Werk

Titel: Zahm verzweigter Überlagerungen mit orthosingulärem Verzweigungsort.

Autor: Geyer, Wulf-Dieter

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0015|log12

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Inventiones math. 15, 67 – 71 (1972)
© by Springer-Verlag 1972

Zahm verzweigte Überlagerungen mit orthosingulärem Verzweigungsort

WULF-DIETER GEYER (Heidelberg)

Einleitung

Abhyankar hat in [1] folgenden Satz aufgestellt: *Ist V eine einfach zusammenhängende glatte projektive Varietät über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k, ist W eine orthosinguläre („normal crossing") Teilmannigfaltigkeit der Kodimension 1 in V, deren irreduzible Komponenten W_j in mehrdimensionalen Linearsystemen liegen, so ist jede zahm verzweigte galoissche Überlagerung V' von V, deren Verzweigungsort in W liegt, abelsch* (Abhyankar setzte noch voraus, daß sich je zwei der W_j schneiden, was jedoch automatisch der Fall ist). Der Beweis benutzt allerdings die falsche Behauptung, daß die W_j in solchen Überlagerungen irreduzibel bleiben. Dies ist richtig, wenn die W_j glatt sind, und mit diesem Hinweis schwächt Abhyankar seinen Satz in [2] ab. Die Frage, ob der ursprüngliche Satz nicht doch richtig ist, bleibt offen.

Im einfachsten Fall sieht das Problem so aus: W sei eine irreduzible Kurve vom Grad n mit d Knoten und keinen anderen Singularitäten in der projektiven Ebene V. Sind alle zahm verzweigten Überlagerungen von V, die nur in W verzweigt sind, zyklisch? Hier ist die Behauptung gleichbedeutend damit, daß W in der Überlagerung nicht zerlegt wird. Bisher sind im wesentlichen zwei Methoden benutzt worden, um dieses Problem anzugehen. Zariski [8] und Popp [6] haben studiert, wie sich die Überlagerungsmöglichkeiten ändern, wenn W ein algebraisches System von Kurven durchläuft. Es zeigt sich, daß alle Überlagerungen der oben beschriebenen Art zyklisch sind, wenn W innerhalb der Mannigfaltigkeit der Knotenkurven in ein System von n Geraden in allgemeiner Lage überführt werden kann. Insbesondere ist dies der Fall für $d>(n-2)^2/2$ (W hat „viele" Knoten). Abhyankar [2] benutzt quadratische Transformationen, um die Knoten von W auf einer birational äquivalenten Fläche aufzulösen und dann seinen Satz über Überlagerungen mit glattem Verzweigungsort anwenden zu können. Er erhält die Zyklizität im Falle $d<(n^2+3n-2)/6$ (W hat „wenig" Knoten). Für die restlichen Knotenkurven gibt es noch ein Ergebnis von Edmunds [3], das besagt, daß Überlagerungen von V mit auflösbarer Galoisgruppe, die nur in der irreduziblen Knotenkurve W (zahm) verzweigt sind, bereits zyklisch sind. Er benutzt dabei graphentheoretische Betrachtungen.

In der vorliegenden Arbeit wird das Ergebnis von Edmunds rein gruppentheoretisch neu bewiesen sowie auf beliebige Dimensionen und nicht notwendig irreduziblen Verzweigungsort übertragen. Das bedeutet, der anfangs zitierte Satz von Abhyankar ist richtig, solange man Überlagerungen mit auflösbarer Galoisgruppe betrachtet.

§ 1. Bezeichnungen und Hilfssätze

Alle betrachteten Varietäten V sind irreduzible reduzierte normale projektive Mannigfaltigkeiten über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k.

Lemma 1 (vgl. [7], S. 25). *Sind W_1 und W_2 Primdivisoren von V mit* $\dim |W_i| > 1$ *für* $i = 1, 2$, *so ist* $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

Beweis. Sei $P \in W_2$. Wegen $\dim |W_1| > 1$ gibt es einen zu W_1 linear äquivalenten ganzen Divisor W_1' mit $P \in W_1'$ und $W_1' \neq W_2$. Aus Symmetriegründen kann man annehmen, daß W_2 nicht Komponente von W_1' ist. Sei $W_1' = (g) + W_1$, so induziert g auf W_2 eine von 0 verschiedene Funktion $\bar{g}$ mit einer Nullstelle in P. Also hat $\bar{g}$ auch Pole, also ist $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

Ist $K = k(V)$ der Funktionenkörper von V und K' eine endliche Erweiterung von K, so bezeichne V' die Normalisierung von V in K'. Die kanonische Projektion $f: V' \to V$ heißt eine *Überlagerung*. Aus dem 1. Satz von Bertini und dem Zusammenhangssatz von Zariski wird in [1] als Proposition 5 folgendes geschlossen:

Lemma 2. *Ist $f: V' \to V$ eine Überlagerung, W ein Primdivisor auf V mit* $\dim |W| > 1$, *so ist $f^{-1} W$ zusammenhängend.*

Wir betrachten im folgenden nur galoissche Überlagerungen, d.h. solche, für die $K' | K$ galoissch mit einer endlichen Gruppe G ist. Ist W' eine irreduzible Teilmannigfaltigkeit von V', so ist die *Trägheitsgruppe* $T(W')$ als die Gruppe der $s \in G$ definiert, die auf W' die Identität induzieren. Ist $T(W') \neq 1$, so heißen W' und $W = fW'$ *verzweigt*. Da G transitiv auf den irreduziblen Komponenten von $f^{-1} W$ operiert, bilden die Trägheitsgruppen dieser Komponenten ein vollständiges System konjugierter Untergruppen von G. W' heißt *zahm verzweigt*, wenn die Ordnung von $T(W')$ nicht durch die Charakteristik von k teilbar ist. Für zahm verzweigte Primdivisoren W' ist $T(W')$ zyklisch.

Die Gesamtheit aller verzweigten Punkte P in V bildet den *Verzweigungsort* $\mathfrak{B}_f$ von f, eine Teilmannigfaltigkeit von V. In [5], § 41 wird das folgende „theorem of the purity of branch locus" für ein beliebiges Schema V bewiesen:

Lemma 3. *Ist der Verzweigungspunkt P einfach auf V, so hat $\mathfrak{B}_f$ die reine Kodimension* 1 *in P auf V.*

Ist $\mathfrak{B}_f$ leer, so heißt f *unverzweigt*. Besitzt V keine unverzweigten Überlagerungen, so heißt V *einfach zusammenhängend*. Mit diesem Begriff folgt aus Lemma 3

Lemma 4. *Ist $f: V' \to V$ eine galoissche Überlagerung mit Gruppe G einer einfach zusammenhängenden Varietät V, die im Verzweigungsort glatt ist, so wird G von den Trägheitsgruppen der irreduziblen Komponenten von $f^{-1}\,\mathfrak{B}_f$ erzeugt.*

Nun kommen wir zu dem wesentlichsten Begriff des Abhyankarschen Satzes.

Definition. Sei W eine (eventuell reduzible) Teilmannigfaltigkeit der Kodimension 1 der Varietät V, sei P ein einfacher Punkt von V. Dann heißt W *in P r-fach orthosingulär* („r-fold normal crossing" in [1]), wenn W im kompletten lokalen Ring $\hat{\mathfrak{o}}_{P,V}$ durch eine Gleichung $x_1 x_2 \ldots x_r = 0$ gegeben wird, wobei $x_1, \ldots, x_r$ Teil eines regulären Parametersystems von $\hat{\mathfrak{o}}_{P,V}$ ist. W heißt orthosingulär, wenn W überall orthosingulär ist.

Bemerkung. 1-fach orthosingulär bedeutet einfach (= glatt), 0-fach orthosingulär bedeutet $P \notin W$.

Lemma 5. *Eine ganze, zahm verzweigte Erweiterung S von $R = k[[x_1, \ldots, x_n]]$ mit orthosingulärem Verzweigungsort ist abelsch, d.h., die Quotientenkörper bilden eine abelsche Erweiterung.*

Beweis. Orthosingularität des Verzweigungsortes bedeutet, daß bei geeigneter Wahl der Potenzreihenunbestimmten $S|R$ in $x_1, \ldots, x_r$ mit den Verzweigungsordnungen $e_1, \ldots, e_r$ verzweigt ist. Sei

$$S' = R[x_1^{1/e_1}, \ldots, x_r^{1/e_r}],$$

so ist $S'|R$ abelsch mit den gleichen Verzweigungsordnungen wie $S|R$. Deshalb ist $SS'|S'$ unverzweigt („Lemma von Abhyankar", s. z.B. [4], Lemma 9) in den Primidealen der Höhe 1, also überhaupt unverzweigt nach Lemma 3. Da S' keine unverzweigten Erweiterungen zuläßt (k ist algebraisch abgeschlossen), ist also $S \subset S'$, und damit $S|R$ abelsch.

Hieraus folgt Proposition 11 in [2]:

Lemma 6. *Sei $f: V' \to V$ eine galoissche Überlagerung mit dem Verzweigungsort $\mathfrak{B}$. Ist $P' \in V'$ zahm verzweigt, $fP' = P$ einfach auf V und $\mathfrak{B}$ orthosingulär in P, so ist die Trägheitsgruppe $T(P')$ abelsch.*

Beweis. $T(P')$ ist die Galoisgruppe der Komplettierungen $\hat{\mathfrak{o}}_{P',V'}|\hat{\mathfrak{o}}_{P,V}$.

§ 2. Auflösbare Überlagerungen

Das Hauptergebnis der Arbeit ist der

Satz. *Sei V eine einfach zusammenhängende normale projektive Varietät über dem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Seien W_j Primdivisoren*

auf V mit $\dim |W_j| > 1$, *sei* $W = \bigcup W_j$ *orthosingulär (insbesondere seien alle* $P \in W$ *einfach auf* V*).*

Ist dann $f: V' \to V$ *eine zahm verzweigte Überlagerung mit auflösbarer Galoisgruppe* G, *die höchstens in* W *verzweigt ist, so ist* G *abelsch.*

Zusatz. *Ist* W *irreduzibel, so ist* G *zyklisch.*

Beweis. Sei (bei festem V und W) G ein minimales Gegenbeispiel, dann ist also die Kommutatorgruppe G' ein minimaler Normalteiler von G, insbesondere abelsch. Sei $f^{-1} W_j = \bigcup W_j'^{s_k}$ mit gewissen $s_k \in G$ die Zerlegung in irreduzible Komponenten, sei N_j der von den zyklischen Trägheitsgruppen $T(W_j'^{s_k}) = \langle t_j \rangle^{s_k}$ erzeugte Normalteiler in G. Zunächst wollen wir zeigen, daß N_j abelsch ist, und können zum Beweis annehmen, daß t_j nicht zentral ist. Wegen der Minimalität von G ist G/N_j abelsch, also $N_j \supset G'$. Ferner ist $t_j \equiv s^{-1} t_j s \bmod G'$, also ist $N_j = G' \langle t_j \rangle$. Da $f^{-1} W_j$ nach Lemma 2 zusammenhängend ist, gibt es ein $s \in G$ und einen Punkt $P' \in W_j' \cap W_j'^{s}$ mit $t_j \neq t_j^s$. Nun sind aber t_j und t_j^s in der Trägheitsgruppe von P' enthalten, die nach Lemma 6 abelsch ist. Daher ist t_j^s im Zentralisator $Z(t_j)$ von t_j, und damit ist t_j^{s-1} ein nichttriviales Element in $Z(t_j) \cap G'$, also auch in $Z(N_j) \cap G'$. Da G' ein minimaler Normalteiler von G ist, muß das Zentrum $Z(N_j)$ von N_j also G' enthalten. Damit ist $N_j/Z(N_j)$ zyklisch, also N_j abelsch.

Nach Lemma 4 wird G von den N_j erzeugt. Da G' von jedem N_j zentralisiert wird, liegt G' im Zentrum von G. Nun betrachten wir zwei der Normalteiler, etwa N_i und N_j. Nach Lemma 1 gibt es einen Punkt $P \in W_i \cap W_j$, sei $P' \in W_i' \cap W_j'$ über P. Dann sind t_i und t_j in $T(P')$, also vertauschbar. Da G' zentral ist, sind also N_i und N_j elementweise vertauschbar. Also ist G abelsch (und kein minimales Gegenbeispiel). Die Zyklizität der N_j beweist den Zusatz. In diesem Fall ist die Trägheitsgruppe die volle Gruppe, also tritt auch keine Zerlegung von W in V' ein.

Bemerkung 1. In der Sprache der Fundamentalgruppen kann der Satz so formuliert werden: Unter den gegebenen Voraussetzungen ist die Kommutatorgruppe von $\pi_1^{(z)}(V - W)$ perfekt, d.h. sie fällt mit ihrer eigenen Kommutatorgruppe zusammen. Dabei läßt sich die Voraussetzung $\pi_1(V) = 1$ noch zu $\pi_1^{ab}(V) = 1$ abschwächen (V ist ohne abelsche unverzweigte Überlagerungen).

Bemerkung 2. Ist W irreduzibel, so ist $\pi_1^{(z)ab}(V - W)$ endlich, genauer: Ist d der Grad von W bei einer projektiven Einbettung von V, ist V' eine zahm verzweigte abelsche Überlagerung von V mit Verzweigungsort W vom Grade e, so ist e ein Teiler von d. Denn ist $K' = K(y^{1/e})$ die zugehörige Körpererweiterung, so ist auf V $(y) = e \cdot D + e' \cdot W$, wo W nicht in D auftritt und e, e' teilerfremd sind. Aus $\operatorname{grad}(y) = 0$ folgt: e teilt d.

Es gibt also eine maximale abelsche zahm verzweigte Überlagerung V'_W von V mit in W liegendem Verzweigungsort. Nach dem Satz überträgt sich die Bedingung $\pi_1^{ab}=1$ von V auf V'_W. Damit ist eine Fülle von Varietäten konstruierbar, auf die der Satz anwendbar ist, ausgehend von einer einfach zusammenhängenden Varietät wie z. B. $V=\mathbf{P}^n$.

Literatur

1. Abhyankar, S.: Tame coverings and fundamental groups of algebraic varieties. Part I: Branch loci with normal crossings. Amer. J. Math. **81**, 46–94 (1959).
2. – Part II: Branch curves with higher singularities. Amer. J. Math. **82**, 120–178 (1960).
3. Edmunds, G.: Coverings of node curves. J. London Math. Soc. (2) **1**, 473–479 (1969).
4. Frey, G., Geyer, W. D.: Über die Fundamentalgruppe von Körpern mit Divisorentheorie, erscheint im J. Reine Angew. Math.
5. Nagata, M.: Local rings. New York: Interscience 1962.
6. Popp, H.: Über die Fundamentalgruppe 2-dimensionaler Schemata. Ist. Naz. Alta Mat., Symp. Math. **III**, 403–451 (1970).
7. – Fundamentalgruppen algebraischer Mannigfaltigkeiten. Lecture Notes 176. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.
8. Zariski, O.: On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve. Amer. J. Math. **51**, 305–328 (1939).

Dr. Wulf-Dieter Geyer
Mathematisches Institut der Universität
D-6900 Heidelberg 1, Tiergartenstraße
Deutschland

(Eingegangen am 25. Juni 1971)