cases}$$
$$\eta^i_n\colon \Delta_n \to \Delta_{n-1} \qquad 0 \leqq i \leqq n-1$$
$$\nu \to \begin{cases} \nu & 0 \leqq \nu \leqq i \\ \nu-1 & i+1 \leqq \nu \leqq n. \end{cases}$$

Ein *simpliziales* (bzw. ein *kosimpliziales*) *Objekt* X_* *von der Stufe* k *in einer Kategorie* $\mathfrak{K}$ ist ein kontravarianter (bzw. kovarianter) Funktor

$$S|k \to \mathfrak{K}$$
$$\Delta_n \mapsto X_n$$
$$\alpha\colon \Delta_m \to \Delta_n \mapsto X_\alpha\colon X_n \to X_m \text{ (bzw. } X_m \to X_n).$$

Die *Gesamtheit aller simplizialen* (bzw. *kosimplizialen Objekte von der Stufe* k *in einer vorgegebenen Kategorie* $\mathfrak{K}$ bildet mit den natürlichen Transformationen als Abbildungen auf *natürliche Weise eine Kategorie.*

Beispiel. Ein *kosimplizialer Modul* M_* *der Stufe* k über einem Ring R ist ein *kosimpliziales Objekt* M_* der Stufe k in der Kategorie der R-Moduln. Die *Kategorie aller kosimplizialen Moduln der Stufe* k über einem Ring R ist eine *abelsche Kategorie.* Man ordnet einem solchen kosimplizialen Modul M_* der Stufe k einen Kokettenkomplex

$$\check{\mathfrak{C}}^\bullet_+(M_*)\colon 0 \to \check{\mathfrak{C}}^0_+(M_*) \to \check{\mathfrak{C}}^1_+(M_*) \to \cdots \to \check{\mathfrak{C}}^k_+(M_*) \to 0$$

zu

$$\check{\mathfrak{C}}^n_+(M_*) = \{x \in M_n;\ M_{\eta_n^i}(x) = 0 \quad 0 \leqq i \leqq n-1\}.$$

Der Korandoperator

$$d^n\colon \check{\mathfrak{C}}^n_+(M_*) \to \check{\mathfrak{C}}^{n+1}_+(M_*)$$

ist gegeben durch:

$$d^n(x) = \sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu M_{\varepsilon_n^\nu}(x).$$
$$M_* \mapsto \check{\mathfrak{C}}^\bullet_+(M_*)$$

ist auf natürliche Weise ein *Funktor.*

Bemerkung 5.1. $\check{\mathfrak{C}}^n_+(M_*)$ *ist auf kanonische Weise direkter Summand von* M_n ([2a], 3.22); *infolgedessen ist der Funktor*

$$M_* \to \check{\mathfrak{C}}^\bullet_+(M_*)$$

exakt.

Ist M_* *ein simpliziales Objekt der Stufe* k *in der Kategorie der topologischen Moduln über einer topologischen Algebra* R, *kurz ein topologischer simplizialer Modul der Stufe* k *über* R, *so ist* $\check{\mathfrak{C}}^\bullet_+(M_*)$ *sogar ein Komplex von topologischen Moduln;* $\check{\mathfrak{C}}^n_+(M_*)$ *ist dann topologischer direkter Summand von* M_n ([2a], 3.22).

Sei $S = (S, \mathcal{O}_S)$ ein Fréchet-geringter Raum. Ein *simplizialer analytischer Raum*

$$X_* \xrightarrow{p_*} S$$

der Stufe k über S ist ein simpliziales Objekt der Stufe k in der Kategorie der analytischen Räume über S. *Dabei sind die Abbildungen*

$$p_n\colon X_n \to S$$

die Strukturabbildungen.

Ist S der Raum, der aus einem Punkt besteht, versehen mit der konstanten Garbe $\mathbb{C}$, so sagt man einfach

X_* *ist ein simplizialer komplexer Raum der Stufe k.*

X_* heißt *glatter simplizialer Raum über S* (bzw. *simpliziale komplexe Mannigfaltigkeit*), wenn alle Räume X_n glatte analytische Räume über S (bzw. komplexe Mannigfaltigkeiten) sind.

Eine simpliziale komplexe Mannigfaltigkeit X heißt *Steinsch*, wenn alle Mannigfaltigkeiten X_n Steinsche Mannigfaltigkeiten sind.

Ein Morphismus

$$f_* X_* \to Y_* \qquad (f_n\colon X_n \to Y_n \ldots)$$

simplizialer analytischer Räume der Stufe k über S heißt *abgeschlossene bzw. offene Einbettung*, wenn alle Abbildungen

$$f_n\colon X_n \to Y_n$$

abgeschlossene bzw. offene Einbettungen sind.

Ist S ein F-geringter Raum, X_* eine simpliziale komplexe Mannigfaltigkeit der Stufe k, so erklärt man auf natürliche Weise den *glatten simplizialen Raum*

$$S \times X_* \to S$$

der Stufe k über S.

Sei

$$p_*\colon X_* \to S$$

ein simplizialer analytischer Raum der Stufe k über S, M eine Teilmenge von S. Eine *simpliziale Teilmenge* Q_* *von* X_* *über* M ist eine Familie

$$Q_n \subseteq X_n \qquad 0 \leqq n \leqq k$$

von Teilmengen Q_n mit:

$$X_\alpha(Q_m) \subseteq Q_n \qquad 0 \leqq n, m \leqq k;\ \alpha \in [\Delta_n, \Delta_m]$$
$$p_n(Q_n) \subseteq M \qquad 0 \leqq n \leqq k.$$

Sei X ein glatter analytischer Raum über S. Zu jeder natürlichen Zahl k erklären wir einen *glatten simplizialen analytischen Raum* $S^k(X/S)_*$ *der Stufe k über S:*

$$S^k(X/S)_n = \overbrace{X \times \cdots \times X}^{n+1 \text{ Faktoren}} \qquad 0 \leqq n \leqq k.$$

Sei $\alpha\in[\Delta_n, \Delta_m]$ $0\leqq n, m\leqq k$

$$S^k(X/S)_\alpha=(p_{\alpha(0)}, \ldots, p_{\alpha(n)})\colon \overbrace{X\times\cdots\times X}^{m+1 \text{ Faktoren}} \to \overbrace{X\times\cdots\times X}^{n+1 \text{ Faktoren}}.$$

Dabei ist $p_r\colon X\times\cdots\times X\to X$ die Projektion auf den r-ten Faktor.

Ist $Q=Q_0$ eine Teilmenge von X, M eine Teilmenge von S, die das Bild von Q in S enthält, so erklärt man entsprechend die *simpliziale Teilmenge* $S^k(Q)_*$ *von* $S^k(X/S)_*$ *über* M. Ist S der Ein-Punkt-Raum mit der konstanten Strukturgarbe $\mathbb{C}$, *so schreibt man auch* $S^k(X)$ *für* $S^k(X/S)$.

Definition 5.2. Sei X_* ein simplizialer analytischer Raum der Stufe k über einem Grundraum S. Eine Garbe $\mathcal{G}_*$ (von $\mathcal{O}_{X_*}$-Moduln) auf X_* ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem

$$\Delta_n \quad (0\leqq n\leqq k)$$

einen $\mathcal{O}_{X_n}$-Modul $\mathcal{G}_n$ und jeder Abbildung

$$\alpha\in[\Delta_n, \Delta_m]$$

einen Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{G}_\alpha\colon \mathcal{G}_n\to\mathcal{G}_m$$

zuordnet mit

$$\mathcal{G}_\alpha\circ\mathcal{G}_\beta=\mathcal{G}_{\alpha\circ\beta}$$

für alle

$$\alpha\in[\Delta_n, \Delta_m], \quad \beta\in[\Delta_r, \Delta_n] \quad 0\leqq m, n, r\leqq k.$$

Ein Homomorphismus

$$\varphi_*\colon \mathcal{G}_*\to\mathcal{H}_*$$

eines $\mathcal{O}_{X_*}$-Moduls $\mathcal{G}_*$ in einen $\mathcal{O}_{X_*}$-Modul $\mathcal{H}_*$ ist eine Familie $(\varphi_n)_{0\leqq n\leqq k}$ von $\mathcal{O}_{X_n}$-Homomorphismen

$$\varphi_n\colon \mathcal{G}_n\to\mathcal{H}_n \quad 0\leqq n\leqq k$$

mit:

$$\mathcal{H}_\alpha\circ\varphi_n=\varphi_m\circ\mathcal{G}_\alpha \quad 0\leqq n, m\leqq k;\ \alpha\in[\Delta_n, \Delta_m].$$

Bemerkung. *Ist*

$$f\colon (X, \mathcal{O}_X)\to(Y, \mathcal{O}_Y)$$

ein Morphismus geringter Räume, $\mathcal{H}$ *ein* $\mathcal{O}_X$*-Modul,* $\mathcal{G}$ *ein* $\mathcal{O}_Y$*-Modul, so ist ein Homomorphismus*

$$\mathcal{G}\to\mathcal{H}$$

ein $\mathcal{O}_Y$*-Homomorphismus*

$$\mathcal{G}\to f_*(\mathcal{H}).$$

Die Menge der Homomorphismen $\mathscr{G} \to \mathscr{H}$ steht in eineindeutiger Beziehung zu der Menge der $\mathcal{O}_X$-Homomorphismen

$$f^*(\mathscr{G}) \to \mathscr{H}.$$

Die Gesamtheit der Garben $\mathscr{G}_*$ auf einem simplizialen analytischen Raum X_* zusammen mit den Homomorphismen solcher Garben bildet eine abelsche Kategorie!

Sei

$$X_* \xrightarrow{p_*} S$$

ein simplizialer analytischer Raum der Stufe k über S. *Eine Garbe $\mathscr{G}_*$ auf X_* heißt endlich bzw. frei*, wenn für $0 \leqq n \leqq k$ der $\mathcal{O}_{X_n}$-Modul $\mathscr{G}_n$ endlich bzw. frei ist. *Ein Komplex $\mathscr{G}_*^\bullet$ von Garben $\mathscr{G}_*^\nu$ auf X_* heißt m-pseudokohärent bzw. pseudokohärent*, wenn alle Komplexe $\mathscr{G}_n^\bullet$ $0 \leqq n \leqq k$ m-pseudokohärent bzw. pseudokohärent sind (§2, Def. 2.1). Ist $\mathscr{G}$ ein $\mathcal{O}_S$-Modul, so bilden die *Urbilder $p_n^*(\mathscr{G})$ auf natürliche Weise eine Garbe*

$$p_*^*(\mathscr{G})$$

auf X_*.

Sei

$$f_*\colon X_* \to Y_*$$

ein Morphismus simplizialer analytischer Räume (über S). *Man erklärt auf natürliche Weise das direkte Bild*

$$f_{**}(\mathscr{G}_*) \text{ einer Garbe } \mathscr{G}_* \text{ auf } X_*,$$

und das Urbild

$$f_*^*(\mathscr{H}_*) \text{ einer Garbe } \mathscr{H}_* \text{ auf } Y_*.$$

Definition 5.3. $X_* \to S$ sei ein simplizialer analytischer Raum der Stufe k über S, M eine Teilmenge von S, Q_* eine simpliziale Teilmenge von X_* über M und $\mathscr{G}_*$ eine Garbe auf X_*. Man erklärt den kosimplizialen $\Gamma(M, \mathcal{O}_S)$-Modul $\Gamma(Q_*, \mathscr{G}_*)_*$ der Stufe k durch:

$$\Gamma(Q_*, \mathscr{G}_*)_n = \Gamma(Q_n, \mathscr{G}_n) \qquad 0 \leqq n \leqq k$$

$$\Gamma(Q_*, \mathscr{G}_*)_\alpha\colon\ \Gamma(Q_n, \mathscr{G}_n) \to \Gamma(Q_m, \mathscr{G}_m) \qquad 0 \leqq n, m \leqq k;\ \alpha \in [\Delta_n, \Delta_m]$$

ist der durch $\mathscr{G}_\alpha\colon \mathscr{G}_n \to \mathscr{G}_m$ induzierte Homomorphismus. Wir setzen:

$$\check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(Q_*, \mathscr{G}_*) = \check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(\Gamma(Q_*, \mathscr{G}_*)_*).$$

$\check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(Q_*, \mathscr{G}_*)$ heißt der orientierte Čechkomplex von $\mathscr{G}_*$ über Q_*. $\check{\mathfrak{C}}_+(Q_*, _)$ ist auf natürliche Weise ein Funktor.

Ist $\mathscr{G}_*^\bullet$ ein Komplex von Garben auf X_*, so bezeichnen wir mit

$$\check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(Q_*, \mathscr{G}_*^\bullet)$$

den assoziierten einfachen Komplex zum Doppelkomplex

$$\cdots \to \check{\mathfrak{C}}^{\bullet}_{+}(Q_*, \mathscr{G}^{\nu}_*) \to \check{\mathfrak{C}}^{\bullet}(Q_*, \mathscr{G}^{\nu+1}_*) \to \cdots.$$

(Der Čechkomplex von $\mathscr{G}^{\bullet}_*$ über Q_*.)

Bemerkung 5.4. *Die Teilmengen M von S und Q_n von X_n $(0 \leqq n \leqq k)$ sollen die Bedingung aus* 1.2 *erfüllen. $\mathscr{G}^{\bullet}_*$ sei ein nach oben beschränkter Komplex von endlichen freien Moduln. $\Gamma(Q_n, \mathscr{G}^{\nu})$ ist dann topologischer Modul über der topologischen Algebra $\Gamma(M, \mathcal{O}_S)$. Man sieht leicht, daß $\Gamma(Q_*, \mathscr{G}^{\nu}_*)_*$ topologischer simplizialer Modul der Stufe k über $\Gamma(M, \mathcal{O}_S)$ ist. Infolgedessen ist*

$$\check{\mathfrak{C}}^{\bullet}_{+}(Q_*, \mathscr{G}^{\bullet}_*)$$

ein Kokettenkomplex von topologischen $\Gamma(M, \mathcal{O}_S)$-Moduln.

Definition 5.5. Gegeben sei ein F-geringter Raum S und ein analytischer Raum

$$f\colon X \to S$$

über S. X heißt eigentlich über S bzw. die Strukturabbildung eigentlich, wenn alle Fasern $f^{-1}(s)$ kompakt sind und die Abbildung der unterliegenden topologischen Räume abgeschlossen ist.

Bemerkung 5.5.a. *Für einen eigentlichen Morphismus $f\colon X \to S$ gilt*

a) *K sei kompakte Teilmenge von S. Dann ist das Urbild $f^{-1}(K)$ von K in X kompakt. Die Familie*

$$(f^{-1}(U))_{U \text{ Umgebung von } K}$$

ist eine Umgebungsbasis von $f^{-1}(K)$.

b) *Ist $(U_i)_{i \in J}$ eine Familie von offenen Mengen in X, eine Faser $f^{-1}(s)$ in $\bigcup_i U$ enthalten, so gibt es eine endliche Teilfamilie $(U_{i_1}, \ldots, U_{i_r})$ und eine offene Umgebung V von s, so daß $f^{-1}(V)$ in $U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_r}$ enthalten ist.*

Lemma 5.6. *Sei X_* ein simplizialer analytischer Raum der Stufe k über S und $\mathscr{G}_*$ eine Garbe auf X_*. Angenommen, es gibt für $0 \leqq n \leqq k$ endliche freie $\mathcal{O}_{X_n}$-Moduln $\mathscr{N}_n$ und surjektive Homomorphismen*

$$h_n\colon \mathscr{N}_n \to \mathscr{G}_n.$$

Dann gibt es eine endliche freie Garbe $\mathscr{F}_*$ auf X_* und einen Epimorphismus

$$\mathscr{F}_* \to \mathscr{G}_*.$$

Beweis. Setze für $0 \leqq n \leqq k$

$$\mathscr{F}_n = \bigoplus_{0 \leqq m \leqq k} \bigoplus_{\alpha \in [\Delta_m, \Delta_n]} X^*_\alpha(\mathscr{N}_m).$$

Die Garben $\mathscr{F}_n$ bilden auf natürliche Weise eine Garbe $\mathscr{F}_*$ auf X_*.

Wir erklären für $0 \leqq n \leqq k$ einen Homomorphismus

$$f_n\colon \mathscr{F}_n \to \mathscr{M}_n.$$

Für $0 \leqq m \leqq k$ und $\alpha \in [\Delta_m, \Delta_n]$ ist $f_n | X_\alpha^*(\mathscr{N}_m)$ die folgende zusammengesetzte Abbildung:

$$X_\alpha^*(\mathscr{N}_m) \xrightarrow{X_\alpha^*(h_m)} X_\alpha^*(\mathscr{G}_m) \to \mathscr{G}_n.$$

Dabei ist $X_\alpha^*(\mathscr{G}_m) \to \mathscr{G}_n$ die durch $\mathscr{G}_\alpha$ definierte Abbildung. Die Familie $(f_n)_{0 \leqq n \leqq k}$ definiert einen Epimorphismus

$$\mathscr{F}_* \to \mathscr{G}_*.$$

Definition 5.7. Gegeben sei eine Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in J}$ eines Raumes S durch Teilmengen U_i. Wir schreiben

$$\delta(\mathfrak{U}) \leqq r,$$

wenn $U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_s}$ leer ist für $s > r$.

Sei $X \to S$ ein Morphismus F-geringter Räume. $X \to S$ heißt Überdeckung mit

$$\delta(X/S) \leqq r,$$

wenn es eine höchstens abzählbare Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in J}$ von S durch offene Teilmengen U_i gibt mit

$$\delta(\mathfrak{U}) \leqq r$$

und einen Isomorphismus F-geringter Räume über S!

$$X \cong \overset{\bullet}{\bigcup_{i \in J}} U_i.$$

Dabei ist die disjunktive Vereinigung $\overset{\bullet}{\bigcup_{i \in J}} U_i$ auf natürliche Weise mit der Struktur eines F-geringtern Raumes versehen.

Lemma 5.8. *Gegeben seien ein F-geringter Raum S, ein Punkt $s \in S$, eine komplexe Mannigfaltigkeit X, ein offener relativ kompakter Unterraum Y von X, ein m-pseudokohärenter Komplex $\mathscr{G}_*^\bullet$ von Garben auf $S \times S^k(X)_*$ und eine natürliche Zahl r zwischen 0 und k. Es sei*

$$\mathscr{H}^\nu(\mathscr{G}_*^\bullet) = 0 \qquad \nu \geqq m+1.$$

Dann gibt es eine offene Umgebung U von s, eine Überdeckung

$$\tilde{X} \to Y,$$

eine endliche freie Garbe $\mathscr{N}_r$ auf $U \times S^k(\tilde{X})_r$ und einen surjektiven Homomorphismus von $\mathscr{N}_r$ auf das Urbild von $\mathscr{H}^m(\mathscr{G}_r^\bullet)$ in $U \times S^k(\tilde{X})_r$, realisierbar durch $\mathscr{N}_r \to \mathrm{Urbild}(\mathscr{G}_r^m)$.

Beweis. Weil $\mathscr{G}^\bullet$ m-pseudokohärent ist und

$$S^k(Y)_r = \overbrace{Y \times \cdots \times Y}^{r+1 \text{ Faktoren}}$$

relativ kompakt in $S^k(X)_r$, gibt es eine offene Umgebung U von s, eine endliche Überdeckung

$$\mathfrak{V} = (V_i)_{i=1,\ldots,t}$$

von $\overline{S^k(Y)_r}$ durch offene Teilmengen V_i von $S^k(X)_r$, endliche freie Garben $\mathscr{H}_1 \ldots \mathscr{H}_t$ auf $U \times V_1 \ldots U \times V_t$ und surjektive Homomorphismen

$$\mathscr{H}_\nu \to \mathscr{H}^m(\mathscr{G}_r^\bullet)|\, U \times V_\nu \quad \nu = 1, \ldots, t, \quad \text{realisierbar durch } \mathscr{H}_\nu \to \mathscr{G}_r^m | U \times V_\nu.$$

Man kann annehmen, daß alle freien Garben $\mathscr{H}_\nu$ den gleichen Rang haben. Es gibt dann eine höchstens abzählbare offene Überdeckung $\mathfrak{W} = (W_i)_{i \in J}$ von Y, so daß

$$\mathfrak{W} \times \cdots \times \mathfrak{W} \qquad (r+1 \text{ Faktoren})$$

eine Verfeinerung von $\mathfrak{V}$ ist.

Die Überdeckung

$$\tilde{X} = \dot{\bigcup_{i \in J}} W_i \to Y$$

hat die gesuchten Eigenschaften.

Lemma 5.9. *Y sei eine höchstens abzählbare disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen des $\mathbb{C}^n$*

$$\tilde{Y} \to Y$$

eine Überdeckung.

Dann gibt es eine Steinsche Mannigfaltigkeit $\tilde{\tilde{Y}}$ und einen Morphismus

$$\tilde{\tilde{Y}} \to \tilde{Y},$$

so daß die zusammengesetzte Abbildung

$$\tilde{\tilde{Y}} \to Y$$

eine Überdeckung ist mit

$$\delta(\tilde{\tilde{Y}}/Y) \leqq 2n.$$

Beweis. Jede offene Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in J}$ von Y läßt sich verfeinern durch eine höchstens abzählbare Überdeckung $\mathfrak{V} = (V_j)_{j \in J}$ von Y durch offene Quader V_j mit $\delta(\mathfrak{V}) \leqq 2n$. Die höchstens abzählbare disjunkte Vereinigung von offenen Quadern ist aber eine Steinsche Mannigfaltigkeit!

Durch mehrmalige Anwendung dieser Lemmata erhält man:

Sei S ein F-geringter Raum, Z höchstens abzählbare disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen des $\mathbb{C}^n$, s ein Punkt aus S und $\mathscr{G}_*^\bullet$ ein m-pseudokohärenter Komplex auf $S \times S^k(Z)_*$.

Ω sei eine relativ kompakte offene Teilmenge in Z.

Sei zunächst

$$(*):\ \mathscr{H}^{\nu}(\mathscr{G}_*^{\bullet})=0 \qquad \nu \geqq m+1.$$

Dann gibt es eine Steinsche Mannigfaltigkeit Y und eine Überdeckung

$$Y \to \Omega$$

mit $\delta(Y/\Omega) \leqq 2n$, eine offene Umgebung U von s, eine endliche freie Garbe $\mathscr{F}_*$ auf $U \times S^k(Y)$ und einen Epimorphismus von $\mathscr{F}_*$ auf

$$\mathscr{H}^m(g_*^*(\mathscr{G}_*^{\bullet})), \qquad \text{realisierbar durch } \mathscr{F}_* \to g_*^*(\mathscr{G}_*^m).$$

Dabei ist $g_*\colon U \times S^k(Y)_* \to S \times S^k(Z)_*$ die durch $Y \to \Omega$ induzierte Abbildung. Durch mehrmalige Anwendung erhält man dann ohne die Voraussetzung $(*)$ mit Hilfe des Abbildungskegels (2.1):

5.10. *Es gibt eine Steinsche Mannigfaligkeit Y, eine Überdeckung*

$$Y \to \Omega$$

mit $\delta(Y/\Omega) \leqq 2n$, eine offene Umgebung U von s, einen nach oben beschränkten Komplex $\mathscr{F}_*^{\bullet}$ von endlichen freien Garben $\mathscr{F}_*^{\nu}$ auf $U \times S^k(Y)_*$ und einen m-Quasiisomorphismus

$$\mathscr{F}_*^{\bullet} \to g_*^*(\mathscr{G}_*^{\bullet}).$$

Satz 5.11 [2]. *Gegeben sei ein F-geringter Raum S, ein analytischer Raum*

$$f\colon X \to S$$

eigentlich über S und ein Punkt $s \in S$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $d(s)$ mit folgenden Eigenschaften:

Sei m eine ganze Zahl, $\mathscr{G}^{\bullet}$ ein relativ m-pseudokohärenter Komplex auf X. Dann gibt es eine offene Umgebung U von s, eine Überdeckung $X_0 \to f^{-1}(U)$, eine natürliche Zahl k, eine Steinsche komplexe Mannigfaltigkeit Y, eine abgeschlossene Einbettung über S:

$$j_*\colon X_* = S^k(X_0/f^{-1}(U))_* \hookrightarrow U \times S^k(Y)_*$$

einen nach oben beschränkten Komplex $\mathscr{F}_*^{\bullet}$ von endlichen freien Garben $\mathscr{F}_*^{\nu}$ auf $U \times S^k(Y)_*$ und einen m-Quasiisomorphismus

$$\mathscr{F}_*^{\bullet} \to j_{**}(p_*^*(\mathscr{G}^{\bullet} | f^{-1}(U)))$$

---

[2] Diesen Satz verdanken wir Forster und Knorr ([4]); s. auch [20].

mit folgenden Eigenschaften:

$$\delta(X_0/f^{-1}(U)) \leqq k \leqq d(s)$$
$$\operatorname{dimtop} f^{-1}(t) \leqq d(s) \qquad t \in U$$
$$\operatorname{dimtop} S^k(Y)_r \leqq d(s) \qquad 0 \leqq r \leqq k.$$

Dabei ist $p_*: S^k(X_0/f^{-1}(U)) \to f^{-1}(U)$ *die Strukturabbildung.*

Beweis. X ist eigentlicher analytischer Raum über S. Ersetzt man S durch eine genügend kleine Umgebung von s, so gibt es eine endliche offene Überdeckung $(V_1, \ldots, V_l)$ von X, offene Teilmengen $Z_1, \ldots, Z_l$ eines geeigneten $\mathbb{C}^n$ und abgeschlossene Einbettungen

$$V_i \hookrightarrow S \times Z_i.$$

Setze:

$$X_0' = \overset{l}{\underset{i=1}{\dot{\bigcup}}} V_i, \qquad Z = \overset{l}{\underset{i=1}{\dot{\bigcup}}} Z_i.$$

Man hat dann eine abgeschlossene Einbettung

$$X_0' \hookrightarrow S \times Z.$$

Weil f eigentlich ist, können wir – nach Verkleinern von S – annehmen, daß es eine offene relativ kompakte Teilmenge Ω in Z gibt, so daß auch noch die induzierte Abbildung

$$S \times \Omega \cap X_0' \to X$$

surjektiv ist, d.h. auch $S \times \Omega \cap X_0' \to X$ eine Überdeckung ist. Setze

$$d(s) = 2 \cdot n(k+1)$$
$$k = l(2n+1).$$

Sei $q_*: S^k(X_0'/X)_* \to X$ die Strukturabbildung

$$i_*: S^k(X_0'/X)_* \hookrightarrow S \times S^k(Z)_*$$

die durch $X_0' \hookrightarrow Z$ induzierte Einbettung. Weil $\mathscr{G}^\bullet$ relativ pseudokohärent ist, ist

$$\mathscr{L}_*^\bullet = i_{**}(q_*^*(\mathscr{G}^\bullet))$$

pseudokohärent.

Es gibt deshalb eine Steinsche Mannigfaltigkeit Y und eine Überdeckung

$$Y \to \Omega \subseteq Z$$

mit $\delta(Y/\Omega) \leqq 2n$, eine offene Umgebung U von s, einen nach oben beschränkten Komplex $\mathscr{F}_*^\bullet$ von endlichen freien Garben $\mathscr{F}_*^\nu$ auf

$U \times S^k(Y)_*$ und einen m-Quasiisomorphismus

$$\mathscr{F}_*^\bullet \to g_*^*(\mathscr{L}_*^\bullet).$$

Dabei ist $g_*\colon U \times S^k(Y)_* \to S \times S^k(Z)_*$ die durch $Y \to \Omega \hookrightarrow Z$ induzierte Abbildung. Sei $\mathfrak{W} = (W_i)_{i \in J}$ eine offene Überdeckung von Ω mit

$$Y = \overset{\bullet}{\bigcup_{i \in J}} W_i, \qquad \delta(\mathfrak{W}) \leqq 2n$$

$$X_0 = \overset{\bullet}{\bigcup_{\substack{i \in J \\ \nu = 1, \ldots, l}}} V_\nu \cap U \times W_i \to f^{-1}(U)$$

ist die gesuchte Überdeckung.

Bezeichnet man mit

$$j_*\colon S^k\big(X_0/f^{-1}(U)\big)_* \hookrightarrow S \times S^k(Y)_*$$

die natürliche abgeschlossene Einbettung, mit

$$p_*\colon S^k\big(X_0/f^{-1}(U)\big) \to f^{-1}(U)$$

die Projektion auf $f^{-1}(U)$, so ist nämlich

$$g_*^*(\mathscr{L}_*^\bullet) \cong j_{**}\big(p_*^*(\mathscr{G}_*^\bullet)\big).$$

Außerdem ist

$$\delta\big((V_\nu \cap U \times W_i)_{\substack{i \in J \\ 1 \leqq \nu \leqq l}}\big) \leqq l \cdot (2n+1).$$

Lemma 5.12. *Gegeben sei ein F-geringter Raum S und ein analytischer Raum*

$$f\colon X \to S$$

eigentlich über S. S sei separiert (als topologischer Raum), s sei ein Punkt von S. $\mathscr{G}^\bullet$ sei ein nach oben beschränkter Komplex von $\mathscr{O}_X$-Moduln. Dann gibt es eine offene Umgebung U von s, einen nach oben beschränkten Komplex $\mathscr{L}^\bullet$ von Garben auf $f^{-1}(U)$ und einen Quasiisomorphismus

$$\mathscr{G}^\bullet \to \mathscr{L}^\bullet.$$

Dabei hat $\mathscr{L}^\bullet$ folgende Eigenschaft: Für alle Punkte $t \in U$ sind alle Garben $\mathscr{L}^\nu | f^{-1}(t)$ weiche Garben (faisceaux mous [5]).

Bemerkung 5.12.a. *Dann sind alle Garben $\mathscr{L}^\nu$ azyklisch bei der Bildung des direkten Bildes, weil f eigentlich ist:*

$$\mathscr{R}^i\big(f | f^{-1}(U)\big)_*(\mathscr{L}^\nu) = 0 \qquad i \geqq 1.$$

Insbesondere ist

$$\big(f | f^{-1}(U)\big)_*(\mathscr{L}^\bullet) = \underset{\sim}{\mathscr{R}} f_*(\mathscr{G}^\bullet) | U.$$

Dabei ist $\underset{\sim}{\mathscr{R}} f_* \mathscr{G}^\bullet$ das abgeleitete Bild von $\mathscr{G}^\bullet$ im Sinne von Verdier ([8], Chap. I, § 2).

Beweis. Wegen Satz 5.11 gibt es eine offene Umgebung U von s und eine natürliche Zahl d mit

$$\dim\text{top}\, f^{-1}(t) \leqq d \quad \text{für } t \in U.$$

Betrachte die kanonische welke Auflösung von $\mathscr{G}^\bullet | f^{-1}(U)$ ([5])

$$\mathscr{G}^\bullet | f^{-1}(U) \to \mathscr{M}_0^\bullet \to \mathscr{M}_1^\bullet \to \mathscr{M}_2^\bullet \to \cdots.$$

Sei $\mathscr{B}^\bullet = \text{Bild}\,(\mathscr{M}_{d-1}^\bullet \to \mathscr{M}_d^\bullet)$. Da f eigentlich ist, sind für alle $t \in U$ die auf die Faser $f^{-1}(t)$ eingeschränkten Komplexe $\mathscr{M}_\nu^\bullet | f^{-1}(t)$ Komplexe von weichen Garben. Aus Gründen der topologischen Dimension ist dann aber auch

$$\mathscr{B}^\bullet | f^{-1}(t) \quad \text{für } t \in U$$

ein Komplex von weichen Garben.

Sei $\mathscr{L}^\bullet$ der assoziierte einfache Komplex zum Doppelkomplex

$$0 \to \mathscr{M}_0^\bullet \to \mathscr{M}_1^\bullet \to \cdots \to \mathscr{M}_{d-1}^\bullet \to \mathscr{B} \to 0.$$

Die kanonische Abbildung

$$\mathscr{G}^\bullet | f^{-1}(U) \to \mathscr{L}^\bullet$$

ist ein Quasiisomorphismus; für $t \in U$ ist $\mathscr{L}^\bullet | f^{-1}(t)$ ein Komplex von weichen Garben.

Lemma 5.13. *Gegeben sei ein — als topologischer Raum — separierter F-geringter Raum S, eine Steinsche komplexe Mannigfaltigkeit X, eine offene relativ kompakte Steinsche Untermannigfaltigkeit Y, ein endlicher freier $\mathscr{O}_{S\times X}$-Modul $\mathscr{F}$ und zwei Elemente $U, V \in \mathfrak{S}(S)$; $V \subseteq U$.*

a) *Die Einschränkungsabbildung*

$$\mathscr{F}(U \times X) \to \mathscr{F}(U \times Y)$$

ist nuklearer $\mathscr{O}_S(U)$ Homomorphismus;

$$\mathscr{O}_S(V) \hat{\otimes}_{\mathscr{O}_S(U)} \mathscr{F}(U \times X) = \mathscr{F}(V \times X).$$

b) *Jeder Punkt von S besitze eine abzählbare Umgebungsbasis. K sei eine höchstens abzählbare kompakte Teilmenge von S, Q_1, Q_2 seien Steinsche Kompakta von X (d.h. sie besitzen eine Umgebungsbasis von Steinschen offenen Mengen), Q_2 sei im Inneren von Q_1 enthalten:*

$$Q_2 \subseteq \mathring{Q}_1.$$

Alle Halme $\mathscr{O}_{S,s}$ seien separiert. Dann ist $\mathscr{O}_S(K)$ eine (separierte!) *L-F-Algebra und die Moduln $\mathscr{F}(K \times Q_i)$ $(i = 1, 2)$ sind separierte L-F-Moduln*

über $\mathcal{O}_S(K)$. Der Einschränkungshomomorphismus

$$\mathcal{F}(K \times Q_1) \to \mathcal{F}(K \times Q_2)$$

ist nuklearer $\mathcal{O}_S(K)$-Homomorphismus. Ist S sogar ein L-F-(B)-Raum, so ist $\mathcal{O}_S(K)$ sogar eine L-F-(B)-Algebra.

Bemerkung. *Ein endlicher freier Modul über einem F-geringten Raum trägt immer auf kanonische Weise die Struktur einer Garbe von topologischen Moduln.*

Beweis. Wir können annehmen, daß $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{S \times X}$ ist.

a) Es ist bekannt, daß der Einschränkungshomomorphismus

$$\mathcal{O}_S(X) \to \mathcal{O}_S(Y)$$

eine $\mathbb{C}$-lineare nukleare Abbildung ist. Dann ist aber die Abbildung

$$\mathcal{O}_{S \times X}(U \times X) = \mathcal{O}_S(U) \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_S(U) \hat{\otimes} \mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{O}_{S \times X}(U \times Y)$$

ein nuklearer $\mathcal{O}_S(U)$-Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_S(V) \underset{\mathcal{O}_S(U)}{\hat{\otimes}} \mathcal{O}_{S \times X}(U \times X) &= \mathcal{O}_S(V) \underset{\mathcal{O}_S(U)}{\hat{\otimes}} \left(\mathcal{O}_S(U) \underset{\mathbb{C}}{\hat{\otimes}} \mathcal{O}_S(X)\right) \\ &= \mathcal{O}_S(V) \underset{\mathbb{C}}{\hat{\otimes}} \mathcal{O}_S(X) = \mathcal{O}_{S \times X}(V \times X). \end{aligned}$$

b) Die Separiertheit der betreffenden Ringe und Moduln folgt aus §1 (1.17 bzw. 1.18). Es gibt nach Voraussetzung eine abzählbare Umgebungsbasis

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq K$$

von K. Man kann annehmen, daß alle Elemente U_i zu $\mathfrak{F}(S)$ gehören. Ist $(S, \mathcal{O}_S)$ ein F-(B)-geringter Raum, so kann man sogar annehmen, daß alle Homomorphismen

$$\mathcal{O}_S(U_1) \to \mathcal{O}_S(U_2) \to \cdots$$

(B)-Homomorphismen sind.

$\mathcal{O}_S(K) = \varinjlim_i \mathcal{O}_S(U_i)$ ist also eine L-F-Algebra, bzw. im zweiten Falle sogar eine L-F-(B)-Algebra (§4, 4.6). Es gibt eine abzählbare Umgebungsbasis

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \cdots$$

von Q_i mit Steinschen offenen Mengen $V_1, V_2, \ldots$. Dann ist $(U_\nu \times V_\nu)_{\nu=1,2,\ldots}$ eine Umgebungsbasis von $K \times Q_i$. $\mathcal{O}_{S \times X}(U_\nu \times V_\nu)$ ist Fréchet-Modul über der Fréchet-Algebra $\mathcal{O}_S(U_\nu)$. Also ist $\mathcal{O}_{S \times X}(K \times Q_i) = \varinjlim_\nu \mathcal{O}_{S \times X}(U_\nu \times V_\nu)$ L-F-Modul über $\mathcal{O}_S(K) = \varinjlim_\nu \mathcal{O}_S(U_\nu)$.

Wir müssen noch die Nuklearität der Einschränkungsabbildung

$$\mathcal{O}_{S\times X}(K\times Q_1)\to\mathcal{O}_{S\times X}(K\times Q_2)$$

zeigen.

(1) Sei $X=P(0,\rho)$ ein Polyzylinder,

$$Q_1=\bar{P}(0,\rho'),\qquad Q_2=\bar{P}(0,\rho'')$$

(abgeschlossene Polyzylinder).

Wähle $0<q<1$ mit $\rho''<q\,\rho'$. Wir bezeichnen mit φ_j die natürliche Abbildung

$$\mathcal{O}_S(U_j)\to\mathcal{O}_S(K)=\varinjlim_i \mathcal{O}_S(U_i)\qquad j=1,2,3,\ldots.$$

Es gilt:

$$\mathcal{O}_{S\times X}(K\times\bar{P}(0,\rho'))=\varinjlim_{\substack{\bar{\rho}>\rho',\ \bar{\rho}\to\rho'\\ i\to\infty}} \mathcal{O}_{S\times X}(U_i\times P(0,\bar{\rho})).$$

Wir stellen $\mathcal{O}_{S\times X}(U_i\times P(0,\bar{\rho}))$ als Potenzreihenring dar (§1, 1.10)

$$\mathcal{O}_{S\times X}(U_i\times P(0,\bar{\rho}))=\Big\{\sum_{\nu\geqq 0} a_\nu(z/\bar{\rho})^\nu;\ a_\nu\in\mathcal{O}_S(U_i),\ldots\Big\}.$$

Sei m_ν das Bild von $(z/q\,\rho')^\nu$ in $\mathcal{O}_S(K\times Q_2)$. Die Familie $(m_\nu)_{\nu\geqq 0}$ ist das Bild einer beschränkten Familie von Elementen in $\mathcal{O}_S(U_1\times P(0,q\,\rho'))$ streng beschränkt (§4, 4.13c).

Wir konstruieren eine streng gleichgradig stetige Familie von $\mathcal{O}_S(K)$-Homomorphismen:

$$h_\nu\colon\ \mathcal{O}_{S\times X}(K\times\bar{P}(0,\rho'))\to\mathcal{O}_S(K).$$

Sei u ein Element von $\mathcal{O}_{S\times X}(K\times\bar{P}(0,\rho'))$, repräsentiert durch eine Potenzreihe

$$\sum_{\nu\geqq 0} a_\nu(z/\bar{\rho})^\nu\quad\text{aus}\quad \mathcal{O}_{S\times X}(U_i\times P(0,\bar{\rho}))\ \bar{\rho}>\rho'.$$

Dann ist

$$h_\nu(u)=\varphi_i(a_\nu)\cdot(\rho'/\bar{\rho})^\nu.$$

Die Einschränkungsabbildung

$$\mathcal{O}_{S\times X}(K\times\bar{P}(0,\rho'))\to\mathcal{O}_{S\times X}(K\times\bar{P}(0,\rho''))$$

läßt sich darstellen als

$$\sum_{\nu\geqq 0} q^{|\nu|}\,m_\nu\otimes h_\nu,$$

sie ist also nuklear (§4, 4.14).

(2) Sei X beliebige Steinsche Mannigfaltigkeit. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß X reindimensional von der Dimension n ist. Es gibt dann einen n-dimensionalen Polyzylinder $P(0,\rho)$, eine offene Steinsche Teilmenge Y von X und eine endliche Abbildung

$$\psi\colon\ Y\to P(0,\rho)\quad\text{mit}\quad Q_2\subseteq Y\subseteq\mathring{Q}_1\qquad([7]).$$

$\mathscr{F}=\psi_*(\mathscr{O}_Y)$ ist lokal frei, damit frei (§1, 1.10). Wähle $\rho''<\rho'<\rho$ mit $\psi(Q_2)\subseteq P(0,\rho'')$. Nach (1) ist der $\mathscr{O}_S(K)$-Homomorphismus

$$\mathscr{O}_{S\times X}(K\times\psi^{-1}(\bar{P}(0,\rho')))\to\mathscr{O}_{S\times X}(K\times\psi^{-1}(\bar{P}(0,\rho'')))$$

nuklear. Damit ist auch die mit dieser Abbildung zusammengesetzte Abbildung

$$\mathscr{O}_{S\times X}(K\times Q_1)\to\mathscr{O}_{S\times X}(K\times Q_2)$$

nuklear.

Theorem 5.14. *Gegeben sei ein L-F-(B)-geringter Raum* $(S,\mathscr{O}_S)$ *und ein analytischer Raum*

$$f\colon\ (X,\mathscr{O}_X)\to(S,\mathscr{O}_S),$$

eigentlich über S.

$\mathscr{G}^\bullet$ *sei ein bez.* S *relativ pseudokohärenter Komplex von* $\mathscr{O}_X$*-Moduln* (§2, 2.11). *Eine der beiden folgenden Voraussetzungen sei erfüllt:*

a) S *sei separiert; jeder Punkt* s *von* S *besitze eine abzählbare Umgebungsbasis. Jeder Halm* $\mathscr{O}_{S,s}$ *sei separierter Vektorraum.*

b) S *sei lokal kompakt (statt dessen kann man auch eine geeignete Abzählbarkeitsbedingung fordern). Die topologische Dimension von* $(S,\mathscr{O}_S)$ *sei lokal endlich* (1.19). $(S,\mathscr{O}_S)$ *erfülle Axiom* (Ⓢt) (§3).

In beiden Fällen ist der im Sinne von Verdier abgeleitete direkte Bildkomplex (*s. auch Bemerkung* 5.12.a)

$$\underline{\mathscr{R}}^\bullet f_*(\mathscr{G}^\bullet)$$

pseudokohärent (§2, *Definition* 2.1.c).

Beweis. Theorem 5.14 wird sich unter den in a) gemachten Voraussetzungen aus dem Endlichkeitssatz 4.23, dem Azyklizitätssatz 3.1.a), dem Pseudokohärenzkriterium 2.5 und aus Lemma 5.13.b) ergeben.

Da der Beweis unter der Voraussetzung b) auf ähnliche Weise mit Hilfe von 4.4, 3.1.b), 2.3 und 5.13.a) erfolgt, wollen wir den Beweis nur unter der Voraussetzung a) führen.

Der Satz ist lokaler Natur bez. S. Da $\mathscr{G}^\bullet$ relativ pseudokohärent ist, können wir deshalb annehmen, daß die Kohomologiegarben $\mathscr{H}^\nu(\mathscr{G}^\bullet)$ für große ν verschwinden, damit sogar, daß $\mathscr{G}^\bullet$ nach oben beschränkt ist. Wegen Lemma 5.12 können wir ohne Beschränkung der Allgemein-

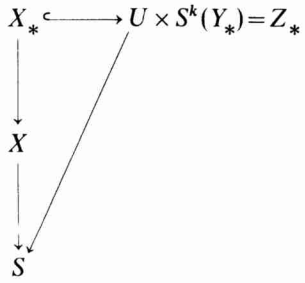
heit annehmen, daß für alle $s \in S$

$$\mathscr{G}^\bullet | f^{-1}(s)$$

ein Komplex aus weichen Garben ist. Es gilt dann (5.12.a)

$$\mathscr{R}^\bullet f_*(\mathscr{G}^\bullet) = f_*(\mathscr{G}^\bullet).$$

Sei r eine ganze Zahl, s ein Punkt aus S. Wir verwenden alle Bezeichnungen von Satz 5.11. $m = r - k - d(s) - 1$. Wir haben folgende Situation vor uns:



$X_0 = \overset{\bullet}{\bigcup_i} V_i$ $\mathfrak{V} = (V_i)_{i \in J}$ ist eine offene Überdeckung von $f^{-1}(U)$ mit $\delta(\mathfrak{V}) \leqq k \leqq d(s)$. Sei $\mathscr{L}^\bullet_* = j_{**} p^*_*(\mathscr{G}^\bullet)$. Es gibt einen nach oben beschränkten Komplex $\mathscr{F}^\bullet_*$ von endlichen freien Garben auf Z_* und einen m-Quasiisomorphismus

$$\mathscr{F}^\bullet_* \to \mathscr{L}^\bullet_*.$$

Wenn wir U genügend klein wählen, gibt es eine Folge Steinscher Kompakta

$$P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3 \subseteq \cdots$$

in Y mit $P_i \subseteq \mathring{P}_{i+1}$ $i = 1, 2, \ldots$ und $p_0(U \times P_1 \cap X_0) = U$.

Sei K eine kompakte Teilmenge von U mit höchstens einem Häufungspunkt. Setze

$$Q^\nu_* = K \times S^k(P_\nu),$$
$$\mathfrak{R}^\nu = (V_i \cap K \times P_\nu)_{i \in J}$$

ist eine lokal endliche Überdeckung von $f^{-1}(K)$ durch kompakte Teilmengen

$$\delta(\mathfrak{R}^\nu) \leqq k.$$

Weil $\mathscr{G}^i | f^{-1}(t)$ für $t \in K$ weiche Garbe ist und dimtop $K = 0$, ist auch

$$\mathscr{G}^i | f^{-1}(K) \quad \text{weiche Garbe (§1, 1.20).}$$

Es gilt deshalb:

$$H^\bullet(\check{\mathfrak{C}}^\bullet_+(\mathfrak{R}^\nu, \mathscr{G}^\bullet)) \cong H^\bullet(\Gamma(f^{-1}(K), \mathscr{G}^\bullet)). \tag{1}$$

Dabei ist $\check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(\mathfrak{R}^\nu, \mathscr{G}^i)$ der orientierte Čech-Komplex von $\mathscr{G}^i$ zur Überdeckung $\mathfrak{R}^\nu$ von $f^{-1}(K)$ und

$$\check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(\mathfrak{R}^\nu, \mathscr{G}^\bullet)$$

der assoziierte einfache Komplex zum Doppelkomplex

$$\cdots \to \check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(\mathfrak{R}^\nu, \mathscr{G}^i) \to \check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(\mathfrak{R}^\nu, \mathscr{G}^{i+1}) \to \cdots.$$

Bemerkung. $\check{\mathfrak{C}}_+^l(\mathfrak{R}^\nu, _)$ *verschwindet für*

$$l > k \geqq \delta(\mathfrak{R}^\nu)!$$

Außerdem gilt:

$$\check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(\mathfrak{R}^\nu, \mathscr{G}^\bullet) \cong \check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(Q_*^\nu, \mathscr{L}_*^\bullet). \tag{2}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathscr{L}_n^\bullet | Q_n^\nu$ ein Komplex von weichen Garben; $\mathscr{F}_n^\bullet | Q_n^\nu$ ist nach § 3, 1a ein Komplex von bei $\Gamma(Q_n^\nu, _)$ azyklischen Garben. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{dimtop} Q_n^\nu &\leqq \operatorname{dimtop} K + \operatorname{dimtop} S^k(Y)_n \\ &\leqq 0 + d(s) = d(s). \end{aligned}$$

Daraus schließt man leicht (benutze auch 5.1):

$$\check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(Q_*^\nu, \mathscr{F}_*^\bullet) \to \check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(Q_*^\nu, \mathscr{L}_*^\bullet) \tag{3}$$

ist für $\nu = 1, 2, \ldots$ ein

$$r - 1 = m + k + d(s)\text{-Quasiisomorphismus}.$$

Aus (1), (2), (3) folgt:

Die Abbildungen

$$\cdots \to \check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(Q_*^\nu, \mathscr{F}_*^\bullet) \to \check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(Q_*^{\nu-1}, \mathscr{F}_*^\bullet) \to \cdots \to \check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(Q_*^1, \mathscr{F}_*^\bullet)$$

sind r-Quasiisomorphismen.

Andererseits sind die $\mathcal{O}_S(K)$-Moduln $\check{\mathfrak{C}}_+^i(Q_*^\nu, \mathscr{F}_*^\bullet)$ topologische direkte Summanden von

$$\prod_{\substack{j+n=i \\ 0 \leqq n \leqq k}} \mathscr{F}_n^j(Q_n^\nu)$$

(Bemerkung 5.1 bzw. 5.4). Aus Lemma 5.13.b folgt deshalb:

Die Komplexe $\check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(Q_*^\nu, \mathscr{F}_*^\bullet)$ sind Komplexe von L-F-Moduln über der L-F-(B)-Algebra $\mathcal{O}_S(K)$. Die Homomorphismen

$$\check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(Q_*^\nu, \mathscr{F}_*^\bullet) \to \check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(Q_*^{\nu-1}, \mathscr{F}_*^\bullet)$$

sind sogar nukleare r-Quasiisomorphismen. Wir wenden Theorem 4.23 an:

$$\check{\mathfrak{C}}_+^\bullet(Q_*^1, \mathscr{F}_*^\bullet) \quad \textit{ist } r\textit{-pseudokohärent}.$$

Wegen (1) und (2) gilt:

$$\Gamma(f^{-1}(K), \mathscr{G}^\bullet) \quad \textit{ist r-pseudokohärent.}$$

Weil die Urbilder der Umgebungen von K eine Umgebungsbasis von $f^{-1}(K)$ bilden, gilt:

$$\Gamma(K, f_*(\mathscr{G}^\bullet)) = \Gamma(f^{-1}(K), \mathscr{G}^\bullet)$$

ist r-pseudokohärent. Nach 2.4 ist also $f_*(\mathscr{G}^\bullet)|K$ r-pseudokohärent.

Da r-Pseudokohärenz eine lokale Eigenschaft ist, erhält man:

$$f_*(\mathscr{G}^\bullet)|K$$

ist für alle kompakten Teilmengen K von S, die höchstens einen Häufungspunkt haben, r-pseudokohärent. Aus Satz 2.5 folgt:

$$f_*(\mathscr{G}^\bullet) \quad \textit{ist r-pseudokohärent.}$$

Da r beliebig gewählt werden konnte, gilt

$$f_*(\mathscr{G}^\bullet) = \underline{\mathscr{R}}^\bullet f_*(\mathscr{G}^\bullet)$$

ist pseudokohärent.

Anhang zu §5

Die verwendeten Beweismethoden können auch auf andere Fälle angewendet werden.

Sei S offene Teilmenge eines komplexen Banach-Raumes, versehen mit der Garbe $\mathscr{O}_S$ von holomorphen Funktionen im Sinne von Douady ([2]).

Sei $X = (X, \mathscr{O}_X)$ ein unendlichdimensionaler analytischer Raum im Sinne von Douady ([2]),

$$f\colon (X, \mathscr{O}_X) \to (S, \mathscr{O}_S)$$

ein Morphismus solcher Räume.

Wir sagen: *f heißt eigentlich*, wenn f abgeschlossen ist, alle Fasern kompakt sind, und wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U, eine offene Umgebung V von $f(x)$, einen offenen Unterraum W eines n-dimensionalen Zahlraumes $\mathbb{C}^n$ gibt und eine abgeschlossene Einbettung

$$U \hookrightarrow V \times W,$$

so daß das natürliche Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & V \times W \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & = & S \end{array}$$

kommutativ wird.

Man erklärt analog zu dem in §2 behandelten Fall die *relative Pseudokohärenz eines Komplexes von $\mathcal{O}_X$-Moduln.*

Sei
$$U = U_1 \cup \cdots \cup U_d$$
disjunkte Vereinigung von offenen Kugeln aus S und Y eine komplexe Mannigfaltigkeit endlicher Dimension. Man erklärt $\Gamma_b(U \times Y, \mathcal{O}_{S\times Y}) = \{h \in \mathcal{O}_{S\times Y}(U \times Y)$; für jedes Kompaktum K in Y und jede Kugel W, deren Abschluß in einem U_i liegt, ist $h|W \times K$ beschränkt$\}$. Entsprechend erklärt man für eine endliche freie Garbe $\mathcal{F}$ auf $S \times Y$
$$\Gamma_b(U \times Y, \mathcal{F}).$$

$\Gamma_b(U \times Y, \mathcal{F})$ ist auf natürliche Weise Fréchet-Modul über der Fréchet-Algebra $\Gamma_b(U, \mathcal{O}_S)$.

Sei K eine kompakte Teilmenge von S mit höchstens einem Häufungspunkt. Es gibt dann eine Umgebungsbasis
$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \cdots$$
von K von folgender Art:
$$V_i = V_{i1} \cup V_{i2} \cup \cdots \cup V_{id_i}$$
ist disjunkte Vereinigung von offenen Kugeln um geeignete Mittelpunkte und der Abschluß $\overline{V}_{i+1}$ von V_{i+1} ist in V_i enthalten.

Dann sind die Homomorphismen
$$\Gamma_b(V_i, \mathcal{O}_S) \to \Gamma_b(V_{i+1}, \mathcal{O}_S)$$
(*B*)-Homomorphismen. Es gilt
$$\mathcal{O}_S(K) = \varinjlim_i \Gamma_b(V_i, \mathcal{O}_S).$$

Man zeigt: $\mathcal{O}_S(K)$ ist mit der induktiven lokal konvexen Limestopologie eine (separierte)
$$L\text{-}F\text{-}(B)\text{-}Algebra.$$

Sei Q ein Steinsches Kompaktum in einer endlichdimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit Y, $\mathcal{F}$ ein endlicher freier $\mathcal{O}_{S\times Y}$-Modul, $(Y_i)_{i=1,2,3,\ldots}$ eine Umgebungsbasis von Q von offenen Steinschen Teilmengen Y_i. Dann gilt:
$$\mathcal{F}(K \times Q) = \varinjlim_i \Gamma_b(U_i \times Y_i, \mathcal{F}).$$

$\mathcal{F}(K \times Q)$ ist mit der induktiven lokalkonvexen Limestopologie ein
$$L\text{-}F\text{-}Modul$$
über $\mathcal{O}_S(K)$.

Ist $\tilde{Q}$ ein weiteres Steinsches Kompaktum, das im Inneren von Q enthalten ist, so zeigt man (ähnlich wie Lemma 5.13.b), daß die Einschränkungsabbildung

$$\mathscr{F}(K \times Q) \to \mathscr{F}(K \times \tilde{Q})$$

nuklearer $\mathcal{O}_S(K)$-Homomorphismus ist.

Benutzt man die so erklärten Topologien in den Schnitträumen

$$\mathscr{F}(K \times Q)$$

endlicher freier Garben über Produkten der Form $K \times Q$, so kann man den Beweis von Theorem 5.14.a) wörtlich auf diesen Douady-Fall übertragen.

Theorem 5.15. *$(S, \mathcal{O}_S)$ sei ein offener Unterraum eines komplexen Banachraumes,*

$$f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (S, \mathcal{O}_S)$$

ein eigentlicher Morphismus Douadyscher analytischer Räume und $\mathscr{G}^\bullet$ ein relativ bez. S pseudokohärenter Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Dann ist das direkte Bild im Sinne von Verdier

$$\underline{\mathscr{R}} f_*(\mathscr{G}^\bullet)$$

pseudokohärenter Komplex von $\mathcal{O}_S$-Moduln.

Literatur

1. Deligne, P.: Technique de descente cohomologique. Erscheint in: Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer.

1a. Dold, A., Puppe, D.: Homologie nicht additiver Funktoren. Ann. Inst. Fourier **11**, 201 – 312 (1961).

2. Douady, A.: Le problème des modules pour les sous – espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann. Instit. Fourier Grenoble **16**, 1, 1 – 95 (1966).

2a. Douady, A.: Le théorème des images directes de Grauert [d'après Kiehl-Verdier] Séminaire N. Bourbaki Exp. 404, Vol. 1971/1972.

3. Forster, O., Knorr, K.: Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange. Vervielfältigtes Manuskript Regensburg 1971.

4. Forster, O., Knorr, K.: Relativ analytische Räume und die Kohärenz von Bildgarben. Vervielfältigtes Manuskript Regensburg 1971.

5. Godement, R.: Topologie algebrique et théorie des faisceaux. Paris: Hermann 1958.

6. Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ. Math. I. H.E.S. Nr. **5**, Paris 1960.

7. Gunning, R.C., Rossi, H.: Analytic functions of several variables. Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall, Inc.

8. Hartshorne, R.: Residues and duality. Springer Lecture Notes in Mathematics **20**. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1966.

9. Houzel, Ch.: Géométrie analytique Locale I – III Exp. 18 – 21 Séminaire Henri Cartan 13e année 1960/61 Paris.

9a. Kaup, L.: Eine Künnethformel für Fréchetgarben. Math. Zeitschr. **97**, 158 – 168 (1967).

10. Kiehl, R.: Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Inventiones math. **2**, 191 – 214 (1967).
11. Kiehl, R.: Variationen über den Kohärenzsatz von Grauert. Vervielfältigtes Manuskript, Frankfurt/M. 1970.
12. Kiehl, R.: Grauertsche Kohärenzsätze für stetige und differenzierbare Familien komplexer Räume. Actes du Congrés International des Mathématiciens 1/10 septembre 1970/Nice/France 2, p. 633 – 634. Paris: Gauthier-Villars 1971.
13. Kiehl, R., Verdier, J.L.: Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert. Vervielfältigtes Manuskript, Frankfurt/M. 1970.
14. Knorr, K.: Der Grauertsche Projektionssatz. Inventiones math. **12**, 118 – 172 (1971).
15. Pietsch, A.: Nukleare lokalkonvexe Räume. Berlin: Akademie Verlag 1965.
16. Robertson, A.P., Robertson, W.J.: Topologische Vektorräume. Hochschultaschenbücher. Mannheim: Bibliographisches Institut 1967.
17. Séminaire: de Géometrie Algebrique (SGA) Nr.6 Exp. I – III I.H.E.S, Bures-sur-Yvette 1966/67.
18. Séminaire: Heidelberg-Straßburg 1966/67 Publication I. R.M.A. Strasbourg Nr. 3, Ed. 1969.
19. Verdier, J.L.: Categories dérivées, I.H.E.S. Bures-sur-Yvette 1964.
20. Verdier, J.L.: Topologie sur les espaces de cohomologie d'un complexe de faisceaux analytiques à cohomologie cohérente. Bull. Soc. math. France **99**, p. 337 – 343, 1972.

Reinhardt Kiehl
D-6000 Frankfurt am Main
Vogelweidstraße 14
Deutschland

(Eingegangen am 7. Juni 1971)