Werk

Titel: Whiteheadgruppe topologischer Räume.

Autor: STÖCKER, R.

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0009|log32

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Inventiones math. 9, 271 – 278 (1970)

Whiteheadgruppe topologischer Räume*

RALPH STÖCKER (Frankfurt/Main)

$\pi_1(X)$ ist die Fundamentalgruppe des topologischen Raumes X, Wh ist der Whitehead-Funktor von Gruppen in abelsche Gruppen [3]. Diese Arbeit enthält eine von $\pi_1(X)$ unabhängige Interpretation der Gruppe $Wh(\pi_1(X))$, die auf den geometrischen Konstruktionen in [4] basiert (vgl. auch [2]). In Abschnitt 1 wiederholen wir die Definition der Relation $P=DQ$ rel K von [4] und ordnen jedem CW-Komplex K eine Whiteheadgruppe $Wh(K)$ zu. In Abschnitt 2 beweisen wir einen allgemeinen Summensatz für die Whitehead-Torsion, der die "product- and sum-theorems" von [1] als Spezialfälle enthält: Sind f_n: $K_n \to L_n$ $(n=0, 1, 2)$ Homotopieäquivalenzen zwischen endlichen zusammenhängenden CW-Komplexen mit $K_0=K_1\cap K_2$, $L_0=L_1\cap L_2$ und $f_1|K_0=f_2|K_0=f_0$, so ist die zusammengesetzte Abbildung $f: K=K_1\cup K_2 \to L=L_1\cup L_2$ eine Homotopieäquivalenz, und ihre Whitehead-Torsion ist

$$\tau(f)=i_{1*}\tau(f_1)+i_{2*}\tau(f_2)-i_{0*}\tau(f_0)$$

(i_n = Inklusion $L_n\subset L$); das folgt aus Satz 2, aus der Definition von $\tau(f)$ in [3] und aus Abschnitt 3, in dem ein Isomorphismus $Wh(K)\to Wh(\pi_1(K))$ konstruiert wird.

Indem man relative CW-Komplexe über X betrachtet, kann man jedem topologischen Raum X eine Whiteheadgruppe $Wh(X)$ zuordnen und eine entsprechende Theorie entwickeln; das ist der Inhalt von Abschnitt 4.

1. Die Gruppe $Wh(K)$

Sei K ein CW-Komplex, nicht notwendig endlich. Ein K-Komplex ist ein CW-Komplex P, der K als co-endlichen Teilkomplex enthält (d.h. es ist eine Abbildung i: $K\to P$ gegeben, die K isomorph auf einen Teilkomplex von P abbildet, und $P-i(K)$ besteht aus nur endlich vielen Zellen). Seien P' und P'' K-Komplexe; P' ist ein einfacher Teilkomplex von P'', wenn gilt:

i) P' ist Teilkomplex von P'' und $P''-P'$ besteht aus genau zwei Zellen e^q und e^{q-1},

* Prof. Dr. Wolfgang Franz zum 65. Geburtstag.

ii) es gibt eine charakteristische Abbildung $f\colon I^q \to P''$ der Zelle e^q mit $f(J^{q-1}) \subset P'$, so daß $f|I^{q-1}$ charakteristische Abbildung von e^{q-1} ist; dabei ist $J^{q-1} = \dot{I}^q - I^{q-1}$.

Zwei K-Komplexe P und Q sind vom gleichen *einfachen Homotopietyp relativ* K, $P \sim Q$ rel K, wenn es K-Komplexe $P_0 = P, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n = Q$ gibt, so daß P_{i-1} einfacher Teilkomplex von P_i oder P_i einfacher Teilkomplex von P_{i-1} ist ($i = 1, \ldots, n$); welcher der beiden Fälle eintritt, kann von Index zu Index verschieden sein. Mit den Bezeichnungen von [4]: $P \sim Q$ rel K genau dann, wenn es eine formale Deformation $D\colon P \to Q$ rel K gibt. Das ist eine Äquivalenzrelation zwischen K-Komplexen. $Sh(K)$ ist die Menge der Äquivalenzklassen, $s(P, K) \in Sh(K)$ ist die Äquivalenzklasse des K-Komplexes P. Definiere eine Addition in $Sh(K)$ durch $s(P, K) + s(Q, K) = s(P \cup_K Q, K)$, wobei $P \cup_K Q$ aus der disjunkten Vereinigung von P und Q entsteht, indem man die Teilkomplexe $K \subset P$ und $K \subset Q$ identifiziert. $Sh(K)$ ist eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element $0 = s(K, K)$. Eine zelluläre Abbildung $f\colon K \to L$, L ein CW-Komplex, induziert einen Homomorphismus $f_*\colon Sh(K) \to Sh(L)$ durch $f_* s(P, K) = s(L \cup_f P, L)$, wobei $L \cup_f P$ aus der disjunkten Vereinigung von L und P entsteht, indem man jedem Punkt $x \in K$ mit $f(x) \in L$ identifiziert. Ist $g\colon L \to M$ ebenfalls zellulär, M ein CW-Komplex, so $(gf)_* = g_* f_*$. Ferner gilt das Homotopieaxiom: $f_1 \simeq f_2\colon K \to L$, f_1 und f_2 zellulär, impliziert $f_{1*} = f_{2*}$.

Die einzig nichttriviale Aussage ist das Homotopieaxiom (vgl. Lemma 13 in [4]). Wir brauchen es nur für die zellulären Abbildungen $i_n\colon K \to K \times I$, $i_n(x) = (x, n)$, zu beweisen ($n = 0, 1$). Sei P ein K-Komplex, seien $e_1, \ldots, e_m$ die Zellen von $P - K$, so geordnet, daß $\dim(e_{i-1}) \geqq \dim(e_i)$, und sei

$$Q = P \times I \quad \text{und} \quad P_i = P \times I - \bigcup_{j=1}^{i} e_j \times [0, 1).$$

Dann ist in der Folge

$$Q \supset P_1 \supset \cdots \supset P_{m-1} \supset P_m = K \times I \cup P \times 1$$

von $(K \times I)$-Komplexen jeder Komplex einfacher Teilkomplex des vorangehenden, also $s(Q, K \times I) = s(P_m, K \times I) = i_{1*} s(P, K)$. Ebenso $s(Q, K \times I) = i_{0*} s(P, K)$, somit $i_{0*} = i_{1*}$. – Man kann jetzt $f_*\colon Sh(K) \to Sh(L)$ auch für nicht-zelluläre Abbildungen $f\colon K \to L$ definieren, nämlich durch $f_* = f_{1*}$, wobei f_1 zelluläre Approximation von f ist.

Wir definieren die *Whiteheadgruppe von* K, $Wh(K)$, als die größte in $Sh(K)$ enthaltene Gruppe, d.h. als die Menge der Elemente von $Sh(K)$, die ein Inverses bei der Addition besitzen; der folgende Satz beschreibt diese Elemente:

Satz 1. *$s(P, K)\in Wh(K)$ genau dann wenn K Deformationsretrakt von P ist.*

Beweis. Ist $s(P, K)\in Wh(K)$, so gibt es einen K-Komplex Q mit $P\cup_K Q\sim K$ rel K. Dann ist K Deformationsretrakt von $P\cup_K Q$ und folglich auch Deformationsretrakt von P. Zum Beweis der Umkehrung benötigen wir ein Lemma. Seien P und Q K-Komplexe, P Teilkomplex von Q, K Deformationsretrakt von P. Sei r: $P\to K$ eine Retraktion. Dann gilt (vgl. Lemma 7.4 in [3]):

Lemma 1. $s(Q, K)=s(P, K)+r_* s(Q, P)$.

Beweis. Wir dürfen r zellulär annehmen. Sei i: $K\to P$ die Inklusion. ir: $P\to P$ ist homotop zur Identität, also ist $(ir)_*$ die Identität von $Sh(P)$. Es folgt $P\cup_{ir} Q\sim Q$ rel P. Dann ist insbesondere $P\cup_{ir} Q\sim Q$ rel K, und das ist Lemma 1, da der K-Komplex $P\cup_{ir} Q$ die rechte Seite der zu beweisenden Formel repräsentiert.

Beweis von Satz 1. Sei wieder r: $P\to K$ eine zelluläre Retraktion, und sei M_r der Abbildungszylinder von r relativ K mit der induzierten Zellzerlegung. M_r ist der Quotientenraum von $P\times I$ bezüglich der Identifikationen $(x, 1)=r(x)$ und $(y, t)=y$ für $x\in P$, $y\in K$ und $t\in I$. P ist als $P\times 0$ in M_r eingebettet. Seien $e_1, \ldots, e_m$ mit $\dim(e_{i-1})\geqq\dim(e_i)$ die Zellen von $P-K$. M_r besteht aus den Zellen von P und den Zellen $e_i\times(0, 1)$, $i=1, \ldots, m$. Setze

$$Q_i=M_r-\bigcup_{j=1}^{i} e_j\cup e_j\times(0, 1).$$

Dann ist in der Folge

$$M_r\supset Q_1\supset\cdots\supset Q_{m-1}\supset Q_m=K$$

von K-Komplexen jeder Komplex einfacher Teilkomplex des vorangehenden, also $s(M_r, K)=s(K, K)=0$ (vgl. Lemma 11 in [4]). Aus Lemma 1, auf $K\subset P\subset M_r$ angewandt, folgt: $r_* s(M_r, P)$ ist das Inverse von $s(P, K)$.

2. Der allgemeine Summensatz

Wir beweisen eine Formel zur Berechnung von $s(P, K)\in Sh(K)$ in dem Fall, daß P und K wie folgt in Teilkomplexe zerfallen:

$$\begin{aligned} P&=P_1\cup P_2 \quad \text{mit} \quad P_1\cap P_2=P_0,\\ K&=K_1\cup K_2 \quad \text{mit} \quad K_1\cap K_2=K_0,\\ K_1&\subset P_1, \quad K_2\subset P_2, \quad \text{also} \quad K_0\subset P_0. \end{aligned}$$

Sei i_n: $K_n\subset K$ die Inklusion $(n=0, 1, 2)$.

Satz 2. *Ist K_0 Deformationsretrakt von P_0, so ist*

$$s(P, K)=i_{1*}\, s(P_1, K_1)+i_{2*}\, s(P_2, K_2)-i_{0*}\, s(P_0, K_0).$$

Beweis. Sei $Q_n=K\cup P_n$; dann ist $P=Q_1\cup Q_2$ und $Q_1\cap Q_2=Q_0$, somit

$$s(P, Q_0)=s(Q_1, Q_0)+s(Q_2, Q_0).$$

K ist Deformationsretrakt von Q_0, sei r: $Q_0\to K$ eine Retraktion. Aus Lemma 1, auf $K\subset Q_0\subset P$ bzw. $K\subset Q_0\subset Q_n$ angewandt, folgt:

$$s(P, K)=s(Q_0, K)+r_*\, s(P, Q_0),$$
$$s(Q_n, K)=s(Q_0, K)+r_*\, s(Q_n, Q_0).$$

Aus allen vier Formeln ($n=1, 2$) zusammen folgt

$$s(P, K)=s(Q_1, K)+s(Q_2, K)-s(Q_0, K),$$

und wegen $s(Q_n, K)=i_{n*}\, s(P_n, K_n)$ ist das die Behauptung (das Element $-s(Q_0, K)$ existiert nach Satz 1).

Es folgt aus den Ergebnissen des nächsten Abschnitts, daß Satz 2 den in [1] bewiesenen Summensatz als Spezialfall enthält. Wir zeigen, daß auch der Produktsatz von [1] aus Satz 2 folgt. Sei $P=P_1\cup\cdots\cup P_m$ und $K=K_1\cup\cdots\cup K_m$ mit $K_i\subset P_i$, so daß jeder nichtleere Durchschnitt $K_{i_1}\cap\cdots\cap K_{i_r}$ Deformationsretrakt von $P_{i_1}\cap\cdots\cap P_{i_r}$ ist. Aus Satz 2 folgt durch Induktion nach m:

$$s(P, K)=\sum_{r\geqq 1}(-1)^{r+1}\sum f_{i_1\cdots i_r}\, s(P_{i_1}\cap\cdots\cap P_{i_r}, K_{i_1}\cap\cdots\cap K_{i_r}),$$

wobei über alle Indexfolgen $i_1, \ldots, i_r$ mit $1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq m$ und $K_{i_1}\cap\cdots\cap K_{i_r}\neq\emptyset$ zu summieren ist; $f_{i_1\cdots i_r}$ ist von der Inklusion $K_{i_1}\cap\cdots\cap K_{i_r}\subset K$ induziert. Sei L ein zusammenhängender Simplizialkomplex mit den abgeschlossenen Simplexen $L_1, \ldots, L_m$. Für $s(P, K)\in Wh(K)$ berechne $s(P\times L, K\times L)\in Wh(K\times L)$ mit $P\times L=(P\times L_1)\cup\cdots\cup(P\times L_m)$ und $K\times L=(K\times L_1)\cup\cdots\cup(K\times L_m)$ nach der obigen Formel. Da jeder nichtleere Durchschnitt $L_{i_1}\cap\cdots\cap L_{i_r}$ ein L_n ist für ein gewisses n, ist

$$f_{i_1\cdots i_r}\, s\big(P\times(L_{i_1}\cap\cdots\cap L_{i_r}), K\times(L_{i_1}\cap\cdots\cap L_{i_r})\big)=i_{n*}\, s(P\times L_n, K\times L_n)$$

mit i_n: $K\times L_n\subset K\times L$. Sei $y_n\in L_n$ Basisecke und f_n: $K\to K\times L_n$, $f_n(x)=(x, y_n)$. Aus Lemma 1, auf $K\times L_n\subset P\times y_n\cup K\times L_n\subset P\times L_n$ angewandt, folgt

$$s(P\times L_n, K\times L_n)=s(P\times y_n\cup K\times L_n, K\times L_n)=f_{n*}\, s(P, K);$$

denn offenbar ist $s(P\times L_n, P\times y_n\cup K\times L_n)=0$. Daher:

$$i_{n*}\,s(P\times L_n, K\times L_n)=i_{n*}\,f_{n*}\,s(P,K)=i_*\,s(P,K)$$

mit $i\colon K\to K\times L, i(x)=(x,y_1)$; $i\simeq i_n f_n$ für alle n, weil L zusammenhängend ist. Insgesamt ergibt sich

$$s(P\times L, K\times L)=\sum_{r\geqq 1}(-1)^{r+1}\,a_r(L)\,i_*\,s(P,K),$$

wo $a_r(L)$ die Anzahl der Indexfolgen $1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq m$ ist mit $L_{i_1}\cap\cdots\cap L_{i_r}\neq\emptyset$. Der Zahlenfaktor ist die Eulersche Charakteristik von L:

$$s(P\times L, K\times L)=\chi(L)\,i_*\,s(P,K).$$

Das ist der Produktsatz, zunächst allerdings nur bewiesen, wenn L ein Simplizialkomplex ist. Er bleibt jedoch richtig, wenn man L durch einen endlichen zusammenhängenden CW-Komplex ersetzt: Das folgt leicht aus [4], wonach jeder endliche CW-Komplex vom einfachen Homotopietyp eines endlichen Simplizialkomplexes ist.

3. Die Isomorphie $Wh(K)\approx Wh(\pi_1(K))$

K sei zusammenhängend (andernfalls ist $Wh(K)$ die direkte Summe der Whiteheadgruppen der Zusammenhangskomponenten von K), $x_0\in K$ sei Basisecke, $\pi=\pi_1(K,x_0)$ und $Z\pi$ der Gruppenring von π über den ganzen Zahlen. Für $q\geqq 3$ und $m\geqq 1$ sei

$$K_{q,m}=K\cup e_1^{q-1}\cup\cdots\cup e_m^{q-1}\qquad(\dot e_1^{q-1}=\cdots=\dot e_m^{q-1}=x_0)$$

die Ein-Punkt-Vereinigung von K und m $(q-1)$-Sphären. Die Homotopiegruppe $\pi_{q-1}=\pi_{q-1}(K_{q,m},x_0)$ ist bezüglich der Operation von $\pi_1(K_{q,m},x_0)\approx\pi$ ein $Z\pi$-Modul. Sei $F_i\colon (I^{q-1},\dot I^{q-1})\to(K_{q,m},x_0)$ charakteristische Abbildung von e_i^{q-1} und $a_i\in\pi_{q-1}$ das von ihr repräsentierte Element. Sei $A=(x_{ij})$ eine (m,m)-Matrix über $Z\pi$ und $b_i=\sum_j x_{ij}\,a_j\in\pi_{q-1}$.

$$f_i\colon (\dot I^q, J^{q-1})\to(K_{q,m},x_0)$$

sei eine zelluläre Abbildung, so daß $f_i|I^{q-1}$ das Element b_i repräsentiert. Dann ist

$$P_q(f_1,\ldots,f_m)=K_{q,m}\cup_{f_1}e_1^q\cup\cdots\cup_{f_m}e_m^q$$

ein K-Komplex mit Teilkomplex $K_{q,m}$.

Lemma 2. *Die Zuordnung* $A\to s(P_q(f_1,\ldots,f_m),K)$ *induziert einen Homomorphismus* $S_q\colon Wh(\pi)\to Wh(K)$.

Beweis. Sei $P_i=P_q(f_1,\ldots,f_m)-e_i^q$ und $h_i\colon K_{q,m}\subset P_i$ die Inklusion. Sei $x\in\pi$, $y\in Z\pi$ und $g_i\colon (\dot I^q,J^{q-1})\to(K_{q,m},x_0)$ eine zelluläre Abbildung, so daß $g_i|I^{q-1}$ das Element $\pm x\,b_i+y\,b_j\in\pi_{q-1}$ repräsentiert $(j\neq i)$. Sei

$s_0 = s(I^q, \dot{I}^q) \in Sh(\dot{I}^q)$. Es ist

$$s(P_q(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_m), P_i) = (h_i f_i)_*(s_0)$$
$$s(P_q(f_1, \ldots, g_i, \ldots, f_m), P_i) = (h_i g_i)_*(s_0).$$

Nach Definition von g_i ist $h_i g_i \simeq h_i f_i \colon \dot{I}^q \to P_i$ (freie Homotopie). Aus dem Homotopieaxiom folgt, daß die Komplexe $P_q(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_m)$ und $P_q(f_1, \ldots, g_i, \ldots, f_m)$ die gleiche Klasse in $Sh(P_i)$, also auch in $Sh(K)$, repräsentieren. Somit ist $s(P_q(f_1, \ldots, f_m), K) = s_A$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten f_i der b_i, und s_A ändert sich nicht bei elementaren Zeilenumformungen der Matrix A. Insbesondere kann man im Fall

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

annehmen, daß $f_m | I^{q-1} = F_m$ ist. Dann ist $P_q(f_1, \ldots, f_{m-1})$ einfacher Teilkomplex von $P_q(f_1, \ldots, f_m)$ und $s_A = s_B$. Damit ist gezeigt: Durch $\{A\} \to s_A$, wo $\{A\} \in Wh(\pi)$ die Restklasse der regulären Matrix A über $Z\pi$ ist, ist eine Zuordnung $S_q \colon Wh(\pi) \to Sh(K)$ definiert. Gegeben reguläre Matrizen A und B über $Z\pi$, sei

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\{C\} = \{A\} + \{B\}$ und offenbar auch $s_C = s_A + s_B$. Folglich ist S_q homomorph, daher Bild $(S_q) \subset Wh(K)$.

Lemma 3. *Zu $s \in Wh(K)$ und jeder hinreichend großen Zahl q gibt es eine reguläre Matrix A über $Z\pi$ mit $S_q(\{A\}) = s$.*

Beweis. Nach Lemma 15 von [4] gibt es einen Repräsentanten P von s, so daß $P - K$ nur aus Zellen der Dimension q und $q-1$ besteht (wegen $s \in Wh(K)$ ist K Deformationsretrakt von jedem Repräsentanten von s nach Satz 1). Nach homotoper Deformation der Klebeabbildungen der Zellen von $P - K$ kann man annehmen, daß $K \cup P^{q-1} = K_{q,m}$ ist für ein $m \geqq 1$ (P^{q-1} ist das $(q-1)$-Gerüst von P). Der Randoperator

$$d \colon \pi_q(P, K_{q,m}, x_0) \to \pi_{q-1}(K_{q,m}, K, x_0)$$

in der Homotopiesequenz des Tripels $K \subset K_{q,m} \subset P$ ist isomorph. Beide Homotopiegruppen sind freie $Z\pi$-Moduln, die Zellen von $P - K$ definieren ausgezeichnete Basen. Ist A die Matrix von d bezüglich dieser Basen, so $s = s_A$ und A ist regulär.

Satz 3. *$S_q \colon Wh(\pi) \to Wh(K)$ ist isomorph und $S_3 = -S_4 = S_5 = -S_6 = \cdots$.*

Beweis. Für jeden K-Komplex P mit K Deformationsretrakt von P ist die Whitehead-Torsion $\tau(P, K) \in Wh(\pi)$ definiert (vgl. [3]), und die Zuordnung $P \to \tau(P, K)$ induziert einen Homomorphismus $T \colon Wh(K) \to$

$Wh(\pi)$ (vgl. Theorem 3.1 von [3]). Ist A eine reguläre Matrix über $Z\pi$, so ist K nach Lemma 2 und Satz 1 Deformationsretrakt von $P_q(f_1, \ldots, f_m)$, und die Torsion ist leicht auszurechnen: $\tau(P_q(f_1, \ldots, f_m), K) = (-1)^q\{A\}$. Das bedeutet $TS_q = (-1)^q$, und hieraus und aus Lemma 3 folgt, daß T isomorph ist und $T^{-1} = (-1)^q S_q$. Daraus Satz 3.

Bemerkung. T ist ein natürlicher Isomorphismus. Eine Abbildung $f: K \to L$ induziert Homomorphismen $f_*: Wh(K) \to Wh(L)$ und $f_1: \pi \to \pi' = \pi_1(L, f(x_0))$. f_1 induziert einen Homomorphismus $f_\#: Wh(\pi) \to Wh(\pi')$. Dann ist $Tf_* = f_\# T$.

4. Whiteheadgruppe topologischer Räume

Die Definition der Gruppe $Wh(K)$ in Abschnitt 1 benutzt die gegebene Zellzerlegung von K. Nach Abschnitt 3 ist $Wh(K)$ unabhängig von dieser Zellzerlegung. Wir geben eine von der Zellzerlegung unabhängige Definition dieser Gruppe.

Sei X ein topologischer Raum, und seien P' und P'' endliche relative CW-Komplexe über X. P' ist einfacher Teilkomplex von P'', wenn die Bedingungen i) und ii) von Abschnitt 1 erfüllt sind. Zwei endliche relative CW-Komplexe P und Q über X sind vom gleichen *einfachen Homotopietyp relativ* X, $P \sim Q$ rel X, wenn es relative CW-Komplexe $P_0 = P, P_1, \ldots, P_{m-1}, P_m = Q$ über X gibt, so daß $P_{i-1} \subset P_i$ oder $P_i \subset P_{i-1}$ einfacher Teilkomplex ist ($i = 1, \ldots, m$). Das ist eine Äquivalenzrelation. $Sh(X)$ ist die Menge der Äquivalenzklassen und $s(P, X) \in Sh(X)$ ist die Klasse des endlichen relativen CW-Komplexes P über X. Mit der Addition $s(P, X) + s(Q, X) = s(P \cup_X Q, X)$ ist $Sh(X)$ eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element $0 = s(X, X)$. Eine Abbildung $f: X \to Y$ induziert einen Homomorphismus $f_*: Sh(X) \to Sh(Y)$ durch $f_* s(P, X) = s(Y \cup_f P, Y)$, und für $g: Y \to Z$ gilt $(gf)_* = g_* f_*$. Es gilt das Homotopieaxiom. Wir definieren die *Whiteheadgruppe von* X, $Wh(X)$, als die größte in $Sh(X)$ enthaltene Gruppe. Es gilt sinngemäß Satz 1. Lemma 1 lautet jetzt wie folgt: Sei X Deformationsretrakt von P und $r: P \to X$ eine Retraktion. Ist dann $P \subset Q$ Teilkomplex, so ist Q relativer CW-Komplex über $|P|$ und

$$s(Q, X) = s(P, X) + r_* s(Q, |P|). \tag{1'}$$

(Dabei ist $|P|$ der dem Komplex P zugrundeliegende Raum; (1') folgt am einfachsten durch Induktion nach der Zahl der Zellen in $Q - P$; der Beweis von Abschnitt 1 überträgt sich nicht.)

Die Konstruktion von S_q: $Wh(\pi) \to Wh(X)$ überträgt sich, Lemma 2 und 3 bleiben richtig. Wenn auf X die Theorie des universellen Überlagerungsraumes anwendbar ist, läßt sich für jeden endlichen relativen CW-Komplex P über X mit X Deformationsretrakt von P analog zu [3]

die Whitehead-Torsion $\tau(P, X) \in Wh(\pi)$ definieren. Dann bleibt Satz 3 richtig.

Sei K ein CW-Komplex und $|K|$ der zugrundeliegende Raum. Jeder K-Komplex ist ein endlicher relativer CW-Komplex über $|K|$, und aus $P \sim Q$ rel K, P und Q K-Komplexe, folgt $P \sim Q$ rel $|K|$. Durch $s(P, K) \to s(P, |K|)$ wird folglich ein Homomorphismus $V: Sh(K) \to Sh(|K|)$ definiert; V vergißt die Zellstruktur von K. V bildet $Wh(K)$ isomorph auf $Wh(|K|)$ ab.

Satz 4. *$V: Sh(K) \to Sh(|K|)$ ist isomorph.*

Beweis. Zu einem endlichen relativen CW-Komplex P über $|K|$ erhält man durch zelluläre Approximation der Klebeabbildungen der Zellen von $P - |K|$ einen K-Komplex Q mit $P \sim Q$ rel $|K|$; man benutzt das Homotopieaxiom und Lemma 14 von [4]. Daher ist V epimorph. Seien P und Q K-Komplexe mit $P \sim Q$ rel $|K|$. Dann gibt es relative CW-Komplexe $P_1, \ldots, P_{m-1}$ über $|K|$, so daß $P_{i-1} \subset P_i$ oder $P_i \subset P_{i-1}$ einfacher Teilkomplex ist ($i = 1, \ldots, m$ und $P_0 = P$, $P_m = Q$). $f_i: P_{i-1} \to P_i$ sei die Inklusion im ersten Fall und eine Retraktion im zweiten. Dann ist $f = f_m \ldots f_1: P \to Q$ eine zelluläre Homotopieäquivalenz zwischen relativen CW-Komplexen über $|K|$ mit $f(x) = x$ für $x \in |K|$ (f ist i. allg. keine zelluläre Abbildung des CW-Komplexes P in den CW-Komplex Q). $g: P \to Q$ mit $g(x) = x$ für $x \in K$ sei zelluläre Approximation von f, und M_f, M_g seien die Abbildungszylinder von f bzw. g relativ $|K|$. M_f ist relativer CW-Komplex über $|P|$, M_g ist CW-Komplex mit Teilkomplex P. Durch Induktion nach der Anzahl m der Faktoren in $f = f_m \ldots f_1$ folgt leicht, daß $s(M_f, |P|) = 0$. Wegen $g \simeq f$ ist dann auch $s(M_g, |P|) = 0$ (das folgt aus (1'); vgl. den Beweis von Lemma 7.7 in [3]). Aber $s(M_g, P) \in Wh(P)$, da g Homotopieäquivalenz ist, und aus $0 = s(M_g, |P|) = Vs(M_g, P)$ darf man daher auf $s(M_g, P) = 0$ schließen, d.h. $M_g \sim P$ rel P. Nach Lemma 11 in [4] ist $M_g \sim Q$ rel Q, vgl. den Beweis von Satz 1. Beides zusammen impliziert $P \sim Q$ rel $P \cap Q$, also $P \sim Q$ rel K wegen $K \subset P \cap Q$. Somit ist V monomorph.

Literatur

1. Kwun, K. W., Szczarba, R. H.: Product and sum theorems for Whitehead torsion. Ann. of Math. **82**, 183–190 (1965).
2. Maumary, S.: Type simple d'homotopie (théorie géométrique) in Lecture Notes in Math. **48**, 55–64 (1967).
3. Milnor, J. W.: Whitehead torsion. Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 358–426 (1966).
4. Whitehead, J. H. C.: Simple homotopy types. Amer. J. Math. **72**, 1–57 (1950).

Ralph Stöcker
Math. Institut
Ruhr-Universität
D-4630 Bochum
NA 4/29

(Eingegangen am 5. August 1969; in revidierter Form am 5. Januar 1970)