Werk

Titel: Der Grauertscher Projektionssatz.

Autor: Knorr, K.

Jahr: 1971

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0012|log18

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Inventiones math. 12, 118–172 (1971)
© by Springer-Verlag 1971

Der Grauertsche Projektionssatz

KNUT KNORR (Ratisbona)

Vorwort

Diese Arbeit ist aus den Seminarvorträgen entstanden, die der Verfasser im Wintersemester 1968/69 an der Universität Genf gehalten hat. Sie hat das Anliegen, die vielen schönen Ideen und neuen Methoden, die Grauert in seinem berühmten „blauen Buch" [3] entwickelt hat, etwas verständlicher darzustellen und vor allem einen leicht lesbaren, wenn auch ziemlich langen Beweis für den großen Grauertschen Projektionssatz zu geben.

Im Prinzip ist der hier vorgelegte Beweis der alte Grauertsche Beweis; keine wesentlichen neuen Ideen sind hinzugekommen! Dem Kenner wird jedoch auffallen, daß eine Vielzahl von neuen Wendungen und kleineren Tricks den ursprünglichen Beweis doch wesentlich vereinfachen. Bemerkenswerte Neuerungen, die nicht vom Verfasser selbst stammen, sind erstens ein eleganter Beweis von Narasimhan-Siu für den Grauertschen Privilegiertheitssatz und zweitens eine viel weniger schwerfällige Definition der „Meßüberdeckung", die hauptsächlich von O. Forster herrührt.

An dieser Stelle möchte ich mich bei den Herren R. Narasimhan und P. Siegfried für ihre Mühe und stete Kritik bedanken.

Besonderer Dank jedoch gebührt meinem Freund und Lehrer Herrn O. Forster, der in aufopfernder Weise wochenlang mit mir zusammen die Genfer Seminarausarbeitung [6] unter heftigsten Diskussionen umgearbeitet hat. Das so entstandene Manuskript wurde dann nochmals aufs sorgfältigste von Herrn R. R. Simha gelesen. Er hat überaus viele Verbesserungsvorschläge gemacht und die Arbeit von den vorletzten Ungenauigkeiten befreit. Auch ihm sei dafür herzlichst gedankt.

Inhalt

Kapitel I. Grauerts privilegierte Polyzylinder

§ 1. Die Grauertnorm 119
§ 2. Existenztheorem für privilegierte Polyzylinder 124
§ 3. Cohomologietheorie mit Schranken 129

Kapitel II. Kalkül der Meßüberdeckungen
§ 4. Meßatlanten und Meßüberdeckungen 135
§ 5. Die Grauertnorm 138
§ 6. Der Glättungssatz 146

Kapitel III. Der Grauertsche Projektionssatz
§ 7. Der Projektionssatz und die Haupthilfssätze 152
§ 8. Induktionsschema und Induktionsanfang 157
§ 9. Der erste Induktionsschritt 158
§ 10. Der zweite Induktionsschritt 165
§ 11. Eine Anwendung: Der Grauertsche Vergleichssatz 169

Literatur 172

Kapitel I. Grauerts privilegierte Polyzylinder

Der Beweis des Grauertschen Projektionssatzes beruht auf einer verfeinerten Methode der Potenzreihenentwicklung nach den Koordinaten des Basisraums. Dazu werden im ersten Paragraphen auf den Schnittmoduln kohärenter analytischer Garben über Polyzylindern Pseudonormen eingeführt, die der Potenzreihenmethode angepaßt sind (Grauertnorm). Bezüglich dieser Pseudonorm wird im zweiten Paragraphen ein Satz über die Existenz privilegierter Polyzylinder für Garbenhomomorphismen bewiesen. Dieser Satz stellt ein wesentliches Werkzeug dar, das immer dann herangezogen werden muß, wenn man Abschätzungen über einem Polyzylinder haben will, ohne letzteren zu verkleinern. Als erste Anwendung der privilegierten Polyzylinder wird im dritten Paragraphen ein Theorem B mit Schranken bewiesen. Dies ist der vorbereitende Satz für das wichtige Glättungstheorem, das im nächsten Kapitel hergeleitet werden wird.

§ 1. Die Grauertnorm

Bezeichnungen. Sei

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}.$$

Für $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m) \in \mathbb{R}_+^m$, $n = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$ und $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{C}^m$, sei

$$\left(\frac{t}{\rho}\right)^n = \left(\frac{t_1}{\rho_1}\right)^{n_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^{n_m}.$$

Sei $\rho, \rho' \in \mathbb{R}_+^m$. Wir schreiben $\rho \leqq \rho'$, wenn $\rho_j \leqq \rho'_j$ für $1 \leqq j \leqq m$ und $\rho < \rho'$, wenn $\rho_j < \rho'_j$ für $1 \leqq j \leqq m$ gilt. Für $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m) \in \mathbb{R}_+^m$ und $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{C}^m$ setzen wir

$$P(t, \rho) = \{t' \in \mathbb{C}^m \mid |t'_j - t_j| < \rho_j, 1 \leqq j \leqq m\}.$$

Wenn t speziell der Nullpunkt des $\mathbb{C}^m$ ist, dann schreiben wir $P(\rho)$ an Stelle von $P(t, \rho)$.

Sei $N \in \mathbb{N}$. Mit $\mathcal{O}_N$ werde die Garbe der holomorphen Funktionen auf dem $\mathbb{C}^N$ bezeichnet.

Sei G eine offene Menge des $\mathbb{C}^N$ und $f \in \Gamma(G, \mathcal{O}_N)$. Dann setzen wir

$$\|f\|_G = \sup_{z \in G} |f(z)|.$$

Für $f = (f^{(1)}, \ldots, f^{(p)}) \in \Gamma(G, \mathcal{O}_N^p)$ setzen wir

$$\|f\|_G = \sup\{\|f^{(1)}\|_G, \ldots, \|f^{(p)}\|_G\}.$$

Sei G eine offene Menge des $\mathbb{C}^N$ und $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m) \in \mathbb{R}_+^m$. Jede holomorphe Abbildung

$$f = (f^{(1)}, \ldots, f^{(p)}) \in \Gamma(G \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^p)$$

läßt sich nach den kanonischen Variablen $t = (t_1, \ldots, t_m)$ des $\mathbb{C}^m$ in eine Potenzreihe

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{t}{\rho}\right)^n$$

entwickeln, wobei die Koeffizienten

$$f_n = (f_n^{(1)}, \ldots, f_n^{(p)}) \in \Gamma(G, \mathcal{O}_N^p)$$

sind. Ist $\mathcal{G}$ eine kohärente $\mathcal{O}_{N+m}$-Modulgarbe auf $G \times P(\rho)$ und α: $\mathcal{O}_{N+m}^p \to \mathcal{G}$ ein surjektiver Garbenhomomorphismus, dann werden nach Grauert auf den Schnittmoduln $\Gamma(G \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^p)$ und $\Gamma(G \times P(\rho), \mathcal{G})$ folgende Pseudonormen eingeführt:

Definition. i) Für $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{t}{\rho}\right)^n \in \Gamma(G \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^p)$ sei

$$\|f\|_{G\rho} = \sup_n \|f_n\|_G.$$

ii) Für $s \in \Gamma(G \times P(\rho), \mathcal{G})$ sei

$$\|s\|_{G\rho} = \inf_{\alpha(f) = s} \|f\|_{G\rho},$$

wobei das Infimum über alle $f \in \Gamma(G \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^p)$ mit $\alpha(f) = s$ genommen wird.

Wenn speziell $N = 0$ ist, dann schreiben wir $\|s\|_\rho$ an Stelle von $\|s\|_{G\rho}$.

Proposition 1.0. *Für jedes $f \in \Gamma(G \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^p)$ gilt:*

i) $\|f\|_{G\rho} \leqq \|f\|_{G \times P(\rho)}$.

ii) $\|f\|_{G'\rho'} < \infty$ *für* $G' \subset\subset G$, $\rho' < \rho$.

iii) $\|f\|_{G'\rho'} \leqq \|f\|_{G\rho}$ *für* $G' \subset G$, $\rho' \leqq \rho$.

iv) *Wenn* $\sigma\in\mathbb{R}_+^N$, $\rho\in\mathbb{R}_+^m$ *und* $f\in\Gamma(P(\sigma,\rho),\mathcal{O}_{N+m}^p)$ *mit* $\|f\|_{(\sigma,\rho)}<\infty$, *dann gilt die Ungleichung*

$$\|f\|_{P(\sigma')\rho}\leqq\frac{\sigma}{\sigma-\sigma'}\|f\|_{(\sigma,\rho)}\quad\text{für }\sigma'<\sigma.$$

Der Beweis dieser einfachen Rechenregeln sei dem Leser überlassen.

Proposition 1.1. *Zu jedem* $s\in\Gamma(G\times P(\rho),\mathcal{G})$ *mit* $\|s\|_{G\rho}<\infty$, *gibt es ein* $f\in\Gamma(G\times P(\rho),\mathcal{O}_{N+m}^p)$ *mit*

$$\alpha(f)=s\quad\text{und}\quad\|f\|_{G\rho}=\|s\|_{G\rho}.$$

Beweis. Nach Definition der Norm gibt es eine Folge (f_n),

$$f_n\in\Gamma(G\times P(\rho),\mathcal{O}_{N+m}^p)\quad\text{mit }\alpha(f_n)=s$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{G\rho}=\|s\|_{G\rho}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (Satz von Montel) kann angenommen werden, daß die Folge (f_n) kompakt gegen eine Funktion

$$f\in\Gamma(G\times P(\rho),\mathcal{O}_{N+m}^p)$$

konvergiert. Da der Kern von α abgeschlossen bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz ist, folgt $\alpha(f)=s$. Eine leichte Überlegung zeigt, daß

$$\|f\|_{G\rho}=\lim_{n\to\infty}\|f_n\|_{G\rho}=\|s\|_{G\rho}.$$

Proposition 1.2. *Für* $\rho<\rho_0$ *sei* $s\in\Gamma(G\times P(\rho_0),\mathcal{G})$ *und* $g\in\Gamma(G\times P(\rho),\mathcal{O}_{N+m})$. *Dann gilt*

$$\|g\cdot s\|_{G\rho}\leqq\frac{\rho_0}{\rho_0-\rho}\|g\|_{G\rho}\|s\|_{G\rho_0}.$$

Beweis. Wegen Proposition (1.1) genügt es, den Fall $\mathcal{G}=\mathcal{O}_{N+m}^p$ zu betrachten. Die einfache Rechnung in diesem Fall sei dem Leser überlassen.

Sei F eine offene Menge des $\mathbb{C}^M$ und $\varphi\colon F\times P(\rho_0)\to G\times P(\rho_0)$ eine holomorphe Abbildung über $P(\rho_0)$ (über $P(\rho_0)$ soll heißen, daß φ mit den Projektionen nach $P(\rho_0)$ verträglich ist). Dann gilt folgendes

Lemma 1.3. *Für jedes* $\rho<\rho_0$ *und jedes* $f\in\Gamma(G\times P(\rho),\mathcal{O}_{N+m})$ *gilt die Ungleichung*

$$\|f\circ\varphi\|_{F\rho}\leqq\frac{\rho_0}{\rho_0-\rho}\|f\|_{G\rho}.$$

Beweis. Sei zunächst f unabhängig von den kanonischen Koordinatenfunktionen $t=(t_1, \ldots, t_m)$ des $\mathbb{C}^m$. Dann läßt sich f als Schnitt aus $\Gamma(G \times P(\rho_0), \mathcal{O}_{N+m})$ auffassen, somit ist $f \circ \varphi \in \Gamma(F \times P(\rho_0), \mathcal{O}_{M+m})$. Offensichtlich gilt

$$f \circ \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (f \circ \varphi)_n \left(\frac{t}{\rho}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (f \circ \varphi)_n \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^n \left(\frac{t}{\rho_0}\right)^n,$$

$$\|(f \circ \varphi)_n\|_F \leqq \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \|f \circ \varphi\|_{F\rho_0}.$$

Nach (1.0)i) folgt jetzt

$$\|f \circ \varphi\|_{F\rho_0} \leqq \|f \circ \varphi\|_{F \times P(\rho_0)} \leqq \|f\|_{G \times P(\rho_0)} = \|f\|_G.$$

Insgesamt hat man also folgende Formel:

$$(*) \qquad \|(f \circ \varphi)_n\|_F \leqq \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \|f\|_G.$$

Sei jetzt

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{t}{\rho}\right)^n \in \Gamma(G \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}),$$

dann ist

$$f \circ \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n \circ \varphi) \left(\frac{t}{\rho}\right)^n.$$

Für die Koeffizienten der Entwicklung

$$(f_n \circ \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (f_n \circ \varphi)_k \left(\frac{t}{\rho}\right)^k$$

gilt nach (*) die Ungleichung

$$\|(f_n \circ \varphi)_k\|_F \leqq \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \|f\|_{G\rho}.$$

Einsetzen liefert

$$f \circ \varphi = \sum_{s=0}^{\infty} \Big(\sum_{s=n+k} (f_n \circ \varphi)_k \Big) \left(\frac{t}{\rho}\right)^s,$$

und es gilt die Abschätzung

$$\Big\| \sum_{s=n+k} (f_n \circ \varphi)_k \Big\|_F \leqq \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (f_n \circ \varphi)_k \right\|_F \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k \|f\|_{G\rho} = \frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho} \|f\|_{G\rho}.$$

Damit ist Lemma 1.3 bewiesen.

Sei $\varphi: F \times P(\rho_0) \to G \times P(\rho_0)$ eine holomorphe Abbildung über $P(\rho_0)$, $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_{M+m}$-Modul auf $F \times P(\rho_0)$ und $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_{N+m}$-Modul auf $G \times P(\rho_0)$. In kanonischer Weise ist $\varphi_*(\mathcal{F})$ ein $\mathcal{O}_{N+m}$-Modul. Sei $\psi: \mathcal{G} \to \varphi_*(\mathcal{F})$ ein $\mathcal{O}_{N+m}$-Modulgarbenhomomorphismus. Für jedes $\rho \leqq \rho_0$ und jedes Paar

(F', G') von offenen Mengen $F' \subset F$, $G' \subset G$ mit $\bar{\varphi}^{-1}(G' \times P(\rho)) \supset F' \times P(\rho)$ liefert ψ einen φ-Homomorphismus

$$\psi: \Gamma(G' \times P(\rho), \mathscr{G}) \to \Gamma(F' \times P(\rho), \mathscr{F}),$$

d.h., ψ ist linear und für jedes

$$s \in \Gamma(G' \times P(\rho), \mathscr{G}) \quad \text{und} \quad g \in \Gamma(G' \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m})$$

gilt

$$\psi(g \cdot s) = (g \circ \varphi) \cdot \psi(s).$$

Sei jetzt $\psi: \mathcal{O}_{N+m}^q \to \varphi_*(\mathcal{O}_{M+m}^p)$ ein $\mathcal{O}_{N+m}$-Modulhomomorphismus über $G \times P(\rho_0)$. Vermöge der kanonischen Basis wird ψ durch q Schnitte

$$f_1, \ldots, f_q \in \Gamma(F \times P(\rho_0), \mathcal{O}_{M+m}^p)$$

gegeben. Sei

$$g = (g_1, \ldots, g_q) \in \Gamma(G' \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^q),$$

dann ist

$$\psi(g) = \sum_{k=1}^{q} (g_k \circ \varphi) f_k.$$

Wir setzen noch

$$\|\psi\|_{F\rho_0} = \sum_{k=1}^{q} \|f_k\|_{F\rho_0}.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Lemma 1.4. *Für jedes $\rho < \rho_0$ und jedes $g \in \Gamma(G \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^q)$ gilt die Ungleichung*

$$\|\psi(g)\|_{F\rho} \leqq \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho}\right)^2 \|\psi\|_{F\rho_0} \|g\|_{G\rho}.$$

Beweis. Nach Lemma 1.3 gilt

$$\|g_k \circ \varphi\|_{F\rho} \leqq \frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho} \|g_k\|_{G\rho}.$$

Daraus folgt mit Proposition 1.2

$$\begin{aligned} \|\psi(g)\|_{F\rho} &= \left\| \sum_{k=1}^{q} (g_k \circ \varphi) f_k \right\|_{F\rho} \leqq \sum_{k=1}^{q} \|(g_k \circ \varphi) f_k\|_{F\rho} \\ &\leqq \frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho} \sum_{k=1}^{q} \|g_k \circ \varphi\|_{F\rho} \cdot \|f_k\|_{F\rho_0} \\ &\leqq \left(\frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho}\right)^2 \|\psi\|_{F\rho_0} \cdot \|g\|_{G\rho}. \end{aligned}$$

Damit ist Lemma 1.4 bewiesen.

Sei $\mathscr{F}$ ein $\mathcal{O}_{M+m}$-Modul auf $F\times P(\rho_0)$ und $\mathscr{G}$ ein $\mathcal{O}_{N+m}$-Modul auf $G\times P(\rho_0)$ und sei $\varphi\colon F\times P(\rho_0)\to G\times P(\rho_0)$ eine holomorphe Abbildung über $P(\rho_0)$. Weiter sei folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{M+m}^{p} & \xrightarrow{\alpha} & \mathscr{F} & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow{\scriptstyle \psi_0} & & \uparrow{\scriptstyle \psi} & & \\ \mathcal{O}_{N+m}^{q} & \xrightarrow{\beta} & \mathscr{G} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

gegeben, wobei ψ_0 und ψ φ-Modulhomomorphismen, α bzw. β surjektive Garbenhomomorphismen über $F\times P(\rho_0)$ bzw. $G\times P(\rho_0)$ sind. Vermöge Proposition 1.1 folgt aus Lemma 1.4 unmittelbar

Proposition 1.5. *Für jedes $\rho<\rho_0$ und jedes $s\in\Gamma(G\times P(\rho),\mathscr{G})$ mit $\|s\|_{G\rho}<\infty$ gilt die Ungleichung*

$$\|\psi(s)\|_{F\rho}\leqq\left(\frac{\rho_0}{\rho_0-\rho}\right)^2\|\psi_0\|_{F\rho_0}\|s\|_{G\rho}.$$

§ 2. Existenztheorem für privilegierte Polyzylinder

Definition. Für $\delta_1\in\mathbb{R}_+$ heißt

$$\Delta(\delta_1)=\{\rho_1\in\mathbb{R}_+\,|\,\rho_1\leqq\delta_1\}.$$

1-dimensionale Dreiecksmenge. Ist $\Delta(\delta_1,\ldots,\delta_{m-1})$ eine $(m-1)$-dimensionale Dreiecksmenge und $\delta_m\colon\Delta(\delta_1,\ldots,\delta_{m-1})\to\mathbb{R}_+$ eine monoton wachsende Funktion, dann heißt

$$\Delta(\delta_1,\ldots,\delta_{m-1},\delta_m)=\{\rho=(\rho',\rho_m)\in\mathbb{R}_+^m\,|\,\rho'\in\Delta(\delta_1,\ldots,\delta_{m-1}),\,\rho_m\leqq\delta_m(\rho')\}$$

eine m-dimensionale Dreiecksmenge.

Im folgenden werde mit (Δ, M) stets ein Paar bezeichnet, welches aus einer Dreiecksmenge Δ und einer monoton fallenden Abbildung $M\colon\Delta\to\mathbb{R}_+$ besteht.

Bemerkung. i) Der Durchschnitt zweier Dreiecksmengen ist wieder eine Dreiecksmenge.

ii) In einer Dreiecksmenge gibt es beliebig kleine $\rho>0$.

Definition. Sei $(X,\mathcal{O}_X)$ ein komplexer Raum, $\mathscr{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, $f\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ und $x\in X$. Dann heißt $\mathscr{F}$ im Punkte x ohne f-Torsion, wenn der Homomorphismus

$$\mathscr{F}_x\to\mathscr{F}_x,\qquad\varphi\mapsto f\cdot\varphi,$$

injektiv ist.

Bemerkung 2.0. Mit den Bezeichnungen der obigen Definition gilt: Zu jedem kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ und jedem kompakten Teil K von X gibt es eine natürliche Zahl d derart, daß die Garbe $f^d\mathcal{F}$ in jedem Punkt $x\in K$ ohne f-Torsion ist.

Proposition 2.1. *Sei X ein komplexer Raum, $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul und $f\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$.*

Behauptung. *Zu jeder kompakten Teilmenge $K\subset X$ existiert ein $\varepsilon>0$ derart, daß für alle $x\in K$ und alle $\alpha\in\mathbb{C}$ mit $0<|\alpha|<\varepsilon$ der Halm $\mathcal{F}_x$ ohne $(f-\alpha)$-Torsion ist.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei X Steinsch. Es gibt eine Familie $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ von kohärenten Untermodulgarben von $\mathcal{F}$ und eine lokalendliche Familie $(X_i)_{i\in I}$ von irreduziblen analytischen Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften [2]:

1) $\operatorname{supp}(\mathcal{F}/\mathcal{M}_i)=X_i$.
2) $\bigcap_{i\in I}\mathcal{M}_i=0$.
3) Mit den Bezeichnungen

$$M_i=\Gamma(X,\mathcal{M}_i)$$

und

$$p_i=\{f\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X)\,|\,f|X_i=0\}$$

gilt: M_i ist ein p_i-primärer Untermodul von $\Gamma(X,\mathcal{F})$, d. h., sind $g\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ und $\varphi\in\Gamma(X,\mathcal{F})$ mit $g\varphi\in M_i$, so folgt $\varphi\in M_i$ oder $g\in p_i$.

Sei $J\subset I$ die (endliche) Menge aller $j\in I$ mit $X_j\cap K\neq\emptyset$. Wir können $\varepsilon>0$ so wählen, daß für alle $0<|\alpha|<\varepsilon$ die Funktion $f-\alpha$ auf keinem X_j mit $j\in J$ identisch verschwindet. Sei $g=f-\alpha$. Wir zeigen, daß $\mathcal{F}_x$ für alle $x\in K$ ohne g-Torsion ist. Nach Theorem A genügt es zu zeigen, daß aus $\varphi\in\Gamma(X,\mathcal{F})$ und $(g\varphi)_x=0$ folgt $\varphi_x=0$. Aus $(g\varphi)_x=0$ folgt $(g\varphi)_x\in\mathcal{M}_{i,x}$ für alle $i\in I$. Falls $x\in X_i$, folgt daraus, da M_i primär ist, $g\varphi\in M_i$. Weil $g\notin p_i$, folgt $\varphi\in M_i$ für alle i mit $x\in X_i$. Daraus ergibt sich $\varphi_x=0$, was zu zeigen war.

Notationen. Sei $\varphi\colon\mathcal{O}_m^p\to\mathcal{O}_m^q$ ein in einer Umgebung des Nullpunktes des $\mathbb{C}^m$ definierter Homomorphismus. Für jede natürliche Zahl k schreiben wir

$$\mathcal{O}_m^p(k)=\mathcal{O}_m^p/t_m^{k+1}\,\mathcal{O}_m^p.$$

Mit φ_k wird der von φ induzierte Homomorphismus

$$\varphi_k\colon\ \mathcal{O}_m^p(k)\to\mathcal{O}_m^q(k)$$

bezeichnet. Für $k=\infty$ werden folgende Symbole vereinbart:

$$\mathcal{O}_m^p(\infty)=\mathcal{O}_m^p\quad\text{und}\quad\varphi_\infty=\varphi.$$

Theorem 2.2 (Grauert). *Sei* $\varphi\colon \mathcal{O}_m^p \to \mathcal{O}_m^q$ *ein in einer Umgebung des Nullpunkts des* $\mathbb{C}^m$ *definierter Homomorphismus. Dann gibt es ein* (Δ, M), *so daß für jedes* $\rho\in\Delta$ *und jedes* $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ *gilt:*

Für jedes $f\in\Gamma(P(\rho), \mathcal{O}_m^q(k))$ *mit*

$$(f)_0\in(\operatorname{im}\varphi_k)_0 \quad \textit{und} \quad \|f\|_\rho<\infty$$

gibt es ein $g\in\Gamma(P(\rho), \mathcal{O}_m^p(k))$ *mit*

$$\varphi_k(g)=f \quad \textit{und} \quad \|g\|_\rho\leqq M(\rho)\,\|f\|_\rho.$$

Man nennt dann (Δ, M) ein (m-dimensionales) φ-privilegiertes Paar, jeden Polyzylinder $P(\rho)$ mit $\rho\in\Delta$ einen φ-privilegierten Polyzylinder bezüglich des Nullpunktes.

Man beachte, daß die Konstante $M(\rho)$ unabhängig von k ist.

Beweis. Der Beweis geschieht durch Induktion nach m.

Für $m=0$ ist das Theorem trivial. Sei also bereits (2.2) für $m-1$ bewiesen. Der einfacheren Bezeichnung wegen setzen wir $\mathcal{O}_m=\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}_{m-1}={}'\mathcal{O}$. Wir dürfen annehmen, daß φ in einer Umgebung von $\overline{P(1)}$, $1=(1,\ldots,1)\in\mathbb{R}_+^m$, definiert ist. Nach (1.4) gibt es eine Konstante $c>0$, so daß für jedes

$$\rho'=(\rho_1,\ldots,\rho_{m-1})\leqq(1,\ldots,1)$$

und jedes

$$h\in\Gamma(P(\rho^*), \mathcal{O}^p),\ \rho^*=(\rho', 1)$$

gilt:

$$\|\varphi(h)\|_{\rho^*}\leqq c\,\|h\|_{\rho^*}.$$

Vermöge der Abbildung

$$\Big(\text{Restklasse von } \sum_{\nu=0}^{k} f_\nu\, t_m^\nu\Big)\mapsto(f_0,\ldots,f_k)$$

können wir $\mathcal{O}^p(k)$ mit ${}'\mathcal{O}^{p(k+1)}$ und $\mathcal{O}^q(k)$ mit ${}'\mathcal{O}^{q(k+1)}$ identifizieren. Der Homomorphismus φ_k geht dabei in einen ${}'\mathcal{O}$-Homomorphismus

$$\tilde{\varphi}_k\colon {}'\mathcal{O}^{p(k+1)}\to{}'\mathcal{O}^{q(k+1)}$$

über. Wir haben also folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^p & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}^q \\ \downarrow{\scriptstyle r_k} & & \downarrow{\scriptstyle r_k} \\ {}'\mathcal{O}^{p(k+1)} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_k} & {}'\mathcal{O}^{q(k+1)} \end{array}$$

Für $f\in\Gamma(P(\rho), \mathcal{O}^q)$ gilt $\|r_k(f)\|_{\rho'}\leqq\rho_m^{-k}\,\|f\|_\rho$ und für jedes $h\in\Gamma(P(\rho'), {}'\mathcal{O}^{p(k+1)})$ gibt es ein Polynom $H\in\Gamma(P(\rho^*), \mathcal{O}^p)$, $\rho^*=(\rho', 1)$, vom Grade $\leqq k$ in t_m mit

$$\|H\|_{\rho^*}=\|h\|_{\rho'} \quad \text{und} \quad r_k(H)=h.$$

Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung folgt jetzt Theorem 2.2 für $k \in \mathbb{N}$ mit noch von k abhängigem (Δ, M). Sei d eine natürliche Zahl derart, daß die Garbe $t_m^d(\mathcal{O}^q/\operatorname{im}\varphi)$ im Nullpunkt ohne t_m-Torsion ist. Um (2.2) für $k>d$ mit einem von k unabhängigen (Δ, M) beweisen zu können, benötigen wir folgenden

Hilfssatz. *Seien $\Delta'(\delta_1, \ldots, \delta_{m-1})$ und $N\colon \Delta' \to \mathbb{R}_+$ die Dreiecksmenge und die Konstante für die Abbildung*

$$\tilde{\varphi}_d\colon {}'\mathcal{O}^{p(d+1)} \to {}'\mathcal{O}^{q(d+1)}.$$

Für $\rho' = (\rho_1, \ldots, \rho_{m-1})$ setzen wir

$$\delta_m(\rho') = \min\left(\frac{1}{2c\,N(\rho')\,(d+1)}, 1\right).$$

Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k>d$, und $\rho \in \Delta(\delta_1, \ldots, \delta_{m-1}, \delta_m)$:

Zu jedem $f \in \Gamma(P(\rho), \mathcal{O}^q(k))$ mit

$$(f)_0 \in (\operatorname{im}\varphi_k)_0 \quad \text{und} \quad \|f\|_\rho < \infty$$

gibt es eine Folge $(g_j)_{0 \leqq j < k-d+1}$ von Polynomen vom Grade $\leqq d$ in t_m mit Koeffizienten in $\Gamma(P(\rho'), {}'\mathcal{O}^p)$ und

$$\|g_j\|_{\rho^*} \leqq 2N(\rho')\,\rho_m^{-(d+j)}\,\|f\|_\rho,$$

$$(*) \qquad f - \varphi\left(\sum_{v=0}^{j} t_m^v\, g_v\right) \equiv 0 \mod t_m^{d+j+1}\mathcal{O}^q$$

für alle j mit $0 \leqq j < k-d+1$.

Beweis des Hilfssatzes. Die Folge (g_j) wird induktiv konstruiert.

1) Konstruktion von g_0:

Es gilt $\|r_d(f)\|_{\rho'} \leqq \rho_m^{-d}\,\|f\|_\rho$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $g_0' \in \Gamma(P(\rho'), {}'\mathcal{O}^{p(d+1)})$ mit

$$\tilde{\varphi}_d(g_0') = r_d(f) \quad \text{und} \quad \|g_0'\|_{\rho'} \leqq N(\rho')\,\rho_m^{-d}\,\|f\|_\rho.$$

Sei g_0 das Polynom vom Grade $\leqq d$ in t_m mit $r_d(g_0) = g_0'$. Man hat

$$\|g_0\|_{\rho^*} = \|g_0'\|_{\rho'} \leqq N(\rho')\,\rho_m^{-d}\,\|f\|_\rho$$

und

$$r_d\big(f - \varphi(g_0)\big) = r_d(f) - \varphi\big(r_d(g_0)\big) = 0.$$

Also ist

$$f - \varphi(g_0) \equiv 0 \mod t_m^{d+1}\mathcal{O}^q.$$

2) Seien $g_0, \ldots, g_{j-1}$, $1 \leqq j < k-d+1$, schon konstruiert. Für $G_{j-1} = \sum_{v=0}^{j-1} t_m^v\, g_v$ hat man

$$\|G_{j-1}\|_{\rho^*} \leqq 2N(\rho')\,\rho_m^{-(d+j-1)}\,(d+1)\,\|f\|_\rho.$$

Jetzt gilt die Ungleichung

$$\|\varphi(G_{j-1})\|_{\rho^*} \leqq c\,\|G_{j-1}\|_{\rho^*} \leqq \frac{1}{\delta_m(\rho')\,\rho_m^{d+j-1}}\,\|f\|_\rho .$$

Wir setzen $\varphi(G_{j-1}) = h' + h''$, wobei h' ein Polynom in t_m vom Grade $\leqq d+j-1$ und

$$h'' \equiv 0 \mod t_m^{d+j}\,\mathcal{O}^q$$

ist. Offensichtlich hat man

$$\|h''\|_{\rho^*} \leqq \|\varphi(G_{j-1})\|_{\rho^*},$$

$$\|h''\|_\rho \leqq \rho_m^{d+j}\,\|h''\|_{\rho^*} \leqq \frac{\rho_m}{\delta_m(\rho')}\,\|f\|_\rho \leqq \|f\|_\rho .$$

Da aber

$$f - \varphi(G_{j-1}) \equiv 0 \mod t_m^{d+j}\,\mathcal{O}^q$$

ist, hat man

$$\|f - \varphi(G_{j-1})\|_\rho \leqq \|f\|_\rho + \|h''\|_\rho \leqq 2\,\|f\|_\rho .$$

Wir setzen $f - \varphi(G_{j-1}) = t_m^j f_j$ mit $f_j \equiv 0 \bmod t_m^d\,\mathcal{O}^q$. Da $t_m^d(\mathcal{O}^q/\mathrm{im}\,\varphi)$ im Nullpunkt ohne t_m-Torsion ist, folgt, daß $(f_j)_0 \in (\mathrm{im}\,\varphi)_0$. Jetzt ist

$$\|f_j\|_\rho \leqq 2\,\rho_m^{-j}\,\|f\|_\rho .$$

Wie in (1) konstruieren wir ein Polynom g_j vom Grade $\leqq d$ mit

$$\|g_j\|_{\rho^*} \leqq N(\rho')\,\rho_m^{-d}\,\|f_j\|_\rho \leqq 2\,N(\rho')\,\rho_m^{-(d+j)}\,\|f\|_\rho$$

und

$$f_j - \varphi(g_j) \equiv 0 \mod t_m^{d+1}\,\mathcal{O}^q .$$

Man hat jetzt

$$f - \varphi(G_{j-1} + t_m^j\,g_j) = t_m^j\big(f_j - \varphi(g_j)\big) \equiv 0 \mod t_m^{d+j+1}\,\mathcal{O}^q$$

und damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir zeigen jetzt, daß Theorem 2.2 für $d < k \leqq \infty$ mit dem im Hilfssatz definierten Δ und

$$M(\rho) = \frac{2\,N(\rho')\,(d+1)}{\rho_m^d}$$

richtig ist.

In der Tat, aus (*) folgt

$$\|t_m^\nu\,g_\nu\|_\rho \leqq 2\,N(\rho')\,\rho_m^{-d}\,\|f\|_\rho ,$$

$$\left\|\sum_{\nu=0}^{j} t_m^\nu\,g_\nu\right\|_\rho \leqq 2\,N(\rho')\,\rho_m^{-d}(d+1)\,\|f\|_\rho = M(\rho)\,\|f\|_\rho .$$

Folglich ist

$$g=\sum_{\nu=0}^{k-d} t_m^{\nu}\, g_\nu$$

ein Element aus $\Gamma(P(\rho), \mathcal{O}^p(k))$ mit

$$\|g\|_\rho \leqq M(\rho)\, \|f\|_\rho .$$

Da aber

$$f-\varphi(g)\equiv 0 \mod t_m^{\nu}\, \mathcal{O}^q$$

für jedes $\nu<d+k+2$, folgt $f=\varphi_k(g)$. Damit ist Theorem 2.2 vollständig bewiesen.

§ 3. Cohomologietheorie mit Schranken

Notationen. $\mathfrak{U}=(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ und $\mathfrak{V}=(V_\beta)_{\beta\in B}$ bezeichnen Familien offener Mengen eines topologischen Raumes X. Wenn es eine Abbildung τ: $B\to A$ derart gibt, daß $V_\beta \subset\subset U_{\tau\beta}$ (V_β liegt relativkompakt in $U_{\tau\beta}$) für jedes $\beta\in B$ gilt, dann heißt $\mathfrak{V}$ eine eigentliche Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ und wir schreiben $\mathfrak{V}\subset\subset\mathfrak{U}$. Eine Familie $\mathfrak{U}=(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ von offenen Teilmengen eines komplexen Raumes heißt Steinsche Familie, wenn jedes U_α Steinsch ist. Wir benutzen die Čechsche Cohomologietheorie mit alternierenden Coketten.

Im folgenden sei D eine offene beschränkte Menge des $\mathbb{C}^N$, $\rho_0\in\mathbb{R}_+^m$ und $\mathfrak{U}=(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie offener Teilmengen von D.

Für $a=(\alpha_0,\ldots,\alpha_n)\in \mathrm{nerf}(\mathfrak{U})$ sei

$$U_a=U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_n}.$$

Für $\rho\in\mathbb{R}_+^m$ sei

$$\mathfrak{U}\times P(\rho)=(U_\alpha\times P(\rho))_{\alpha\in A}.$$

Sei jetzt auf $D\times P(\rho_0)$ ein $\mathcal{O}_{N+m}$-Modul $\mathcal{F}$ samt einer Auflösung $\mathcal{O}_{N+m}^p\xrightarrow{\alpha}\mathcal{F}\to 0$ gegeben. Für jedes $\rho\in\mathbb{R}_+^m$ mit $\rho\leqq\rho_0$ wird auf dem Modul $C^n(\mathfrak{U}\times P(\rho),\mathcal{F})$ bezüglich der Auflösung α eine Pseudonorm eingeführt:

Definition. Für $\xi=(\xi_a)\in C^n(\mathfrak{U}\times P(\rho),\mathcal{F})$ sei

$$\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}=\sup_a \|\xi_a\|_{U_a\rho}.$$

Für den Fall, daß $m=0$ ist, setzen wir $\|\xi\|_{\mathfrak{U}}$ an Stelle von $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}$.

Proposition 3.1. *Sei D eine Steinsche offene Menge im $\mathbb{C}^N$, $\mathfrak{U}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von D und $\mathfrak{V}$ eine eigentliche Verfeinerung von $\mathfrak{U}$.*

Behauptung. *Es gibt eine Konstante $M>0$ derart, daß für jedes $\xi\in Z^n(\mathfrak{U},\mathcal{O}_N^p)$, $n\geqq 1$ ein $\eta\in C^{n-1}(\mathfrak{U},\mathcal{O}_N^p)$ existiert mit*

$$\delta\eta=\xi \quad \textit{und} \quad \|\eta\|_{\mathfrak{V}}\leqq M\,\|\xi\|_{\mathfrak{U}}.$$

Beweis. Sei $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}_N^p)$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen. Bekanntlich bildet $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}_N^p)$ mit dieser Topologie einen Fréchetraum. Als Kern ist $Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}_N^p)$ mit der induzierten Topologie ebenfalls ein Fréchetraum. Wegen Theorem B ist die stetige Abbildung

$$\delta\colon\ C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_N^p) \to Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}_N^p)$$

surjektiv. Nach einem Satz von Banach ist δ dann sogar offen. Die Menge

$$V = \{\eta \in C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{O}_N^p) \,|\, \|\eta\|_{\mathcal{V}} < 1\}$$

ist eine offene Umgebung der Null. Das Bild $\delta(V)$ ist eine offene Umgebung der Null in $Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}_N^p)$. Es gibt jetzt ein $M > 0$ derart, daß

$$W = \{\xi \in Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}_N^p) \,|\, \|\xi\|_{\mathcal{U}} \leqq M^{-1}\} \subset \delta(V).$$

Sei jetzt $\xi \in Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}_N^p)$ und ohne Einschränkung sei

$$0 \neq \|\xi\|_{\mathcal{U}} = C < \infty.$$

Dann ist $(MC)^{-1}\xi \in W$. Es gibt somit ein $\eta' \in V$ mit $\delta\eta' = (MC)^{-1}\xi$. Setzen wir $\eta = MC\eta'$, so gilt

$$\delta\eta = \xi \quad \text{und} \quad \|\eta\|_{\mathcal{V}} \leqq M\,\|\xi\|_{\mathcal{U}}.$$

Proposition 3.2. *Sei D eine Steinsche offene Menge des $\mathbb{C}^N$, $\mathcal{U}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von D und $\mathcal{V}$ eine eigentliche Verfeinerung von $\mathcal{U}$.*

Behauptung. *Es gibt eine Konstante $M > 0$ unabhängig von $\rho \leqq \rho_0$, derart, daß gilt:*

i) *Für jedes $\xi \in Z^0(\mathcal{U} \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^p)$ gilt*

$$\|\xi\|_{D\rho} = \|\xi\|_{\mathcal{U}\rho}.$$

Dabei wird ξ auf der linken Seite der Ungleichung als Element von $\Gamma(D \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^p)$ aufgefaßt.

ii) *Für jedes $\xi \in Z^n(\mathcal{U} \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^p)$, $n \geqq 1$ mit $\|\xi\|_{\mathcal{U}\rho} < \infty$ gibt es ein $\eta \in C^{n-1}(\mathcal{V} \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^p)$ mit*

$$\delta\eta = \xi \quad \textit{und} \quad \|\eta\|_{\mathcal{V}\rho} \leqq M\,\|\xi\|_{\mathcal{U}\rho}.$$

Beweis. i) ist trivial.

ii) Sei $\xi \in Z^n(\mathcal{U} \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^p)$, dann läßt sich ξ zunächst nach Coketten in eine Potenzreihe

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \left(\frac{t}{\rho}\right)^k$$

mit $\xi_k \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}_N^p)$ und $\|\xi_k\|_{\mathcal{U}} \leqq \|\xi\|_{\mathcal{U}\rho}$ entwickeln. Da aber die Potenzreihenentwicklung eindeutig ist, gilt bereits $\xi_k \in Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{O}_N^p)$. Nach (3.1)

gibt es Coketten $\eta_k \in C^{n-1}(\mathscr{U}, \mathcal{O}_N^p)$ derart, daß

$$\delta\eta_k = \xi_k \quad \text{und} \quad \|\eta_k\|_{\mathscr{V}} \leqq M \|\xi\|_{\mathscr{U}\rho}$$

ist. Die Reihe

$$\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \left(\frac{t}{\rho}\right)^k$$

stellt ein Element aus $C^{n-1}(\mathscr{V} \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^p)$ dar. Offensichtlich gilt

$$\delta\eta = \xi \quad \text{und} \quad \|\eta\|_{\mathscr{V}\rho} \leqq M \|\xi\|_{\mathscr{U}\rho}.$$

Theorem 3.3. *Sei D eine Steinsche offene Menge des $\mathbb{C}^N$ und $\mathscr{F}$ ein $\mathcal{O}_{N+m}$-Modul nebst einer über $D \times P(\rho_0)$ gegebenen Auflösung*

$$0 \to \mathcal{O}_{N+m}^{p_d} \to \cdots \to \mathcal{O}_{N+m}^{p_1} \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{O}_{N+m}^{p_0} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \to 0.$$

Sei $\mathscr{U}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von D und $\mathscr{V}$ eine eigentliche Verfeinerung von $\mathscr{U}$ mit der Vereinigung $D' \subset\subset D$.

Behauptung. *Es gibt ein (Δ, M) derart, daß für jedes $\rho \in \Delta$ gilt:*

i) *Für jedes $\xi \in Z^0(\mathscr{U} \times P(\rho), \mathscr{F})$ mit $\|\xi\|_{\mathscr{U}\rho} < \infty$ gilt*

$$\|\xi\|_{D'\rho} \leqq M(\rho) \|\xi\|_{\mathscr{U}\rho}.$$

Dabei ist auf der linken Seite ξ als Schnitt in $\Gamma(D' \times P(\rho), \mathscr{F})$ aufgefaßt.

ii) *Zu jedem $\xi \in Z^n(\mathscr{U} \times P(\rho), \mathscr{F})$, $n \geqq 1$, $\|\xi\|_{\mathscr{U}\rho} < \infty$ gibt es ein $\eta \in C^{n-1}(\mathscr{V} \times P(\rho), \mathscr{F})$ mit*

$$\delta\eta = \xi \quad \textit{und} \quad \|\eta\|_{\mathscr{V}\rho} \leqq M(\rho) \|\xi\|_{\mathscr{U}\rho}.$$

Bemerkung. Ist $D \subset\subset \mathbb{C}^N$ ein Polyzylinder und ist $\mathscr{F}$ in einer Umgebung von $\overline{D \times P(\rho_0)}$ definiert, so existiert stets eine in der Voraussetzung des Theorems 3.3 genannte Auflösung von $\mathscr{F}$.

Zum Beweis von (3.3) benutzen wir folgendes

Lemma 3.4. *Sei D eine offene Steinsche Menge des $\mathbb{C}^N$. Über $D \times P(\rho_0)$ sei eine exakte Sequenz*

$$0 \to \mathcal{O}_{N+m}^{p_d} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{O}_{N+m}^{p_1} \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{O}_{N+m}^{p_0}$$

gegeben. Dann gibt es zu jeder offenen Menge $D' \subset\subset D$ ein (Δ, M) derart, daß für alle $\rho \in \Delta$ gilt:

Für jedes $f \in \Gamma(D \times P(\rho), \operatorname{im} \alpha_0)$ mit $\|f\|^*_{D\rho} < \infty$ gilt die Ungleichung

$$\|f\|^{**}_{D'\rho} \leqq M(\rho) \|f\|^*_{D\rho}.$$

Dabei bezeichnet $\|f\|^*_{D\rho}$ die Grauertnorm von f als Element $\Gamma(D \times P(\rho), \mathcal{O}_{N+m}^{p_0})$ und $\|f\|^{**}_{D'\rho}$ die Grauertnorm f bezüglich der Auflösung

$$\mathcal{O}_{N+m}^{p_1} \to \operatorname{im} \alpha_0 \to 0.$$

Der Beweis von (3.3) und (3.4) geschieht simultan durch Doppelinduktion nach d gemäß folgendem Schema

0. $(3.3)_0$ (Proposition 3.2).

I. $(3.3)_{d-1} \Rightarrow (3.4)_d$.

II. $(3.4)_d$ und $(3.3)_{d-1} \Rightarrow (3.3)_d$.

Beweis von I. Es gibt eine endliche Familie $\mathscr{K}=(K_\lambda)$ von Polyzylindern $K_\lambda = P(z_\lambda, \rho_\lambda)$ derart, daß gilt:

1) $\mathscr{K}$ überdeckt noch $\overline{D'}$.

2) $K_\lambda \times P(\rho)$ ist α_0-privilegiert für alle ρ aus einer m-dimensionalen Dreiecksmenge.

Sei $\rho'_\lambda < \rho_\lambda$ derart gewählt, daß $\mathscr{K}'=(K'_\lambda)$ mit $K'_\lambda = P(z_\lambda, \rho'_\lambda)$ noch $\overline{D'}$ überdeckt. Sei jetzt

$$f \in \Gamma\big(D \times P(\rho), \operatorname{im} \alpha_0\big) \quad \text{mit} \quad \|f\|^*_{D\rho} < \infty .$$

Wir setzen $f_\lambda = f | K_\lambda \times P(\rho)$. Offensichtlich ist $(f_\lambda) \in Z^0\big(\mathscr{K} \times P(\rho), \operatorname{im} \alpha_0\big)$ und es gilt

$$\|f_\lambda\|^*_{(\rho_\lambda, \rho)} \leqq \|f\|^*_{D\rho}.$$

Nach (2.2) gibt es $g_\lambda \in \Gamma\big(K_\lambda \times P(\rho), \mathcal{O}^{p_1}_{N+m}\big)$ mit

$$\alpha_0(g_\lambda) = f_\lambda \quad \text{und} \quad \|g_\lambda\|_{(\rho_\lambda, \rho)} \leqq M_\lambda(\rho)\, \|f_\lambda\|_{(\rho_\lambda, \rho)}.$$

Nach (1.0) iv) gilt

$$\|g_\lambda\|_{K'_\lambda \rho} \leqq \frac{\rho_\lambda}{\rho_\lambda - \rho'_\lambda}\, \|g_\lambda\|_{(\rho_\lambda, \rho)}.$$

Setzen wir

$$M_1(\rho) = \sup_\lambda \frac{\rho_\lambda}{\rho_\lambda - \rho'_\lambda}\, M_\lambda(\rho),$$

so gilt die Ungleichung

$$\|(f_\lambda)\|^{**}_{K'\rho} \leqq M_1(\rho)\, \|f\|^*_{D\rho}.$$

Nach $(3.3)_{d-1}$ folgt jetzt,

$$\|f\|^{**}_{D'\rho} \leqq M_2(\rho)\, \|(f_\lambda)\|^{**}_{K'\rho},$$

somit

$$\|f\|^{**}_{D'\rho} \leqq M_2(\rho)\, M_1(\rho)\, \|f\|^*_{D\rho}.$$

Beweis von II. Sei $\xi \in Z^n\big(\mathscr{U} \times P(\rho), \mathscr{F}\big)$ mit $\|\xi\|_{\mathscr{U}\rho} < \infty$. Es gibt wegen (1.1) ein $\omega \in C^n\big(\mathscr{U} \times P(\rho), \mathcal{O}^{p_0}_{N+m}\big)$ mit

$$\alpha(\omega) = \xi \quad \text{und} \quad \|\omega\|_{\mathscr{U}\rho} = \|\xi\|_{\mathscr{U}\rho}.$$

Jetzt ist $\delta\omega \in Z^{n+1}\big(\mathscr{U} \times P(\rho), \operatorname{im} \alpha_0\big)$ und es gilt

$$\|\delta\omega\|^*_{\mathscr{U}\rho} \leqq (n+1)\, \|\xi\|_{\mathscr{U}\rho}.$$

Wir wählen offene Steinsche Mengen D_1 und D_2 mit

$$D \supset\supset D_1 \supset\supset D_2 \supset\supset D'$$

und Steinsche Überdeckungen $\mathscr{U}_i$ von D_i derart, daß

$$\mathscr{U} \supset\supset \mathscr{U}_1 \supset\supset \mathscr{U}_2 \supset\supset \mathscr{V}$$

gilt.

Nach $(3.4)_d$ gilt jetzt

$$\|\delta\omega\|^{**}_{U_1\rho} \leqq M_1(\rho)\, \|\delta\omega\|^{*}_{\mathscr{U}\rho}.$$

Nach $(3.3)_{d-1}$ gibt es ein $\eta \in C^n(\mathscr{U}_2 \times P(\rho), \operatorname{im} \alpha_0)$ mit

$$\delta\omega = \delta\eta \quad \text{und} \quad \|\eta\|^{**}_{\mathscr{U}_2\rho} \leqq M_2(\rho)\, \|\delta\omega\|^{**}_{\mathscr{U}_1\rho}.$$

Nach (1.1) und (1.4) gilt mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}_+$

$$\|\eta\|^{*}_{\mathscr{U}_2\rho} \leqq C\, \|\eta\|^{**}_{\mathscr{U}_2\rho}.$$

Jetzt gilt

$$\alpha(\omega - \eta) = \xi, \qquad \omega - \eta \in Z^n(\mathscr{U}_2 \times P(\rho), \mathcal{O}^{po}_{N+m})$$

und man hat die Ungleichung

$$\|\omega - \eta\|^{*}_{\mathscr{U}_2\rho} \leqq \big(1 + CM_2(\rho)\, M_1(\rho)\,(n+1)\big)\, \|\xi\|_{\mathscr{U}\rho}.$$

Für den Fall $n = 0$ folgt die Behauptung jetzt unmittelbar aus (3.2) i). Sei also $n \geqq 1$, dann gibt es nach (3.2) ii) ein $\sigma \in C^{n-1}(\mathscr{V} \times P(\rho), \mathcal{O}^{po}_{N+m})$ mit

$$\delta\sigma = \omega - \eta \quad \text{und} \quad \|\sigma\|^{*}_{\mathscr{V}\rho} \leqq M\, \|\omega - \eta\|^{*}_{\mathscr{U}_2\rho}.$$

Man hat jetzt

$$\delta\alpha(\sigma) = \xi \quad \text{und} \quad \|\alpha(\sigma)\|_{\mathscr{V}\rho} \leqq \|\sigma\|^{*}_{\mathscr{V}\rho}.$$

Damit ist der Beweis von Theorem 3.3 beendet.

Aus Lemma 3.4 leiten wir noch den folgenden nützlichen Hilfssatz her:

Proposition 3.5. *Sei $E \subset \mathbb{C}^N$ ein Polyzylinder, $D \subset\subset E$ eine Steinsche offene Menge im $\mathbb{C}^N$, $\rho_0 \in \mathbb{R}^m_+$ und $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ein über $E \times P(\rho_0)$ definierter Garbenmorphismus zwischen zwei kohärenten $\mathcal{O}_{N+m}$-Moduln.*

Behauptung. *Für jede relativkompakte offene Menge $D' \subset\subset D$ gibt es ein m-dimensionales (Δ, M), so daß für jedes $\rho \in \Delta$ gilt: Zu jedem $s \in \Gamma(D \times P(\rho), \operatorname{im} \varphi)$ mit $\|s\|^{*}_{D\rho} < \infty$ gibt es ein $s' \in \Gamma(D' \times P(\rho), \mathscr{F})$ derart, daß*

$$\varphi(s') = s | D' \times P(\rho)$$

und

$$\|s'\|_{D'\rho} \leqq M(\rho)\, \|s\|^{*}_{D\rho}.$$

Dabei bezeichnet $\| \ \|_{D'\rho}$ *die Grauertnorm in* $\Gamma(D' \times P(\rho), \mathscr{F})$ *und* $\| \ \|^*_{D\rho}$ *die Grauertnorm in* $\Gamma(D \times P(\rho), \mathscr{G})$ *bezüglich vorgegebener Auflösungen von* $\mathscr{F}$ *bzw.* $\mathscr{G}$.

Beweis. Ohne Einschränkung seien über $E \times P(\rho_0)$ die folgenden Auflösungen

$$\mathcal{O}^q_{N+m} \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{O}^p_{N+m} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{G} \to 0$$

und

$$\mathcal{O}^n_{N+m} \xrightarrow{\beta} \mathscr{F} \to 0$$

gegeben. Es gibt einen Garbenmorphismus $\gamma\colon \mathcal{O}^n_{N+m} \to \mathcal{O}^p_{N+m}$ derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathscr{G} \\ {\scriptstyle (\beta,\,0)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \alpha} \\ \mathcal{O}^n_{N+m} \oplus \mathcal{O}^q_{N+m} & \xrightarrow{(\gamma,\,\alpha_0)} & \mathcal{O}^p_{N+m} \end{array}$$

kommutiert und $\operatorname{im}(\gamma, \alpha_0) = \bar{\alpha}^{-1}(\operatorname{im}\varphi)$ ist. Sei jetzt $s \in \Gamma(D \times P(\rho), \operatorname{im}\varphi)$ mit $\|s\|^*_{D\rho} < \infty$. Nach (1.1) gibt es ein $f \in \Gamma(D \times P(\rho), \mathcal{O}^p_{N+m})$ mit $\alpha(f) = s$ und $\|f\|_{D\rho} = \|s\|^*_{D\rho}$. Nach (3.4) und (1.1) gibt es ein

$$(g, g') \in \Gamma(D' \times P(\rho), \mathcal{O}^n_{N+m} \oplus \mathcal{O}^q_{N+m})$$

mit

$$\gamma(g) + \alpha_0(g') = f \,|\, D' \times P(\rho)$$

und

$$\|(g, g')\|_{D'\rho} \leqq M(\rho)\, \|f\|_{D\rho}.$$

Wir setzen $\beta(g) = s'$. Offensichtlich gilt

$$\varphi(s') = s \,|\, D' \times P(\rho)$$

und

$$\|s'\|_{D'\rho} \leqq M(\rho)\, \|s\|^*_{D\rho}.$$

Kapitel II. Kalkül der Meßüberdeckungen

Die von Grauert erfundene Technik der Meßüberdeckungen, die in diesem Kapitel entwickelt wird, dient, grob gesprochen, dazu, gewisse formale Potenzreihen-Konstruktionen konvergent zu machen.

In § 4 werden bezüglich eines komplexen Raumes X, der holomorph und eigentlich über einer offenen Menge S eines komplexen Zahlenraumes liegt, Meßkarten, Meßatlanten und Meßüberdeckungen definiert und der Nachweis ihrer Existenz erbracht. Mit Hilfe der Meßüberdeckungen wird dann in § 5, die im vorigen Kapitel definierte Grauertnorm auf den komplexen Raum X überpflanzt und es werden für die so gewonnene Pseudonorm einige fundamentale, aber elementare Eigen-

schaften hergeleitet. Im letzten Paragraphen dieses Kapitels wird zunächst das „Theorem B mit Schranken" auf den komplexen Raum X übertragen (Glättungslemma). Dann wird nach einigen technischen Vorbereitungen mit Hilfe des Glättungslemmas der wichtigste Satz über Meßüberdeckungen, das Grauertsche Glättungstheorem, bewiesen. Dieses Theorem gestattet, einen Cozyklus durch einen Cohomologen auf einer gröberen (glatteren) Meßüberdeckung definierten Cozyklus zu ersetzen und dessen Norm abzuschätzen. Dies kann als Satz von Leray mit Schranken interpretiert werden.

§ 4. Meßatlanten und Meßüberdeckungen

Notationen. Es werde stets mit X ein komplexer Raum, mit S eine offene Menge des $\mathbb{C}^m$ und mit $\pi\colon X \to S$ eine eigentliche holomorphe Abbildung bezeichnet.

Wenn $U \subset X$ und $P \subset S$, dann schreiben wir

$$X(P) = \{x \in X \mid \pi(x) \in P\},$$
$$U(P) = U \cap X(P), \qquad \bar{U}(P) = \bar{U} \cap X(P).$$

Ist speziell $P = P(t, \rho)$ ein Polyzylinder in S, so schreiben wir $X(t, \rho)$ und $U(t, \rho)$ für $X(P)$ bzw. $U(P)$. Statt $X(\{t\})$ schreiben wir kurz $X(t)$.

Definition. Eine Meßkarte über einer offenen Teilmenge $P \subset S$ ist ein Quadrupel $(X', \Phi, D \times P, R)$, welches aus folgenden Daten besteht:

i) X' Steinsche offene Menge in X.

ii) D offener Polyzylinder in einem $\mathbb{C}^N$.

iii) $\Phi\colon X' \to D \times P$ holomorphe Einbettung mit

$$\pi | X' = \mathrm{pr}_P \circ \Phi.$$

iv) R ist eine Funktion, die jedem kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ eine Auflösung

$$R(\mathcal{F})\colon \mathcal{O}_{N+m}^p \to \Phi_*(\mathcal{F}) \to 0 \qquad \text{über } D \times P$$

zuordnet.

Definition. Ein Meßatlas über einer offenen Teilmenge $P \subset S$ besteht aus folgenden Daten:

i) $(X_k, \Phi_k, D_k \times P, R_k)_{k \in K}$ eine endliche Familie von Meßkarten über P (die D_k sind offene Polyzylinder in einem $\mathbb{C}^{N(k)}$).

ii) $(Y_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von $X(P)$.

Diese Daten müssen folgendes Axiom erfüllen:

(M) Zu jedem $\alpha \in A$ gibt es ein $k \in K$ derart, daß für jedes $\beta \in A$ mit $Y_\alpha \cap Y_\beta \neq \emptyset$ die Inklusion $Y_\beta \subset X_k$ gilt.

Bemerkung. 1) Zu jedem $t\in S$ und jedem $x\in X(t)$ gibt es einen offenen Polyzylinder $P=P(t,\rho)\subset S$ und eine Meßkarte $(X', \Phi, D\times P, R)$ mit $x\in X'$.

2) Weil π eigentlich ist, gibt es für jedes $t\in S$ einen offenen Polyzylinder P um t und einen Meßatlas über P.

Im folgenden sei stets ein Meßatlas über S fest vorgegeben. (Dies bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit.) Alle folgenden Definitionen und Sätze sind bezüglich dieses Meßatlasses gemeint. Für diesen werden noch folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$K^*=\{(\alpha,k)\in A\times K\mid Y_\alpha\subset X_k\},$$
$$K(\alpha)=\{k\in K\mid Y_\alpha\subset X_k\}\quad \text{für } \alpha\in A.$$

Für $a=(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)$, $\alpha_i\in A$, $0\leqq i\leqq p$ schreiben wir

$$K(a)=K(\alpha_0)\cap\cdots\cap K(\alpha_p).$$

Bemerkung. Aus (M) folgt unmittelbar: Wenn $a\in\mathrm{nerf}(Y_\alpha)$, dann $K(a)\neq\emptyset$, d.h. ist $Y_{\alpha_0}\cap\cdots\cap Y_{\alpha_p}\neq\emptyset$, so gibt es ein $k\in K$ mit $Y_{\alpha_i}\subset X_k$ für $0\leqq i\leqq p$.

Definition. Sei $t\in S$. Eine Meßüberdeckung $\mathfrak{U}=(\mathscr{U},\mathbf{E})$ über t besteht aus folgenden Daten:

i) $\mathscr{U}=(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ Familie Steinscher offener Mengen in X mit $U_\alpha\subset\subset Y_\alpha$.

ii) $\mathbf{E}=(E_\alpha^k)_{(\alpha,k)\in K^*}$, wobei E_α^k relativkompakte Steinsche offene Mengen in D_k sind.

Die Daten müssen folgenden Axiomen genügen:

(U 1) $$\tilde{U}_\alpha(\mathbf{E},t)\subset U_\alpha(t),$$

(U 2) $$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha(\mathbf{E},t)=X(t).$$

Dabei wurden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\tilde{U}_\alpha(\mathbf{E},t)=\bigcup_{k\in K(\alpha)}\Phi_k^{-1}(\bar{E}_\alpha^k\times\{t\}),$$
$$U_\alpha(\mathbf{E},t)=\bigcap_{k\in K(\alpha)}\Phi_k^{-1}(E_\alpha^k\times\{t\}).$$

Definition. Seien $\mathfrak{U}=(\mathscr{U},\mathbf{E})$ und $\mathfrak{V}=(\mathscr{V},\mathbf{F})$ Meßüberdeckungen über t. $\mathfrak{V}$ heißt zulässige Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ über t, geschrieben $\mathfrak{U}\gg\mathfrak{V}$, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(V 1) $$\bar{V}_\alpha(t)\subset U_\alpha(\mathbf{E},t),\qquad \alpha\in A,$$

(V 2) $$F_\alpha^k\subset\subset E_\alpha^k,\qquad (k,\alpha)\in K^*.$$

Eine Folge von zulässigen Verfeinerungen

$$\mathfrak{U} \gg \cdots \gg \mathfrak{V} \gg \cdots \gg \mathfrak{W} \quad \text{über } t$$

nennen wir Meßkette.

Bemerkung. Eine einfache Überlegung zeigt: Ist $\mathfrak{U}$ eine Meßüberdeckung bzw. $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}$ eine zulässige Verfeinerung über t, dann gibt es eine Umgebung P von t derart, daß $\mathfrak{U}$ eine Meßüberdeckung bzw. $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}$ eine zulässige Verfeinerung über t' für alle $t' \in P$ ist. Wir sagen dann, $\mathfrak{U}$ sei eine Meßüberdeckung (bzw. $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}$ eine zulässige Verfeinerung) über P.

Lemma 4.1. *Voraussetzung:*

i) *D Polyzylinder im $\mathbb{C}^N$.*

ii) *A analytische Menge in D.*

iii) *S Steinsche offene Teilmenge in A.*

iv) *K kompakte Teilmenge von S.*

Behauptung. *Es gibt eine offene Steinsche Menge E in D derart, daß*

$$K \subset E \cap A \subset S.$$

Beweis. Nach Narasimhan (s. [8], § 3 Lemma) existiert eine streng plurisubharmonische $\mathscr{C}^\infty$-Funktion $\varphi: S \to \mathbb{R}$, so daß

$$S_c = \{x \in S \mid \varphi(x) < c\} \subset\subset S$$

für alle $c \in \mathbb{R}$. Wir wählen $c, c' \in \mathbb{R}$, so daß

$$K \subset S_c \subset\subset S_{c'}.$$

Nach Richberg [9] gibt es eine offene Menge $U \subset\subset D$ mit $U \cap A = S_{c'}$ und eine streng plurisubharmonische $\mathscr{C}^\infty$-Funktion $\Phi: U \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi \mid S_{c'} = \varphi \mid S_{c'}.$$

Da D Steinsch ist, gibt es endlich viele Funktionen $f_i: D \to \mathbb{C}$, so daß

$$\{x \in U \mid f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\} = S_{c'}.$$

Für jedes $C > 0$ ist die Funktion

$$\Psi = \Phi + C \sum_{i=1}^{k} |f_i|^2$$

eine streng plurisubharmonische $\mathscr{C}^\infty$-Funktion auf U.

Sei V eine offene Menge mit $S_c \subset\subset V \subset\subset U$. Falls C genügend groß gewählt wird, gilt

$$E = \{x \in V \mid \Psi(x) < c\} \subset\subset V.$$

Daher ist E Steinsch und $E \cap A = S_c$.

Proposition 4.2. 1) *Zu jedem $t \in S$ gibt es eine Meßüberdeckung $\mathfrak{V}$ über t.*

2) *Sei $\mathfrak{V}$ eine Meßüberdeckung über t, dann gibt es Meßüberdeckungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ über t derart, daß $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V} \gg \mathfrak{W}$ über t gilt.*

3) *Sei $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{W}$ über t gegeben, dann gibt es eine Meßüberdeckung $\mathfrak{V}$ über t derart, daß $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V} \gg \mathfrak{W}$ über t gilt.*

Der Beweis von (4.2) ist mit Hilfe von (**4.1**) trivial.

§ 5. Die Grauertnorm

Notationen. Ist $\mathfrak{U} = (\mathscr{U}, \mathbf{E})$ eine Meßüberdeckung über t und $a = (\alpha_0, \ldots, \alpha_p)$ ein Simplex mit Werten in A, so schreiben wir

$$U_a = U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p},$$
$$E_a^k = E_{\alpha_0}^k \cap \cdots \cap E_{\alpha_p}^k, \qquad k \in K(a).$$

Seien $\mathfrak{U}^i = (\mathscr{U}^i, \mathbf{E}^i)$, $1 \leqq i \leqq n$, Meßüberdeckungen über t mit $U^i = (\mathscr{U}_\alpha^i)_{\alpha \in A}$, $\mathbf{E}^i = (E_\alpha^{i,k})_{(\alpha,k) \in K^*}$ und sei $\rho_0 \in \mathbb{R}_+^m$ so klein gewählt, daß für alle $t' \in P(t, \rho_0)$ die $\mathfrak{U}^i$ noch Meßüberdeckungen über t' sind. Wenn a_i, $1 \leqq i \leqq n$, Simplizes mit Werten in A sind und $\rho \leqq \rho_0$ ist, dann schreiben wir

$$U_{a_1}^1 \ldots U_{a_n}^n(t, \rho) = U_{a_1}^1 \cap \cdots \cap U_{a_n}^n \cap X(t, \rho),$$
$$E_{a_1}^{1,k} \ldots E_{a_n}^{n,k} = E_{a_1}^{1,k} \cap \cdots \cap E_{a_n}^{n,k},$$

für $k \in K(a_1) \cap \cdots \cap K(a_n)$.

Anmerkung. Wir benutzen später nur die Fälle $n = 1$ und $n = 2$. Ist $\mathscr{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf X, dann liefert jeder Schnitt $s \in \Gamma(U_{a_1}^1 \ldots U_{a_n}^n(t, \rho), \mathscr{F})$ für jedes $k \in K(a_1) \cap \cdots \cap K(a_n)$ in kanonischer Weise einen Schnitt

$$\Phi_k(s) \in \Gamma(E_{a_1}^{1,k} \ldots E_{a_n}^{n,k} \times P(t, \rho), \Phi_k(\mathscr{F})).$$

Dabei haben wir die Bildgarbe $(\Phi_k)_*(\mathscr{F})$ kurz mit $\Phi_k(\mathscr{F})$ bezeichnet.

Auf dem Modul $\Gamma(U_{a_1}^1 \ldots U_{a_n}^n(t, \rho), \mathscr{F})$ wird folgende Pseudonorm eingeführt:

Definition. Für $s \in \Gamma(U_{a_1}^1 \ldots U_{a_n}^n(t, \rho), \mathscr{F})$ sei

$$\|s\|_{U_{a_1}^1 \ldots U_{a_n}^n \rho} = \sup_{k \in K(a_1) \cap \cdots \cap K(a_n)} \|s\|_{U_{a_1}^1 \ldots U_{a_n}^n \rho}^k.$$

Dabei wurde

$$\|s\|^{k}_{U^1_{a_1}\dots U^n_{a_n}\rho}=\|\Phi_k(s)\|_{E^1_{a_1}{}^k\dots E^n_{a_n}{}^k\rho}$$

gesetzt für $k\in K(a_1)\cap\cdots\cap K(a_n)$.

Für natürliche Zahlen $r_1,\dots,r_n$ bezeichne

$$C^{r_1\dots r_n}\big(U^1(t,\rho),\dots,U^n(t,\rho);\mathscr{F}\big)$$

den Modul, der aus Coketten $\xi=(\xi_{a_1\dots a_n})$ besteht, wobei $a_i\in\mathrm{nerf}^{r_i}(U^i)$ und

$$\xi_{a_1\dots a_n}\in\Gamma\big(U^1_{a_1}\dots U^n_{a_n}(t,\rho),\mathscr{F}\big).$$

Weiterhin sollen die Coketten noch bezüglich der (r_i+1)-tupel $a_i=(\alpha^i_0,\dots,\alpha^i_{r_i})$ alternieren.

Sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ Meßüberdeckungen über t und a ein Simplex mit Werten in A, so schreiben wir

$$U_a\mathscr{V}(t,\rho)=\big(U_a\cap V_\alpha\cap X(t,\rho)\big)_{\alpha\in A}.$$

Für $r\in\mathbb{N}$ bezeichne $C^r\big(U_a\mathscr{V}(t,\rho),\mathscr{F}\big)$ den Modul aller alternierenden Coketten $\xi=(\xi_b)$ mit $\xi_b\in\Gamma\big(U_a V_b(t,\rho),\mathscr{F}\big)$ und $b\in\mathrm{nerf}^r(U_a\mathscr{V})$.

Auf den Moduln

$$C^{r_1\dots r_n}\big(\mathscr{U}^1(t,\rho),\dots,\mathscr{U}^n(t,\rho);\mathscr{F}\big)\quad\text{und}\quad C^r\big(U_a\mathscr{V}(t,\rho),\mathscr{F}\big)$$

werden folgende Pseudonormen eingeführt:

Definition. 1) Für

$$\xi=(\xi_{a_1\dots a_n})\in C^{r_1\dots r_n}\big(\mathscr{U}^1(t,\rho),\dots,\mathscr{U}^n(t,\rho);\mathscr{F}\big)$$

sei

$$\|\xi\|_{\mathfrak{U}^1\dots\mathfrak{U}^n\rho}=\sup_{(a_1,\dots,a_n)}\|\xi_{a_1\dots a_n}\|_{U^1_{a_1}\dots U^n_{a_n}\rho}.$$

2) Für $\xi=(\xi_b)\in C^r\big(U_a\mathscr{V}(t,\rho),\mathscr{F}\big)$ sei

$$\|\xi\|_{U_a\mathfrak{V}\rho}=\sup_b\|\xi_b\|_{U_a\mathfrak{V}_b\rho}.$$

Bemerkung. Sind $\mathfrak{U}^i\gg\mathfrak{V}^i$, $1\leqq i\leqq n$, zulässige Verfeinerungen,

$$s\in\Gamma\big(U^1_{a_1}\dots U^n_{a_n}(t,\rho),\mathscr{F}\big)\quad\text{und}\quad k\in K(a_1)\cap\cdots\cap K(a_n),$$

dann gilt die Ungleichung

$$\|s\|^{k}_{U^1_{a_1}\dots U^n_{a_n}\rho}\geqq\|s\|^{k}_{V^1_{a_1}\dots V^n_{a_n}\rho}.$$

Entsprechende Ungleichungen gelten für die oben definierten Pseudonormen von Coketten.

Proposition 5.1. (Beschränkung zu endlicher Norm.) *Sei $\mathfrak{U}$ eine Meßüberdeckung über $P(t,\rho_0)$ und $\mathscr{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.*

Für jedes $\rho<\rho_0$ und jede Cokette $\xi\in C^r(\mathfrak{U}(t,\rho_0),\mathfrak{F})$ gilt dann $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}<\infty$.

Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen.

Proposition 5.2. *Sei $\mathfrak{U}$ eine Meßüberdeckung über $P(t,\rho_0)$ und $\mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann gibt es zu jedem $\rho_1<\rho_0$ eine Konstante c derart, daß für jedes $\rho\leqq\rho_1$ gilt:*

Für $\xi\in C^r(\mathfrak{U}(t,\rho_0),\mathfrak{F})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho_0}<\infty$ und $f\in\Gamma(P(t,\rho),\mathcal{O}_S)$ gilt die Ungleichung

$$\|f\cdot\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}\leqq c\,\|f\|_{\rho}\,\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho_0}.$$

Beweis. Sei $a\in\mathrm{nerf}(\mathfrak{U})$, $\xi\in\Gamma(U_a(t,\rho_0),\mathfrak{F})$ mit $\|\xi\|_{U_a\rho_0}<\infty$ und sei $k\in K(a)$, dann gilt

$$\|\Phi_k(\xi)\|_{E_a^k\rho_0}\leqq\|\xi\|_{U_a\rho_0}.$$

Nach (1.2) folgt

$$\|f\cdot\Phi_k(\xi)\|_{E_a^k\rho}\leqq c\,\|f\|_{\rho}\,\|\Phi_k(\xi)\|_{E_a^k\rho_0},$$

d.h. aber

$$\|f\cdot\xi\|^k_{U_a\rho}\leqq c\,\|f\|_{\rho}\,\|\xi\|_{U_a\rho_0}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Im folgenden wird der einfacheren Schreibweise wegen stets angenommen, daß $t_0\in S$ der Nullpunkt des $\mathbb{C}^m$ ist. Mit $t_1,\ldots,t_m$ werden die kanonischen Koordinatenfunktionen des $\mathbb{C}^m$ bezeichnet.

Proposition 5.3. (Abschätzen der Partialsummen.) *Sei $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_m)\in\mathbb{R}^m_+$, $\rho_m^*>\rho_m$ und $\rho^*=(\rho_1,\ldots,\rho_{m-1},\rho_m^*)$. Weiter sei $\mathfrak{U}$ eine Meßüberdeckung über $P(\rho^*)$ und $\mathfrak{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.*

Sei $\xi\in C^r(\mathfrak{U}(\rho),\mathfrak{F})$ mit

$$\xi=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^{\nu}\xi_\nu$$

wobei $\xi_\nu\in C^r(\mathfrak{U}(\rho^*),\mathfrak{F})$ und $\|\xi_\nu\|_{\mathfrak{U}\rho^*}\leqq K_0$.

Dann gilt für die Partialsummen

$$\sigma_n=\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^{\nu}\xi_\nu\quad\text{und}\quad\sigma_\infty=\xi$$

die Abschätzung

$$\|\sigma_n\|_{\mathfrak{U}\rho}\leqq\frac{\rho_m^*}{\rho_m^*-\rho_m}K_0.$$

Beweis. Es genügt offenbar zu zeigen: Für jedes $a\in\mathrm{nerf}^r(\mathfrak{U})$ und jedes $k\in K(a)$ gilt:

$$\|\sigma_{n,a}\|^k_{U_a\rho}\leqq\frac{\rho_m^*}{\rho_m^*-\rho_m}K_0.$$

Für jedes ν gibt es ein $f_\nu \in \Gamma\left(E_a^k \times P(\rho^*), \mathcal{O}^{p_k}\right)$ mit

$$\alpha_k(f_\nu) = \Phi_k(\xi_{\nu,a}) \quad \text{und} \quad \|f_\nu\|_{E_a^k \rho^*} \leqq K_0.$$

Dabei bezeichne $\alpha_k\colon \mathcal{O}^{p_k} \to \Phi_k(\mathcal{F})$ den Morphismus aus der k-ten Meßkarte. Durch Einsetzen erhält man:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^\nu f_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^\nu \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{t_m}{\rho_m^*}\right)^\lambda f_{\nu\lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^i F_i,$$

wobei

$$F_i = \sum_{\nu=0}^{\min(n,\, i)} \left(\frac{\rho_m}{\rho_m^*}\right)^{i-\nu} f_{\nu,\, i-\nu}$$

gesetzt wurde. Jetzt gilt

$$\|F_i\|_{E_a^k \rho} \leqq K_0 \sum_{\lambda \geqq 0} \left(\frac{\rho_m}{\rho_m^*}\right)^\lambda = K_0 \frac{\rho_m^*}{\rho_m^* - \rho_m}$$

und somit

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^\nu f_\nu \right\|_{E_a^k \rho} \leqq K_0 \frac{\rho_m^*}{\rho_m^* - \rho_m},$$

da die F_s unabhängig von t_m sind. Daraus folgt aber

$$\|\sigma_n\|_{U_a \rho}^k \leqq K_0 \frac{\rho_m^*}{\rho_m^* - \rho_m},$$

was zu beweisen war.

Lemma 5.4. *Voraussetzungen:*

i) $(X_i, \Phi_i, D_i \times S, R_i)$, $i = 1, 2$, *Meßkarten über* S.

ii) $t \in S$.

iii) U *offene Menge in* $X_1 \cap X_2$.

iv) E_i *offene Steinsche Menge in* D_i, $i = 1, 2$, *mit* $U(t) \supset \Phi_i^{-1}(\bar{E}_i \times \{t\})$,

$$\Phi_2^{-1}(\bar{E}_2 \times \{t\}) \subset \Phi_1^{-1}(E_1 \times \{t\}).$$

v) F *relativkompakte offene Menge von* E_2.

Behauptung. *Für jede kohärente Garbe* $\mathcal{F}$ *auf* X *gibt es ein* (Δ, M) *derart, daß für jedes* $\rho \in \Delta$ *und* $\sigma \in \Gamma\left(U(t, \rho), \mathcal{F}\right)$ *mit* $\|\Phi_1(\sigma)\|_{E_1 \rho} < \infty$ *gilt*

$$\|\Phi_2(\sigma)\|_{F\rho} \leqq M(\rho)\, \|\Phi_1(\sigma)\|_{E_1 \rho}.$$

Beweis. Für hinreichend kleines $\rho_0 \in \mathbb{R}_+^m$ gibt es eine endliche Familie $(G_\lambda, \psi_\lambda)$, wobei G_λ Steinsche offene Mengen in E_2 sind, so daß die Mengen $G_\lambda \times \{t\}$ die Menge $\Phi_2(X_2) \cap (\bar{F} \times \{t\})$ überdecken, und

$$\psi_\lambda\colon\ G_\lambda \times P(t, \rho_0) \to E_1 \times P(t, \rho_0)$$

fasertreue, holomorphe Abbildungen mit

$$\Phi_1 = \psi_\lambda \circ \Phi_2 \quad \text{auf } \Phi_2^{-1}(G_\lambda \times P(t, \rho_0)).$$

Sei $(\tilde{G}_\lambda)$ eine Steinsche Schrumpfung von (G_λ), so daß $(\tilde{G}_\lambda \times \{t\})$ noch eine Überdeckung von $\Phi_2(X_2) \cap (\bar{F} \times \{t\})$ ist. Sei $\rho < \rho_0$ und $s \in \Gamma(E_1 \times P(t, \rho), \Phi_1(\mathscr{F}))$, dann kann s als Element von $\Gamma(\Phi_1^{-1}(E_1 \times P(t, \rho)), \mathscr{F})$ aufgefaßt werden. Da

$$\Phi_2^{-1}(\tilde{G}_\lambda \times P(t, \rho)) \subset \Phi_1^{-1}(E_1 \times P(t, \rho)),$$

definiert s eine Familie von Elementen

$$s_\lambda \in \Gamma(\tilde{G}_\lambda \times P(t, \rho), \Phi_2(\mathscr{F})).$$

Nach (1.6) gibt es zu jedem $\tilde{\rho}_0 < \rho_0$ eine Konstante c, so daß

$$\|s\|_{\tilde{G}_\lambda \rho} \leqq c \, \|s\|_{E_1 \rho} \quad \text{für alle } \rho \leqq \tilde{\rho}_0.$$

Die Familie $(\tilde{G}_\lambda)$ wird zu einer endlichen Steinschen Familie $\mathbf{G}$, so aufgefüllt, daß $\mathbf{G}$ noch $\bar{F}$ überdeckt und (S_λ) zu einem 0-Cozyklus durch Null nach $\mathbf{G} \times P(t, \rho)$ fortgesetzt werden kann. Nach (3.3) i) gibt es jetzt ein (Δ, M) derart, daß

$$\|s\|_{F \rho} \leqq M(\rho) \, c \, \|s\|_{E_1 \rho}.$$

Corollar 5.5. *Sind $\mathfrak{U}_i \gg \mathfrak{V}_i$, $1 \leqq i \leqq n$, Meßüberdeckungen über t, dann gibt es zu jeder kohärenten analytischen Garbe $\mathscr{F}$ auf X ein (Δ, M) derart, daß für jedes n-tupel von Simplizes $(a_1, \ldots, a_n)$, jedes $k \in K(a_1) \cap \cdots \cap K(a_n)$ und jedes $\rho \in \Delta$ gilt: Wenn $s \in \Gamma(U^1_{a_n} \ldots U^n_{a_n}(t, \rho), \mathscr{F})$ mit $\|s\|^k_{U^1_{a_1} \ldots U^n_{a_n} \rho} < \infty$, dann gilt die Ungleichung*

$$\|s\|_{V^1_{a_1} \ldots V^n_{a_n} \rho} \leqq M(\rho) \, \|s\|^k_{U^1_{a_1} \ldots U^n_{a_n} \rho}.$$

Beweis. Nach (4.2) wählen wir Meßüberdeckungen $\mathfrak{W}_i = (\mathscr{W}^i, H^i)$ über t derart, daß $\mathfrak{U}_i \gg \mathfrak{W}_i \gg \mathfrak{V}_i$ über t gilt. Sei

$$k, k' \in K(a_1) \cap \cdots \cap K(a_n),$$

$$s \in \Gamma(U^1_{a_1} \cap \cdots \cap U^n_{a_n}(t, \rho), \mathscr{F})$$

mit

$$\|s\|^k_{U^1_{a_1} \ldots U^n_{a_n} \rho} = \|\Phi_k(s)\|_{E^{1,k}_{a_1} \ldots E^{n,k}_{a_n} \rho} < \infty.$$

Jetzt gilt

$$\Phi_{k'}^{-1}(\overline{H^{1,k'}_{a_n} \ldots H^{n,k'}_{a_n}} \times \{t\}) \subset \Phi_k^{-1}(E^{1,k}_{a_1} \ldots E^{n,k}_{a_n} \times \{t\})$$

und

$$F^{1,k}_{a_1} \ldots F^{n,k}_{a_n} \subset\subset H^{1,k}_{a_1} \ldots H^{n,k}_{a_n}.$$

Nach (5.4) folgt

$$\|s\|^{k'}_{V^1_{a_1} \ldots V^n_{a_n} \rho} \leqq M(\rho) \, \|s\|^k_{U^1_{a_1} \ldots U^n_{a_n} \rho}$$

und damit die Behauptung.

Corollar 5.6. *Sei $\varphi\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ein Garbenmorphismus zwischen zwei kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln und $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}$ eine Meßkette über $t \in S$.*

Behauptung. *Es gibt ein m-dimensionales (Δ, M), so daß für jedes $\rho \in \Delta$ gilt:*

Zu jedem $\xi \in C^r(\mathscr{U}(t,\rho), \operatorname{im}\varphi)$ mit $\|\xi\|^*_{\mathfrak{U}\rho} < \infty$ gibt es ein $\xi' \in C^r(\mathscr{V}(t,\rho), \mathscr{F})$ derart, daß

$$\varphi(\xi') = \xi \quad \text{auf } \mathscr{V}(t,\rho)$$

und

$$\|\xi'\|_{\mathfrak{V}\rho} \leqq M(\rho)\, \|\xi\|^*_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Dabei bezeichnet $\|\xi\|^*_{\mathfrak{U}\rho}$ die Grauertnorm von ξ als Cokette mit Werten in $\mathscr{G}$.

Beweis. Sei $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{W} \gg \mathfrak{V}$ eine Meßkette über t. Zu jedem $a \in \operatorname{nerf}^r(\mathscr{U})$ wähle man ein $k \in K(a)$. Sei $\xi = (\xi_a) \in C^r(\mathscr{U}(t,\rho), \mathscr{G})$, dann ist

$$\Phi_k(\xi_a) \in \Gamma\big(E^k_a \times P(\rho), \Phi_k(\mathscr{G})\big) \quad \text{und} \quad \|\Phi_k(\xi_a)\|_{E^k_a \rho} \leqq \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Zu dem Garbenmorphismus

$$\varphi_k = (\Phi_k)_*(\varphi)\colon\ \Phi_k(\mathscr{F}) \to \Phi_k(\mathscr{G})$$

existiert nach (3.5) ein $\tilde{\zeta}_a \in \Gamma\big(G^k_a \times P(\rho), \Phi_k(\mathscr{F})\big)$ mit

$$\varphi_k(\tilde{\zeta}_a) = \Phi_k(\xi_a) | G^k_a \times P(\rho)$$

und

$$\|\tilde{\zeta}_a\|_{G^k_a \rho} \leqq M_k(\rho)\, \|\Phi_k(\xi_a)\|_{E^k_a \rho}.$$

Sei $\zeta_a \in \Gamma\big(W_a(t,\rho), \mathscr{F}\big)$ das Element mit $\Phi_k(\zeta_a) = \tilde{\zeta}_a$. Für die Cokette $\zeta = (\zeta_a) \in C^r(\mathscr{W}(t,\rho), \mathscr{F})$ gilt jetzt

$$\varphi(\zeta) = \xi \quad \text{auf } \mathscr{W}(t,\rho).$$

Nach (5.5) folgt

$$\|\zeta\|_{\mathfrak{V}\rho} \leqq M(\rho)\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Proposition 5.7. (Cokettenentwicklung.) *Sei $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}$ eine Meßkette über t_0. Dann gibt es zu jeder kohärenten analytischen Garbe $\mathscr{F}$ auf X ein (Δ, M) derart, daß für jedes $\rho = (\rho_1, \rho_m) \in \Delta$ gilt:*

Zu jedem $\xi \in C^r(\mathscr{U}(\rho), \mathscr{F})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho} < \infty$ existiert eine Entwicklung

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^n \xi_n \quad \text{auf } \mathscr{V}(\rho)$$

mit $\xi_n \in C^r(\mathscr{V}(\rho^*), \mathscr{F})$ und $\|\xi_n\|_{\mathfrak{V}\rho^*} \leqq M(\rho^*)\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}$, wobei

$$\rho^* = (\rho_1, \ldots, \rho_{m-1}, \delta_m(\rho_1, \ldots, \rho_{m-1})).$$

Beweis. Zu $a \in \mathrm{nerf}^r(\mathcal{U})$ wähle man ein $k \in K(a)$. Sei

$$\mathcal{O}^{p_k} \xrightarrow{\alpha_k} \Phi_k(\mathcal{F}) \to 0$$

die durch die k-te Meßkarte gegebene Auflösung über $D_k \times S$. Es gibt ein $f \in \Gamma\left(E_a^k \times P(\rho), \mathcal{O}^{p_k}\right)$ mit $\alpha_k(f) = \Phi_k(\xi_a)$ und $\|f\|_{E_a^k \rho} = \|\xi_a\|_{U_a \rho} \leqq \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}$.

Jetzt läßt sich f nach t_m entwickeln:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^n f_n,$$

wobei $f_n \in \Gamma\left(E_a^k \times P(\rho^*), \mathcal{O}^{p_k}\right)$ und $\|f_n\|_{E_a^k \rho^*} \leqq \|f\|_{E_a^k \rho}$. Dabei ist $\rho^* = (\rho_1, \ldots, \rho_{m-1}, \rho_m^*)$, ρ_m^* vorläufig noch beliebig.

Man beachte, daß f_n unabhängig von t_m ist.

Nach (4.2) wird eine Meßüberdeckung $\mathfrak{W}$ über t mit $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{W} \gg \mathfrak{V}$ gewählt. Es gibt jetzt ein $\xi_{n,a} \in \Gamma\left(W_a(\rho^*), \mathcal{F}\right)$ mit $\Phi_k(\xi_{n,a}) = \alpha_k(f_n)$ und $\|\xi_{n,a}\|_{W_a \rho^*}^k \leqq \|f_n\|_{E_a^k \rho^*}$. Nach Anwendung von (5.5) gilt dann

$$\|\xi_{n,a}\|_{V_a \rho^*} \leqq M(\rho^*) \|\xi_{n,a}\|_{W_a \rho^*}^k \leqq M(\rho^*) \|f\|_{E_a^k \rho} \leqq M(\rho^*) \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Die Coketten $\xi_n = (\xi_{n,a})$ erfüllen jetzt die Bedingungen des Satzes.

Sei $\mathcal{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf X. Wir sagen, $\mathcal{F}$ ist ohne t_m-Torsion über t_0, wenn $\mathcal{F}$ in jedem Punkt von $X(t_0)$ ohne t_m-Torsion ist. Zu jeder kohärenten analytischen Garbe $\mathcal{F}$ auf X gibt es ein $d \in \mathbb{N}$ derart, daß $t_m^d \mathcal{F}$ ohne t_m-Torsion ist (s. Bemerkung 2.0).

Proposition 5.8. (Divisionslemma.) *Sei $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}$ eine Meßkette über t_0, $\mathcal{F}$ eine kohärente analytische Garbe auf X, $d \in \mathbb{N}$ derart, daß $t_m^d \mathcal{F}$ ohne t_m-Torsion über t_0 ist.*

Behauptung. *Es gibt ein (Δ, M) derart, daß für alle $e > d$ und $\rho \in \Delta$ gilt:*

Für jeden Cozyklus $\xi \in Z^r\left(\mathcal{U}(\rho), \mathcal{F}\right)$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho} < \infty$ dessen Bild in $Z^r\left(\mathcal{U}(\rho), \mathcal{F}/t_m^e \mathcal{F}\right)$ verschwindet, gibt es ein $\eta \in Z^r\left(\mathcal{V}(\rho), \mathcal{F}\right)$ derart, daß

$$\left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^{e-d} \eta = \xi \quad \text{auf } \mathcal{V}(\rho)$$

und

$$\|\eta\|_{\mathfrak{V}\rho} \leqq M(\rho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

(Man beachte: Die Konstante M ist unabhängig von e.)

Beweis. Sei $a \in \mathrm{nerf}^r(\mathcal{U})$ und $k \in K(a)$. In einer Umgebung von $\bar{E}_a^k \times P(\rho_0)$ existiert folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{O}^p & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{O}^q & \xrightarrow{\alpha} & \Phi_k(\mathcal{F}) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \gamma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_0} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
\mathcal{O}^p/t_m^e \mathcal{O}^p & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{O}^q/t_m^e \mathcal{O}^q & \xrightarrow{\alpha'} & \Phi_k(\mathcal{F}/t_m^e \mathcal{F}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Sei $(\mathscr{U}, \mathbf{E}) \gg (\mathscr{W}, \mathbf{G}) \gg (\mathscr{V}', \mathbf{F}') \gg (\mathscr{V}, \mathbf{F})$ eine Meßkette über t_0. Es gilt $G_a^k \subset\subset E_a^k$. Es gibt eine offene Steinsche Menge H mit $G_a^k \subset\subset H \subset\subset E_a^k$ und nach dem Privilegiertheitssatz (2.2) eine Dreiecksmenge Δ und eine endliche Familie (G_λ) von Polyzylindern derart, daß $G_\lambda \subset E_a^k$, $\bigcup G_\lambda \supset\supset H$ und für jedes $\rho \in \Delta$ der Polyzylinder $G_\lambda \times P(\rho)$ β-privilegiert ist.

Für den Cozyklus $\xi = (\xi_a)$ gilt

$$\|\Phi_k(\xi_a)\|_{E_a^k \rho} \leqq \|\xi_a\|_{U_a \rho} \leqq \|\xi\|_{\mathfrak{U} \rho}.$$

Es gibt ein $f \in \Gamma(E_a^k \times P(\rho), \mathcal{O}^q)$ mit

$$\alpha(f) = \Phi_k(\xi_a) \quad \text{und} \quad \|f\|_{E_a^k \rho} = \|\Phi_k(\xi_a)\|_{E_a^k \rho}.$$

Der Schnitt f wird auf die Überdeckung $(G_\lambda) \times P(\rho)$ beschränkt und man erhält einen 0-Cozyklus (f_λ).

Jetzt ist $\alpha' \gamma_0(f_\lambda) = 0$. Nach (2.2) und (1.0) iv) gibt es ein $g_\lambda \in \Gamma(G_\lambda \times P(\rho), \mathcal{O}^p / t_m^e \mathcal{O}^p)$ mit

$$\beta'(g_\lambda) = \gamma_0(f_\lambda) \quad \text{und} \quad \|g_\lambda\|_{G'_\lambda \rho} \leqq M_1(\rho) \|f_\lambda\|_{G_\lambda \rho}.$$

Dabei ist (G'_λ) eine Steinsche Schrumpfung von (G_λ), die noch H überdeckt. Jetzt läßt sich g_λ als Schnitt aus $\Gamma(G'_\lambda \times P(\rho), \mathcal{O}^p)$ auffassen. Es gibt ein $h_\lambda \in \Gamma(G'_\lambda \times P(\rho), \mathcal{O}^q)$ mit

$$\left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^e h_\lambda = f_\lambda - \beta(g_\lambda)$$

und

$$\|h_\lambda\|_{G'_\lambda \rho} \leqq (1 + c\, M_1(\rho)) \|f_\lambda\|_{G_\lambda \rho}$$

mit einer Konstante c. Die Familie (h_λ) bildet im allgemeinen keinen 0-Cozyklus! Es gilt aber

$$\left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^e \alpha(h_\lambda) = \alpha(f_\lambda),$$

d.h., die Familie

$$\left(\left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^e \alpha(h_\lambda)\right)$$

ist ein 0-Cozyklus. Da $t_m^d \mathscr{F}$ ohne t_m-Torsion über t_0 ist, bildet auch

$$\left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^d \alpha(h_\lambda) = (\tilde{\eta}_\lambda)$$

einen 0-Cozyklus. Nach (3.3) i) liefert $(\tilde{\eta}_\lambda)$ einen Schnitt $\tilde{\eta}_a \in \Gamma(G_a^k \times P(\rho), \Phi_k(\mathscr{F}))$ mit der Abschätzung

$$\|\tilde{\eta}_a\|_{G_a^k \rho} \leqq M_2(\rho)\,(1 + c\, M_1(\rho))\, \|\xi_a\|_{U_a \rho}.$$

Nun definiert $\tilde{\eta}_a$ einen Schnitt $\eta_a \in \Gamma(V_a'(\rho), \mathscr{F})$ mit

$$\left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^{e-d} \eta_a = \xi_a$$

und

$$\|\eta_a\|^k_{V_a'\rho} \leqq M_2(\rho)\left(1 + c\, M_1(\rho)\right) \|\xi_a\|_{U_a\rho}.$$

Nach (5.2) gilt die Ungleichung

$$\|\eta_a\|_{V_a\rho} \leqq M_3(\rho)\, \|\eta_a\|^k_{V_a'\rho}.$$

Wir setzen $\eta = (\eta_a)$ und es gilt die Gleichung

$$\left(\frac{t_m}{\rho_m}\right)^{e-d} \eta = \xi.$$

Da $t_m^d \mathscr{F}$ ohne t_m-Torsion über t_0 ist, folgt, daß η sogar ein Cozyklus ist. Die gewünschte Abschätzung erhält man durch Hintereinanderschalten obiger Ungleichungen.

§ 6. Der Glättungssatz

Proposition 6.1. (Glättungslemma.) *Seien* $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{U}^*$ *und* $\mathfrak{V} \gg \mathfrak{V}^*$ *Meßüberdeckungen über t und sei* $a \in \mathrm{nerf}(\mathscr{U}^*)$.

Behauptung. *Für jede kohärente Garbe* $\mathscr{F}$ *auf X gibt es ein* (Δ, M), *so daß für jedes* $\rho \in \Delta$ *gilt:*

i) *Für jedes* $\xi \in Z^0(U_a \mathscr{V}(t, \rho), \mathscr{F})$ *mit* $\|\xi\|_{U_a \mathfrak{V}\rho} < \infty$ *gilt*

$$\|\xi \,|\, U_a^*(t, \rho)\|_{U_a^*\rho} \leqq M(\rho)\, \|\xi\|_{U_a \mathfrak{V}\rho}.$$

Dabei wird ξ *auf der linken Seite der Ungleichung als Element von* $\Gamma(U_a(t, \rho), \mathscr{F})$ *aufgefaßt.*

ii) *Für* $q > 0$ *und jedes* $\xi \in Z^q(U_a \mathscr{V}(t, \rho), \mathscr{F})$ *mit* $\|\xi\|_{U_a \mathfrak{V}\rho} < \infty$ *gibt es ein* $\eta \in C^{q-1}(U_a^* \mathscr{V}^*(t, \rho), \mathscr{F})$ *derart, daß*

$$\delta\eta = \xi \quad \text{über } U_a^* \mathscr{V}^*(t, \rho)$$

und

$$\|\eta\|_{U_a^* \mathfrak{V}^*\rho} \leqq M(\rho)\, \|\xi\|_{U_a \mathfrak{V}\rho}.$$

Beweis. Sei $B = \{\beta \in A \mid V_\beta \cap U_a \neq \emptyset\}$ und $K(B) = \bigcap_{\beta \in B} K(\beta)$. Nach dem Meßatlasaxiom (M) gibt es ein $k \in K(a) \cap K(B)$. Für hinreichend kleines ρ_0 überdeckt $\mathbf{F} \times P(t, \rho_0) = (F_\beta^k \times P(t, \rho_0))_{\beta \in B}$ die Menge $(\bar{E}_a^k \times P(t, \rho_0)) \cap \Phi_k(X_k)$; aber nicht notwendigerweise $\bar{E}_a^k \times P(t, \rho_0)$. Jetzt wird $\mathbf{F} = (F_\beta^k)_{\beta \in B}$ zu einer endlichen Steinschen Familie $\hat{\mathbf{F}}$ aufgefüllt, so daß $\hat{\mathbf{F}} \times P(t, \rho_0)$ noch $\bar{E}_a^k \times P(t, \rho_0)$ überdeckt und die hinzugefügten Steinschen Mengen nicht in $\Phi_k(X_k)$ eindringen. Nach (4.2) wählen wir Meßüberdeckungen

$\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{V}'$ über t mit

$$\mathfrak{U} \gg \mathfrak{U}' \gg \mathfrak{U}^* \quad \text{und} \quad \mathfrak{V} \gg \mathfrak{V}' \gg \mathfrak{V}^*.$$

Sei $\xi \in Z^r(U_a \mathscr{V}(t, \rho), \mathscr{F})$ mit $\|\xi\|_{U_a \mathfrak{V} \rho} < \infty$. Der Cozyklus

$$\Phi_k(\xi) \in Z^r(\mathbf{H} \times P(t, \rho), \Phi_k(\mathscr{F})), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{F} \cap E_a^k$$

wird durch Null zu einem Cozyklus

$$\hat{\xi} \in Z^r(\hat{\mathbf{H}} \times P(t, \rho), \Phi_k(\mathscr{F})), \qquad \hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{F}} \cap E_a^k,$$

fortgesetzt und es gilt $\|\hat{\xi}\|_{\hat{\mathbf{H}} \rho} \leqq \|\xi\|_{U_a \mathfrak{V} \rho}$. Nach Verfeinerungsaxiom (V 2) ist $\mathbf{H}' = (F'^k \cap E_a'^k)_{\beta \in B}$ eine relativkompakte Schrumpfung von $\hat{\mathbf{H}}$. Nach (3.3) folgt:

1) Für $q = 0$ gilt

$$\|\hat{\xi} | H' \times P(t, \rho)\|_{H' \rho} \leqq M_1(\rho) \, \|\hat{\xi}\|_{\hat{\mathbf{H}} \rho},$$

wobei $H' = \bigcup_{\alpha \in B} (F_\alpha'^k \cap E_a'^k)$ gesetzt wurde.

2) Für $q > 0$ gibt es ein $\hat{\eta} \in C^{q-1}(\mathbf{H}' \times P(t, \rho), \Phi_k(\mathscr{F}))$ mit

$$\delta \hat{\eta} = \hat{\xi} \quad \text{und} \quad \|\hat{\eta}\|_{\mathbf{H}' \rho} \leqq M_1(\rho) \, \|\hat{\xi}\|_{\hat{\mathbf{H}} \rho}.$$

Für $q = 0$ folgt für ξ die Abschätzung

$$\|\xi | U_a'(t, \rho)\|_{U_a' \rho}^k \leqq M_1(\rho) \, \|\xi\|_{U_a \mathfrak{V} \rho}.$$

Vermöge Corollar 5.5 folgt daraus die Behauptung i) des Satzes. Für $q > 0$ liefert $\hat{\eta}$ eine Cokette $\eta \in C^{q-1}(U_a' \mathscr{V}'(t, \rho), \mathscr{F})$ mit $\delta \eta = \xi$ über $U_a' \mathscr{V}'(t, \rho)$ und

$$\|\eta\|_{U_a' \mathfrak{V}' \rho}^k \leqq M_1(\rho) \, \|\xi\|_{U_a \mathfrak{V} \rho}.$$

Wiederum nach Corollar 5.5 folgt daraus die Behauptung ii).

Seien $\mathscr{U}$ und $\mathscr{V}$ offene Überdeckungen von X und $\mathscr{F}$ eine Modulgarbe auf X. Für $p, q \in \mathbb{N}$ bezeichnet $C^{pq}(\mathscr{U}, \mathscr{V}; \mathscr{F})$ den Modul aller Coketten $\xi = (\xi_{a,b})$, wobei $a \in \mathrm{nerf}^p(\mathscr{U})$ und $b \in \mathrm{nerf}^q(\mathscr{V})$ und $\xi_{a,b} \in \Gamma(U_a \cap V_b, \mathscr{F})$ ist. Weiterhin soll $\xi_{a,b}$ bei festem b (bzw. festem a) bezüglich a (bzw. b) alternieren. Die Ableitungsoperatoren

$$\delta' \colon C^{p,q}(\mathscr{U}, \mathscr{V}; \mathscr{F}) \to C^{p+1,q}(\mathscr{U}, \mathscr{V}; \mathscr{F})$$

und

$$\delta'' \colon C^{p,q}(\mathscr{U}, \mathscr{V}; \mathscr{F}) \to C^{p,q+1}(\mathscr{U}, \mathscr{V}; \mathscr{F})$$

seien durch die Formeln

$$(\delta' \xi)_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{p+1}, b} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \, \xi_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_{p+1}, b}$$

$$(\delta'' \xi)_{a, \beta_0, \ldots, \beta_{q+1}} = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \, \xi_{a, \beta_0 \ldots \hat{\beta}_j \ldots \beta_{q+1}}$$

definiert. Es gilt $\delta'\delta''=\delta''\delta'$. Wir setzen noch

$$Z^{pq}(\mathscr{U},\mathscr{V};\mathscr{F})=\{\xi\in C^{pq}(\mathscr{U},\mathscr{V};\mathscr{F})|\delta'\xi=0 \text{ und } \delta''\xi=0\}.$$

Wir bemerken noch, daß

$$C^p(\mathscr{U},\mathscr{F})=\{\eta\in C^{p,0}(\mathscr{U},\mathscr{V};\mathscr{F})|\delta''\eta=0\}$$

und

$$Z^p(\mathscr{U},\mathscr{F})=Z^{p,0}(\mathscr{U},\mathscr{V};\mathscr{F}).$$

Proposition 6.2. *Sei* $\mathfrak{U}\gg\mathfrak{U}'\gg\mathfrak{V}\gg\mathfrak{V}'\gg\mathfrak{W}\gg\mathfrak{W}'\gg\mathfrak{Q}\gg\mathfrak{Q}'$ *eine Meßkette über* t *und* $p,q\in\mathbb{N}$.

Behauptung. *Zu jedem kohärenten* $\mathcal{O}_X$*-Modul* $\mathscr{F}$ *gibt es ein* (Δ, M), *so daß für jedes* $\rho\in\Delta$ *und jede Vorgabe*

$$\xi\in Z^{pq}\big(\mathscr{U}(t,\rho),\mathscr{V}(t,\rho);\mathscr{F}\big),\qquad \|\xi\|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\rho}<\infty,$$
$$\gamma\in C^{p-1,q}\big(\mathscr{W}(t,\rho),\mathscr{Q}(t,\rho);\mathscr{F}\big),\qquad \|\gamma\|_{\mathfrak{W}\mathfrak{Q}\rho}<\infty$$

mit $\delta''\gamma=0$ *gilt:*

Es gibt Elemente

$$\xi'\in Z^{p+1,q-1}\big(\mathscr{U}'(t,\rho),\mathscr{V}'(t,\rho);\mathscr{F}\big)$$
$$\omega\in C^{p,q-1}\big(\mathscr{W}'(t,\rho),\mathscr{Q}'(t,\rho);\mathscr{F}\big)$$

mit

$$\delta'\omega=\xi',\qquad \delta''\omega=\xi+\delta'\gamma$$

und

$$\|\xi'\|_{\mathfrak{U}'\mathfrak{V}'\rho}\leqq M(\rho)\,\|\xi\|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\rho},$$
$$\|\omega\|_{\mathfrak{W}'\mathfrak{Q}'\rho}\leqq M(\rho)\,(\|\xi\|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\rho}+\|\gamma\|_{\mathfrak{W}\mathfrak{Q}\rho}).$$

Beweis. Sei

$$\xi=(\xi_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p,\beta_0,\ldots,\beta_q})\in Z^{pq}\big(\mathscr{U}(t,\rho),\mathscr{V}(t,\rho);\mathscr{F}\big).$$

Wir setzen $a=(\alpha_0,\ldots,\alpha_p)$ und $\xi_a=(\xi_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p,\beta_0,\ldots,\beta_a})$. Offensichtlich ist $\xi_a\in Z^q\big(U_a\mathscr{V}(t,\rho),\mathscr{F}\big)$. Nach dem Glättungslemma (6.1) gibt es ein

$$\tilde{\eta}_a=(\tilde{\eta}_{a,\beta_0,\ldots,\beta_{q-1}})\in C^{q-1}\big(U_a'\mathscr{V}'(t,\rho),\mathscr{F}\big)$$

mit

$$\delta\tilde{\eta}_a=\xi_a\quad\text{und}\quad\|\tilde{\eta}_a\|_{U_a'\mathfrak{V}'\rho}\leqq M_1(\rho)\,\|\xi_a\|_{U_a\mathfrak{V}\rho}.$$

Es wird

$$\tilde{\eta}=(\tilde{\eta}_a)=(\tilde{\eta}_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p,\beta_0,\ldots,\beta_{q-1}})\in C^{p,q-1}\big(\mathscr{U}'(t,\rho),\mathscr{V}'(t,\rho);\mathscr{F}\big)$$

gesetzt; $\tilde{\eta}$ ist alternierend in jeweils der ersten und zweiten Gruppe von Indizes und es gilt $\delta''\tilde{\eta}=\xi$.

Jetzt wird

$$\delta'\tilde{\eta}=\xi'\in Z^{p+1,q-1}\big(\mathscr{U}'(t,\rho),\mathscr{V}'(t,\rho);\mathscr{F}\big)$$

gesetzt und es gilt

$$\|\xi'\|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\rho}\leqq(p+2)\,M_1(\rho)\,\|\xi\|_{\mathfrak{U}'\mathfrak{V}'\rho}.$$

Für $a\in\mathrm{nerf}^{p-1}(\mathscr{W})$ konstruieren wir aus der vorgegebenen Cokette γ den Cozyklus

$$\gamma_a=(\gamma_{a,b})_{b\in\mathrm{nerf}^q(\mathscr{Q})}\in Z^q\big(\mathscr{W}_a\mathscr{Q}(t,\rho),\mathscr{F}\big).$$

Wiederum nach dem Glättungslemma (6.1) existiert ein

$$\tilde{\gamma}_a=(\tilde{\gamma}_{a,\beta_0,\ldots,\beta_{q-1}})\in C^{q-1}\big(W'_a\mathscr{Q}'(t,\rho),\mathscr{F}\big)$$

mit

$$\delta\tilde{\gamma}_a=\gamma_a\quad\text{und}\quad\|\tilde{\gamma}_a\|_{W'_a\mathfrak{Q}'\rho}\leqq M(\rho)\,\|\gamma_a\|_{W_a\mathfrak{Q}\rho}.$$

Es wird

$$\tilde{\gamma}=(\tilde{\gamma}_a)=(\tilde{\gamma}_{a,\beta_0,\ldots,\beta_{q-1}})\in C^{p-1,q-1}\big(\mathscr{W}'(t,\rho),\mathscr{Q}'(t,\rho);\mathscr{F}\big)$$

gesetzt; es gilt $\delta''\tilde{\gamma}=\gamma$. Wir setzen

$$\omega=\tilde{\eta}+\delta'\tilde{\gamma}\in C^{p,q-1}\big(\mathscr{W}'(t,\rho),\mathscr{Q}'(t,\rho);\mathscr{F}\big)$$

und es gilt

$$\|\omega\|_{\mathfrak{W}'\mathfrak{Q}'\rho}\leqq(p+2)\,M_1(\rho)\,\|\xi\|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\rho}+(q+1)\,M_2(\rho)\,\|\gamma\|_{\mathfrak{W}\mathfrak{Q}\rho}.$$

Offensichtlich gilt

$$\delta'\omega=\delta'\tilde{\eta}+\delta'\delta'\tilde{\gamma}$$

und

$$\delta''\omega=\delta''\tilde{\eta}+\delta''\delta'\tilde{\gamma}=\xi+\delta'\delta''\tilde{\gamma}=\xi+\delta'\gamma=\delta''\eta.$$

Proposition 6.3. *Sei* $\xi=(\xi_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p})\in Z^p\big(\mathscr{V}(t,\rho);\mathscr{F}\big)$. *Wir definieren Elemente* $\xi_0,\eta_1,\ldots,\eta_p$ *wie folgt:*

i) $\xi_0=(\xi_{\alpha_0\beta_0,\ldots,\beta_p})\in Z^{0,p}\big(\mathscr{V}(t,\rho),\mathscr{V}(t,\rho);\mathscr{F}\big)$,

wobei

$$\xi_{\alpha_0\beta_0,\ldots,\beta_p}=\xi_{\beta_0,\ldots,\beta_p}|V_{\alpha_0\beta_0,\ldots,\beta_p}(t,\rho).$$

ii) $\eta_n=(\eta^{(n)}_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_0,\ldots,\beta_{p-n}})\in C^{n-1,p-n}\big(\mathscr{V}(t,\rho),\mathscr{V}(t,\rho);\mathscr{F}\big)$,

wobei

$$\eta^{(n)}_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_0,\ldots,\beta_{p-n}}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\xi_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_0,\ldots,\beta_{p-n}}.$$

Dann gilt

1) $\delta''\eta_1=\xi_0$,
2) $\delta''\eta_n=\delta'\eta_{n-1}$, $1<n\leqq p$,
3) $\delta'\eta_p+(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}\xi_0=0$.

Beweis. 1)

$$(\delta'' \eta_1)_{\alpha_0 \beta_0, \ldots, \beta_p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \xi_{\alpha_0, \beta_0, \ldots, \hat{\beta}_k, \ldots, \beta_p}$$

$$= \xi_{\hat{\alpha}_0 \beta_0, \ldots, \beta_p} - \left(\xi_{\hat{\alpha}_0 \beta_0, \ldots, \beta_p} + \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k-1} \xi_{\alpha_0 \beta_0, \ldots, \hat{\beta}_k, \ldots, \beta_p} \right)$$

$$= \xi_{\beta_0, \ldots, \beta_p} | V_{\alpha_0 \beta_0, \ldots, \beta_p}(t, \rho).$$

2)

$$(\delta' \eta_{n-1} - \delta'' \eta_n)_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{p-n+1}}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \xi_{\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_k, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{p-n+1}}$$

$$- (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{k=0}^{p-n+1} (-1)^{k+n} \xi_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \ldots, \hat{\beta}_k, \ldots, \beta_{p-n+1}}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \xi_{\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_k, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \ldots, \beta_{p-n+1}} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{p-n+1} (-1)^{k+n} \xi_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \ldots, \hat{\beta}_k, \ldots, \beta_{p-n+1}} \right) = 0.$$

3)

$$(\delta' \eta_p)_{\alpha_0, \ldots, \alpha_p, \beta_0} = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \xi_{\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_k, \ldots, \alpha_p, \beta_0}$$

$$= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \xi_{\alpha_0, \ldots, \hat{\alpha}_k, \ldots, \alpha_p, \beta_0} + (-1)^p \xi_{\alpha_0, \ldots, \alpha_p \hat{\beta}_0} \right)$$

$$+ (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} (-1)^{p+1} \xi_{\alpha_0, \ldots, \alpha_p, \hat{\beta}_0}$$

$$= (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} (-1)^{p+1} \xi_{\alpha_0, \ldots, \alpha_p} | V_{\alpha_0, \ldots, \alpha_p, \beta_0}.$$

Theorem 6.4. (Glättungssatz.) *Sei* $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V} \gg \mathfrak{W}$ *eine Meßkette über* t *und* $\mathscr{F}$ *ein kohärenter* $\mathcal{O}_X$*-Modul.*

Behauptung. *Es gibt ein* (Δ, M) *derart, daß für jedes* $\rho \in \Delta$ *gilt: Zu jedem* $\xi \in Z^r(\mathscr{V}(t, \rho), \mathscr{F})$ *mit* $\|\xi\|_{\mathfrak{V}\rho} < \infty$ *existieren*

$$\xi' \in Z^r(\mathscr{U}(t, \rho), \mathscr{F}) \quad \text{und} \quad \gamma \in C^{r-1}(\mathscr{W}(t, \rho), \mathscr{F})$$

mit

$$\xi' = \xi + \delta\gamma \quad \text{auf } \mathscr{W}(t, \rho)$$

und

$$\max(\|\xi'\|_{\mathfrak{U}\rho}, \|\gamma\|_{\mathfrak{W}\rho}) \leqq M(\rho) \|\xi\|_{\mathfrak{V}\rho}.$$

Beweis. Wir wählen nach (4.2) Meßüberdeckungen $\mathfrak{U}^n, \mathfrak{V}^n, \mathfrak{W}^n, \mathfrak{Z}^n$, $0 \leqq n \leqq p$ mit

$$\mathfrak{U}^n \gg \mathfrak{U} \gg \mathfrak{V} \gg \mathfrak{V}^n \gg \mathfrak{W}^n \gg \mathfrak{Z}^n \gg \mathfrak{W}$$

und

$$\mathfrak{U}^n \gg \mathfrak{U}^{n+1}, \quad \mathfrak{V}^n \gg \mathfrak{V}^{n+1}, \quad \mathfrak{W}^n \gg \mathfrak{W}^{n+1}, \quad \mathfrak{Z}^n \gg \mathfrak{Z}^{n+1}.$$

Sei $\xi \in Z^p(\mathscr{V}(t,\rho), \mathscr{F})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{V}\rho} < \infty$. Wie in Proposition 6.3 definieren wir die Elemente $\xi_0, \eta_1, \ldots, \eta_p$.

Es gilt offenbar:

$$\max(\|\xi_0\|_{\mathfrak{U}^0\mathfrak{V}\rho}, \|\eta_n\|_{\mathfrak{V}\mathfrak{V}\rho}) \leqq \|\xi\|_{\mathfrak{V}\rho}.$$

Durch Induktion konstruieren wir für $1 \leqq n \leqq p$ Elemente

$$\xi_n \in Z^{n,\,p-n}(\mathscr{U}^n(t,\rho), \mathscr{V}^n(t,\rho); \mathscr{F}),$$
$$\omega_n \in C^{n-1,\,p-n}(\mathscr{W}^n(t,\rho), \mathscr{Z}^n(t,\rho); \mathscr{F})$$

mit $\delta''\omega_n = \delta''\eta_n$ und $\delta'\omega_n = \xi_n$ und

$$\|\xi_n\|_{\mathfrak{U}^n\mathfrak{V}^n\rho} \leqq M_n(\rho)\,\|\xi\|_{\mathfrak{V}\rho},$$
$$\|\omega_n\|_{\mathfrak{W}^n\mathfrak{Z}^n\rho} \leqq M_n(\rho)\,\|\xi\|_{\mathfrak{V}\rho}.$$

Zur Konstruktion von ξ_{n+1} und ω_{n+1} wenden wir auf die Daten

$$\mathfrak{U}^n \gg \mathfrak{U}^{n+1} \gg \mathfrak{V}^n \gg \mathfrak{V}^{n+1} \gg \mathfrak{W}^n \gg \mathfrak{W}^{n+1} \gg \mathfrak{Z}^n \gg \mathfrak{Z}^{n+1}$$
$$\xi_n \in Z^{n,\,p-n}(\mathscr{U}^n(t,\rho), \mathscr{V}^n(t,\rho); \mathscr{F}),$$
$$\gamma_n = \eta_n - \omega_n \in C^{n-1,\,p-n}(\mathscr{W}^n(t,\rho), \mathscr{Z}^n(t,\rho); \mathscr{F})$$

Proposition 6.2 an. (Für $n=0$ sei $\gamma_n = 0$.) Dies ist möglich, denn es gilt offensichtlich $\delta''\gamma_n = 0$ und wegen (6.3) gilt

$$\delta''\omega_{n+1} = \xi_n + \delta'(\eta_n - \omega_n) = \delta'\eta_n = \delta''\eta_{n+1}.$$

Nach p Schritten erhalten wir

$$\xi_p \in Z^{p,\,0}(\mathscr{U}^p(t,\rho), \mathscr{V}^p(t,\rho); \mathscr{F}),$$
$$\omega_p \in C^{p-1,\,0}(\mathscr{W}^p(t,\rho), \mathscr{Z}^p(t,\rho); \mathscr{F})$$

mit $\delta''\gamma_p = \delta''(\eta_p - \omega_p) = 0$ und $\delta'\omega_p = \xi_p$.

Jetzt wenden wir auf

$$\mathfrak{U}^p \gg \mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}^p,$$
$$\xi_p \in Z^{p,\,0}(\mathscr{U}^p(t,\rho), \mathscr{V}^p(t,\rho); \mathscr{F})$$

und auf

$$\mathfrak{W}^p \gg \mathfrak{Z}^p \gg \mathfrak{W},$$
$$\gamma_p = \eta_p - \omega_p \in C^{p-1,\,0}(\mathscr{W}^p(t,\rho), \mathscr{Z}^p(t,\rho); \mathscr{F})$$

jeweils das Glättungslemma (6.1) i) an und erhalten

$$\xi' \in Z^p(\mathcal{U}(t,\rho), \mathcal{F}), \qquad \gamma \in C^{p-1}(\mathcal{W}(t,\rho), \mathcal{F})$$

mit $-\delta\gamma = (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} \xi - \xi'$, was direkt aus (6.3) 3) folgt. Aus den Ungleichungen in (6.1) und (6.2) folgen unmittelbar die gewünschten Ungleichungen.

Kapitel III. Der Grauertsche Projektionssatz

In diesem Kapitel wird der Grauertsche Projektionssatz bewiesen, welcher besagt, daß bei einer eigentlichen holomorphen Abbildung die direkten Bilder kohärenter Garben wieder kohärent sind.

Ein Spezialfall dieses Projektionssatzes ist der Endlichkeitssatz von Cartan-Serre. Ist nämlich der Parameterraum im Projektionssatz zu einem Punkt degeneriert, dann bedeutet die Kohärenz der direkten Bilder gerade die Endlichdimensionalität der Cohomologievektorräume. Die grundlegende Idee von Grauert ist nun, den Projektionssatz mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung nach Koordinaten des Parameterraumes auf den Cartan-Serreschen Endlichkeitssatz zurückzuführen.

Um die großen technischen Schwierigkeiten zu überwinden, die beim Verfolgen dieser Idee auftreten, muß ein ziemlich gewundener Pfad beschritten werden. Der Beweis geschieht vermöge einer Doppelinduktion über zwei Haupthilfssätze, die von der Dimension des Parameterraumes einerseits und von der Ordnung der Bildgarbe andererseits abhängen.

Im § 7 werden die Haupthilfssätze formuliert und einige einfache Beziehungen zwischen ihnen bewiesen. Das Induktionsschema wird in § 8 angegeben, hier wird auch der Beweis für die Induktionsanfänge erbracht. Der schwierigste Teil des Beweises liegt im ersten Induktionsschritt, der in § 9 erledigt wird. Dort wird die Technik der Meßüberdeckungen benutzt um einzusehen, daß gewisse Potenzreihenkonstruktionen konvergieren. Der zweite Induktionsschritt, der den Beweis des Projektionssatzes beendet, läßt sich rein algebraisch und verhältnismäßig leicht aus den Induktionsvoraussetzungen ableiten, was in § 10 durchgeführt wird.

Als erste Anwendung des Projektionssatzes wird in § 11 ein weiteres wichtiges Theorem über eigentliche holomorphe Abbildungen, der Grauertsche Vergleichssatz hergeleitet.

§ 7. Der Projektionssatz und die Haupthilfssätze

Sei $\pi: X \to S$ eine holomorphe Abbildung des komplexen Raumes X in den komplexen Raum S. Für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ kann die n-te

direkte Bildgarbe $R^n\pi_*\mathscr{F}$ durch die Prägarbe $U \mapsto H^n(\pi^{-1}(U), \mathscr{F})$ definiert werden. Für jede offene Menge U von S hat man einen kanonischen Morphismus

$$\pi_n\colon\ H^n(\pi^{-1}(U), \mathscr{F}) \to \Gamma(U, R^n\pi_*\mathscr{F}),$$

der im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv ist. Jedoch unter der Voraussetzung, daß alle Bildgarben von $\mathscr{F}$ kohärente $\mathcal{O}_S$-Moduln sind, und daß U eine Steinsche offene Menge ist, sind alle Morphismen π_n Isomorphismen.

Das fundamentale Theorem von Grauert über die direkten Bilder analytischer Garben lautet:

Projektionssatz (Grauert). *Sei $\pi\colon X \to S$ eine eigentliche holomorphe Abbildung zwischen den komplexen Räumen X und S. Dann sind für jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathscr{F}$ die direkten Bilder $R^n\pi_*\mathscr{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ kohärente $\mathcal{O}_S$-Moduln.*

Der Projektionssatz ist bezüglich S eine lokale Aussage. Deshalb darf man annehmen, daß S vermöge $j\colon S \to P$ in einen Polyzylinder P eingebettet ist. Es gibt also eine kohärente Idealgarbe $\mathscr{I}$ von $\mathcal{O}_P$ derart, daß $\mathcal{O}_P/\mathscr{I}$ zu der Strukturgarbe $\mathcal{O}_S$ isomorph ist. Wenn $R^n(j\circ\pi)_*\mathscr{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_P$-Modul ist, folgt aus den Beziehungen $R^n(j\circ\pi)_*\mathscr{F} = j_*(R^n\pi_*\mathscr{F})$ und $\mathscr{I}\cdot R^n(j\circ\pi)_*\mathscr{F} = 0$, daß auch $R^n\pi_*\mathscr{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_S$-Modul ist. Man braucht also den Projektionssatz nur für den Fall zu beweisen, daß S eine offene Menge in einem komplexen Zahlenraum ist.

Sei $\pi\colon X \to S$ eine eigentliche holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X in eine offene Menge S des $\mathbb{C}^m$. Die kanonischen Koordinatenfunktionen des $\mathbb{C}^m$ werden mit $t_1, \ldots, t_m$ bezeichnet. Zur Abkürzung schreiben wir für die Funktionen $t_i \circ \pi$ auf X ebenfalls t_i.

Sei $\mathscr{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, $\mathscr{G}$ ein $\mathcal{O}_S$-Modul und $\varphi\colon R^n\pi_*\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ ein Morphismus. Für jedes $t \in S$, $\rho \in \mathbb{R}_+^m$ und jede Meßüberdeckung $\mathfrak{U} = (\mathscr{U}, E)$ wird folgender Cozyklenmodul

$$Z_\varphi^n(\mathscr{U}(t,\rho), \mathscr{F}) = \{\xi \in Z^n(\mathscr{U}(t,\rho), \mathscr{F}) \mid \pi_n([\xi]) \in \Gamma(P(t,\rho), \ker\varphi)\}$$

eingeführt. Mit diesen Bezeichnungen lassen sich jetzt die Haupthilfssätze formulieren:

Theorem A $(\pi, n, \mathscr{F})$. *Voraussetzung: $\pi\colon X \to S$ sei eine eigentliche holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X in eine offene Menge S des $\mathbb{C}^m$, n eine natürliche Zahl und $\mathscr{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.*

Behauptung. *$R^n\pi_*\mathscr{F}$ ist ein kohärenter $\mathcal{O}_S$-Modul.*

Theorem B $(\pi, n, \mathscr{F}, \varphi)$. *Voraussetzung: $\pi\colon X \to S$ sei eine eigentliche holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X in eine offene Menge*

des $\mathbb{C}^m$, *n eine natürliche Zahl,* $\mathscr{F}$ *ein kohärenter* $\mathcal{O}_X$*-Modul und* φ: $R^n\pi_*\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ *ein Morphismus in einen kohärenten* $\mathcal{O}_S$*-Modul* $\mathscr{G}$.

Behauptung. *Zu jeder Meßkette* $\mathfrak{U}\gg\mathfrak{V}$ *auf X über S und jedem* $t\in S$ *gibt es ein* $\rho_0\in\mathbb{R}_+^m$, *Cozyklen* $\xi_1,\ldots,\xi_s\in Z^n_\varphi(\mathscr{U}(t,\rho_0),\mathscr{F})$ *und ein m-dimensionales* (Δ,M), *so daß für jedes* $\rho\in\Delta$ *gilt: Zu jedem* $\xi\in Z^n_\varphi(\mathscr{U}(t,\rho),\mathscr{F})$ *mit* $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}<\infty$ *gibt es* $a_1,\ldots,a_s\in\Gamma(P(t,\rho),\mathcal{O}_S)$ *und ein* $\eta\in C^{n-1}(\mathscr{V}(t,\rho),\mathscr{F})$ *derart, daß*

$$\xi=\sum_{\sigma=1}^{s}a_\sigma\xi_\sigma+\delta\eta\qquad\text{auf }\mathscr{V}(t,\rho),$$

$$\max(\|a_\sigma\|_\rho,\|\eta\|_{\mathfrak{V}\rho})\leqq M(\rho)\,\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Wir führen noch die folgende Aussage ein:

$B(\pi,n,\mathscr{F})$. *Für alle Morphismen* φ: $R^n\pi_*\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ *in irgendeinen kohärenten* $\mathcal{O}_S$*-Modul* $\mathscr{G}$ *gilt die Aussage von Theorem* $\mathrm{B}(\pi,n,\mathscr{F},\varphi)$.

Proposition 7.1. $B(\pi,n,\mathscr{F},0)\Leftrightarrow B(\pi,n,\mathscr{F})$.

Beweis. Offensichtlich brauchen wir nur die Implikation $B(\pi,n,\mathscr{F},0)\Rightarrow B(\pi,n,\mathscr{F},\varphi)$ für einen beliebigen Morphismus φ: $R^n\pi_*\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ in einen kohärenten $\mathcal{O}_S$-Modul $\mathscr{G}$ zu beweisen. Die Cozyklen $\xi_1,\ldots,\xi_s\in Z^n(\mathscr{U}(t,\rho_0),\mathscr{F})$ aus $B(\pi,n,\mathscr{F},0)$ liefern Schnitte $\pi_n([\xi_\sigma])\in\Gamma(P(t,\rho_0),R^n\pi_*\mathscr{F})$, welche einen Homomorphismus α: $\mathcal{O}^s\to R^n\pi_*\mathscr{F}$ über $P(t,\rho_0)$ definieren. Da $\ker(\varphi\circ\alpha)$ kohärent ist, gibt es nach Verkleinerung von ρ_0 über $P(t,\rho_0)$ eine exakte Sequenz

$$\mathcal{O}_S^r\xrightarrow{\beta}\mathcal{O}_S^s\xrightarrow{\varphi\circ\alpha}\mathscr{G}.$$

Der Homomorphismus β sei durch die Schnitte

$$(b_{i,1},\ldots,b_{i,s})\in\Gamma(P(t,\rho_0),\mathcal{O}_S^s),\qquad 1\leqq i\leqq r,$$

gegeben. Wir setzen

$$\zeta_i=\sum_{\sigma=1}^{s}b_{i,\sigma}\,\xi_\sigma.$$

Offenbar ist $\zeta_i\in Z^n_\varphi(\mathscr{U}(t,\rho_0),\mathscr{F})$. Sei jetzt $\xi\in Z^n_\varphi(\mathscr{U}(t,\rho),\mathscr{F})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}<\infty$. Nach $B(\pi,n,\mathscr{F},0)$ gilt

$$\xi=\sum_{\sigma=1}^{s}a_\sigma\xi_\sigma+\delta\eta\qquad\text{auf }\mathscr{V}(t,\rho).$$

Da

$$\sum_{\sigma=1}^{s}a_\sigma\,\pi_n([\xi_\sigma])\in\Gamma(P(t,\rho),\ker\varphi)$$

ist, folgt nach dem Privilegiertheitssatz (2.2), daß es einen Schnitt

$$(c_1,\ldots,c_r)\in\Gamma(P(t,\rho),\mathcal{O}_S^r)$$

gibt mit

$$a_\sigma = \sum_{i=1}^{r} c_i b_{i\sigma}.$$

Eine elementare Rechnung liefert die Darstellung

$$\xi = \sum_{i=1}^{r} c_i \zeta_i + \delta\eta$$

und die gewünschte Ungleichung. (Man beachte, daß man für alle im Laufe des Beweises konstruierten Elemente Abschätzungen zur Verfügung hat, die wir hier und im folgenden nicht jedesmal explizit erwähnen.)

Proposition 7.2. *Sei $\pi\colon X \to S$ eine eigentliche holomorphe Abbildung des komplexen Raumes X in eine offene Menge S des $\mathbb{C}^m$ und sei*

$$0 \to \mathscr{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F} \xrightarrow{\beta} \mathscr{F}'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln. Dann gelten die folgenden Aussagen:

i) $\left.\begin{array}{l} A(\pi, n-1, \mathscr{F}'') \text{ und } A(\pi, n, \mathscr{F}') \\ \text{und } A(\pi, n, \mathscr{F}'') \text{ und } A(\pi, n+1, \mathscr{F}') \end{array}\right\} \Rightarrow A(\pi, n, \mathscr{F}).$

ii) $\left.\begin{array}{l} B(\pi, n, \mathscr{F}') \text{ und } B(\pi, n, \mathscr{F}'') \\ \text{und } A(\pi, n+1, \mathscr{F}') \end{array}\right\} \Rightarrow B(\pi, n, \mathscr{F}).$

Beweis. i) Die Aussage folgt unmittelbar aus der langen exakten Bildgarbensequenz

$$R^{n-1}\pi_* \mathscr{F}'' \to R^n \pi_* \mathscr{F}' \to R^n \pi_* \mathscr{F} \to R^n \pi_* \mathscr{F}'' \to R^{n+1} \pi_* \mathscr{F}'.$$

ii) Wegen (7.1) brauchen wir nur $B(\pi, n, \mathscr{F}, 0)$ zu zeigen. Sei $t \in S$ und $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}' \gg \mathfrak{V}'' \gg \mathfrak{V}''' \gg \mathfrak{V}$ eine Meßkette über t. Seien $\xi_1'', \ldots, \xi_p'' \in Z^n_\delta(\mathscr{U}(t, \rho_0), \mathscr{F}'')$ die Cozyklen aus $B(\pi, n, \mathscr{F}'', \delta)$ für die Meßkette $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}'$, wobei $\delta\colon R^n \pi_* \mathscr{F}'' \to R^{n+1} \pi_* \mathscr{F}'$ der verbindende Homomorphismus ist. Nach Verkleinerung von ρ_0 gibt es Cozyklen $\xi_1, \ldots, \xi_p \in Z^n(\mathscr{U}(t, \rho_0), \mathscr{F})$ mit $\beta(\xi_i) = \xi_i''$ für $1 \leqq i \leqq p$. Weiter seien $\xi'_{p+1}, \ldots, \xi'_{p+q} \in Z^n(\mathscr{V}'(t, \rho_0), \mathscr{F}')$ die Cozyklen aus $B(\pi, n, \mathscr{F}', 0)$ für die Meßkette $\mathfrak{V}' \gg \mathfrak{V}$. Nach einem klassischen Satz von Leray gibt es

$$\xi_{p+i} \in Z^n(\mathscr{U}(t, \rho_0), \mathscr{F}) \quad \text{und} \quad \omega_{p+i} \in C^{n-1}(\mathscr{V}'''(t, \rho_0), \mathscr{F})$$

mit

$$\xi_{p+i} + \delta\omega_{p+i} = \alpha(\xi'_{p+i}) \quad \text{auf } V'''(t, \rho_0)$$

für $1 \leqq i \leqq q$.

Behauptung. *Für die Meßkette* $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}$ *ist* $(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q})$ *eine, wie in* $B(\pi, n, \mathscr{F}, 0)$ *verlangte, Familie von Cozyklen.*

Sei $\xi \in Z^n\big(\mathscr{U}(t,\rho), \mathscr{F}\big)$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho} < \infty$. Offensichtlich gilt

$$\|\beta(\xi)\|_{\mathfrak{U}\rho} \leqq C_1 \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Nach $B(\pi, n, \mathscr{F}'', \delta)$ gibt es eine Darstellung

$$\beta(\xi) = \sum_{i=1}^{p} a_i \xi_i'' + \delta\eta_1'' \quad \text{auf } \mathscr{V}''(t,\rho)$$

mit

$$\max(\|a_i\|_\rho, \|\eta_1''\|_{\mathfrak{W}''\rho}) \leqq M_1(\rho)\, \|\beta(\xi)\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Nach (5.6) gibt es ein $\eta_1 \in C^{n-1}\big(\mathscr{V}''(t,\rho), \mathscr{F}\big)$ mit

$$\beta(\eta_1) = \eta_1'' \quad \text{und} \quad \|\eta_1\|_{\mathfrak{W}''\rho} \leqq C_2(\rho)\, \|\eta_1''\|_{\mathfrak{W}''\rho}.$$

Es gilt jetzt

$$\beta\left(\xi - \sum_{i=1}^{p} a_i \xi_i - \delta\eta_1\right) = 0.$$

Nach (5.6) gibt es eine Cokette $\zeta \in C^n\big(\mathscr{V}'''(t,\rho), \mathscr{F}'\big)$ mit

$$\alpha(\zeta) = \xi - \sum_{i=1}^{p} a_i \xi_i - \delta\eta_1 \quad \text{auf } \mathscr{V}'''(t,\rho)$$

und

$$\|\zeta\|_{\mathfrak{W}'''\rho} \leqq C_3(\rho) \left\| \xi - \sum_{i=1}^{p} a_i \xi_i - \delta\eta_1 \right\|_{\mathfrak{W}''\rho}.$$

Man sieht sofort, daß ζ sogar ein Cozyklus ist.

Nach $B(\pi, n, \mathscr{F}', 0)$ gibt es eine Darstellung

$$\zeta = \sum_{i=p+1}^{p+q} a_i \xi_i' + \delta\eta_2'$$

mit

$$\max(\|a_i\|_\rho, \|\eta_2'\|_{\mathfrak{V}\rho}) \leqq M_2(\rho)\, \|\zeta\|_{\mathfrak{W}'''\rho}.$$

Elementares Einsetzen liefert

$$\xi = \sum_{i=1}^{p+q} a_i \xi_i + \delta\eta_1 + \delta\alpha(\eta_2') + \sum_{i=1}^{q} a_{p+i}\, \delta\omega_{p+i},$$

die gewünschte Ungleichung folgt unmittelbar aus den vorangehenden Ungleichungen.

§ 8. Induktionsschema und Induktionsanfang

Für diesen und die beiden nächsten Paragraphen sei N_0 eine beliebige, aber feste natürliche Zahl. Für eine eigentliche holomorphe Abbildung $\pi\colon X \to S$ eines komplexen Raumes X in eine offene Menge des $\mathbb{C}^k$ bedeute $l(\pi) \leqq N_0$: Es gibt einen Meßatlas

$$\mathfrak{U} = \big((X_k, \Phi_k, D_k \times P, R_k)_{k\in K}, (Y_\alpha)_{\alpha\in A}\big)$$

von π über S derart, daß die Ordnung der Überdeckung (Y_α) kleiner gleich N_0 ist.

Jetzt definieren wir noch die beiden folgenden Aussagen:

$A(k, n)$. Für jede offene Menge S aus $\mathbb{C}^k$, jede eigentliche holomorphe Abbildung $\pi\colon X \to S$ mit $l(\pi) \leqq N_0$ und jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ gilt $A(\pi, \nu, \mathcal{F})$ für $\nu \geqq n$.

$B(k, n)$. Für jede offene Menge S aus $\mathbb{C}^k$, jede eigentliche holomorphe Abbildung $\pi\colon X \to S$ mit $l(\pi) \leqq N_0$ und jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ gilt $B(\pi, \nu, \mathcal{F})$ für $\nu \geqq n$.

Die Sätze $A(k, n)$ und $B(k, n)$ werden simultan durch eine Doppelinduktion nach folgendem Induktionsschema bewiesen:

(I) $\left.\begin{array}{l} A(k, n+1) \text{ und } B(k, n+1) \\ \text{und } B(k-1, n) \end{array}\right\} \Rightarrow B(k, n).$

(II) $\left.\begin{array}{l} B(k, n) \text{ und } A(k, n+1) \\ \text{und } A(k-1, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow A(k, n).$

Es müssen folgende Induktionsanfänge bewiesen werden:

a) $A(0, n)$ und $B(0, n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) $A(k, n)$ und $B(k, n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $n \geqq N_0$.

a) *Beweis* von $A(0, n)$ und $B(0, n)$. Im Falle $k = 0$ ist X kompakt und $R^n \pi_* \mathcal{F} = H^n(X, \mathcal{F})$. Der Satz von Cartan-Serre besagt, daß $H^n(X, \mathcal{F})$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, d.h. aber, daß $R^n \pi_* \mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathbb{C}$-Modul ist. Damit ist $A(0, n)$ bewiesen.

Wegen (7.1) brauchen wir nur $B(0, n, \mathcal{F}, 0)$ für alle kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ beweisen. Sei $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}$ eine Meßkette. Da $H^n(X, \mathcal{F})$ endlichdimensional ist, gibt es Cozyklen $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Z^n(U, \mathcal{F})$, deren Bilder $H^n(U, \mathcal{F})$ erzeugen. Die Abbildung

$$\mathbb{C}^s \times C^{n-1}(U, \mathcal{F}) \to Z^n(U, \mathcal{F}),$$

definiert durch die Zuordnung

$$(a_1, \ldots, a_s, \eta) \mapsto \sum_{\sigma=1}^{s} a_\sigma \xi_\sigma + \delta\eta,$$

ist also surjektiv. Diese Abbildung ist auch stetig, wenn man die Moduln $C^{n-1}(U, \mathscr{F})$ und $Z^n(U, \mathscr{F})$ mit der kanonischen Fréchetraumstruktur versieht. Nach einem Satz von Banach ist dann diese Abbildung offen. Aus der Offenheit folgt leicht (vgl. § 3), daß es eine Konstante $M > 0$ gibt, so daß für jedes $\xi \in Z^n(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ ein $(a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{C}^s$ und ein $\eta \in C^{n-1}(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ existiert mit

$$\xi = \sum_{\sigma=1}^{s} a_\sigma \xi_\sigma + \delta\eta$$

und

$$\max(|a_\sigma|, \|\eta\|_{\mathfrak{V}}) \leqq M \|\xi\|_{\mathfrak{U}}.$$

b) *Beweis* von $A(k, n)$ und $B(k, n)$ für $n > N_0$. Da wir nur alternierende Coketten betrachten, folgt, daß für $n > N_0$ die Cokettenmoduln $C^n(\mathscr{U}(t, \rho), \mathscr{F})$ für jede Meßüberdeckung $\mathfrak{U}$, jedes $t \in S$ und $\rho \in \mathbb{R}_+^k$ verschwinden. Daraus folgt aber unmittelbar die Richtigkeit von $A(k, n)$ und $B(k, n)$ für $n > N_0$.

§ 9. Der erste Induktionsschritt

Zunächst einige Bezeichnungen, die wir in § 9 und § 10 beibehalten wollen:

π: $X \to S$ ist eine eigentliche holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X in eine offene Menge S des $\mathbb{C}^k$ mit $l(\pi) \leqq N_0$. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, daß der Nullpunkt des $\mathbb{C}^k$ in S liegt. Wir setzen

$$S' = \{t' \in \mathbb{C}^{k-1} | (t', 0) \in S\},$$

$$X' = X \times_S S' = \bar{\pi}^1(S').$$

π': $X' \to S'$ ist die von π induzierte Abbildung; sie ist eine eigentliche holomorphe Abbildung. Mit X_0 werde die Faser von π über dem Nullpunkt bezeichnet.

Lemma 1 (Injektivität von π_{n+1}). *Sei $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}$ eine Meßkette über dem Nullpunkt und $\mathscr{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul.*

Behauptung. *Es gibt ein k-dimensionales (Δ, M), so daß für jedes $\rho \in \Delta$ gilt:*

Zu jedem $\xi \in Z^{n+1}(\mathscr{U}(\rho), \mathscr{F})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho} < \infty$ und $\pi_{n+1}([\xi]) = 0$ gibt es ein $\eta \in C^n(\mathscr{V}(t, \rho), \mathscr{F})$ mit

$$\delta\eta = \xi \quad \text{auf } \mathscr{V}(t, \rho)$$

und

$$\|\eta\|_{\mathfrak{V}\rho} \leqq M(\rho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Satz 9.1. *$A(k, n+1)$ und $B(k, n+1) \Rightarrow$ Lemma 1.*

Beweis. Da wegen $A(k, n+1)$ die Garbe $R^{n+1}\pi_*\mathscr{F}$ kohärent ist, darf man $B(\pi, n+1, \mathscr{F}, \mathrm{id})$ anwenden, wobei id: $R^{n+1}\pi_*\mathscr{F} \to R^{n+1}\pi_*\mathscr{F}$ die Identität ist. Seien $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Z^{n+1}_{\mathrm{id}}(\mathscr{U}(\rho_0), \mathscr{F})$ die Cozyklen aus $B(\pi, n+1, \mathscr{F}, \mathrm{id})$ bezüglich einer Meßkette $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}$. Offensichtlich gilt $\pi_{n+1}([\xi_\sigma]) = 0$ für $1 \leqq \sigma \leqq s$. Nach Verkleinerung von ρ_0 gibt es $\eta_\sigma \in C^n(\mathscr{U}(\rho_0), \mathscr{F})$ mit $\delta\eta_\sigma = \xi_\sigma$ und $\|\eta_\sigma\|_{\mathfrak{V}\rho_0} < \infty$ für $1 \leqq \sigma \leqq s$. Nach $B(\pi, n+1, \mathscr{F}, \mathrm{id})$ besitzt ein Cozyklus $\xi \in Z^{n+1}(\mathscr{U}(t, \rho), \mathscr{F})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho} < \infty$ und $\pi_{n+1}([\xi]) = 0$ auf $\mathscr{V}(t, \rho)$ folgende Darstellung

$$\xi = \sum_{\sigma=1}^{s} a_\sigma \xi_\sigma + \delta\eta = \delta\left(\sum_{\sigma=1}^{s} a_\sigma \eta_\sigma + \eta\right).$$

Nach (5.2) folgt aus dem Vorangehenden die gewünschte Ungleichung.

Lemma 2 (Cozyklenentwicklung). *Sei $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}$ eine Meßkette und $\mathscr{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, der ohne t_k-Torsion ist.*

Behauptung. *Es gibt ein $(\Delta(\delta_1, \ldots, \delta_k), M)$, so daß für jedes $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_k) \in \Delta(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ gilt:*

Jedes $\xi \in Z^n(\mathscr{U}(\rho), \mathscr{F})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho} < \infty$ läßt sich in eine Potenzreihe

$$\xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_\nu \left(\frac{t_k}{\rho_k}\right)^\nu$$

entwickeln mit $\zeta_\nu \in Z^n(\mathscr{V}(\rho^*), \mathscr{F})$, $\rho_k^* = \delta_k(\rho_1, \ldots, \rho_{k-1})$ $\rho^* = (\rho_1, \ldots, \rho_{k-1}, \rho_k^*)$ und

$$\|\zeta_\nu\|_{\mathfrak{V}\rho^*} \leqq M(\rho^*)\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

An Lemma 2 ist bemerkenswert, daß die Koeffizienten der dortigen Potenzreihe wieder Cozyklen sind, die darüber hinaus noch über einem etwas größeren Polyzylinder definiert sind! Weiterhin ist zu beachten, daß die Konstante $M(\rho^*)$ nicht mehr von ρ_k abhängig ist!

Satz 9.2. *$A(k, n+1)$ und Lemma $1 \Rightarrow$ Lemma 2.*

Beweis. Sei $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{U}_1 \gg \mathfrak{U}_2 \gg \mathfrak{U}_3 \gg \mathfrak{V}$ eine Meßkette über dem Nullpunkt des $\mathbb{C}^k$ und sei $\xi \in Z^n(\mathscr{U}(\rho), \mathscr{F})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho} < \infty$.

Nach (5.7) läßt sich ξ in eine Potenzreihe

$$\xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \xi_\nu \left(\frac{t_k}{\rho_k}\right)^\nu$$

entwickeln mit $\xi_\nu \in C^n(\mathscr{U}_1(\rho^{**}), \mathscr{F})$, wobei

$$\rho^{**} = (\rho_1, \ldots, \rho_{m-1}, \rho_m^{**}) \quad \text{mit} \quad \rho_m^{**} = \delta_m^{(1)}(\rho_1, \ldots, \rho_{m-1})$$

und es gilt:

$$\|\xi_\nu\|_{\mathfrak{U}_1\rho^{**}} \leqq M_1(\rho^{**})\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Sei

$$\rho^* = (\rho_1, \ldots, \rho_{m-1}, \rho_m^*) \quad \text{mit} \quad \rho_m^* = 1/2\, \rho_m^{**}.$$

Wir schreiben ξ in der Form

$$\xi = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \xi_\mu \left(\frac{t_k}{\rho_k}\right)^\mu + \left(\frac{t_k}{\rho_k}\right)^\nu \sum_{\mu=0}^{\infty} \xi_{\nu+\mu} \left(\frac{t_k}{\rho_k}\right)^\mu$$

und definieren

$$\eta_\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} \xi_{\nu+\mu} \left(\frac{t_k}{\rho_k}\right)^\mu,$$

$$\gamma_\nu = -\left(\frac{\rho_k}{\rho_k^*}\right)^{\nu-1} \delta\left(\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \xi_\mu \left(\frac{t_k}{\rho_k}\right)^\mu\right).$$

Offensichtlich ist $\eta_\nu \in C^n(\mathscr{U}_1(\rho), \mathscr{F})$, $\gamma_\nu \in Z^{n+1}(\mathscr{U}_1(\rho^*), \mathscr{F})$ und es gilt die Abschätzung

$$\|\gamma_\nu\|_{\mathfrak{U}_1 \rho^*} \leqq M_1'(\rho^*)\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Auf $\mathscr{U}_1(\rho)$ gilt:

$$\gamma_\nu = \frac{\rho_k^*}{\rho_k} \left(\frac{t_k}{\rho_k^*}\right)^\nu \delta\eta_\nu.$$

Daraus folgt, daß $\gamma_\nu \in Z^{n+1}(\mathscr{U}_1(\rho^*), t_k^\nu \mathscr{F})$ ist. Für alle $\nu \geqq 0$ gibt es nach dem Divisionslemma (5.8) ein $\tilde{\gamma}_\nu \in Z^{n+1}(\mathscr{U}_2(\rho^*), \mathscr{F})$ mit

$$\left(\frac{t_k}{\rho_k^*}\right)^\nu \tilde{\gamma}_\nu = \gamma_\nu$$

und

$$\|\tilde{\gamma}_\nu\|_{\mathfrak{U}_2 \rho^*} \leqq M_2(\rho^*)\, \|\gamma_\nu\|_{\mathfrak{U}_1 \rho^*}.$$

Auf $\mathscr{U}_2(\rho)$ gilt somit

$$\tilde{\gamma}_\nu = \frac{\rho_k^*}{\rho_k} \delta\eta_\nu \qquad \text{für alle } \nu \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt, daß $\pi_{n+1}([\tilde{\gamma}_\nu]) = 0$ in $\Gamma(P(\rho), R^{n+1}\pi_* \mathscr{F})$ ist. Da γ_ν ein Corand über $\mathscr{U}_1(\rho^*)$ und

$$\tilde{\gamma}_\nu = \left(\frac{\rho_k^*}{t_k}\right)^\nu \gamma_\nu \qquad \text{für } t_k \neq 0$$

ist, folgt, daß $\pi_{n+1}([\tilde{\gamma}_\nu]) = 0$ in $\Gamma(P(\rho^*), R^{n+1}\pi_* \mathscr{F})$ ist. Nach Lemma 1 folgt sodann: Für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gibt es $\sigma_\nu \in C^n(\mathscr{U}_3(\rho^*), \mathscr{F})$ mit

$$\delta\sigma_\nu = \tilde{\gamma}_\nu \qquad \text{auf } \mathscr{V}(\rho^*)$$

und

$$\|\sigma_\nu\|_{\mathfrak{U}_3 \rho^*} \leqq M_3(\rho^*)\, \|\tilde{\gamma}_\nu\|_{\mathfrak{U}_2 \rho^*}.$$

Insgesamt hat man die Ungleichung

$$\|\sigma_\nu\|_{\mathfrak{U}_3\rho^*} \leqq M_3(\rho^*)\, M_2(\rho^*)\, M_1'(\rho^*)\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Wir definieren

$$\zeta_0 = \xi_0 + \frac{t_k}{\rho_k^*}\,\sigma_1,$$

$$\zeta_\nu = \xi_\nu - \frac{\rho_k}{\rho_k^*}\,\sigma_\nu + \frac{t_k}{\rho_k^*}\,\sigma_{\nu+1} \qquad \text{für alle } \nu > 0.$$

Eine elementare Rechnung zeigt:

$$\left(\frac{t_k/\rho_k}{\rho_k/\rho_k^*}\right)^\nu \delta\zeta_\nu = 0 \qquad \text{für } \nu \in \mathbb{N}.$$

Da aber $\mathscr{F}$ ohne t_k-Torsion ist, folgt, daß $\zeta_\nu \in Z^n(\mathscr{V}(\rho^*), \mathscr{F})$ ist. Offensichtlich gilt jetzt

$$\xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_\nu \left(\frac{t_k}{\rho_k}\right)^\nu$$

und

$$\|\zeta_\nu\|_{\mathfrak{V}\rho^*} \leqq M(\rho^*)\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Lemma 3 (Approximationssatz). *Sei $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}$ eine Meßkette über dem Nullpunkt des $\mathbb{C}^k$ und $\mathscr{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ohne t_k-Torsion.*

Behauptung. *Es gibt ein $\rho_0 \in \mathbb{R}_+^k$, Cozyklen $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Z^n(\mathscr{U}(\rho_0), \mathscr{F})$ und ein $(\Delta(\delta_1, \ldots, \delta_k), M)$, so daß für jedes $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_k) \in \Delta(\delta_1, \ldots, \delta_k)$ gilt:*

Zu jedem $\xi \in Z^n(\mathscr{U}(\rho), \mathscr{F})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho} < \infty$ gibt es $a_1, \ldots, a_s \in \Gamma(P(\rho), \mathcal{O}_S)$, $\eta \in C^{n-1}(\mathscr{V}(\rho), \mathscr{F})$ und ein $\zeta \in Z^n(\mathscr{U}(\rho), \mathscr{F})$ derart, daß

$$\xi = \sum_{\sigma=1}^{s} a_\sigma\, \xi_\sigma + \delta\eta + \zeta \qquad \text{auf } \mathscr{V}(\rho),$$

$$\max(\|a_\sigma\|_\rho, \|\eta\|_{\mathfrak{V}\rho}) \leqq M(\rho^*)\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho},$$

$$\|\zeta\|_{\mathfrak{U}\rho} \leqq \frac{\rho_k}{\rho_k^*}\, M(\rho^*)\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho},$$

dabei ist $\rho_k^* = \delta_k(\rho_1, \ldots, \rho_{k-1})$ und $\rho^* = (\rho_1, \ldots, \rho_{k-1}, \rho_k^*)$.

An diesem Approximationssatz sind drei Dinge bemerkenswert: Erstens ist die Abschätzungskonstante $M(\rho^*)$ unabhängig von ρ_k; zweitens ist das Restglied ζ wieder auf der ursprünglichen Überdeckung definiert und drittens ist die Abschätzungskonstante des Restglieds noch mit dem Faktor ρ_k/ρ_k^* versehen, der für die Konvergenz des Iterationsprozesses in Satz 9.4 ausschlaggebend sein wird.

Satz 9.3. *$B(k-1, n)$ und $A(k, n+1)$ und Lemma 2 $\Rightarrow$ Lemma 3.*

Beweis. Sei $\mathfrak{W} \gg \mathfrak{U} \gg \mathfrak{U}^0 \gg \mathfrak{U}^1 \gg \mathfrak{U}^2 \gg \mathfrak{U}^3 \gg \mathfrak{U}^4 \gg \mathfrak{U}^5 \gg \mathfrak{V}$ eine Meßkette über dem Nullpunkt des $\mathbb{C}^k$ bezüglich der Abbildung π. Diese Meßkette induziert eine Meßkette, die wir nicht neu bezeichnen wollen, über dem Nullpunkt des $\mathbb{C}^{k-1}$ bezüglich der Abbildung π'.

Sei $\xi \in Z^n(\mathscr{U}(\rho), \mathscr{F})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho} < \infty$. Nach Lemma 2 hat man eine Potenzreihenentwicklung

$$\xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \zeta_\nu \left(\frac{t_k}{\rho_k}\right)^\nu \quad \text{mit} \quad \zeta_\nu \in Z^n(\mathscr{U}_1(\rho^*), \mathscr{F})$$

und

$$\|\zeta_\nu\|_{\mathfrak{U}^1 \rho^*} \leqq M_1(\rho^*) \, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{t_k} \mathscr{F} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F}/t_k \mathscr{F} \to 0$$

folgt die lange exakte Bildgarbensequenz

$$\to R^n \pi_* \mathscr{F} \to R^n \pi_* \mathscr{F}/t_k \mathscr{F} \xrightarrow{\delta} R^{n+1} \pi_* \mathscr{F} \to .$$

Die Garbe $\mathscr{F}/t_k \mathscr{F} = \mathscr{F}_0$ läßt sich in kanonischer Weise auch als $\mathscr{O}_{X'}$-Modul auffassen. Nach Voraussetzung gilt also $B(\pi', n, \mathscr{F}_0, 0)$. Offensichtlich gilt dann auch $B(\pi, n, \mathscr{F}_0, 0)$ und wegen (7.1) und $A(\pi, n+1, \mathscr{F})$ gilt auch $B(\pi, n, \mathscr{F}_0, \delta)$. Offensichtlich gilt $\alpha(\zeta_\nu) \in Z^n_\delta(\mathscr{U}_1(\rho^*), \mathscr{F}_0)$ mit

$$\|\alpha(\zeta_\nu)\|_{\mathfrak{U}^0 \rho^*} \leqq M_0(\rho^*) \, \|\zeta_\nu\|_{\mathfrak{U}^0 \rho^*}.$$

Seien $\xi'_1, \ldots, \xi'_s \in Z^n_\delta(\mathscr{U}_1(\rho_0), \mathscr{F}_0)$ die Cozyklen aus $B(\pi, n, \mathscr{F}_0, \delta)$ bezüglich $\mathfrak{U}^1 \gg \mathfrak{U}^2$. Nach $B(\pi, n, \mathscr{F}_0, \delta)$ gibt es für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ Funktionen $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_s} \in \Gamma(P(\rho^*), \mathscr{O}_S)$ und Coketten $\omega'_\nu \in C^{n-1}(\mathscr{U}_2(\rho^*), \mathscr{F}_0)$, so daß gilt:

$$\alpha(\zeta_\nu) = \sum_{\sigma=1}^{s} a_{\nu\sigma} \, \xi'_\sigma + \delta\omega'_\nu \quad \text{auf } \mathscr{U}_2(\rho^*),$$

$$\max(\|a_{\nu\sigma}\|_{\rho^*}, \|\omega'_\nu\|_{\mathfrak{U}^2 \rho^*}) \leqq M_2(\rho^*) \, \|\zeta_\nu\|_{\mathfrak{U}^1 \rho^*}.$$

Nach Verkleinerung von ρ_0 gibt es Cozyklen $\xi_\sigma \in Z^n(\mathscr{U}_1(\rho_0), \mathscr{F})$ mit endlicher Norm und $\alpha(\xi_\sigma) = \xi'_\sigma$, $1 \leqq \sigma \leqq S$. Weiterhin gibt es eine Konstante $M_3(\rho^*)$ und für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ ein $\omega_\nu \in C^{n-1}(\mathscr{U}_3(\rho^*), \mathscr{F})$ derart, daß

$$\alpha(\omega_\nu) = \omega'_\nu$$

und

$$\|\omega_\nu\|_{\mathfrak{U}^3 \rho^*} \leqq M_3(\rho^*) \, \|\omega'_\nu\|_{\mathfrak{U}^2 \rho^*}.$$

Wir setzen jetzt für jedes $\nu \in \mathbb{N}$

$$\zeta'_\nu = \zeta_\nu - \sum_{\sigma=1}^{s} a_{\nu\sigma} \, \xi_\sigma - \delta\omega_\nu$$

und nach (5.2) gilt die Abschätzung

$$\|\zeta'_\nu\|_{\mathfrak{U}^3\rho^*} \leqq M_0(\rho^*)\, M_1(\rho^*)\,(1+M_3(\rho^*)\, M_2(\rho^*))\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Da $\alpha(\zeta'_\nu)=0$ ist, gibt es nach dem Divisionslemma (5.8) ein $\zeta''_\nu \in Z^n(\mathscr{U}_4(\rho^*), \mathscr{F})$ mit

$$\frac{t_k}{\rho_k^*}\,\zeta''_\nu = \zeta'_\nu \quad \text{auf } \mathscr{U}_4(\rho^*)$$

und

$$\|\zeta''_\nu\|_{\mathfrak{U}^4\rho^*} \leqq M_4(\rho^*)\, \|\zeta'_\nu\|_{\mathfrak{U}^3\rho^*}.$$

Jetzt wird das Glättungstheorem (6.4) für die Meßkette $\mathfrak{W} \gg \mathfrak{U}^4 \gg \mathfrak{U}^5$ auf die Cozyklen ζ''_ν angewandt: Es gibt also für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ Cozyklen $\zeta'''_\nu \in Z^n(\mathscr{W}(\rho^*), \mathscr{F})$ und Coketten $\eta_\nu \in C^{n-1}(\mathscr{U}_5(\rho^*), \mathscr{F})$, so daß gilt:

$$\zeta''_\nu = \zeta'''_\nu + \delta\eta_\nu \quad \text{auf } \mathscr{U}_5(\rho^*),$$
$$\max(\|\zeta'''_\nu\|_{\mathfrak{W}\rho^*}, \|\eta_\nu\|_{\mathfrak{U}^5\rho^*}) \leqq L(\rho^*)\, \|\zeta''_\nu\|_{\mathfrak{U}_4\rho^*}.$$

Elementares Einsetzen ergibt:

$$\zeta_\nu = \sum_{\sigma=1}^{s} a_{\nu\sigma}\,\xi_\sigma + \delta\left(\omega_\nu + \frac{t_k}{\rho_k^*}\,\eta_\nu\right) + \frac{t_k}{\rho_k^*}\,\zeta'''_\nu \quad \text{auf } \mathscr{U}_5(\rho^*).$$

Wir setzen jetzt:

$$a_\sigma = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu\sigma}\left(\frac{t_k}{\rho_k}\right)^\nu, \qquad 1 \leqq \sigma \leqq s,$$

$$\eta = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\omega_\nu + \frac{t_k}{\rho_k^*}\,\eta_\nu\right)\left(\frac{t_k}{\rho_k}\right)^\nu,$$

$$\zeta = \frac{\rho_k}{\rho_k^*}\sum_{\nu=0}^{\infty}\zeta'''_\nu\left(\frac{t_k}{\rho_k}\right)^\nu.$$

Nach (5.3) und den vorangehenden Ungleichungen folgt:

$$\max(\|a_\sigma\|_\rho, \|\eta\|_{\mathfrak{V}\rho}) \leqq M(\rho^*)\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho},$$

$$\|\zeta\|_{\mathfrak{U}\rho} \leqq \frac{\rho_k}{\rho_k^*}\, M(\rho^*)\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Weiterhin ist klar, daß auf $\mathscr{V}(\rho)$ die folgende Gleichung gilt:

$$\xi = \sum_{\sigma=1}^{s} a_\sigma\,\xi_\sigma + \delta\eta + \zeta.$$

Satz 9.4. *$A(k, n+1)$ und $B(k-1, n)$ und Lemma 3* $\Big\} \Rightarrow B(k, n).$

Beweis. 1) Zunächst setzen wir voraus, daß der kohärente $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ ohne t_k-Torsion ist. Sei $(\Delta(\delta_1, \ldots, \delta_k), M)$ das Paar aus Lemma 3. Es gibt eine Funktion δ_k': $\Delta(\delta_1, \ldots, \delta_{k-1}) \to \mathbb{R}_+$, so daß für jedes

$$\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_{k-1}, \rho_k) \in \Delta(\delta_1, \ldots, \delta_{k-1}, \delta_k')$$

gilt

$$\rho \in \Delta(\delta_1, \ldots, \delta_k) \quad \text{und} \quad \frac{\rho_k}{\rho_k^*} M(\rho^*) \leqq \frac{1}{2},$$

dabei ist

$$\rho_k^* = \delta_k(\rho_1, \ldots, \rho_{k-1}) \quad \text{und} \quad \rho^* = (\rho_1, \ldots, \rho_{k-1}, \rho_k^*).$$

Sei jetzt $\rho \in \Delta(\delta_1, \ldots, \delta_{k-1}, \delta_k')$ und $\xi \in Z^n(\mathcal{U}(\rho), \mathcal{F})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho} < \infty$. Sei $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}' \gg \mathfrak{V}$ und seien $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Z^n(\mathcal{U}(\rho_0), \mathcal{F})$ die Cozyklen aus Lemma 3 für $\mathfrak{U} \gg \mathfrak{V}'$. Vermöge Lemma 3 lassen sich jetzt induktiv Folgen (ζ_ν), (η_ν), $(a_{\nu\sigma})$, $1 \leqq \sigma \leqq s$ wobei $\zeta_\nu \in Z^n(\mathcal{U}(\rho), \mathcal{F})$, $\eta_\nu \in C^{n-1}(\mathcal{V}'(\rho), \mathcal{F})$ und $a_{\nu\sigma} \in \Gamma(P(\rho), \mathcal{O}_S)$ konstruieren, so daß gilt:

$$\zeta_0 = \xi,$$

$$\zeta_\nu = \sum_{\sigma=1}^{s} a_{\nu\sigma}\, \xi_\sigma + \delta\eta_\nu + \zeta_{\nu+1} \quad \text{auf } \mathcal{V}'(\rho),$$

$$\max(\|a_{\nu\sigma}\|_\rho, \|\eta_\nu\|_{\mathfrak{V}'\rho}) \leqq (\tfrac{1}{2})^\nu M(\rho^*)\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho},$$

$$\|\zeta_\nu\|_{\mathfrak{U}\rho} \leqq (\tfrac{1}{2})^{\nu+1}\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho}.$$

Wir setzen $a_\sigma = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu\sigma}$ und $\eta = \sum_{\nu=0}^{\infty} \eta_\nu$. Wegen den vorangegangenen Ungleichungen gilt:

$$a_\sigma \in \Gamma(P(\rho), \mathcal{O}_S), \quad 1 \leqq \sigma \leqq s,$$

$$\eta \in C^{n-1}(\mathcal{V}(\rho), \mathcal{F}),$$

$$\max(\|a_\sigma\|_\rho, \|\eta\|_{\mathfrak{V}\rho}) \leqq 2M(\rho^*)\, \|\xi\|_{\mathfrak{U}\rho},$$

$$\xi = \sum_{\sigma=1}^{s} a_\sigma\, \xi_\sigma + \delta\eta \quad \text{auf } \mathcal{V}(\rho).$$

Damit ist $B(\pi, n, \mathcal{F})$ für den Fall, daß $\mathcal{F}$ ohne t_k-Torsion ist, bewiesen.

2) Sei jetzt $\mathcal{F}$ ein beliebiger kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Nach der Bemerkung (2.0) gibt es ein $d_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $t_k^{d_0}\mathcal{F}$ ohne t_k-Torsion ist. Aus der Kompositionsreihe

$$t_k^{d_0}\mathcal{F} \subset t_k^{d_0-1}\mathcal{F} \subset \cdots \subset t_k\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$$

erhalten wir die kurzen exakten Sequenzen

$$(*) \qquad 0 \to t_k^{d-1}\mathcal{F}/t_k^d\mathcal{F} \to \mathcal{F}/t_k^d\mathcal{F} \to \mathcal{F}/t_k^{d-1}\mathcal{F} \to 0$$

für $2 \leqq d \leqq d_0$. Da $t_k^{d-1}\mathscr{F}/t_k^d\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}/t_k\mathscr{F}$ auch als $\mathcal{O}_{X'}$-Moduln aufgefaßt werden können, folgt wegen $B(k-1, n)$, daß $B(\pi, n, t_k^{d-1}\mathscr{F}/t_k^d\mathscr{F})$ und $B(\pi, n, \mathscr{F}/t_k\mathscr{F})$ richtig sind. Aus den Sequenzen (∗) erhalten wir sukzessive vermöge (7.2) ii), daß auch $B(\pi, n, \mathscr{F}/t_k^d\mathscr{F})$ für $1 \leqq d \leqq d_0$ richtig ist. Jetzt wenden wir auf die kurze exakte Sequenz

$$0 \to t_k^{d_0}\mathscr{F} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}/t_k^{d_0}\mathscr{F} \to 0$$

nochmals (7.2) ii) an und erhalten, daß $B(\pi, n, \mathscr{F})$ richtig ist, was zu zeigen war.

Damit ist der erste Induktionsschritt getan.

§ 10. Der zweite Induktionsschritt

Es ist zweckmäßig, das Theorem $B(\pi, n, \mathscr{F}, 0)$ und das Lemma 1 aus § 9 etwas abzuschwächen, um sie für das folgende etwas handlicher zu machen:

Theorem B* $(\pi, n, \mathscr{F}, 0)$. *Voraussetzung:* $\pi\colon X \to S$ *sei eine eigentliche holomorphe Abbildung von einem komplexen Raum* X *in eine offene Menge* S *des* $\mathbb{C}^k$ *und* $\mathscr{F}$ *ein kohärenter* $\mathcal{O}_X$*-Modul.*

Behauptung. *Zu jedem* $t \in S$ *gibt es ein* $\rho_0 \in \mathbb{R}_+^k$ *und Cohomologieklassen* $\xi_1, \ldots, \xi_s \in H^n(X(t, \rho_0), \mathscr{F})$ *mit folgender Eigenschaft: Zu jedem* $\rho^* \in \mathbb{R}_+^k$ *existiert ein* $\rho \in \mathbb{R}_+^k$ *mit* $\rho < \rho^*$*, so daß gilt:*

Für jedes $\xi \in H^n(X(t, \rho^*), \mathscr{F})$ *gibt es Funktionen* $a_1, \ldots, a_s \in \Gamma(P(t, \rho), \mathcal{O}_S)$ *derart, daß*

$$\xi = \sum_{\sigma=1}^{s} a_\sigma \xi_\sigma \quad \text{auf } X(t, \rho).$$

$B^*(k, n)$. *Für jede offene Menge* S *aus* $\mathbb{C}^k$*, jede eigentliche holomorphe Abbildung* $\pi\colon X \to S$ *mit* $l(\pi) \leqq N_0$ *und jeden kohärenten* $\mathcal{O}_X$*-Modul* $\mathscr{F}$ *gilt* $B^*(\pi, n, \mathscr{F}, 0)$.

Lemma 1*. *Sei* $\mathscr{F}$ *ein kohärenter* $\mathcal{O}_X$*-Modul.*

Behauptung. *Zu jedem* $\rho^* \in \mathbb{R}_+^k$ *gibt es ein* $\rho \in \mathbb{R}_+^k$ *mit* $\rho < \rho^*$*, so daß gilt:*

Die kanonischen Morphismen

$$H^{n+1}(X(\rho^*), \mathscr{F}) \to H^{n+1}(X(\rho), \mathscr{F})$$

und

$$H^{n+1}(X(\rho^*), \mathscr{F}) \to \Gamma(P(\rho), R^{n+1}\pi_*\mathscr{F})$$

haben denselben Kern.

Aus $B^*(k, n)$ folgt sofort, daß jeder Halm von $R^n\pi_*\mathscr{F}$ endlich erzeugt ist. Um die Kohärenz zu zeigen, benötigt man noch einen weiteren Hilfssatz:

Lemma 4 (kleines Theorem A). *Sei $\mathscr{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul ohne t_k-Torsion.*

Behauptung. *Es gibt ein $\rho_0 \in \mathbb{R}_+^k$, so daß $H^n(X(\rho_0), \mathscr{F})$ jeden Halm von $R^n \pi_* \mathscr{F}$ über $P(\rho_0)$ erzeugt.*

Proposition 10.1. $\left.\begin{array}{l} A(k, n+1) \text{ und } B^*(k, n) \text{ und Lemma } 1^* \\ \text{und } A(k-1, \nu) \text{ für alle } \nu \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow$ *Lemma* 4.

Beweis. Sei $\rho^* \in \mathbb{R}_+^k$ hinreichend klein und $\rho_0 < \rho^*$ gemäß Lemma 1 gewählt. Wir zeigen, daß ρ_0 den Anforderungen von Lemma 4 genügt! Wegen $A(k, n+1)$ und $A(k-1, n)$ folgt für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leqq \rho_k^*$ aus der kurzen exakten Sequenz (vgl. Proposition (2.1))

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{t_k - \alpha} \mathscr{F} \xrightarrow{\gamma_\alpha} \mathscr{F}/(t_k - \alpha)\mathscr{F} \to 0,$$

daß die Garbe

$$\mathscr{N}(\alpha) = \ker\left(R^n \pi_*(\mathscr{F}/(t_k - \alpha)\mathscr{F}) \xrightarrow{\delta_\alpha} R^{n+1} \pi_* \mathscr{F}\right)$$

kohärent ist. Sei $t^* \in P(\rho_0)$ mit $t_k^* = \alpha$. Es gibt Schnitte

$$s_1, \ldots, s_q \in \Gamma\left(P(\rho^*), \mathscr{N}(\alpha)\right),$$

die den Halm $(\mathscr{N}(\alpha))_{t^*}$ erzeugen. Da $A(k-1, \gamma)$ für alle $\gamma \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt ist, ist der kanonische Morphismus

$$\pi_n\colon H^n\left(X(\rho^*), \mathscr{F}/(t_k - \alpha)\mathscr{F}\right) \to \Gamma\left(P(\rho^*), R^n \pi_*(\mathscr{F}/(t_k - \alpha)\mathscr{F})\right)$$

ein Isomorphismus. Es gibt daher $\xi_1', \ldots, \xi_q' \in H\left(X(\rho^*), \mathscr{F}/(t_k - \alpha)\mathscr{F}\right)$ mit $\pi_n(\xi_i') = s_i$, $1 \leqq i \leqq q$. Nach Lemma 1* ist $\delta_\alpha(\xi_i') = 0$ in $H^{n+1}(X(\rho_0), \mathscr{F})$. Es gibt daher $\xi_1, \ldots, \xi_q \in H^n(X(\rho_0), \mathscr{F})$ mit $\gamma_\alpha(\xi_i) = \xi_i'$ in $H^n(X(\rho_0), \mathscr{F}/(t_k - \alpha)\mathscr{F})$. Aus der langen exakten Sequenz

$$R^n \pi_* \mathscr{F} \xrightarrow{t_k - \alpha} R^n \pi_* \mathscr{F} \to R^n \pi_*(\mathscr{F}/(t_k - \alpha)\mathscr{F}) \to R^{n+1} \pi_* \mathscr{F}$$

folgt

$$(\mathscr{N}(\alpha))_{t^*} \simeq (R^n \pi_* \mathscr{F}/(t_k - \alpha) R^n \pi_* \mathscr{F})_{t^*}.$$

Da $(R^n \pi_* \mathscr{F})_{t^*}$ von endlichem Typ ist und die Bilder der ξ_i den Halm $(\mathscr{N}(\alpha))_{t^*}$ erzeugen, folgt nach dem Lemma von Nakayama, daß die $\pi_n(\xi_i)$ den Halm $(R^n \pi_* \mathscr{F})_{t^*}$ erzeugen.

Proposition 10.2. $\left.\begin{array}{l} B^*(k, n) \text{ und } A(k, n+1) \text{ und Lemma } 4 \\ \text{und } A(k-1, \nu) \text{ für alle } \nu \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Rightarrow A(k, n).$

Beweis. 1) Zunächst setzen wir voraus, daß der $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathscr{F}$ ohne t_k-Torsion ist.

a) $R^n \pi_* \mathscr{F}$ ist von endlichem Typ: Wir wählen ρ_0 gemäß Lemma 3 und ein $\rho < \rho_0$ gemäß $B^*(k, n)$. Seien $\xi_1, \ldots, \xi_s \in H^n(X(\rho_0), \mathscr{F})$ die in $B^*(\pi, n, \mathscr{F}, 0)$ bezüglich des Nullpunktes von $\mathbb{C}^k$ konstruierten Cohomologieklassen.

Behauptung. *Die Schnitte* $\pi_n(\xi_\sigma), 1 \leqq \sigma \leqq s$ *erzeugen jeden Halm von* $R^n \pi_* \mathscr{F}$ *über* $P(\rho)$.

Sei $t^* \in P(\rho)$ und $\gamma \in (R^n \pi_* \mathscr{F})_{t^*}$. Nach Lemma 4 gibt es Cohomologieklassen $\zeta_1, \ldots, \zeta_q \in H^n(X(\rho_0), \mathscr{F})$ und Keime $a_1, \ldots, a_q \in \mathcal{O}_{S, t^*}$ mit

$$\gamma = \sum_{i=1}^{q} \pi_n(\zeta_i)\, a_i.$$

Nach $B^*(k, n)$ gibt es Funktionen

$$b_{i\sigma} \in \Gamma(P(\rho), \mathcal{O}_S), \quad 1 \leqq i \leqq q, \quad 1 \leqq \sigma \leqq s \text{ mit } \zeta_i = \sum_{\sigma=1}^{s} b_{i\sigma}\, \xi_\sigma$$

auf $X(\rho)$. Elementares Einsetzen ergibt

$$\gamma = \sum_{\sigma=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{q} a_i\, b_{i\sigma} \right) \pi_n(\xi_\sigma).$$

b) $R^n \pi_* \mathscr{F}$ ist kohärent: Die Cohomologieklassen

$$\xi_1, \ldots, \xi_s \in H^n(X(\rho_0), \mathscr{F})$$

aus (a) definieren einen Homomorphismus

$$\tilde{\varphi}\colon\ \Gamma(P(\rho_0), \mathcal{O}_S^s) \to H^n(X(\rho_0), \mathscr{F}).$$

Diese Abbildung induziert über $P(\rho_0)$ einen Garbenmorphismus

$$\varphi\colon\ \mathcal{O}_S^s \to R^n \pi_* \mathscr{F}.$$

Der Kern von φ über dem Nullpunkt ist ein noetherscher Modul. Deshalb gibt es (nach Verkleinerung von ρ_0) einen Morphismus $\psi\colon \mathcal{O}_S^r \to \mathcal{O}_S^s$ über $P(\rho_0)$ derart, daß die Sequenz (ψ, φ) im Halm über dem Nullpunkt exakt ist.

Um die Kohärenz von $R^n \pi_* \mathscr{F}$ zu zeigen, beweisen wir, daß die Sequenz (ψ, φ) in einer Umgebung des Nullpunktes exakt ist. Für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| < \rho_k^0$ und für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\mathscr{F}_{\alpha, \nu} = \mathscr{F}/(t_k - \alpha)^\nu\, \mathscr{F}$$

und

$$\mathcal{O}_{\alpha, \nu} = \mathcal{O}_S/(t_k - \alpha)^\nu\, \mathcal{O}_S.$$

Aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{(t_k - \alpha)^\nu} \mathscr{F} \xrightarrow{\gamma_{\alpha, \nu}} \mathscr{F}_{\alpha, \nu} \to 0$$

folgt die lange exakte Sequenz

$$(*) \qquad H^n(X(\rho_0), \mathscr{F}) \xrightarrow{(t_k-\alpha)^\nu} H^n(X(\rho_0), \mathscr{F}) \xrightarrow{\gamma_{\alpha,\nu}} H^n(X(\rho_0), \mathscr{F}_{\alpha,\nu}).$$

In naheliegender Weise erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm:

$$(**) \qquad \begin{array}{ccccc} \mathscr{O}_S^r & \xrightarrow{\psi} & \mathscr{O}_S^s & \xrightarrow{\varphi} & R^n\pi_*\mathscr{F} \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma''_{\alpha,\nu}} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma'_{\alpha,\nu}} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{\alpha,\nu}} \\ \mathscr{O}_{\alpha,\nu}^r & \xrightarrow{\psi_{\alpha,\nu}} & \mathscr{O}_{\alpha,\nu}^s & \xrightarrow{\varphi_{\alpha,\nu}} & R^n\pi_*\mathscr{F}_{\alpha,\nu} \end{array}$$

Bemerkung. Da die Garbe $\mathscr{F}_{\alpha,\nu}$ eine Kompositionsreihe

$$0=(t_k-\alpha)^\nu\mathscr{F}_{\alpha,\nu}\subset(t_k-\alpha)^{\nu-1}\mathscr{F}_{\alpha,\nu}\subset\cdots\subset(t_k-\alpha)\mathscr{F}_{\alpha,\nu}\subset\mathscr{F}_{\alpha,\nu}$$

besitzt, folgt wegen $A(k-1,\nu)$ für alle $\nu\in\mathbb{N}$ aus (7.2) ii), daß $R^n\pi^*\mathscr{F}_{\alpha,\nu}$ kohärent ist.

Wir benötigen noch einen

Hilfssatz. *Es gibt ein $\rho^*\in\mathbb{R}_+^k$, so daß für jedes $\alpha\in\mathbb{C}$ mit $|\alpha|<\rho_k^*$ und jedes $\nu\in\mathbb{N}$ die Sequenz $(\psi_{\alpha,\nu},\varphi_{\alpha,\nu})$ über $P(\rho^*)$ exakt ist.*

Beweis des Hilfssatzes. Wegen Theorem A von Cartan-Oka genügt es, folgendes zu beweisen: Es gibt ein $\rho^*<\rho_0$ derart, daß für jedes $f\in\Gamma(P(\rho_0),\mathscr{O}_{\alpha,\nu}^s)$ mit $\varphi_{\alpha,\nu}(f)=0$ ein $g\in\Gamma(P(\rho^*),\mathscr{O}_{\alpha,\nu}^r)$ existiert mit $\psi_{\alpha,\nu}(g)=f$ auf $P(\rho^*)$. Wir wählen $\rho^{**}<\rho_0$ gemäß $B^*(\pi,n,\mathscr{F},0)$ und $\rho^*<\rho^{**}$ ψ-privilegiert. Sei jetzt $f\in\Gamma(P(\rho_0),\mathscr{O}_{\alpha,\nu}^s)$ mit $\varphi_{\alpha,\nu}(f)=0$. In kanonischer Weise läßt sich f als Schnitt aus $\Gamma(P(\rho_0),\mathscr{O}_S^s)$ auffassen. Jetzt ist $\pi_n\circ\gamma_{\alpha,\nu}\circ\tilde{\varphi}(f)=0$ in $\Gamma(P(\rho_0),R^n\pi_*\mathscr{F}_{\alpha,\nu})$. Da $A(k-1,\nu)$ für alle $\nu\in\mathbb{N}$ vorausgesetzt wurde, folgt bereits $\gamma_{\alpha,\nu}\circ\tilde{\varphi}(f)=0$ in $H^n(X(\rho_0),\mathscr{F}_{\alpha,\nu})$. Aus $(*)$ folgt, daß es ein $\xi\in H^n(X(\rho_0),\mathscr{F})$ gibt mit

$$(t_k-\alpha)^\nu\,\xi=\tilde{\varphi}(f).$$

Nach $B^*(\pi,n,\mathscr{F},0)$ gibt es ein $f'\in\Gamma(P(\rho^{**}),\mathscr{O}_S^s)$ mit $\tilde{\varphi}(f')=\xi$ in $H^n(X(\rho^{**}),\mathscr{F})$. Da (ψ,φ) über dem Nullpunkt exakt ist, gibt es nach dem Privilegiertheitssatz ein $g'\in\Gamma(P(\rho^*),\mathscr{O}_S^r)$ mit

$$\psi(g')=f-(t_k-\alpha)^\nu f'.$$

Setzen wir $\gamma''_{\alpha,\nu}(g')=g$ dann gilt $\psi_{\alpha,\nu}(g)=f$ auf $P(\rho^*)$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Mit Hilfe des eben bewiesenen Hilfssatzes folgt nach einer Diagrammjagd in $(**)$ für jedes $t^*\in P(\rho^*)$ und jedes $\nu\in\mathbb{N}$ die Inklusion

$$(\ker\varphi)_{t^*}\subset(\operatorname{im}\psi)_{t^*}+(t_k-t_k^*)^\nu\mathscr{O}_{S,t^*}^s.$$

Nach dem Krullschen Lemma gilt dann sogar

$$(\ker \varphi)_{t^*} = (\operatorname{im} \psi)_{t^*},$$

womit bewiesen ist, daß (ψ, φ) über $P(\rho^*)$ exakt ist.

2) Sei jetzt $\mathscr{F}$ ein beliebiger kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Nach (2.0) gibt es ein $d_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $t_k^{d_0} \mathscr{F}$ ohne t_k-Torsion ist. Aus der Kompositionsreihe

$$t_k^{d_0} \mathscr{F} \subset t_k^{d_0-1} \mathscr{F} \subset \cdots \subset t_k \mathscr{F} \subset \mathscr{F}$$

folgt nach (7.2) i), da alle Quotienten $t_k^{d-1} \mathscr{F}/t_k^d \mathscr{F}$ auch als $\mathcal{O}_X$-Moduln aufgefaßt werden können, daß $R^n \pi_*(\mathscr{F}/t_k^{d_0} \mathscr{F})$ und $R^{n-1} \pi_*(\mathscr{F}/t_k^{d_0} \mathscr{F})$ kohärent sind. Aus (1) folgt, daß auch $R^n \pi_*(t_k^{d_0} \mathscr{F})$ kohärent ist. Wir wenden Proposition (7.2) i) jetzt auf die kurze exakte Sequenz

$$0 \to t_k^{d_0} \mathscr{F} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}/t_k^{d_0} \mathscr{F} \to 0$$

an, und erhalten, daß $R^n \pi_* \mathscr{F}$ kohärent ist. Damit ist der Beweis des Grauertschen Projektionssatzes beendet.

§ 11. Eine Anwendung: Der Grauertsche Vergleichssatz

Seien X und S beliebige komplexe Räume, $\pi: X \to S$ eine holomorphe Abbildung und s ein Punkt von S. Mit m_s werde die volle Idealgarbe der analytischen Menge $\{s\} \subset S$ bezeichnet; $\hat{m}_s$ sei die Idealgarbe in $\mathcal{O}_X$, die vom analytischen Urbild von m_s erzeugt wird.

Sei $\mathscr{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, dann gibt es zu jedem $s \in S$ und jedem $k \in \mathbb{N}$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \hat{m}_s^k \mathscr{F} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}/\hat{m}_s^k \mathscr{F} \to 0,$$

die die lange exakte Bildgarbensequenz

$$\to R^n \pi_*(\hat{m}_s^k \mathscr{F}) \to R^n \pi_* \mathscr{F} \to R^n \pi_* \mathscr{F}/\hat{m}_s^k \mathscr{F} \to$$

zur Folge hat. Die kanonischen Beziehungen

$$(m_s^k R^n \pi_* \mathscr{F})_s \subset \operatorname{im}\big((R^n \pi_*(\hat{m}_s^k \mathscr{F}))_s \to (R^n \pi_* \mathscr{F})_s\big),$$

$$H^n\big(\bar{\pi}^1(s), \mathscr{F}/\hat{m}_s^k \mathscr{F}\big) = \big(R^n \pi_*(\mathscr{F}/\hat{m}_s^k \mathscr{F})\big)_s$$

liefern ein projektives System $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Morphismen

$$p_k: (R^n \pi_* \mathscr{F}/m_s^k R^n \pi_* \mathscr{F})_s \to H^n\big(\bar{\pi}^1(s), \mathscr{F}/\hat{m}_s^k \mathscr{F}\big).$$

Der zweite Hauptsatz von Grauert bezüglich eigentlicher holomorpher Abbildungen lautet nun:

Vergleichssatz (Grauert). *Sei $\pi: X \to S$ eine holomorphe eigentliche Abbildung zwischen den komplexen Räumen X und S. Dann sind für jeden*

kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ die kanonischen Morphismen

$$\varprojlim_{k\in\mathbb{N}} (R^n\pi_*\mathcal{F}/m_s^k R^n\pi_*\mathcal{F})_s \to \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} H^n(\pi^{-1}(s), \mathcal{F}/\hat{m}_s^k\mathcal{F})$$

für jedes $s\in S$ und jedes $n\in\mathbb{N}$ Isomorphismen.

Wir beweisen zunächst das folgende interessante

Lemma. *Sei $\pi: X\to S$ eine eigentliche holomorphe Abbildung zwischen den komplexen Räumen X und S. Dann gibt es für jeden kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$, jedes $s\in S$ und jedes $n\in\mathbb{N}$ eine Abbildung $F\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $\lim_{k\to\infty} F(k)=\infty$ derart, daß für jedes $k\in\mathbb{N}$ gilt:*

$$m_s^{F(k)}(R^n\pi_*\mathcal{F})_s \supset \operatorname{im}\big((R^n\pi_*(\hat{m}_s^k\mathcal{F}))_s \to (R^n\pi_*\mathcal{F})_s\big).$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß S eine offene Menge des $\mathbb{C}^m$ ist und daß s wieder der Nullpunkt ist. Es genügt folgende Aussage zu beweisen:

Zu jedem $e\in\mathbb{N}^m$ gibt es ein $p\in\mathbb{N}^m$, so daß gilt:

$$m^e(R^n\pi_*\mathcal{F})_0 \supset \operatorname{im}\big((R^n\pi_*(\hat{m}^p\mathcal{F}))_0 \to (R^n\pi_*\mathcal{F})_0\big),$$

dabei bezeichne m^e die Idealgarbe $\sum_{\kappa=1}^{m} t_\kappa^{e_\kappa}\mathcal{O}_S$ und $\hat{m}^e$ die vom analytischen Urbild von m^e erzeugte Idealgarbe in $\mathcal{O}_X$. Jetzt werden zunächst induktiv folgende Dinge erklärt:

$$\mathcal{F}^{[k]} = \sum_{\kappa=1}^{k} t_\kappa^{p_\kappa}\mathcal{F}, \qquad \mathcal{F}_{[k]} = \mathcal{F}/\mathcal{F}^{[k]}, \qquad 0\leqq k\leqq m.$$

Für $1\leqq k\leqq m$ sei:

$d_k'=k$-Torsionsexponent von $\mathcal{F}_{[k-1]}$ über dem Nullpunkt (d.h.: d_k' ist die kleinste natürliche Zahl, so daß $t_k^{d_k'}\mathcal{F}_{[k-1]}$ ohne t_k-Torsion ist).

$d_k=k$-Torsionsexponent von $R^{n+1}\pi_*\mathcal{F}^{[k-1]}$ im Nullpunkt, $p_k=e_k+d_k'+d_k$.

Aus den kurzen exakten Sequenzen

$$0\to t_k^{d_k'}\mathcal{F}_{[k-1]} \xrightarrow{t_k^{e_k+d_k}} \mathcal{F}_{[k-1]} \xrightarrow{\gamma_k^{k-1}} \mathcal{F}_{[k]} \to 0,$$

$$0\to \mathcal{F}^{[k-1]} \to \mathcal{F} \xrightarrow{\gamma_{k-1}} \mathcal{F}_{[k-1]} \to 0$$

folgen die langen exakten Sequenzen

$$(*)\quad H^n(X(\rho), t_k^{d_k'}\mathcal{F}_{[k-1]}) \xrightarrow{t_k^{e_k+d_k}} H^n(X(\rho), \mathcal{F}_{[k-1]}) \xrightarrow{\gamma_k^{k-1}} H^n(X(\rho), \mathcal{F}_{[k]}),$$

$$(**)\quad (R^n\pi_*\mathcal{F})_0 \xrightarrow{\gamma_{k-1}} (R^n\pi_*\mathcal{F}_{[k-1]})_0 \xrightarrow{\delta} (R^{n+1}\pi_*\mathcal{F}^{[k-1]})_0.$$

Offensichtlich brauchen wir nur folgendes zu beweisen: Zu jedem $s\in(R^n\pi_*\mathscr{F})_0$ mit $\gamma_k(s)=0$ gibt es ein $s'\in(R^n\pi_*\mathscr{F})_0$ derart, daß

$$\gamma_{k-1}(s-t_k^{e_k}s')=0.$$

Sei jetzt $s\in(R^n\pi_*\mathscr{F})_0$ mit $\gamma_k(s)=0$. Wegen $\gamma_k^{k-1}\circ\gamma_{k-1}=\gamma_k$ folgt, daß $\gamma_{k-1}(s)\in\ker\gamma_k^{k-1}$ ist. Aus (*) ist ersichtlich, daß es ein $s_1\in(R^n\pi_*\mathscr{F}_{[k-1]})_0$ gibt mit $t_k^{e_k+d_k}s_1=\gamma_{k-1}(s)$. Aus (**) folgt, daß $t_k^{e_k+d_k}\delta(s_1)=0$ ist, damit ist auch $\delta(t_k^{d_k}s_1)=0$. Es gibt daher ein $s'\in(R^n\pi_*\mathscr{F})_0$ mit $\gamma_{k-1}(s')=t_k^{d_k}s_1$. Offensichtlich gilt $\gamma_{k-1}(s-t_k^{e_k}s')=0$.

Beweis des Vergleichssatzes. i) Der Homomorphismus $\varprojlim p_k$ ist injektiv!

Sei $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\varprojlim_{k\in\mathbb{N}}(R^n\pi_*\mathscr{F}/m_s^kR^n\pi_*\mathscr{F})_s$ mit $p_k(\xi_k)=0$ für alle $k\in\mathbb{N}$. Sei $F\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ die Abbildung aus dem vorhergehenden Lemma. Ohne Einschränkung dürfen wir $F(k)\leqq k$ annehmen.

Es gibt zu jedem $k\in\mathbb{N}$ ein $l\in\mathbb{N}$ mit $F(l)\geqq k$. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}(R^n\pi_*(\hat{m}_s^l\mathscr{F}))_s & \longrightarrow & (R^n\pi_*\mathscr{F})_s & \xrightarrow{q_1} & (R^n\pi_*\mathscr{F}/\hat{m}_s^l\mathscr{F})_s\\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_1} & \nearrow{\scriptstyle p_1} & \\ & & (R^n\pi_*\mathscr{F})_s/(m_s^lR^n\pi_*\mathscr{F})_s & & \end{array}$$

folgt: es gibt ein $\zeta_l\in(R^n\pi_*\mathscr{F})_s$ mit $\alpha_l(\zeta_l)=\xi_l$.

Somit gilt $q_l(\zeta_l)=0$. Nach dem vorhergehenden Lemma folgt, daß $\alpha_{F(l)}(\zeta_l)=0$ ist. Da aber $\alpha_{F(l)}(\zeta_l)=\xi_{F(l)}$ und $F(l)\geqq k$ ist, folgt $\xi_k=0$.

ii) Der Homomorphismus $\varprojlim p_k$ ist surjektiv!

Sei $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}\in\varprojlim_{k\in\mathbb{N}}(R^n\pi_*(\mathscr{F}/\hat{m}_s^k\mathscr{F}))_s$. Für $k\geqq l$ hat man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}R^n\pi_*\mathscr{F} & \xrightarrow{q_k} & R^n\pi_*(\mathscr{F}/\hat{m}_s^k\mathscr{F}) & \xrightarrow{\delta_k} & R^{n+1}\pi_*(\hat{m}_s^k\mathscr{F})\\ \| & & \downarrow{\scriptstyle q_{l,k}} & & \downarrow{\scriptstyle q^{l,k}}\\ R^n\pi_*\mathscr{F} & \xrightarrow{q_l} & R^n\pi_*(\mathscr{F}/\hat{m}_s^l\mathscr{F}) & \xrightarrow{\delta_l} & R^{n+1}\pi_*(\hat{m}_s^l\mathscr{F})\end{array}$$

Das vorausgegangene Lemma wird nun auf die Garbe $\hat{m}_s^l\mathscr{F}$ angewandt. Es gibt also eine Funktion $F\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $\lim_{k\to\infty}F(k)=\infty$ derart, daß für $k\geqq l$ gilt:

$$m_s^{F(k-l)}(R^{n+1}\pi_*(\hat{m}_s^l\mathscr{F}))_s\supset(\operatorname{im}q^{lk})_s.$$

Die Kommutativität des obigen Diagramms lehrt, daß für alle $k\geqq l$ gilt:

$$\delta_l(\xi_l)\in m_s^{F(k-l)}(R^{n+1}\pi_*(\hat{m}_s^l\mathscr{F}))_s.$$

Nach dem Krullschen Lemma folgt, daß $\delta_l(\xi_l)=0$ ist. Es gibt also ein $\zeta_l'\in(R^n\pi_*\mathscr{F})_s$ mit $q_l(\zeta_l')=\xi_l$.

Das Bild von ζ_l' in $(R^n \pi_* \mathscr{F})_s / m_s^l (R^n \pi_* \mathscr{F})_s$ sei mit ζ_l bezeichnet. Offensichtlich definiert (ζ_l) ein Element, das vermöge $\varprojlim p_k$ auf $(\xi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ abgebildet wird.

Literatur

1. Douady, A.: Le théorème de Grauert sur la cohérence des faisceaux-images d'un faisceau analytique cohérent par un morphisme propre. Séminaire Bourbaki, 13e année, n° 220. 1960/61.
2. Forster, O.: Primärzerlegung in Steinschen Algebren. Math. Annalen **154**, 307–329 (1964).
3. Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. I.H.E.S., Publications mathematiques, n° 5. Paris, Presses universitaires de France, 1960.
4. – The coherence of direct images. Monographie N° 17 de L'Enseignement Mathématique, pp. 99–119. Genève 1968.
5. Knorr, K.: Über den Grauertschen Kohärenzsatz bei eigentlichen holomorphen Abbildungen I, II. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa **22**, 729–761 (1968) und **23**, 1–74 (1969).
6. – Der Grauertsche Kohärenzsatz. Seminarausarbeitung, Genf 1969.
7. – Projektionssatz für q-konvexe Abbildungen. Private Noten.
8. Narasimhan, R.: The Levi problem for complex spaces. Math. Annalen **142**, 355–365 (1961).
9. Richberg, R.: Stetige streng pseudokonvexe Funktionen. Math. Ann. **175**, 257–286 (1968).
10. Siu, Y. T.: A pseudoconcave generalisation of Grauert's direct image theorem. I, II. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa **24**, 279–330 and 439–489 (1970).

Knut Knorr
FB Mathematik der Universität
BRD-8400 Regensburg
Universitätsstr. 31
Deutschland

(Eingegangen am 9. Oktober 1970)