Werk

Label: Periodical issue

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0009|log30

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

I.J.

A 20900 F

Inventiones mathematicae

Vol 9 · Fasc 4 · 1970

Stöcker, R.	Whiteheadgruppe topologischer Räume	271
Malgrange, B.	Une remarque sur les idéaux de fonctions différentiables	279
Schuster, H. W.	Zur Theorie der Deformationen kompakter komplexer Räume	284
Reid, G. A.	Epimorphisms and Surjectivity	295
Goulaouic, Ch., Grisvard, P.	Existence de traces pour les éléments d'espaces de distributions définis comme domaines d'opérateurs différentiels maximaux	308
Milnor, J.	Algebraic *K*-Theory and Quadratic Forms	318

Indexed in Current Contents

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York

Inventiones math. 26. V. 1970

X. 80

25965

Inventiones mathematicae

Editors / Éditeurs / Herausgeber:

W. I. Arnold, Moskwa; H. Bauer, Erlangen; B. J. Birch, Oxford; E. Bombieri, Pisa; P. Cartier, Strasbourg; N. H. Kuiper, Amsterdam; B. Malgrange, Paris; Y. Manin, Moskwa; R. Remmert, Münster; J.-P. Serre, Paris; J. Tits, Bonn; E. Vesentini, Pisa

---

This journal will be published at frequent intervals to bring out new contributions in this field. It is a policy of the journal to publish papers within four months of acceptance. As a rule four numbers constitute one volume. The price is DM 96,— per Volume.

It is a fundamental condition that no manuscript submitted shall have been, or in case of acceptance will be, published elsewhere.

Unless special permission has been granted by the publishers, no photographic reproductions, microfilms, microphotos or other reproductions of a similar nature may be made of the journal, of individual contributions contained therein, or of extracts therefrom.

Pour permettre une publication plus rapide, le journal «Inventiones mathematicae» paraît par fascicules isolés, réunis ensuite en volumes. La rédaction s'efforce de publier les travaux reçus dans les quatre mois suivant leur acceptation. En général un volume se compose de quatre fascicules. Le prix du volume s'élève à 96,— DM.

En règle absolue, les manuscrits soumis ne doivent pas avoir été publiés auparavant. En cas d'acceptation de son manuscrit, l'auteur s'engage également à ne le faire paraître nulle part ailleurs.

Tous droits de reproduction des travaux publiés, sous quelque forme que ce soit, y compris photographie, photocopie, microfilm, ou autre, sont réservés pour tous pays.

Die Zeitschrift erscheint, um eine rasche Publikation zu ermöglichen, in einzelnen Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Ein Band besteht im allgemeinen aus vier Heften. Es ist das Ziel der Zeitschrift, Arbeiten innerhalb von 4 Monaten nach Annahme zu publizieren. Der Preis eines Bandes beträgt DM 96,—.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie im Fall der Annahme auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht auch das Recht der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer photomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.

Springer-Verlag

D-6900 Heidelberg 1
Postfach 1780
Fernsprecher (0 62 21) 49 101
Fernschreibnummer 04-61723

D-1000 Berlin 33
Heidelberger Platz 3
Fernsprecher (03 11) 82 20 01
Fernschreibnummer 01-83 319

Springer-Verlag
New York Inc.
175 Fifth Avenue
New York, N.Y. 10010

Inventiones math. 9, 271 – 278 (1970)

Whiteheadgruppe topologischer Räume*

RALPH STÖCKER (Frankfurt/Main)

$\pi_1(X)$ ist die Fundamentalgruppe des topologischen Raumes X, Wh ist der Whitehead-Funktor von Gruppen in abelsche Gruppen [3]. Diese Arbeit enthält eine von $\pi_1(X)$ unabhängige Interpretation der Gruppe $Wh(\pi_1(X))$, die auf den geometrischen Konstruktionen in [4] basiert (vgl. auch [2]). In Abschnitt 1 wiederholen wir die Definition der Relation $P=DQ$ rel K von [4] und ordnen jedem CW-Komplex K eine Whiteheadgruppe $Wh(K)$ zu. In Abschnitt 2 beweisen wir einen allgemeinen Summensatz für die Whitehead-Torsion, der die "product- and sum-theorems" von [1] als Spezialfälle enthält: Sind f_n: $K_n \to L_n$ $(n=0, 1, 2)$ Homotopieäquivalenzen zwischen endlichen zusammenhängenden CW-Komplexen mit $K_0=K_1\cap K_2$, $L_0=L_1\cap L_2$ und $f_1|K_0=f_2|K_0=f_0$, so ist die zusammengesetzte Abbildung $f: K=K_1\cup K_2 \to L=L_1\cup L_2$ eine Homotopieäquivalenz, und ihre Whitehead-Torsion ist

$$\tau(f)=i_{1*}\tau(f_1)+i_{2*}\tau(f_2)-i_{0*}\tau(f_0)$$

(i_n = Inklusion $L_n\subset L$); das folgt aus Satz 2, aus der Definition von $\tau(f)$ in [3] und aus Abschnitt 3, in dem ein Isomorphismus $Wh(K)\to Wh(\pi_1(K))$ konstruiert wird.

Indem man relative CW-Komplexe über X betrachtet, kann man jedem topologischen Raum X eine Whiteheadgruppe $Wh(X)$ zuordnen und eine entsprechende Theorie entwickeln; das ist der Inhalt von Abschnitt 4.

1. Die Gruppe $Wh(K)$

Sei K ein CW-Komplex, nicht notwendig endlich. Ein K-Komplex ist ein CW-Komplex P, der K als co-endlichen Teilkomplex enthält (d.h. es ist eine Abbildung i: $K\to P$ gegeben, die K isomorph auf einen Teilkomplex von P abbildet, und $P-i(K)$ besteht aus nur endlich vielen Zellen). Seien P' und P'' K-Komplexe; P' ist ein einfacher Teilkomplex von P'', wenn gilt:

i) P' ist Teilkomplex von P'' und $P''-P'$ besteht aus genau zwei Zellen e^q und e^{q-1},

* Prof. Dr. Wolfgang Franz zum 65. Geburtstag.

ii) es gibt eine charakteristische Abbildung $f\colon I^q \to P''$ der Zelle e^q mit $f(J^{q-1}) \subset P'$, so daß $f|I^{q-1}$ charakteristische Abbildung von e^{q-1} ist; dabei ist $J^{q-1} = \dot{I}^q - I^{q-1}$.

Zwei K-Komplexe P und Q sind vom gleichen *einfachen Homotopietyp relativ* K, $P \sim Q$ rel K, wenn es K-Komplexe $P_0 = P, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n = Q$ gibt, so daß P_{i-1} einfacher Teilkomplex von P_i oder P_i einfacher Teilkomplex von P_{i-1} ist ($i = 1, \ldots, n$); welcher der beiden Fälle eintritt, kann von Index zu Index verschieden sein. Mit den Bezeichnungen von [4]: $P \sim Q$ rel K genau dann, wenn es eine formale Deformation $D\colon P \to Q$ rel K gibt. Das ist eine Äquivalenzrelation zwischen K-Komplexen. $Sh(K)$ ist die Menge der Äquivalenzklassen, $s(P, K) \in Sh(K)$ ist die Äquivalenzklasse des K-Komplexes P. Definiere eine Addition in $Sh(K)$ durch $s(P, K) + s(Q, K) = s(P \cup_K Q, K)$, wobei $P \cup_K Q$ aus der disjunkten Vereinigung von P und Q entsteht, indem man die Teilkomplexe $K \subset P$ und $K \subset Q$ identifiziert. $Sh(K)$ ist eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element $0 = s(K, K)$. Eine zelluläre Abbildung $f\colon K \to L$, L ein CW-Komplex, induziert einen Homomorphismus $f_*\colon Sh(K) \to Sh(L)$ durch $f_* s(P, K) = s(L \cup_f P, L)$, wobei $L \cup_f P$ aus der disjunkten Vereinigung von L und P entsteht, indem man jedem Punkt $x \in K$ mit $f(x) \in L$ identifiziert. Ist $g\colon L \to M$ ebenfalls zellulär, M ein CW-Komplex, so $(gf)_* = g_* f_*$. Ferner gilt das Homotopieaxiom: $f_1 \simeq f_2\colon K \to L$, f_1 und f_2 zellulär, impliziert $f_{1*} = f_{2*}$.

Die einzig nichttriviale Aussage ist das Homotopieaxiom (vgl. Lemma 13 in [4]). Wir brauchen es nur für die zellulären Abbildungen $i_n\colon K \to K \times I$, $i_n(x) = (x, n)$, zu beweisen ($n = 0, 1$). Sei P ein K-Komplex, seien $e_1, \ldots, e_m$ die Zellen von $P - K$, so geordnet, daß $\dim(e_{i-1}) \geqq \dim(e_i)$, und sei

$$Q = P \times I \quad \text{und} \quad P_i = P \times I - \bigcup_{j=1}^{i} e_j \times [0, 1).$$

Dann ist in der Folge

$$Q \supset P_1 \supset \cdots \supset P_{m-1} \supset P_m = K \times I \cup P \times 1$$

von $(K \times I)$-Komplexen jeder Komplex einfacher Teilkomplex des vorangehenden, also $s(Q, K \times I) = s(P_m, K \times I) = i_{1*} s(P, K)$. Ebenso $s(Q, K \times I) = i_{0*} s(P, K)$, somit $i_{0*} = i_{1*}$. – Man kann jetzt $f_*\colon Sh(K) \to Sh(L)$ auch für nicht-zelluläre Abbildungen $f\colon K \to L$ definieren, nämlich durch $f_* = f_{1*}$, wobei f_1 zelluläre Approximation von f ist.

Wir definieren die *Whiteheadgruppe von* K, $Wh(K)$, als die größte in $Sh(K)$ enthaltene Gruppe, d.h. als die Menge der Elemente von $Sh(K)$, die ein Inverses bei der Addition besitzen; der folgende Satz beschreibt diese Elemente:

Satz 1. *$s(P, K)\in Wh(K)$ genau dann wenn K Deformationsretrakt von P ist.*

Beweis. Ist $s(P, K)\in Wh(K)$, so gibt es einen K-Komplex Q mit $P\cup_K Q\sim K$ rel K. Dann ist K Deformationsretrakt von $P\cup_K Q$ und folglich auch Deformationsretrakt von P. Zum Beweis der Umkehrung benötigen wir ein Lemma. Seien P und Q K-Komplexe, P Teilkomplex von Q, K Deformationsretrakt von P. Sei r: $P\to K$ eine Retraktion. Dann gilt (vgl. Lemma 7.4 in [3]):

Lemma 1. $s(Q, K)=s(P, K)+r_* s(Q, P)$.

Beweis. Wir dürfen r zellulär annehmen. Sei i: $K\to P$ die Inklusion. ir: $P\to P$ ist homotop zur Identität, also ist $(ir)_*$ die Identität von $Sh(P)$. Es folgt $P\cup_{ir} Q\sim Q$ rel P. Dann ist insbesondere $P\cup_{ir} Q\sim Q$ rel K, und das ist Lemma 1, da der K-Komplex $P\cup_{ir} Q$ die rechte Seite der zu beweisenden Formel repräsentiert.

Beweis von Satz 1. Sei wieder r: $P\to K$ eine zelluläre Retraktion, und sei M_r der Abbildungszylinder von r relativ K mit der induzierten Zellzerlegung. M_r ist der Quotientenraum von $P\times I$ bezüglich der Identifikationen $(x, 1)=r(x)$ und $(y, t)=y$ für $x\in P$, $y\in K$ und $t\in I$. P ist als $P\times 0$ in M_r eingebettet. Seien $e_1, \ldots, e_m$ mit $\dim(e_{i-1})\geqq\dim(e_i)$ die Zellen von $P-K$. M_r besteht aus den Zellen von P und den Zellen $e_i\times(0, 1)$, $i=1, \ldots, m$. Setze

$$Q_i=M_r-\bigcup_{j=1}^{i} e_j\cup e_j\times(0, 1).$$

Dann ist in der Folge

$$M_r\supset Q_1\supset\cdots\supset Q_{m-1}\supset Q_m=K$$

von K-Komplexen jeder Komplex einfacher Teilkomplex des vorangehenden, also $s(M_r, K)=s(K, K)=0$ (vgl. Lemma 11 in [4]). Aus Lemma 1, auf $K\subset P\subset M_r$ angewandt, folgt: $r_* s(M_r, P)$ ist das Inverse von $s(P, K)$.

2. Der allgemeine Summensatz

Wir beweisen eine Formel zur Berechnung von $s(P, K)\in Sh(K)$ in dem Fall, daß P und K wie folgt in Teilkomplexe zerfallen:

$$\begin{aligned} P&=P_1\cup P_2 \quad \text{mit} \quad P_1\cap P_2=P_0,\\ K&=K_1\cup K_2 \quad \text{mit} \quad K_1\cap K_2=K_0,\\ K_1&\subset P_1, \quad K_2\subset P_2, \quad \text{also} \quad K_0\subset P_0. \end{aligned}$$

Sei i_n: $K_n\subset K$ die Inklusion $(n=0, 1, 2)$.

Satz 2. *Ist K_0 Deformationsretrakt von P_0, so ist*

$$s(P, K)=i_{1*}\, s(P_1, K_1)+i_{2*}\, s(P_2, K_2)-i_{0*}\, s(P_0, K_0).$$

Beweis. Sei $Q_n=K\cup P_n$; dann ist $P=Q_1\cup Q_2$ und $Q_1\cap Q_2=Q_0$, somit

$$s(P, Q_0)=s(Q_1, Q_0)+s(Q_2, Q_0).$$

K ist Deformationsretrakt von Q_0, sei r: $Q_0\to K$ eine Retraktion. Aus Lemma 1, auf $K\subset Q_0\subset P$ bzw. $K\subset Q_0\subset Q_n$ angewandt, folgt:

$$s(P, K)=s(Q_0, K)+r_*\, s(P, Q_0),$$
$$s(Q_n, K)=s(Q_0, K)+r_*\, s(Q_n, Q_0).$$

Aus allen vier Formeln ($n=1, 2$) zusammen folgt

$$s(P, K)=s(Q_1, K)+s(Q_2, K)-s(Q_0, K),$$

und wegen $s(Q_n, K)=i_{n*}\, s(P_n, K_n)$ ist das die Behauptung (das Element $-s(Q_0, K)$ existiert nach Satz 1).

Es folgt aus den Ergebnissen des nächsten Abschnitts, daß Satz 2 den in [1] bewiesenen Summensatz als Spezialfall enthält. Wir zeigen, daß auch der Produktsatz von [1] aus Satz 2 folgt. Sei $P=P_1\cup\cdots\cup P_m$ und $K=K_1\cup\cdots\cup K_m$ mit $K_i\subset P_i$, so daß jeder nichtleere Durchschnitt $K_{i_1}\cap\cdots\cap K_{i_r}$ Deformationsretrakt von $P_{i_1}\cap\cdots\cap P_{i_r}$ ist. Aus Satz 2 folgt durch Induktion nach m:

$$s(P, K)=\sum_{r\geqq 1}(-1)^{r+1}\sum f_{i_1\cdots i_r}\, s(P_{i_1}\cap\cdots\cap P_{i_r}, K_{i_1}\cap\cdots\cap K_{i_r}),$$

wobei über alle Indexfolgen $i_1, \ldots, i_r$ mit $1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq m$ und $K_{i_1}\cap\cdots\cap K_{i_r}\neq\emptyset$ zu summieren ist; $f_{i_1\cdots i_r}$ ist von der Inklusion $K_{i_1}\cap\cdots\cap K_{i_r}\subset K$ induziert. Sei L ein zusammenhängender Simplizialkomplex mit den abgeschlossenen Simplexen $L_1, \ldots, L_m$. Für $s(P, K)\in Wh(K)$ berechne $s(P\times L, K\times L)\in Wh(K\times L)$ mit $P\times L=(P\times L_1)\cup\cdots\cup(P\times L_m)$ und $K\times L=(K\times L_1)\cup\cdots\cup(K\times L_m)$ nach der obigen Formel. Da jeder nichtleere Durchschnitt $L_{i_1}\cap\cdots\cap L_{i_r}$ ein L_n ist für ein gewisses n, ist

$$f_{i_1\cdots i_r}\, s\big(P\times(L_{i_1}\cap\cdots\cap L_{i_r}), K\times(L_{i_1}\cap\cdots\cap L_{i_r})\big)=i_{n*}\, s(P\times L_n, K\times L_n)$$

mit i_n: $K\times L_n\subset K\times L$. Sei $y_n\in L_n$ Basisecke und f_n: $K\to K\times L_n$, $f_n(x)=(x, y_n)$. Aus Lemma 1, auf $K\times L_n\subset P\times y_n\cup K\times L_n\subset P\times L_n$ angewandt, folgt

$$s(P\times L_n, K\times L_n)=s(P\times y_n\cup K\times L_n, K\times L_n)=f_{n*}\, s(P, K);$$

denn offenbar ist $s(P\times L_n, P\times y_n\cup K\times L_n)=0$. Daher:

$$i_{n*}\,s(P\times L_n, K\times L_n)=i_{n*}\,f_{n*}\,s(P,K)=i_*\,s(P,K)$$

mit $i\colon K\to K\times L, i(x)=(x,y_1)$; $i\simeq i_n f_n$ für alle n, weil L zusammenhängend ist. Insgesamt ergibt sich

$$s(P\times L, K\times L)=\sum_{r\geqq 1}(-1)^{r+1}\,a_r(L)\,i_*\,s(P,K),$$

wo $a_r(L)$ die Anzahl der Indexfolgen $1\leqq i_1<\cdots<i_r\leqq m$ ist mit $L_{i_1}\cap\cdots\cap L_{i_r}\neq\emptyset$. Der Zahlenfaktor ist die Eulersche Charakteristik von L:

$$s(P\times L, K\times L)=\chi(L)\,i_*\,s(P,K).$$

Das ist der Produktsatz, zunächst allerdings nur bewiesen, wenn L ein Simplizialkomplex ist. Er bleibt jedoch richtig, wenn man L durch einen endlichen zusammenhängenden CW-Komplex ersetzt: Das folgt leicht aus [4], wonach jeder endliche CW-Komplex vom einfachen Homotopietyp eines endlichen Simplizialkomplexes ist.

3. Die Isomorphie $Wh(K)\approx Wh(\pi_1(K))$

K sei zusammenhängend (andernfalls ist $Wh(K)$ die direkte Summe der Whiteheadgruppen der Zusammenhangskomponenten von K), $x_0\in K$ sei Basisecke, $\pi=\pi_1(K,x_0)$ und $Z\pi$ der Gruppenring von π über den ganzen Zahlen. Für $q\geqq 3$ und $m\geqq 1$ sei

$$K_{q,m}=K\cup e_1^{q-1}\cup\cdots\cup e_m^{q-1}\qquad(\dot e_1^{q-1}=\cdots=\dot e_m^{q-1}=x_0)$$

die Ein-Punkt-Vereinigung von K und m $(q-1)$-Sphären. Die Homotopiegruppe $\pi_{q-1}=\pi_{q-1}(K_{q,m},x_0)$ ist bezüglich der Operation von $\pi_1(K_{q,m},x_0)\approx\pi$ ein $Z\pi$-Modul. Sei $F_i\colon (I^{q-1},\dot I^{q-1})\to(K_{q,m},x_0)$ charakteristische Abbildung von e_i^{q-1} und $a_i\in\pi_{q-1}$ das von ihr repräsentierte Element. Sei $A=(x_{ij})$ eine (m,m)-Matrix über $Z\pi$ und $b_i=\sum_j x_{ij}\,a_j\in\pi_{q-1}$.

$$f_i\colon (\dot I^q, J^{q-1})\to(K_{q,m},x_0)$$

sei eine zelluläre Abbildung, so daß $f_i|I^{q-1}$ das Element b_i repräsentiert. Dann ist

$$P_q(f_1,\ldots,f_m)=K_{q,m}\cup_{f_1}e_1^q\cup\cdots\cup_{f_m}e_m^q$$

ein K-Komplex mit Teilkomplex $K_{q,m}$.

Lemma 2. *Die Zuordnung* $A\to s(P_q(f_1,\ldots,f_m),K)$ *induziert einen Homomorphismus* $S_q\colon Wh(\pi)\to Wh(K)$.

Beweis. Sei $P_i=P_q(f_1,\ldots,f_m)-e_i^q$ und $h_i\colon K_{q,m}\subset P_i$ die Inklusion. Sei $x\in\pi$, $y\in Z\pi$ und $g_i\colon (\dot I^q,J^{q-1})\to(K_{q,m},x_0)$ eine zelluläre Abbildung, so daß $g_i|I^{q-1}$ das Element $\pm x\,b_i+y\,b_j\in\pi_{q-1}$ repräsentiert $(j\neq i)$. Sei

$s_0 = s(I^q, \dot{I}^q) \in Sh(\dot{I}^q)$. Es ist

$$s(P_q(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_m), P_i) = (h_i f_i)_*(s_0)$$
$$s(P_q(f_1, \ldots, g_i, \ldots, f_m), P_i) = (h_i g_i)_*(s_0).$$

Nach Definition von g_i ist $h_i g_i \simeq h_i f_i \colon \dot{I}^q \to P_i$ (freie Homotopie). Aus dem Homotopieaxiom folgt, daß die Komplexe $P_q(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_m)$ und $P_q(f_1, \ldots, g_i, \ldots, f_m)$ die gleiche Klasse in $Sh(P_i)$, also auch in $Sh(K)$, repräsentieren. Somit ist $s(P_q(f_1, \ldots, f_m), K) = s_A$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten f_i der b_i, und s_A ändert sich nicht bei elementaren Zeilenumformungen der Matrix A. Insbesondere kann man im Fall

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

annehmen, daß $f_m | I^{q-1} = F_m$ ist. Dann ist $P_q(f_1, \ldots, f_{m-1})$ einfacher Teilkomplex von $P_q(f_1, \ldots, f_m)$ und $s_A = s_B$. Damit ist gezeigt: Durch $\{A\} \to s_A$, wo $\{A\} \in Wh(\pi)$ die Restklasse der regulären Matrix A über $Z\pi$ ist, ist eine Zuordnung $S_q \colon Wh(\pi) \to Sh(K)$ definiert. Gegeben reguläre Matrizen A und B über $Z\pi$, sei

$$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\{C\} = \{A\} + \{B\}$ und offenbar auch $s_C = s_A + s_B$. Folglich ist S_q homomorph, daher Bild $(S_q) \subset Wh(K)$.

Lemma 3. *Zu $s \in Wh(K)$ und jeder hinreichend großen Zahl q gibt es eine reguläre Matrix A über $Z\pi$ mit $S_q(\{A\}) = s$.*

Beweis. Nach Lemma 15 von [4] gibt es einen Repräsentanten P von s, so daß $P - K$ nur aus Zellen der Dimension q und $q-1$ besteht (wegen $s \in Wh(K)$ ist K Deformationsretrakt von jedem Repräsentanten von s nach Satz 1). Nach homotoper Deformation der Klebeabbildungen der Zellen von $P - K$ kann man annehmen, daß $K \cup P^{q-1} = K_{q,m}$ ist für ein $m \geqq 1$ (P^{q-1} ist das $(q-1)$-Gerüst von P). Der Randoperator

$$d \colon \pi_q(P, K_{q,m}, x_0) \to \pi_{q-1}(K_{q,m}, K, x_0)$$

in der Homotopiesequenz des Tripels $K \subset K_{q,m} \subset P$ ist isomorph. Beide Homotopiegruppen sind freie $Z\pi$-Moduln, die Zellen von $P - K$ definieren ausgezeichnete Basen. Ist A die Matrix von d bezüglich dieser Basen, so $s = s_A$ und A ist regulär.

Satz 3. *$S_q \colon Wh(\pi) \to Wh(K)$ ist isomorph und $S_3 = -S_4 = S_5 = -S_6 = \cdots$.*

Beweis. Für jeden K-Komplex P mit K Deformationsretrakt von P ist die Whitehead-Torsion $\tau(P, K) \in Wh(\pi)$ definiert (vgl. [3]), und die Zuordnung $P \to \tau(P, K)$ induziert einen Homomorphismus $T \colon Wh(K) \to$

$Wh(\pi)$ (vgl. Theorem 3.1 von [3]). Ist A eine reguläre Matrix über $Z\pi$, so ist K nach Lemma 2 und Satz 1 Deformationsretrakt von $P_q(f_1, \ldots, f_m)$, und die Torsion ist leicht auszurechnen: $\tau(P_q(f_1, \ldots, f_m), K) = (-1)^q\{A\}$. Das bedeutet $TS_q = (-1)^q$, und hieraus und aus Lemma 3 folgt, daß T isomorph ist und $T^{-1} = (-1)^q S_q$. Daraus Satz 3.

Bemerkung. T ist ein natürlicher Isomorphismus. Eine Abbildung $f: K \to L$ induziert Homomorphismen $f_*: Wh(K) \to Wh(L)$ und $f_1: \pi \to \pi' = \pi_1(L, f(x_0))$. f_1 induziert einen Homomorphismus $f_\#: Wh(\pi) \to Wh(\pi')$. Dann ist $Tf_* = f_\# T$.

4. Whiteheadgruppe topologischer Räume

Die Definition der Gruppe $Wh(K)$ in Abschnitt 1 benutzt die gegebene Zellzerlegung von K. Nach Abschnitt 3 ist $Wh(K)$ unabhängig von dieser Zellzerlegung. Wir geben eine von der Zellzerlegung unabhängige Definition dieser Gruppe.

Sei X ein topologischer Raum, und seien P' und P'' endliche relative CW-Komplexe über X. P' ist einfacher Teilkomplex von P'', wenn die Bedingungen i) und ii) von Abschnitt 1 erfüllt sind. Zwei endliche relative CW-Komplexe P und Q über X sind vom gleichen *einfachen Homotopietyp relativ* X, $P \sim Q$ rel X, wenn es relative CW-Komplexe $P_0 = P, P_1, \ldots, P_{m-1}, P_m = Q$ über X gibt, so daß $P_{i-1} \subset P_i$ oder $P_i \subset P_{i-1}$ einfacher Teilkomplex ist ($i = 1, \ldots, m$). Das ist eine Äquivalenzrelation. $Sh(X)$ ist die Menge der Äquivalenzklassen und $s(P, X) \in Sh(X)$ ist die Klasse des endlichen relativen CW-Komplexes P über X. Mit der Addition $s(P, X) + s(Q, X) = s(P \cup_X Q, X)$ ist $Sh(X)$ eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element $0 = s(X, X)$. Eine Abbildung $f: X \to Y$ induziert einen Homomorphismus $f_*: Sh(X) \to Sh(Y)$ durch $f_* s(P, X) = s(Y \cup_f P, Y)$, und für $g: Y \to Z$ gilt $(gf)_* = g_* f_*$. Es gilt das Homotopieaxiom. Wir definieren die *Whiteheadgruppe von* X, $Wh(X)$, als die größte in $Sh(X)$ enthaltene Gruppe. Es gilt sinngemäß Satz 1. Lemma 1 lautet jetzt wie folgt: Sei X Deformationsretrakt von P und $r: P \to X$ eine Retraktion. Ist dann $P \subset Q$ Teilkomplex, so ist Q relativer CW-Komplex über $|P|$ und

$$s(Q, X) = s(P, X) + r_* s(Q, |P|). \tag{1'}$$

(Dabei ist $|P|$ der dem Komplex P zugrundeliegende Raum; (1') folgt am einfachsten durch Induktion nach der Zahl der Zellen in $Q - P$; der Beweis von Abschnitt 1 überträgt sich nicht.)

Die Konstruktion von S_q: $Wh(\pi) \to Wh(X)$ überträgt sich, Lemma 2 und 3 bleiben richtig. Wenn auf X die Theorie des universellen Überlagerungsraumes anwendbar ist, läßt sich für jeden endlichen relativen CW-Komplex P über X mit X Deformationsretrakt von P analog zu [3]

die Whitehead-Torsion $\tau(P, X) \in Wh(\pi)$ definieren. Dann bleibt Satz 3 richtig.

Sei K ein CW-Komplex und $|K|$ der zugrundeliegende Raum. Jeder K-Komplex ist ein endlicher relativer CW-Komplex über $|K|$, und aus $P \sim Q$ rel K, P und Q K-Komplexe, folgt $P \sim Q$ rel $|K|$. Durch $s(P, K) \to s(P, |K|)$ wird folglich ein Homomorphismus $V: Sh(K) \to Sh(|K|)$ definiert; V vergißt die Zellstruktur von K. V bildet $Wh(K)$ isomorph auf $Wh(|K|)$ ab.

Satz 4. *$V: Sh(K) \to Sh(|K|)$ ist isomorph.*

Beweis. Zu einem endlichen relativen CW-Komplex P über $|K|$ erhält man durch zelluläre Approximation der Klebeabbildungen der Zellen von $P - |K|$ einen K-Komplex Q mit $P \sim Q$ rel $|K|$; man benutzt das Homotopieaxiom und Lemma 14 von [4]. Daher ist V epimorph. Seien P und Q K-Komplexe mit $P \sim Q$ rel $|K|$. Dann gibt es relative CW-Komplexe $P_1, \ldots, P_{m-1}$ über $|K|$, so daß $P_{i-1} \subset P_i$ oder $P_i \subset P_{i-1}$ einfacher Teilkomplex ist ($i = 1, \ldots, m$ und $P_0 = P$, $P_m = Q$). $f_i: P_{i-1} \to P_i$ sei die Inklusion im ersten Fall und eine Retraktion im zweiten. Dann ist $f = f_m \ldots f_1: P \to Q$ eine zelluläre Homotopieäquivalenz zwischen relativen CW-Komplexen über $|K|$ mit $f(x) = x$ für $x \in |K|$ (f ist i. allg. keine zelluläre Abbildung des CW-Komplexes P in den CW-Komplex Q). $g: P \to Q$ mit $g(x) = x$ für $x \in K$ sei zelluläre Approximation von f, und M_f, M_g seien die Abbildungszylinder von f bzw. g relativ $|K|$. M_f ist relativer CW-Komplex über $|P|$, M_g ist CW-Komplex mit Teilkomplex P. Durch Induktion nach der Anzahl m der Faktoren in $f = f_m \ldots f_1$ folgt leicht, daß $s(M_f, |P|) = 0$. Wegen $g \simeq f$ ist dann auch $s(M_g, |P|) = 0$ (das folgt aus (1'); vgl. den Beweis von Lemma 7.7 in [3]). Aber $s(M_g, P) \in Wh(P)$, da g Homotopieäquivalenz ist, und aus $0 = s(M_g, |P|) = Vs(M_g, P)$ darf man daher auf $s(M_g, P) = 0$ schließen, d.h. $M_g \sim P$ rel P. Nach Lemma 11 in [4] ist $M_g \sim Q$ rel Q, vgl. den Beweis von Satz 1. Beides zusammen impliziert $P \sim Q$ rel $P \cap Q$, also $P \sim Q$ rel K wegen $K \subset P \cap Q$. Somit ist V monomorph.

Literatur

1. Kwun, K. W., Szczarba, R. H.: Product and sum theorems for Whitehead torsion. Ann. of Math. **82**, 183–190 (1965).
2. Maumary, S.: Type simple d'homotopie (théorie géométrique) in Lecture Notes in Math. **48**, 55–64 (1967).
3. Milnor, J. W.: Whitehead torsion. Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 358–426 (1966).
4. Whitehead, J. H. C.: Simple homotopy types. Amer. J. Math. **72**, 1–57 (1950).

Ralph Stöcker
Math. Institut
Ruhr-Universität
D-4630 Bochum
NA 4/29

(Eingegangen am 5. August 1969; in revidierter Form am 5. Januar 1970)

Inventiones math. 9, 279 – 283 (1970)

Une remarque sur les idéaux de fonctions différentiables

B. MALGRANGE (Grenoble)

1. Introduction

Soient X un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{O}$) le faisceau des germes de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ (resp. analytiques) sur X, à valeurs complexes. Pour tout point $a \in X$, $a=(a_1, \ldots, a_n)$, désignons par F_a l'anneau des séries formelles $\mathbf{C}[\![x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n]\!]$ et par $f_a \mapsto \hat{f}_a$ l'application $\mathscr{E}_a \to F_a$ (ou $\mathscr{O}_a \to F_a$): «série de Taylor en a».

Soit $M \in \mathrm{Hom}(X; \mathscr{O}^q, \mathscr{O}^p)$ une matrice à coefficients analytiques sur X; le résultat suivant est connu (Malgrange [2]):

Soit $f \in \mathscr{E}(X)^p$; pour qu'il existe $g \in \mathscr{E}(X)^q$ vérifiant $Mg=f$, il faut et il suffit qu'en tout point $a \in X$, la condition suivante soit satisfaite:

$C(a)$: *Il existe $\gamma_a \in F_a^q$ tel qu'on ait:* $\hat{f}_a = \hat{M}_a \gamma_a$.

Il est facile de voir sur des exemples que la conclusion reste vraie si l'on fait seulement l'hypothèse que $C(a)$ est vérifié en «suffisamment de points a». Par exemple, si $X=\mathbf{R}^2$, un $f \in \mathscr{E}(\mathbf{R}^2)$ est de la forme $x_1 g$ si et seulement si l'on a $f(0, x_2)=0$; par conséquent, il suffit ici d'imposer $C(a)$ pour un ensemble dense sur la droite $x_1=0$. D'une façon générale, posons la définition suivante:

Définition 1.1. *Un sous-ensemble Y de X sera dit «M-dense» si tout $f \in \mathscr{E}(X)^p$, vérifiant $C(a)$ en tout point $a \in Y$, est de la forme Mg, avec $g \in \mathscr{E}(X)^q$* [Autrement dit, si la condition «$\forall\, a \in Y$, $C(a)$» entraîne «$\forall\, a \in X$, $C(a)$»].

Le but de cette note est de donner une caractérisation des ensembles M-denses; l'outil essentiel est un argument de «semi-continuité de la dimension», déjà utilisé dans des questions analogues par Tougeron [4] (voir l'Appendice de cet article). Cette question m'avait été posée par F. Pham, ce dont je le remercie avec plaisir.

2. Caractérisation des ensembles M-denses

Désignons par L le conoyau du morphisme de faisceaux $M: \mathscr{O}^q \to \mathscr{O}^p$; en tensorisant par $\mathscr{E}$, on obtient une suite exacte:

$$\mathscr{E}^q \to \mathscr{E}^p \to L \underset{\mathscr{O}}{\otimes} \mathscr{E} \to 0$$

et, par partition de l'unité, une suite exacte pour les sections:

$$\mathscr{E}^q(X)\to\mathscr{E}^p(X)\to\Gamma(X, L\underset{\mathscr{O}}{\otimes}\mathscr{E})\to 0.$$

On déduit de là que la propriété « Y est M-dense» ne dépend en fait que de L, et peut s'exprimer ainsi:

«*Soit* $\varphi\in\Gamma(X, L\underset{\mathscr{O}}{\otimes}\mathscr{E})$; *pour qu'on ait* $\varphi=0$, *il faut et il suffit que,* $\forall\, a\in Y$, *l'image* $\hat{\varphi}_a$ *de* φ_a *dans* $L_a\underset{\mathscr{O}_a}{\otimes}F_a=\hat{L}_a$ *par l'application* (identité $\underset{\mathscr{O}_a}{\otimes}$ série de Taylor en a) *soit nulle*».

Posons $V=\mathrm{supp}(L)=\{a\in X\,|\,L_a\neq 0\}$; en tout point $a\in X-V$, la dernière condition est trivialement vérifiée; par conséquent, on peut supposer (quitte à remplacer Y par $Y\cap V$) que l'on a $Y\subset V$, ce que nous ferons désormais. Pour tout point $a\in V$, soient $\mathfrak{P}_{a,i}$ $(1\leqq i\leqq l(a))$ les idéaux premiers de $\mathscr{O}_a$ associés à L_a (Bourbaki [1]), et soit $V_{a,i}$ le germe en a de sous-ensemble analytique-réel de X défini par $\mathfrak{P}_{a,i}$ (i.e. le germe des zéros de $\mathfrak{P}_{a,i}$). Désignons encore par V_a le germe de V en a; la proposition suivante est bien connue:

Proposition 2.1. *On a* $V_{a,i}\subset V_a$, *et* $V_a=\bigcup_i V_{a,i}$ $(1\leqq i\leqq l(a))$.

Rappelons sa démonstration; soit $0=\bigcap L_{a,i}$ une décomposition primaire réduite de 0 dans L_a, avec $L_{a,i}$ primaire pour $\mathfrak{P}_{a,i}$; soit L_i un sous-faisceau analytique cohérent de L, défini au voisinage de a, tel qu'on ait $(L_i)_a=L_{a,i}$; on a encore $0=\bigcap L_i$, donc l'application diagonale $L\to\oplus(L/L_i)$ est injective, d'où $V_a=\bigcup\mathrm{supp}(L/L_i)_a$. Tout revient donc à montrer qu'on a $(L/L_i)_a=V_{a,i}$, c'est-à-dire qu'on est ramené au cas où L_a est coprimaire pour un idéal $\mathfrak{P}_a$.

Dans ce cas, on sait qu'il existe une suite de composition $L_a=\bar{L}_{a,1}\supset\bar{L}_{a,2}\supset\cdots\supset\bar{L}_{a,p+1}=0$ telle que $\bar{L}_{a,i}/\bar{L}_{a,i+1}$ soit monogène et isomorphe à $\mathscr{O}_a/\mathfrak{Q}_{a,i}$, $\mathfrak{Q}_{a,i}$ idéal premier de $\mathscr{O}_a$ contenant $\mathfrak{P}_a$; on peut aussi supposer $\mathfrak{Q}_{a,p}=\mathfrak{P}_a$, puisque L_a contient un sous-module monogène isomorphe à $\mathscr{O}_a/\mathfrak{P}_a$; soient $\bar{L}_i$ des sous-faisceaux cohérents de L, définis au voisinage de a, vérifiant $(\bar{L}_i)_a=\bar{L}_{a,i}$; on a encore, au voisinage de a, $\bar{L}_i/\bar{L}_{i+1}\simeq\mathscr{O}/\mathfrak{Q}_i$, $\mathfrak{Q}_i$ un faisceau cohérent d'idéaux vérifiant $(\mathfrak{Q}_i)_a=\mathfrak{Q}_{a,i}$; par suite, on a, avec $\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}_p$:

$$\mathrm{supp}(L)_a=\bigcup_i\mathrm{supp}(L_i/L_{i+1})_a=\bigcup_i\mathrm{supp}(\mathscr{O}/\mathfrak{Q}_i)_a=\mathrm{supp}(\mathscr{O}/\mathfrak{P})_a,$$

ce qui démontre la proposition.

Remarque 2.2. La décomposition précédente de V_a ne doit pas être confondue avec sa «décomposition en germes irréductibles»; les deux décompositions n'ont presque aucun rapport pour les raisons suivantes:

D'une part, les $V_{a,i}$ ne sont pas forcément irréductibles; ensuite il se peut que l'on ait $V_{a,i} \subset V_{a,j}$, pour $i \neq j$, soit que l'on ait $\mathfrak{P}_{a,i} \supset \mathfrak{P}_{a,j}$ («composantes immergées» de la décomposition primaire), soit encore simplement parce que, en analytique-réel, le «Nullstellensatz» est faux. Naturellement, dans le cas analytique-complexe, de ces trois accidents, seul le second peut se produire.

Théorème 2.3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

a) *Y est M-dense;*

b) *Pour tout point $a \in V$ et tout $i \leqq l(a)$,*

on a $V_{a,i} \cap Y_a \neq \emptyset$;

(autrement dit: soit $\tilde{V}_{a,i}$ un représentant de $V_{a,i}$ au voisinage de a; alors $\tilde{V}_{a,i} \cap Y$ est adhérent à a).

Démontrons d'abord a) $\Rightarrow$ b). Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe un point $a \in V$ et un i tels qu'on ait $V_{a,i} \cap Y_a = \emptyset$; il existe φ, section de L au voisinage de a tel que le noyau de l'application $f \mapsto f\varphi : \mathcal{O}_a \to L_a$ soit égal à $\mathfrak{P}_{a,i}$; au voisinage de a, soit $\mathfrak{P}_i$ le faisceau cohérent d'idéaux de $\mathcal{O}$ tel que $(\mathfrak{P}_i)_a = \mathfrak{P}_a$; l'application $f \mapsto f\varphi$ donne encore une suite exacte $0 \to \mathfrak{P}_i \to \mathcal{O} \to L$; l'application naturelle $L \to L \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathscr{E}$ est injective (parce que, pour tout b, $\mathscr{E}_b$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_b$, cf. Malgrange [2]; ou, plus simplement, parce que l'application composée $L_b \to L_b \underset{\mathcal{O}_b}{\otimes} \mathscr{E}_b \to L_b \underset{\mathcal{O}_b}{\otimes} F_b$ est injective, F_b étant fidèlement plat sur $\mathcal{O}_b$, cf. Bourbaki [1]); on peut donc considérer φ comme une section au voisinage de a de $L \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathscr{E}$, dont le germe en a est $\neq 0$; soit $\psi \in \mathscr{E}(X)$, égal à 1 au voisinage de a, et à support compact: si le support de ψ est assez voisin de a, $\psi\varphi$ peut être considéré comme une section de $L \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathscr{E}$ sur X entier; si de plus $\operatorname{supp}(\psi) \cap \tilde{V}_{a,i} \cap Y = 0$, $\tilde{V}_{a,i}$ un représentant convenable de $V_{a,i}$ au voisinage de 0, on aura $(\psi\varphi)_b = 0$ pour tout $b \in Y$; a fortiori $\widehat{(\psi\varphi)}_b = 0$; mais $(\psi\varphi)_a \neq 0$, ce qui montre que Y n'est pas M-dense.

Démontrons maintenant b) $\Rightarrow$ a). Le théorème étant local, il suffit de le démontrer au voisinage d'un point $a \in X$ fixé. Nous allons procéder pour cela en deux étapes:

Etape 1. Supposons qu'on ait $L = \mathcal{O}/\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}$ faisceau cohérent d'idéaux, avec $\mathcal{O}_a/\mathfrak{J}_a$ réduit, i.e. $\mathfrak{J}_a$ intersection d'idéaux premiers; soit f une section de $\mathscr{E}$ au voisinage de a, vérifiant, pour tout point $b \in Y$ voisin de a: $\hat{f}_b \in \mathfrak{J}_b \underset{\mathcal{O}_b}{\otimes} F_b \; (= \hat{\mathfrak{J}}_b)$. Il suffit de montrer qu'on a $\hat{f}_a \in \hat{\mathfrak{J}}_a$: en effet, d'après un théorème classique de Cartan-Oka, en tout point $c \in V$, assez voisin de a, $\mathcal{O}_c/\mathfrak{J}_c$ est réduit, et par conséquent, le même raisonnement, appliqué à c au lieu de a, montrera qu'on a $\hat{f}_c \in \hat{\mathfrak{J}}_c$, ce qui est le résultat cherché.

On a $\mathfrak{J}_a = \bigcap \mathfrak{P}_{a,i}$ $(1 \leqq i \leqq l(a))$, donc, par platitude de F_a sur $\mathcal{O}_a$: $\hat{\mathfrak{J}}_a = \bigcap \hat{\mathfrak{P}}_{a,i}$; par hypothèse, on a, pour chaque i: $Y \cap V_{a,i} \neq 0$; ceci montre qu'il suffit de traiter le cas où $\mathfrak{J}_a$ est premier, et, plus précisément, de démontrer le lemme suivant:

Lemme 2.4. *Soient $\mathfrak{J}$ un faisceau cohérent d'idéaux, avec $\mathfrak{J}_a$ premier, Y un sous-ensemble de $V = \mathrm{supp}(\mathcal{O}/\mathfrak{J})$, avec $Y_a \neq \emptyset$, et f une section de $\mathscr{E}$ au voisinage de a, vérifiant, $\forall\, b \in Y$: $\hat{f}_b \in \mathfrak{J}_b$; alors, on a $\hat{f}_a \in \hat{\mathfrak{J}}_a$.*

Posons $k = \dim \mathcal{O}_a/\mathfrak{J}_a$; on sait que, en tout point $b \in V$ voisin de a, on a encore $k = \dim \mathcal{O}_b/\mathfrak{J}_b$, donc $k = \dim F_b/\hat{\mathfrak{J}}_b$. Pour tout point $b \in X$, voisin de a, soit $\mathfrak{R}_b$ l'idéal de F_b engendré par $\hat{\mathfrak{J}}_b$ et $\hat{f}_b$; on sait (Tougeron [4]) que la fonction $b \mapsto \dim F_b/\mathfrak{R}_b$ est semicontinue supérieurement au voisinage de a (en un point où $\mathfrak{R}_b = F_b$, on pose par exemple $\dim F_b/\mathfrak{R}_b = -1$); par hypothèse, pour $b \in Y$, on a $\mathfrak{R}_b = \hat{\mathfrak{J}}_b$, donc, puisque Y est adhérent à a, on aura $\dim F_a/\mathfrak{R}_a \geqq k$.

D'après un théorème de Nagata-Zariski, $\hat{\mathfrak{J}}_a$ est premier (voir par exemple une démonstration due à Serre, dans Malgrange [3]); d'autre part, on a $\dim F_a/\hat{\mathfrak{J}}_a = k$, et $\mathfrak{R}_a \supset \hat{\mathfrak{J}}_a$; il en résulte qu'on a nécessairement $\mathfrak{R}_a = \hat{\mathfrak{J}}_a$, d'où $\hat{f}_a \in \hat{\mathfrak{J}}_a$, ce qui démontre le lemme et achève la première étape.

Etape 2; le cas général. Soit $a \in V$, et soit φ une section de $L \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathscr{E}$, au voisinage de a, vérifiant, pour tout $b \in Y$ voisin de a: $\hat{\varphi}_b = 0$. Pour établir le théorème il suffit de montrer qu'on a $\hat{\varphi}_a = 0$. En raisonnant comme dans l'étape précédente, il suffit de traiter le cas où L_a est coprimaire pour un certain idéal $\mathfrak{P}_a$. Reprenons alors les notations de la proposition 2.1, fin de la démonstration. Nous allons démontrer, par récurrence descendante sur i $(1 \leqq i \leqq p+1)$, le résultat suivant:

Lemme 2.5. *Il existe g_i, analytique au voisinage de a, avec $g_{i,a} \notin \mathfrak{P}_a$, possédant la propriété suivante; si φ est une section de $\bar{L}_i \otimes \mathscr{E}$ au voisinage de a, vérifiant, $\forall\, b \in Y$: $\hat{\varphi}_b = 0$, on a $g_i \varphi = 0$.*

Pour $i = p+1$, le résultat est trivial, puisque $\bar{L}_{p+1} = 0$. Supposons alors le résultat acquis pour $i+1$, et démontrons le pour i; soit ψ l'image de φ dans l'espace des sections de $(\bar{L}_i/\bar{L}_{i+1}) \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathscr{E} \simeq \mathscr{E}/\mathfrak{Q}_i \mathscr{E}$; si $\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{P}$, par la première étape, on a $\psi = 0$, donc en fait φ est une section de $L_{i+1} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathscr{E}$ (noter que, par platitude de $\mathscr{E}$ sur $\mathcal{O}$, l'application $\bar{L}_{i+1} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathscr{E} \to \bar{L}_i \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathscr{E}$ est injective; on peut donc considérer le premier comme un sous-faisceau du second); dans ce cas, le lemme est vrai avec $g_i = g_{i+1}$. Si au contraire $\mathfrak{Q}_{i,a} \neq \mathfrak{P}_a$, il existe h analytique au voisinage de a, avec $h_a \in \mathfrak{Q}_{i,a}$ et $h_a \notin \mathfrak{P}_a$; on aura $h\psi = 0$ au voisinage de a, donc $h\varphi$ est une section de $\bar{L}_{i+1} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathscr{E}$ et le lemme sera vrai avec $g_i = h g_{i+1}$.

Achevons maintenant la démonstration: soit φ une section de $L \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathcal{E}$ au voisinage de a, vérifiant, $\forall\, b \in Y, \hat{\varphi}_b = 0$; on a $g_1\, \varphi = 0$, donc en particulier $\hat{g}_{1,a}\, \hat{\varphi}_a = 0$. Comme $g_{1,a} \notin \mathfrak{P}_a$, l'homothétie $g_{1,a}: L_a \to L_a$ est injective; par suite (platitude de F_a sur $\mathcal{O}_a$) l'homothétie $\hat{g}_{1,a}: \hat{L}_a \to \hat{L}_a$ est aussi injective; par suite on a $\hat{\varphi}_a = 0$, ce qui démontre le théorème.

Bibliographie

1. Bourbaki, N.: Algèbre commutative, chap. 3 et 4. Paris: Hermann 1962.
2. Malgrange, B.: Ideals of differentiable functions. Bombay: Oxford University Press 1966.
3. – Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques. Bull. Soc. Math. Fr. **91**, 113 – 127 (1963).
4. Tougeron, J. C.: Idéaux de fonctions différentiables. Ann. Inst. Fourier **18-1**, 177 – 240 (1968).

B. Malgrange
Institut de Mathématiques Pures
B.P. 116
38-Saint Martin d'Hères
France

(Reçu le 22 janvier 1970)

Inventiones math. 9, 284 – 294 (1970)

Zur Theorie der Deformationen kompakter komplexer Räume

HANS WERNER SCHUSTER (München)

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Grauert und Fischer [4] herzuleiten (Satz 4.9): Ist $p\colon X \to S$ eine eigentliche platte holomorphe Abbildung und sind alle Fasern von p paarweise isomorph, so ist p in jedem Punkt von S trivial, falls S reduziert ist.

Da die Fasern beliebige kompakte komplexe Räume sein dürfen, sind die potential-theoretischen Methoden von Kodaira-Spencer nicht anwendbar. Verfasser benützt vor allem das Ergebnis von Douady [2], mehr noch dessen relativierte Form von [14]. Hieraus wird folgendes Resultat hergeleitet, welches ein Haupthilfsmittel zum Beweis von (4.9) darstellt:

Ist $p\colon X \to S$ platt und eigentlich, $\mathbf{Coh}(S)$ (resp. $\mathbf{Coh}(X)$) die Kategorie der kohärenten Modulgarben auf S (resp. X), so besitzt der Funktor „analytisches Urbild" $p^*\colon \mathbf{Coh}(S) \to \mathbf{Coh}(X)$ einen linksadjungierten Funktor ${}_*p\colon \mathbf{Coh}(X) \to \mathbf{Coh}(S)$.

Außerdem wird gezeigt:

Ist $p\colon X \to S$ eine eigentliche holomorphe Abbildung, so ist p genau dann platt, wenn der Funktor „Basiserweiterung" $p^+\colon \mathbf{An}_{/S} \to \mathbf{An}_{/X}$ einen rechtsadjungierten Funktor besitzt. (Hierbei ist $\mathbf{An}_{/S}$ die Kategorie der „komplexen Räume über S", analog ist $\mathbf{An}_{/X}$ definiert.) Vgl. zu diesem Satz auch [8].

§ 0. Bezeichnungen

(0.1) Ist $\mathbf{A}$ eine Kategorie, so wird mit $\hat{\mathbf{A}}$ die Kategorie der kontravarianten Funktoren von $\mathbf{A}$ in **Ens** bezeichnet. Man hat einen Funktor $h\colon A \mapsto \hat{A},\ f \mapsto (g \mapsto Hom(g, f))$. h ist voll-treu, daher läßt sich, und das geschieht im folgenden stets, $\mathbf{A}$ als volle Unterkategorie von $\hat{\mathbf{A}}$ auffassen. Ein Objekt aus $\hat{\mathbf{A}}$ heißt darstellbar, wenn es zu einem Objekt von $\mathbf{A}$ isomorph ist.

Ist S ein Objekt von $\mathbf{A}$, so wird mit $\mathbf{A}_{/S}$ die Kategorie der „Objekte über S" bezeichnet. Die Objekte von $\mathbf{A}_{/S}$ sind die Morphismen $p\colon X \to S$; ist $p\colon X \to S$ ein Objekt von $\mathbf{A}_{/S}$, so wird kurz X als Objekt über S bezeichnet. Sind $p\colon X \to S$, $p'\colon X' \to S$ Objekte von $\mathbf{A}_{/S}$, so wird die Menge

der $\mathbf{A}_{/S}$-Morphismen durch $Hom_S(X, X') := \{f \in Hom(X, X') : p' f = p\}$ gegeben.

(0.2) Im folgenden sei $\mathbf{A}$ eine Kategorie mit endlichen Faserprodukten; konkret wird es sich stets um die Kategorie $\mathbf{An}$ der separierten komplexen Räume handeln.

Ist $p: X \to S$ ein Morphismus, so hat man den Funktor „Basiserweiterung": $p^+: \mathbf{A}_{/S} \to \mathbf{A}_{/X}$, $f \mapsto f \times_S id_X$. Für $p^+ T$, $p^+ f$ wird oft auch: $T_{(X)}, f_{(X)}$ geschrieben.

Im folgenden wichtig ist der Funktor

$$p_+: \mathbf{A}_{/X} \to \widehat{\mathbf{A}_{/S}}, \quad f \mapsto (g \mapsto Hom_X(p^+ g, f)).$$

Für Objekte Y über X, T über S ist also $(p_+ Y)(T) = Hom_X(T_{(X)}, Y)$.

(0.2.1) Falls für alle Objekte Y über X der Funktor $p_+ Y$ darstellbar ist, besitzt p^+ einen rechtsadjungierten Funktor, welcher ohne Gefahr der Konfusion wieder mit p_+ bezeichnet wird; dies folgt aus dem Auswahlaxiom.

(0.2.2) Ist $p: X \to S$ ein Objekt über S, Y ein weiteres Objekt über S, so definiert man:

$$\mathbf{Hom}_S(X, Y) := p_+(Y_{(X)}).$$

Ist T ein Objekt über S, so hat man eine funktorielle Bijektion $\mathbf{Hom}_S(X, Y)(T) = Hom_S(T \times_S X, Y)$. $\mathbf{Isom}_S(X, Y)$ wird als Objekt von $\widehat{\mathbf{A}_{/S}}$ definiert durch: $\mathbf{Isom}_S(X, Y)(T) := Isom_T(X_{(T)}, Y_{(T)})$. (Sind U, U' Objekte über T, so ist $Isom_T(U, U')$ die Menge der invertierbaren Elemente von $Hom_T(U, U')$.)

(0.2.3) Sind $\mathbf{Hom}_S(X, X)$, $\mathbf{Hom}_S(X, Y)$, $\mathbf{Hom}_S(Y, X)$ und $\mathbf{Hom}_S(Y, Y)$ darstellbar, so ist nach [1] auch $\mathbf{Isom}_S(X, Y)$ darstellbar.

(0.2.4) Ist Z ein Objekt über X, Y ein Objekt über S, und sind $p: X \to S$, $q: S' \to S$ Objekte über S, so gilt nach [1] Exp. I, 1.7, wenn man $p' := p_{(S')}$ setzt:

$$q^+(p_+ Z) \cong p'_+(Z \times_X p^+ S'),$$
$$q^+ \mathbf{Hom}_S(X, Y) \cong \mathbf{Hom}_{S'}(X_{(S')}, Y_{(S')}),$$
$$q^+ \mathbf{Isom}_S(X, Y) \cong \mathbf{Isom}_{S'}(X_{(S')}, Y_{(S')}).$$

(Hierbei ist natürlich q^+ zu einem Funktor $\widehat{\mathbf{A}_{/S}} \to \widehat{\mathbf{A}_{/S'}}$ fortgesetzt zu denken.)

(0.2.5) Ist e das Finalobjekt von $\mathbf{A}$, so ist ja $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{/e}$; sind X, Y Objekte von $\mathbf{A}$, so setzt man $\mathbf{Hom}(X, Y) := \mathbf{Hom}_e(X, Y)$.

§ 1. Die Relativierung des Satzes von Douady

(1.1) Es sei $X \to S$ eine holomorphe Abbildung. Es soll nun ein Objekt $\mathbf{H}_{X/S}$ aus $\widehat{\mathbf{An}_{/S}}$ definiert werden: Für ein Objekt T aus $\mathbf{An}_{/S}$ sei $\mathbf{H}_{X/S}(T)$ die Menge der abgeschlossenen analytischen Unterräume Y von $X_{(T)}$, für welche die Komposition $Y \to X_{(T)} \to T$ platt und eigentlich ist. Ist $f\colon T \to T'$ ein $\mathbf{An}_{/S}$-Morphismus, Y ein Element von $\mathbf{H}_{X/S}(T')$, so ist $Y \times_{T'} T \in \mathbf{H}_{X/S}(T)$; man hat also eine Abbildung

$$\mathbf{H}_{X/S}(f)\colon \mathbf{H}_{X/S}(T') \to \mathbf{H}_{X/S}(T).$$

Damit ist $\mathbf{H}_{X/S}$ ein Objekt von $\widehat{\mathbf{An}_{/S}}$.

Ist $\mathbf{H}_{X/S}$ darstellbar, so bezeichnen wir das Objekt aus $\mathbf{An}_{/S}$, welches zu $\mathbf{H}_{X/S}$ isomorph ist, auch mit $\mathbf{H}_{X/S}$. Man hat dann einen abgeschlossenen analytischen Unterraum $\mathbf{Z}_{X/S}$ von $\mathbf{H}_{X/S} \times_S X$, die Komposition $\mathbf{Z}_{X/S} \to \mathbf{H}_{X/S} \times_S X \to \mathbf{H}_{X/S}$ ist platt und eigentlich und es gilt: Ist T ein Raum über S, $Y \in \mathbf{H}_{X/S}(T)$, so gibt es genau einen S-Morphismus $f\colon T \to \mathbf{H}_{X/S}$, derart daß $Y = f^+ \mathbf{Z}_{X/S}$ ist.

Ist e das Finalobjekt von $\mathbf{An}$, so sei $\mathbf{H}_X := \mathbf{H}_{X/e}$, $\mathbf{Z}_X := \mathbf{Z}_{X/e}$.

(1.2) Nach Douady [2] ist $\mathbf{H}_X$ darstellbar für jeden komplexen Raum X. Sind T, X Objekte von $\mathbf{An}_{/S}$, $Y \in \mathbf{H}_{X/S}(T)$, so läßt sich wegen der universellen Eigenschaft von $\mathbf{H}_X$ der Unterraum $Y \to T \times_S X \hookrightarrow T \times X$ als Element von $Hom_S(T, \mathbf{H}_X \times S)$ auffassen. Man hat also eine Abbildung $\mathbf{H}_{X/S}(T) \to Hom_S(T, \mathbf{H}_X \times S)$, die offenbar funktoriell in T ist, also hat man einen $\widehat{\mathbf{An}_{/S}}$-Morphismus $s\colon \mathbf{H}_{X/S} \to \mathbf{H}_X \times S$. Nach Pourcin [14] ist $\mathbf{H}_{X/S}$ darstellbar und s eine abgeschlossene Einbettung. Verfasser möchte hierfür den Beweis nun skizzieren; durch Verwendung eines Resultats von Frisch [6] läßt sich der Beweis an einer Stelle kürzer als in [14] führen.

(1.3) Im folgenden wird öfters die folgende Tatsache ([2], Prop. 1 von § 10) verwendet: Sind $p\colon X \to S$, $q\colon Y \to S$ platt und eigentlich, $h \in Hom_S(X, Y)$, so ist die Menge $S' := \{s \in S : h_s \in Isom(X_s, Y_s)\}$ offen und $h_{(S')}$ ist ein Isomorphismus.

(Hierbei ist $X_s := X \times_S \{s\}$, $h_s := h \times_S id_{\{s\}}$ und diese Bezeichnungsweise wird auch im folgenden stets verwendet.)

(1.4) **Satz** (vgl. [14]). *Ist $p\colon X \to S$ eine platte eigentliche holomorphe Abbildung und Y ein abgeschlossener analytischer Unterraum von X, so ist $p_+ Y$ darstellbar.*

Beweis. $i\colon Y \to X$ sei die Injektion. $p\,i$ ist eigentlich, also gibt es nach [6] einen Raum S' über S mit folgenden Eigenschaften: i) $Y_{(S')} \to S'$ ist platt, ii) ist T ein Raum über S und ist $Y_{(T)} \to T$ platt, so gibt es genau einen S-Morphismus von T in S'. $j := i_{(S')} \in Hom_{S'}(Y_{(S')}, X_{(S')})$; $S'' :=$

$\{s\in S': j_s$ ist Isomorphismus$\}$. Nach (1.3) ist S'' offen in S'. Es läßt sich schnell verifizieren, daß S'' als Raum über S isomorph zu $p_+ Y$ ist.

(1.5) **Satz** (Pourcin [14]). *Ist $f: X\to S$ eine holomorphe Abbildung, so ist $\mathbf{H}_{X/S}$ darstellbar.*

Beweisskizze. Sei p: $\mathbf{Z}_X\to\mathbf{H}_X$ der kanonische Morphismus, $q:=p\times id_S$, j: $\mathbf{Z}_X\times S\to\mathbf{H}_X\times X\times S$ sei die Injektion. Z' sei der Differenzkern von

$$\mathbf{Z}_X\times S\underset{f pr_2 j}{\overset{pr_3 j}{\rightrightarrows}} S,$$

d.h. die Sequenz

$$Z'\to\mathbf{Z}_X\times S\underset{f pr_2 j}{\overset{pr_3 j}{\rightrightarrows}} S$$

sei exakt. Es ist jetzt prinzipiell einfach zu zeigen, daß es einen $\widehat{\mathbf{An}_{/S}}$-Isomorphismus h: $\mathbf{H}_{X/S}\to q_+ Z'$ gibt, derart daß $s=l h$ ist (s war in (1.2) definiert, l sei der kanonische Morphismus). Aus (1.4) folgt die Behauptung.

§ 2. Eine Charakterisierung der platten eigentlichen holomorphen Abbildungen

(2.1) **Satz.** *Es sei p: $X\to S$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) *p ist platt.*

b) *Für jedes Object Y aus $\mathbf{An}_{/X}$ ist $p_+ Y$ darstellbar.*

c) *Es gibt einen zu p^+: $\mathbf{An}_{/S}\to\mathbf{An}_{/X}$ rechtsadjungierten Funktor.*

d) *Für jeden Epimorphismus f in $\mathbf{An}_{/S}$ ist $f\times_S id_X$ ein Epimorphismus in $\mathbf{An}_{/X}$.*

In [8, 9] hat Grothendieck gezeigt, wie mit Verwendung von (1.5) b) aus a) folgt.

Beweis. 1. Aus a) folgt b): Ist Y ein Raum über X, T ein Raum über S, so ist $p_+ Y(T)=Hom_X(T_{(X)}, Y)\cong Hom_{T_{(X)}}(T_{(X)}, Y\times_X T_{(X)})$. Nun ist $Y\times_X T_{(X)}=Y\times_S T$; man hat also eine in T funktorielle Bijektion von $(p_+ Y)(T)$ auf die Menge aller abgeschlossenen analytischen Unterräume $W\hookrightarrow T\times_S Y$, für welche die Komposition $W\to T\times_S Y\to T\times_S X$ ein Isomorphismus ist.

Der Morphismus $Y\to X$ liefert einen Morphismus a: $\mathbf{H}_{Y/S}\times_S Y\to\mathbf{H}_{Y/S}\times_S X$; es sei $\mathbf{Z}_{Y/S}\xrightarrow{j}\mathbf{H}_{Y/S}\times_S Y\to\mathbf{H}_{Y/S}$ der kanonische Morphismus (er wird mit $p_{Y/S}$ bezeichnet). Dann ist $p_{(\mathbf{H}_{Y/S})} a j=p_{Y/S}$ und damit ist $a j$ ein Morphismus über $\mathbf{H}_{Y/S}$. Aus (1.3) und den obigen Ausführungen folgt nun, daß $H':=\{h\in\mathbf{H}_{Y/S}: (a j)_h$ ist Isomorphismus$\}$ offen ist und daß $p_+ Y\cong H'$ ist.

2. Aus (0.2.1) folgt, daß c) durch b) impliziert wird.

3. Daß d) durch c) impliziert wird, ist trivial.

4. d) impliziert a): Für einen komplexen Raum Z sei $\mathbf{Coh}(Z)$ die Kategorie der kohärenten Modulgarben auf Z. Ist $\mathscr{F}$ ein Objekt von $\mathbf{Coh}(Z)$, so sei $I_Z(\mathscr{F}) := (Z, \mathcal{O}_Z + \mathscr{F})$ die triviale Erweiterung von Z durch $\mathscr{F}$ (vgl. [1] Exp. 2, 2). Der Morphismus $\mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_Z + \mathscr{F}$, $a \mapsto (a, 0)$, liefert einen Morphismus $I_Z(\mathscr{F}) \to Z$, außerdem hängt $I_Z(\mathscr{F})$ funktoriell von $\mathscr{F}$ ab, man hat also einen Funktor I_Z: $\mathbf{Coh}(Z)^0 \to \mathbf{An}_{/Z}$. Man überlegt sich leicht, daß ein Morphismus f in $\mathbf{Coh}(Z)$ genau dann injektiv ist, wenn $I_Z(f)$ ein Epimorphismus ist.

Sei nun f ein Monomorphismus in $\mathbf{Coh}(S)$. Dann ist $p^+ I_S(f)$ ein Epimorphismus; da das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Coh}(S)^0 & \xrightarrow{I_S} & \mathbf{An}_{/S} \\ {\scriptstyle p^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p^+} \\ \mathbf{Coh}(X)^0 & \xrightarrow{I_X} & \mathbf{An}_{/X} \end{array}$$

kommutiert, ist also $I_X(p^* f)$ ein Epimorphismus, daher ist $p^* f$ injektiv. Damit ist p^* ein exakter Funktor, also ist p platt.

(2.2) **Folgerung.** *Sei p: $X \to S$ eine platte eigentliche holomorphe Abbildung, Y ein Raum über S. Dann gilt:*

i) $\mathbf{Hom}_S(X, Y)$ *ist darstellbar.*

ii) *Wenn $Y \to S$ platt und eigentlich ist, so ist $\mathbf{Isom}_S(X, Y)$ darstellbar und gestattet eine offene Einbettung in $\mathbf{Hom}_S(X, Y)$.*

Beweis. i) ergibt sich aus (2.1) und (0.2.2). Zu ii): Daß $\mathbf{Isom}_S(X, Y)$ darstellbar ist, folgt aus (0.2.3), daß der kanonische Morphismus $\mathbf{Isom}_S(X, Y) \to \mathbf{Hom}_S(X, Y)$ eine offene Einbettung ist, folgt aus (1.3).

(2.3) **Corollar.** *Ist $X \to S$ eine holomorphe Abbildung, so ist s: $\mathbf{H}_{X/S} \to \mathbf{H}_X \times S$ eine abgeschlossene Einbettung.*

In der Tat: Im Beweis von (1.5) ist l eine abgeschlossene Einbettung, da p_+ ein rechtsadjungierter Funktor ist, also ist auch s eine abgeschlossene Einbettung.

§ 3. Eine Modul-theoretische Eigenschaft platter eigentlicher Morphismen

Für einen komplexen Raum Z sei $\mathbf{Lin}(Z)$ die Kategorie der linearen Faserräume über Z im Sinne von [3]. V_Z: $\mathbf{Coh}(Z)^0 \to \mathbf{Lin}(Z)$ sei der kanonische Funktor (vgl. [3]). T_Z: $\mathbf{Lin}(Z) \to \mathbf{An}_{/Z}$ sei der Funktor, der die algebraische Struktur vergißt. Ist p: $X \to S$ ein Morphismus in $\mathbf{An}$, so liefert das Faserprodukt einen additiven Funktor $\mathbf{Lin}(S) \to \mathbf{Lin}(X)$, der

ebenfalls mit p^+ bezeichnet wird. Ist p platt und eigentlich, L ein Objekt von $\mathbf{Lin}(X)$, so wird $p_+(T_X L)$ ein Objekt von $\mathbf{Lin}(S)$, wenn man für einen Raum Z über S der Menge $Hom_S(Z, p_+ T_X L)$, die ja isomorph zu $Hom_X(p^+ Z, T_X L)$ ist, die $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$-Modul-Struktur von $Hom_X(p^+ Z, T_X L)$ einpflanzt.

(3.1) Damit hat man einen additiven Funktor $\mathbf{Lin}(X) \to \mathbf{Lin}(S)$ definiert (falls $X \to S$ platt und eigentlich ist), der wieder mit p_+ bezeichnet wird und der zu $p^+: \mathbf{Lin}(S) \to \mathbf{Lin}(X)$ rechtsadjungiert ist.

(3.2) **Satz.** *Sei $p: X \to S$ ein eigentlicher platter Morphismus in* **An**. *Dann gibt es einen additiven Funktor ${}_*p: \mathbf{Coh}(X) \to \mathbf{Coh}(S)$, der linksadjungiert zu p^* ist und für den gilt: $V_S {}_*p \cong p_+ V_X$.*

Beweis. Dies folgt aus (3.1) und der Tatsache ([3, 15]), daß für jeden komplexen Raum Z der Funktor V_Z eine Äquivalenz von Kategorien ist.

(3.3) **Satz.** *Sei $p: X \to S$ ein platter eigentlicher Morphismus in* **An**, $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \longrightarrow 0$ *eine exakte Sequenz in* $\mathbf{Coh}(X)$. *Dann ist die Sequenz ${}_*p\mathcal{F} \to {}_*p\mathcal{G} \to {}_*p\mathcal{H} \to 0$ exakt.*

Beweis. Dies folgt daraus, daß ${}_*p$ einen rechtsadjungierten Funktor besitzt.

(3.4) Ist Z ein komplexer Raum, $\mathcal{F}$ eine Modulgarbe auf Z, so sei $\mathcal{F}' := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_Z)$.

(3.5) **Satz.** *Ist $p: X \to S$ eine platte eigentliche holomorphe Abbildung, $\mathcal{F}$ ein Objekt aus* $\mathbf{Coh}(X)$, *so hat man einen natürlichen Isomorphismus $p_*(\mathcal{F}') = ({}_*p\mathcal{F})'$.*

Beweis. Ist U offen in S, so ist $(p_*(\mathcal{F}'))(U) = \mathcal{F}'(U_{(X)}) \cong Hom_X(U_{(X)}, V_X \mathcal{F})$ $= Hom_S(U, p_+ V_X \mathcal{F}) \cong Hom_S(U, V_S({}_*p\mathcal{F})) = ({}_*p\mathcal{F})'(U)$.

(3.6) Sei $p: X \to S$ eine platte eigentliche holomorphe Abbildung, $s \in S$, $q_s: X_s \to \{s\}$ die triviale Abbildung, $i_s: X_s \to X$ die Injektion. Dann gilt für jede kohärente Modulgarbe $\mathcal{F}$ auf X:

$$(p_+ V_X \mathcal{F}) \times_S \{s\} \cong (q_s)_+ V_{X_s}(i_s^* \mathcal{F}).$$

Dies ergibt sich sofort aus (0.2.4).

(3.7) **Satz.** *Sei $p: X \to S$ eine platte eigentliche holomorphe Abbildung, S sei reduziert; $\mathcal{F}$ sei ein Objekt von* $\mathbf{Coh}(X)$. *Dann ist ${}_*p\mathcal{F}$ genau dann lokalfrei, wenn die Abbildung $S \to \mathbf{Z}$, $s \mapsto [H^0(X_s, (\mathcal{F}|X_s)'): \mathbf{C}]$ lokalkonstant ist.*

Beweis. ${}_*p\mathcal{F}$ ist wegen (3.2) genau dann lokalfrei, wenn $p_+ V_X \mathcal{F}$ ein Vektorraumbündel ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Abbildung $s \mapsto dim(p_+ V_X \mathcal{F} \times_S \{s\})$ lokal-konstant ist. Die Behauptung folgt nun aus (3.5) und (3.6).

§ 4. Platte eigentliche Abbildungen mit paarweise isomorphen Fasern

(4.1) **Definition.** *Sei* $f\colon Y \to S$ *eine holomorphe Abbildung,* $y \in Y$.

a) f *heißt offen in* y, *wenn* $f(U)$ *eine Umgebung von* $f(y)$ *ist, falls* U *eine Umgebung von* y *ist.*

b) f *besitzt einen Schnitt durch* y, *wenn folgendes gilt: Es gibt eine offene Umgebung* U *von* $f(y)$ *und ein* $g \in Hom_S(U, Y)$, *derart daß* $g(fy) = y$ *ist.*

(4.2) **Hilfssatz.** *Sei* $f\colon Y \to S$ *eine holomorphe Abbildung,* S *sei reduziert, für alle* $s \in S$ *sei* Y_s *eine reindimensionale Mannigfaltigkeit, dim* $Y_s = n$ *sei von* s *unabhängig. Dann gilt:*

i) *Ist* f *in* y *offen, so besitzt* f *einen Schnitt durch* y.

ii) *Ist die Topologie von* Y *abzählbar, so gibt es ein* $y \in Y$, *derart daß* f *in* y *offen ist.*

Beweis. Nach ([7], Satz 2.2) gilt Folgendes: Zu jedem $y \in Y$ gibt es eine offene Umgebung V^y von y, eine offene Umgebung U^y von $f(y)$, einen Polyzylinder P^y im $\mathbf{C}^n$ und eine abgeschlossene Einbettung $h^y\colon V^y \to U^y \times P^y$, derart, daß für alle $z \in V^y$ gilt: $pr_1 h^y z = fz$. Für jedes $s \in f(V^y)$ ist also $h^y_s\colon V^y \cap Y_s \to \{s\} \times P^y$ ein Isomorphismus. Da $pr_1\colon U^y \times P^y \to U^y$ bezüglich der Zariski-Topologien offen ist, ist also $f(V^y)$ ein analytischer Unterraum von U^y.

Beweis von i). Ist f in y offen, so kann man V^y, P^y, U^y und h^y so wählen, daß sogar $f(V^y) = U^y$ ist. Also ist h^y bijektiv. Da $U^y \times P^y$ reduziert ist, ist h^y ein Isomorphismus; hieraus folgt sofort die Behauptung.

Beweis von ii). Man kann o. E. d. A. annehmen, daß S ein Polyzylinder ist. Da Y abzählbare Topologie hat, gibt es eine abzählbare Teilmenge $Y' \subset Y$, derart daß $\bigcup_{y \in Y'} V^y = Y$ ist. Also ist $S = \bigcup_{y \in Y'} f(V^y)$. Nach dem Satz von Baire gibt es nun ein $y \in Y'$, derart daß $f(V^y) = U^y$ ist. Wie oben folgt nun die Behauptung.

(4.3) Sind X, Y komplexe Räume, so kann man $Hom(X, Y)$ mit der Topologie von Kaup [11] versehen; dieser topologische Raum wird mit $Hol(X, Y)$ bezeichnet.

Ist X kompakt, so ist die identische Abbildung $Hol(X, Y) \to \mathbf{Hom}(X, Y)$ stetig. Dies ist in [2] bewiesen, falls X reduziert ist. Ist X nicht reduziert, so lassen sich der Beweis von § 10, Lemma 1 und Teil i) des Beweises von § 10, Theorem 2 in [2] übertragen, indem man folgendes benützt:

Sei X ein analytischer Unterraum von $U = \mathring{U} \subset \mathbf{C}^n$, K, K' seien $\mathcal{O}_X$-privilegierte Polyzylinder in U, $K' \subset \mathring{K}$. Dann ist die kanonische Abbildung $H^0(\mathring{K}, \mathcal{O}_X) \to B(K', \mathcal{O}_X)$ stetig; also ist auch $H^0(X, \mathcal{O}_X) \to$

$B(K', \mathcal{O}_X)$ stetig. (Dabei haben $H^0(\mathring{K}, \mathcal{O}_X)$, $H^0(X, \mathcal{O}_X)$ die kanonischen Topologien, vgl. [5].)

Ist X kompakt und hat Y abzählbare Topologie, so hat $Hol(X, Y)$ nach [11] abzählbare Topologie, also hat auch $\mathbf{Hom}(X, Y)$ abzählbare Topologie.

(4.4) **Lemma.** *Sei $X \to S$ eine platte eigentliche holomorphe Abbildung, X_0 sei ein kompakter komplexer Raum, S habe abzählbare Topologie. Dann hat $\mathbf{Isom}_S(S \times X_0, X)$ abzählbare Topologie.*

Beweis. Da $X \to S$ eigentlich ist, hat X abzählbare Topologie. Nach [17], Beweis von Satz 1.1, läßt sich $\mathbf{Hom}_S(S \times X_0, X)$ als endliches Faserprodukt von S, X und Räumen der Gestalt $\mathbf{Hom}(X_0, Z)$ darstellen, wobei Z abzählbare Topologie besitzt. Die Behauptung folgt nun aus (4.3) und (2.2).

(4.5) Sei $p\colon X \to S$ eine platte eigentliche holomorphe Abbildung, $s \in S$. p heißt trivial in s, wenn es eine Umgebung U von s und einen spurpunkttreuen Isomorphismus $U \times X_s \to X \times_S U$ gibt. p heißt trivial, wenn p in jedem Punkt von S trivial ist.

Seien nun $s, s' \in S$, und sei X_s isomorph zu $X_{s'}$. $f\colon \mathbf{Isom}_S(S \times X_s, X) \to S$ sei der kanonische Morphismus. Dann gilt: p ist genau dann in s' trivial, wenn es ein $y \in f^{-1}(s')$ gibt, derart daß f einen Schnitt durch y besitzt. Dies folgt sofort aus (0.2.4).

Es wird noch eine Tatsache benötigt, deren einfacher Beweis dem Leser überlassen wird:

(4.6) Ist $g\colon S' \to S$ eine surjektive stetige und abgeschlossene Abbildung, $s \in S$, V eine Umgebung von $g^{-1}(\{s\})$, so ist $g(V)$ eine Umgebung von s.

(4.7) **Lemma.** *Seien $p\colon X \to S$, $g\colon S' \to S$ holomorphe Abbildungen, p sei eigentlich und platt, g sei surjektiv, $p_{(S')}\colon X_{(S')} \to S'$ sei trivial. Dann ist auch p trivial, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

a) *g ist platt.*

b) *g ist abgeschlossen und S ist reduziert.*

Beweis. Sei $s \in S$; es ist zu zeigen, daß p in s trivial ist.

$$Y := \mathbf{Isom}_S(S \times X_s, X), \qquad f\colon Y \to S$$

sei der kanonische Morphismus; $Y' := g^+ Y$, $f' := g^+ f$, $g' := f^+ g$. Man hat also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{g'} & Y' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ S & \xleftarrow{g} & S' \end{array}$$

Wegen (0.2.4) ist $Y' = \mathbf{Isom}_{S'}(S' \times X_s, X_{(S')})$. Ist $s' \in S'$, $g(s') = s$, so gibt es eine offene Umgebung U von s' und ein $h \in Isom_U(U \times X_s, X_{(U)})$, also gibt es wegen (0.2.4) einen $\mathbf{An}_{/U}$-Isomorphismus $Y'_{(U)} \to U \times \mathbf{Isom}(X_s, X_s)$.

a) Sei nun g platt. In jedem $y \in Y'$ mit $f'(y) \in U$ ist f' platt, also ist f in jedem $y \in Y_s$ platt. Nun ist $Y_s = \mathbf{Isom}(X_s, X_s)$, also ist Y_s eine Mannigfaltigkeit. Wegen (1.8) in [16] besitzt also f durch jedes $y \in Y_s$ einen Schnitt. Aus (4.5) folgt nun die Behauptung.

b) Sei g abgeschlossen und S reduziert. Es sei $y \in Y$, $f(y) = s$; wegen (4.2) reicht es zu zeigen, daß f offen in y ist. Sei also V eine Umgebung von y. Dann ist $f'(\overset{-1}{g}'(V))$ eine Umgebung von $\overset{-1}{g}(\{s\})$. Nach (4.6) ist also $f(V) = (g f')(\overset{-1}{g}'(V))$ eine Umgebung von s.

Ist X ein komplexer Raum über S, $s \in S$, so wird mit $\mathscr{T}_s$ die Garbe der Keime von holomorphen kontravarianten Vektorfeldern auf X_s bezeichnet. Nun können endlich die eigentlichen Hauptsätze dieser Arbeit bewiesen werden.

(4.8) **Satz.** *Sei $p: X \to S$ eine eigentliche platte holomorphe Abbildung, S sei reduziert, lokal-irreduzibel und zusammenhängend. Es gebe ein $s_0 \in S$, in welchem p trivial ist. Dann ist p trivial, falls die Abbildungen $S \ni s \mapsto [H^0(X_s, \mathscr{O}_{X_s}):\mathbf{C}]$, $S \ni s \mapsto [H^0(X_s, \mathscr{T}_s):\mathbf{C}]$ konstant sind.*

Beweis. 1. S sei eine Mannigfaltigkeit. Man hat die kanonische exakte Sequenz $E: p^*\Omega_S \xrightarrow{\delta} \Omega_X \to \Omega_{X/S} \to 0$ (vgl. [8]). Nach (3.3) ist die Sequenz ${}_*pE$: ${}_*pp^*\Omega_S \to {}_*p\Omega_X \to {}_*p\Omega_{X/S} \to 0$ exakt. Da p in s_0 trivial ist, gibt es eine Umgebung U von s_0, derart daß $\delta | X \times_S U$ linksinversibel ist. Also ist $ker({}_*p\delta)_s = 0$ für $s \in U$. Da $[H^0(X_s, \mathscr{O}_{X_s}):\mathbf{C}]$ nicht von s abhängt, ist ${}_*pp^*\Omega_S$ lokalfrei (nach (3.7)). Der Identitätssatz liefert also: $ker\ {}_*p\delta = 0$. Also ist die Sequenz

$$0 \to {}_*pp^*\Omega_S \to {}_*p\Omega_X \to {}_*p\Omega_{X/S} \to 0 \quad \text{exakt.} \tag{4.8.1}$$

Da die analytische Beschränkung von $\Omega_{X/S}$ auf X_s isomorph zu Ω_{X_s} ist (vgl. etwa [8]) und weil $[H^0(X_s, \mathscr{T}_s):\mathbf{C}]$ nicht von s abhängt, ist wegen (3.7) die Garbe ${}_*p\Omega_{X/S}$ lokalfrei. Die Sequenz (4.8.1) spaltet also lokal auf, aus (3.5) folgt also, daß $p_*(\delta')$: $p_*\Omega'_X \to p_*(p^*\Omega_S)'$ surjektiv ist. Ist also $s \in S$, D der Keim eines Vektorfeldes in s, so gibt es eine offene Umgebung U von s, derart daß sich D zu einem Vektorfeld auf $X_{(U)}$ liften läßt. Nach [12] ist also p in s trivial.

2. S besitzt Singularitäten: $S' := \{s \in S: p \text{ ist trivial in } s\}$; S' ist offen und nicht leer. Sei $s \in \overline{S'}$. Dann kann man eine offene Umgebung V von s so wählen, daß gilt:

i) Die Menge der regulären Punkte von V ist zusammenhängend.

ii) Es gibt eine Auflösung $g: M \to V$ der Singularitäten von V im Sinne von [10].

M ist dann zusammenhängend und aus Teil 1 dieses Beweises folgt zusammen mit (4.7), daß $s \in S'$ ist. Also ist S' abgeschlossen und daher ist $S' = S$.

(4.9) **Satz.** *Sei $p: X \to S$ eine platte eigentliche holomorphe Abbildung, S sei reduziert; für alle $s, t \in S$ sei X_s isomorph zu X_t. Dann ist p trivial.*

Beweis. 1. S sei eine Mannigfaltigkeit. Nach (4.5), (4.4) und (4.2) gibt es auf jeder Zusammenhangskomponente von S einen Punkt, in dem p trivial ist. Wegen (4.8) ist also p trivial.

2. S sei ein reduzierter Raum. Zu jedem $s \in S$ gibt es eine offene Umgebung U und eine Auflösung $g: M \to U$ der Singularitäten von U im Sinne von [10]. Die Behauptung folgt nun aus (4.7).

(4.10.1) (4.9) wurde in [4] für den Spezialfall bewiesen, daß S und alle Fasern von p Mannigfaltigkeiten sind.

(4.10.2) In [13] wird ein Beweis von (4.9) angegeben für den Spezialfall, daß alle Fasern von p reduziert sind und daß p in jedem Punkt von X lokaltrivial ist. Es scheint mir aber in [13] an der Stelle, wo der Fall, daß S eine Mannigfaltigkeit ist, betrachtet wird, der Beweis nicht ganz einleuchtend zu sein.

(4.10.3) Läßt man in (4.9) die Voraussetzung, daß S reduziert sei, fallen, so wird die Aussage natürlich falsch. Man betrachte einfach eine nichtverschwindende infinitesimale Deformation eines kompakten Raumes (vgl. [17]).

Literatur

1. Demazure, M., Grothendieck, A.: Schémas en groupes. Sém. de Géom. Algébr., Institut des Hautes Etudes Scientifiques 1963.
2. Douady, A.: Le Probléme des Modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **16**, 1–95 (1966).
3. Fischer, G.: Lineare Faserräume und kohärente Modulgarben über komplexen Räumen. Archiv der Math. Fasc. **6**, Vol. XVIII, 609–617 (1967).
4. Fischer, W., Grauert, H.: Lokal-triviale Familien kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. Nachr. d. Akad. d. Wiss. in Göttingen, II, Math.-Phys. Klasse **6**, 89–94 (1965).
5. Forster, O.: Zur Theorie der Steinschen Algebren und Moduln. Math. Z. **97**, 376–405 (1967).
6. Frisch, J.: Aplatissement en géométrie analytique. Ann. sciet. Ec. Norm. Sup., 4. serie **1**, 305–312 (1968).
7. Grauert, H., Kerner, H.: Deformationen von Singularitäten komplexer Räume. Math. Annalen **153**, 236–260 (1964).
8. Grothendieck, A.: Techniques de construction en géométrie analytique. Sém. H. Cartan 1960/61.
9. – Technique de descente et Theorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV. Les schémas de Hilbert. Sém. Bourbaki **13**, No. 221 (1960/61).

10. Hironaka, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I. Ann. of Math. **79**, 109–203 (1964).
11. Kaup, W.: Infinitesimale Transformationsgruppen komplexer Räume. Math. Annalen **160**, 72–92 (1965).
12. Kerner, H.: Familien kompakter und holomorph-vollständiger komplexer Räume. Math. Z. **92**, 225–233 (1966).
13. Poljakov, P. L.: Die Trivialität von Familien von kompakten komplexen Räumen [russisch]. Matematiceskij Sbovnik N.S. **79** (121), 357–367 (1969).
14. Pourcin: Theorème de Douady au-dessus de S. Annali Scuol. Norm. Sup. Pisa XXIII, III (1969).
15. Prill, D.: Über lineare Faserräume und schwach negative holomorphe Geradenbündel. Math. Z. **105**, 313–326 (1968).
16. Schuster, H. W.: Deformationen analytischer Algebren. Inventiones math. **6**, 262–274 (1968).
17. – Über die Starrheit kompakter komplexer Räume. manuscripta math. **1**, 125–137 (1969).

Hans Werner Schuster
Mathematisches Institut der Universität
D-8000 München 13
Schellingstr. 2–8

(Eingegangen am 18. Dezember 1969)

Inventiones math. 9, 295 – 307 (1970)

Epimorphisms and Surjectivity

G. A. REID (Cambridge)

1. Introduction

Suppose that $\mathscr{C}$ is a category whose objects are sets (possibly with further additional structure) and whose morphisms (as well as satisfying perhaps other requirements) are mappings in the usual sense of the underlying sets. Many familiar categories are of this sort. For a morphism $\theta: A \to B$ in $\mathscr{C}$ we can on the one hand say that θ is *surjective* if the image of θ (as a set) is the whole of B, or alternatively we can define θ to be an *epimorphism* (a purely categorical notion) if for every pair of morphisms φ, φ' in $\mathscr{C}$ from B to any other object C, $\varphi\theta = \varphi'\theta$ implies $\varphi = \varphi'$. It is clear that a surjective map is always an epimorphism, and the question we shall be concerned with throughout this paper is whether, for various concrete examples of categories, the converse is true. As we shall see, for the category of commutative C^*-algebras this converse is equivalent to the classical Stone-Weierstrass theorem, and thus the statement that in the category of C^*-algebras epimorphisms are necessarily surjective would be a natural generalisation of the Stone-Weierstrass result. This was our initial motivation for this investigation; the question as to the behaviour of other categories arose later as being of interest in itself.

We shall from the outset make two further simple assumptions about the categories we shall be working with, which will in practise normally be realised. Firstly suppose that for any pair of morphisms φ, $\varphi': B \to C$, the set $\{b \in B: \varphi(b) = \varphi'(b)\}$ is an object of $\mathscr{C}$. And secondly, suppose that each subset of an object B in $\mathscr{C}$ is contained in a unique smallest subobject of B in $\mathscr{C}$. In these circumstances it is easily seen that a morphism $\theta: A \to B$ is an epimorphism if and only if the morphism embedding the subobject of B generated by the image of θ in B is an epimorphism. Thus the question of whether epimorphisms are necessarily surjective becomes equivalent to the question of whether any epimorphically embedded subobject of an object is necessarily the whole object. The question therefore becomes the following: given A, B objects of $\mathscr{C}$ with A a proper subset of B, does there exist an object C of $\mathscr{C}$ and morphisms φ, φ' equal on A but unequal on B?

Needless to say, one can ask of a category of sets the dual question of whether monomorphisms are necessarily injective, but this appears to be generally much easier to answer.

2. The Stone-Weierstrass Theorem

The Stone-Weierstrass theorem classically stated says that a self-adjoint subalgebra A of the algebra $C_0(X)$ of all complex-valued continuous functions vanishing at infinity on the locally compact Hausdorff space X is dense in $C_0(X)$ in the topology of uniform convergence on X if and only if (i) given distinct points $x, y \in X$ there is a function f in A with $f(x) \neq f(y)$, and (ii) given any point $x \in X$, there is a function f in A such that $f(x) \neq 0$.

Now algebras of the form $C_0(X)$ with their norm topology of uniform convergence on X are exactly commutative C^*-algebras, and the maps $f \to f(x)$, or $f \to 0$ are exactly the multiplicative linear functionals on $C_0(X)$, that is to say the morphisms (in the category of commutative C^*-algebras) of $C_0(X)$ into the complex numbers $\mathbf{C}$. Thus the classical formulation of the Stone-Weierstrass theorem above may be rephrased as follows: If A is a proper C^*-subalgebra of the C^*-algebra B there exist morphisms $\theta, \varphi: B \to \mathbf{C}$ equal on A but not equal on the whole of B. In other words, epimorphisms in the category of commutative C^*-algebras are necessarily surjective.

To reinforce this connection between the Stone-Weierstrass theorem and the surjectivity of epimorphisms it is worthwhile to give another example, where in fact, for essentially the same reason, both results fail.

Let X be a finite-dimensional real compact $C^{(\infty)}$-manifold, and consider the algebra $B = C^{(\infty)}(X)$ of all complex-valued $C^{(\infty)}$-functions on X, taken in its topology of uniform convergence of derivatives on X. Then B is a complete locally convex (though not Banach) *-algebra with jointly continuous multiplication.

In B the Stone-Weierstrass theorem fails. A further condition is required, and in fact we have (see [8]) that a self-adjoint subalgebra A is dense in B if and only if (i) given distinct points $x, y \in X$, there is a function f in A with $f(x) \neq f(y)$, (ii) given any point $x \in X$, there is a function f in A with $f(x) \neq 0$, and (iii) given any point $x \in X$ and any direction α at x, there is a function f in A such that $D_\alpha f(x) \neq 0$, where D_α denotes the derivative in the direction α.

Take now any point x in X and any direction α at x. The set $A = \{f: D_\alpha f(x) = 0\}$ is a closed self-adjoint subalgebra of $C^{(\infty)}(X) = B$, containing 1 and separating the points of X but not the whole of $C^{(\infty)}(X)$. Now let φ be any (algebraic) morphism $C^{(\infty)}(X) \to C^{(\infty)}(Y) = C$, or more generally into any algebra C of functions on Y say. Let g be any $C^{(\infty)}$-function on X such that $D_\alpha g(x) \neq 0$ and $g(x) = 0$; then A and g together generate (algebraically) B, so φ is determined by its values on A and its value at g. However g^2 and g^3 are elements of A, so that $\varphi(g)^2 = \varphi(g^2)$ and $\varphi(g)^3 = \varphi(g^3)$ are determined by the values of φ on A. At each point of Y, either $\varphi(g^2) = 0$, in which case $\varphi(g) = 0$, or $\varphi(g^2) \neq 0$, in which case

$\varphi(g)=\varphi(g^3)/\varphi(g^2)$. Hence $\varphi(g)$ is determined by the restriction of φ to A, and hence φ is determined on the whole of B by its values on A. Thus A is epimorphically embedded (at least with respect to algebras of functions).

3. Von Neumann Algebras and C^*-Algebras

In order to solve the problem for C^*-algebras it is necessary first to deal with the category of von Neumann algebras. Here a certain caution is necessary in deciding what are the relevant morphisms to choose for our category, and the natural choice is to insist that not only the *-algebra structure is preserved but further that the morphisms are normal. Recall that $\Phi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ is *normal* if for each increasing net (T_λ) of positive elements of $\mathfrak{A}$, $\Phi(\sup T_\lambda)=\sup \Phi(T_\lambda)$. Equivalently, the normal morphisms are those which are ultraweakly continuous. (For a general reference for the theory of von Neumann algebras see [3].)

The category of von Neumann algebras and normal morphisms has been studied by Guichardet [5], and he mentions as outstanding the question of whether epimorphisms are necessarily surjective ([5], p. 44).

Since we are dealing with normal morphisms the subset of a von Neumann algebra $\mathfrak{B}$ on which two morphisms from $\mathfrak{B}$ are equal is a weakly closed subalgebra of $\mathfrak{B}$. Therefore our category satisfies the assumptions made in § 1, and it suffices to prove that an epimorphically embedded subalgebra of $\mathfrak{B}$ must be the whole of $\mathfrak{B}$. The proof of this that we give below is due to Lorenz.

Proposition 1. *In the category of von Neumann algebras and normal morphisms, epimorphisms are necessarily surjective.*

Proof. Suppose that $\mathfrak{A}$ is a proper von Neumann subalgebra of the von Neumann algebra $\mathfrak{B}$ on H, and suppose first that the identity 1 of $\mathfrak{B}$ is in $\mathfrak{A}$. Then by von Neumann's double commutant theorem $\mathfrak{A}''=\mathfrak{A}$, where $\mathfrak{A}''$ denotes the double commutant of $\mathfrak{A}$, hence $\mathfrak{A}'' \neq \mathfrak{B}''$, and so $\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{B}'$. Thus $\mathfrak{B}'$ is a proper von Neumann subalgebra of the von Neumann algebra $\mathfrak{A}'$. But any C^*-algebra with identity, and in particular any von Neumann algebra, is generated algebraically by its unitary elements (see [3], Ch. 1, § 1.3), so we can find a unitary operator U on H which is in $\mathfrak{A}'$ but not in $\mathfrak{B}'$. Then the maps $T \to T$, $T \to U^* TU$ are normal morphisms $\mathfrak{B} \to \mathscr{L}(H)$, equal on $\mathfrak{A}$, but unequal on $\mathfrak{B}$. Therefore $\mathfrak{A}$ is not epimorphically embedded.

Suppose now that $1 \notin \mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ contains its principal identity E, which is an identity element for $\mathfrak{A}$, and so $E \neq 1$. It will clearly suffice to prove that the subalgebra $E\mathfrak{B}E$ is not epimorphically embedded in $\mathfrak{B}$. Since E is a projection, $U=2E-1$ is unitary. Therefore $T \to T$ and $T \to U^* TU$ give two normal morphisms $\mathfrak{B} \to \mathscr{L}(H)$ equal on $E\mathfrak{B}E$. These will be unequal on $\mathfrak{B}$ unless $E \in \mathfrak{B}'$, in which case E will be a central projection

in $\mathfrak{B}$. But then $T \to T$ and $T \to ET$ are two normal morphisms $\mathfrak{B} \to \mathscr{L}(H)$ equal on $E\mathfrak{B}E$ but unequal on $\mathfrak{B}$.

The proposition is thus proved and it is now easy to deduce the C^*-algebra result.

Proposition 2. *In the category of C^*-algebras epimorphisms are necessarily surjective.*

Proof. The technique is to work *via* the enveloping von Neumann algebra of a C^*-algebra. If A is any Banach algebra, then the second dual A'' of A may be given (in two ways) a product under which it becomes a Banach algebra (see [1]). If A is a C^*-algebra then these two products coincide, an involution can be defined on A'', and the resulting Banach *-algebra becomes in fact a C^*-algebra. Moreover A'' may be represented (by the universal representation) as a von Neumann algebra, and the ultraweak topology is given just by the weak topology $\sigma(A'', A')$. A'' is called the *enveloping von Neumann algebra* of A (for details see [2], § 12).

Suppose now that A is a proper C^*-subalgebra of the C^*-algebra B. A and B are both embedded in the usual way in their second duals, and the inclusion map $A \to B$ induces an injective map $A'' \to B''$ embedding A'' as a C^*-subalgebra of B''. This map is $(\sigma(A'', A'), \sigma(B'', B'))$-continuous, so that A'' becomes a von Neumann subalgebra of B''. Since the map $A \to B$ is not surjective, neither is $A'' \to B''$, and so A'' is a proper von Neumann subalgebra of B''. Therefore by Proposition 1 there are two ultraweakly continuous maps $B'' \to \mathscr{L}(H)$ (where H is in fact the representation space for the universal representation of B) which coincide on A'' but differ on B''. Since B is $\sigma(B'', B')$-dense in B'', these maps differ on B. Thus, restricting to the subspace B of B'', we obtain two distinct morphisms $B \to \mathscr{L}(H)$ which coincide on A. Hence the result is proved.

It is interesting to compare this generalisation of the Stone-Weierstrass theorem with the other possible generalisations that have been proposed (see [2], § 11). The deepest and most difficult of these is the result of Glimm [4] that if a C^*-subalgebra A of B separates the weak closure of the pure state space of B together with 0 then $A = B$. A generalisation, or proposed generalisation, closer to ours, however, is that suggested by Fell. He defined a C^*-subalgebra A of B to be *rich* if each irreducible representation of B remains irreducible when considered as a representation of A, and if inequivalent irreducible representations of B remain inequivalent when considered as representations of A (see [2], p. 223). It is easy to see that if A is epimorphically embedded in B, then A is rich. However whether A rich implies $A = B$ is unknown (except in the special case of A postliminal), and if this were generally true then Glimm's result could be improved to require only separation of the pure state space of B (together with 0) by A.

4. Groups

Proposition 3. *In the category of groups epimorphisms are necessarily surjective. Likewise in the category of finite groups.*

Proof. It is possible to give a proof for the category of groups using free products with amalgamation, however the technique used here, of split extensions, is more immediately adaptable to the category of finite groups.

Suppose that G is a group and H a proper subgroup of G. We must find a group K and two morphisms $G \to K$ equal on H but unequal on G. Let us look for K which is the semidirect product $A \cdot G$ of a normal subgroup A with G. Writing ${}_g a = g a g^{-1}$ for $g \in G$, $a \in A$, we can regard A as a (not necessarily commutative) G-module, and K as the split extension of A by G. If $\theta: G \to K$ is of the form $\theta(g) = \varphi(g)\, g$, where φ is a map $G \to A$, then θ is a morphism if and only if φ satisfies the cocycle condition

$$\varphi(g\, g') = \varphi(g)\, {}_g\varphi(g') \qquad (g, g' \in G).$$

This is fulfilled in particular if φ is a coboundary, in other words if φ is of the form $\varphi(g) = \psi^{-1}\, {}_g\psi$ for some $\psi \in A$. To the identity $1 \in A$ corresponds the embedding of G in $A \cdot G$, and the map θ will coincide with this on H but be distinct on G if and only if ${}_h\psi = \psi$ for $h \in H$, but ${}_g\psi \neq \psi$ for some g in G.

Thus we are reduced to finding a G-module A having an element fixed by H but not fixed by the whole of G. But this is easily found, and we shall give two possible answers.

Firstly take $A = G^G$, the group of all maps of G into itself, the group operation being defined pointwise. The G-module action we take to be right translation on the domain, so that ${}_x\psi$ for $x \in G$ is defined by $({}_x\psi)(y) = \psi(yx)$. Now take ψ such that $\psi(h) = 1$ for $h \in H$, and $\psi(g) =$ some $g_0 \neq 1$ for $g \in G \setminus H$. It is clear that ψ is fixed by H but not by any element outside H.

A second, and perhaps simpler, example is given by $A = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^G$, where as before the group operation is pointwise and the G-module action is by right translation on the domain. Writing $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ as the multiplicative group $\{\pm 1\}$, we take $\psi(h) = 1$ for $h \in H$, and $\psi(g) = -1$ for $g \in G \setminus H$. In this example A is in fact commutative.

Note that if G is finite then either of the examples we have taken for A is finite, so that $K = A \cdot G$ is finite, and we remain in the category of finite groups throughout.

5. Lie Algebras

We now consider the category of Lie algebras, where, surprisingly, the situation is more complicated.

Suppose that we are given a Lie algebra $\mathfrak{g}$ and a proper subalgebra $\mathfrak{h}$ of $\mathfrak{g}$. We try the same method as in the proof of Proposition 3, now phrased in terms of Lie algebras. So let V be a $\mathfrak{g}$-module and consider the split extension $\mathfrak{k}=V+\mathfrak{g}$ of V by $\mathfrak{g}$. A map $\theta\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{k}$ of the form $\theta(x)=\varphi(x)+x$, where φ is a map $\mathfrak{g}\to V$, will be a morphism if and only if φ satisfies the cocycle condition

$$\varphi([x,x'])={}_x\varphi(x')-{}_{x'}\varphi(x) \qquad (x,x'\in\mathfrak{g}).$$

We again take φ a coboundary, so that $\varphi(x)={}_x\psi$ for some ψ in V, and to get a map θ that coincides with the embedding $\mathfrak{g}\to\mathfrak{k}$ on $\mathfrak{h}$ but not on $\mathfrak{g}$, we require ψ such that ${}_y\psi=0$ for $y\in\mathfrak{h}$, but ${}_x\psi\neq 0$ for some x in $\mathfrak{g}$. Thus the problem is reduced to finding a $\mathfrak{g}$-module V containing an element annihilated by $\mathfrak{h}$ but not annihilated by the entire algebra $\mathfrak{g}$. And to find such a module is considerably less trivial than in the case of groups.

Choose a basis $x_1,\ldots,x_n$ of $\mathfrak{g}$ such that $x_{p+1},\ldots,x_n$ is a basis of $\mathfrak{h}$. (We give the argument for finite-dimensional $\mathfrak{g}$. The general case is then clear.) By the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem monomials

$$x^k=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n},$$

with k running over all n-tuples of non-negative integers, form a basis of $U(\mathfrak{g})$, the universal enveloping algebra of $\mathfrak{g}$. Let V be the subspace spanned by the x^k with $k_{p+1}=\cdots=k_n=0$, and denote by π the projection $U(\mathfrak{g})\to V$ defined by the basis x^k of $U(\mathfrak{g})$. We define a $\mathfrak{g}$-operation on V as follows: For $\psi\in V$, $x\in\mathfrak{g}$ define ${}_x\psi=\pi(x\,\psi)$, where $x\,\psi$ is just the ordinary product in $U(\mathfrak{g})$.

To prove that this is a module action we have to show

$$\pi([x,x']\,\psi)=\pi\big(x\,\pi(x'\,\psi)\big)-\pi\big(x'\,\pi(x\,\psi)\big).$$

And since $\pi([x,x']\,\psi)=\pi(x\,x'\,\psi)-\pi(x'\,x\,\psi)$, it will suffice to prove that $\pi\big(x\,\pi(x'\,\psi)\big)=\pi(x\,x'\,\psi)$.

Now $x'\,\psi=\pi(x'\,\psi)+\psi'$, where ψ' is a linear combination of elements x^k with $k_i>0$ for some $i>p$; so it suffices to prove that $\pi(x\,x^k)=0$ for any such k. Now such x^k may be written $x^h\,x^l$ with $h_i=0$ for $i>p$, $l_i=0$ for $i\leqq p$, and $l\neq 0$. We may then write $x\,x^h$ as a linear combination of elements $x^{h'}\,x^{l'}$ with $h'_i=0$ for $i>p$, and $l'_i=0$ for $i\leqq p$; so $x\,x^k$ is a linear combination of elements $x^{h'}\,x^{l'}\,x^l$.

Consider the product $x^{l'}\,x^l$. Since $\mathfrak{h}$ is a subalgebra this may be written as a linear combination of elements $x^{l''}$ with $l''_i=0$ for $i\leqq p$, and since the terms of degree greater than zero form an ideal in $U(\mathfrak{h})$, $l\neq 0$ will imply $l''\neq 0$. Thus $x\,x^k$ is finally a linear combination of elements $x^{h'}\,x^{l''}$ with $l''\neq 0$, and since all these map to zero under π we will have $\pi(x\,x^k)=0$, proving our result.

Now let ψ denote the identity element 1 in V. We have that for y in $\mathfrak{h}$, y is a linear combination of $x_{p+1}, \ldots, x_n$, and ${}_y\psi = \pi(y) = 0$. While for $1 \leqq i \leqq p$, we have ${}_{x_i}\psi = \pi(x_i) = x_i$. Thus we have proved

Proposition 4. *In the category of Lie algebras epimorphisms are necessarily surjective.*

6. Finite-Dimensional Lie Algebras

By analogy with the case of finite groups we may ask whether in the category of finite-dimensional Lie algebras epimorphisms are necessarily surjective. However, as we shall shortly see, this is not the case.

Note first that for the proof of the preceeding section to go through, in order that $\mathfrak{k}$ should be finite-dimensional, V would have to be a finite-dimensional $\mathfrak{g}$-module. And in the above construction, even for finite-dimensional $\mathfrak{g}$, this is not the case.

We shall begin, however, by seeing how far we can proceed in the finite-dimensional case and still retain a positive result. We shall consider in turn the cases of Abelian, nilpotent, soluble and semisimple algebras. One simplifying remark that applies throughout the finite-dimensional case is that every proper subalgebra is contained in a maximal proper subalgebra, and so the problem reduces to proving that no maximal proper subalgebra is epimorphically embedded.

Abelian Lie algebras are just vector spaces, and it is trivial to see that epimorphisms are surjective. The nilpotent case is also easily dealt with.

Proposition 5. *Epimorphisms are surjective in the category of finite-dimensional nilpotent Lie algebras.*

Proof. Let $\mathfrak{h}$ be a maximal proper subalgebra of the finite-dimensional nilpotent Lie algebra $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ being nilpotent, the normaliser of $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ is properly larger than $\mathfrak{h}$, and hence equals $\mathfrak{g}$. Thus $\mathfrak{h}$ is an ideal in $\mathfrak{g}$, and the canonical projection π and the zero map $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ give two morphisms equal on $\mathfrak{h}$ but distinct on $\mathfrak{g}$.

In fact since $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ is nilpotent and nonzero, $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})'$ is a proper subspace of $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, and we can find a nonzero linear functional f on $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ vanishing on $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})'$. Then the composition $f\pi$ and the zero map give two morphisms from $\mathfrak{g}$ to the ground field equal on $\mathfrak{h}$ but unequal on $\mathfrak{g}$.

Proposition 6. *In the category of finite-dimensional soluble Lie algebras epimorphisms are necessarily surjective.*

Proof. Suppose that $\mathfrak{h}$ is a maximal proper subalgebra of the finite-dimensional soluble Lie algebra $\mathfrak{g}$. If $\mathfrak{h}$ is an ideal in $\mathfrak{g}$ then the proof above applies. So suppose that $\mathfrak{h}$ is not an ideal in $\mathfrak{g}$, in which case $\mathfrak{h}$ does not contain $\mathfrak{g}'$, and $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}'$, being a subalgebra properly larger than $\mathfrak{h}$, must be the whole of $\mathfrak{g}$.

Suppose – and we shall obtain a contradiction from this – that $\mathfrak{h}$ does not contain $\mathfrak{g}''$. Then $\mathfrak{h}+\mathfrak{g}''$ is a subalgebra properly larger than $\mathfrak{h}$, and hence $\mathfrak{h}+\mathfrak{g}''=\mathfrak{g}$. Write $\mathfrak{g}'^2=[\mathfrak{g}',\mathfrak{g}']=\mathfrak{g}''$, and inductively $\mathfrak{g}'^{n+1}=[\mathfrak{g}',\mathfrak{g}'^n]$. We have $\mathfrak{g}'\subset\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{g}'^2$, and an inductive proof gives $\mathfrak{g}'^n\subset\mathfrak{h}+\mathfrak{g}'^{n+1}$ for all n.

By our assumption that h is not an ideal we have $\mathfrak{g}'\not\subset\mathfrak{h}$. But since $\mathfrak{g}$ is soluble, $\mathfrak{g}'$ is nilpotent (see [6], p. 51; we are assuming henceforth that the ground field is of characteristic zero) and for some n we will have $\mathfrak{g}'^n=0\subset\mathfrak{h}$. Hence there exists p such that $\mathfrak{g}'^p\not\subset\mathfrak{h}$, but $\mathfrak{g}'^{p+1}\subset\mathfrak{h}$. However we then have $\mathfrak{g}'^p\subset\mathfrak{h}+\mathfrak{g}'^{p+1}\subset\mathfrak{h}$, a contradiction.

It follows that our hypothesis that $\mathfrak{h}$ does not contain $\mathfrak{g}''$ is untenable, so in fact $\mathfrak{h}\supset\mathfrak{g}''$ and we have

$$[\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}',\mathfrak{g}]=[\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}',\mathfrak{h}+\mathfrak{g}']\subset[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]+\mathfrak{g}''\subset\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}'.$$

Therefore $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}'$ is an ideal in $\mathfrak{g}$.

Now let $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}')$, $\bar{\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}')$. Then $\bar{\mathfrak{h}}$ is a maximal proper subalgebra of $\bar{\mathfrak{g}}$, which is soluble, and $\bar{\mathfrak{h}}$ is not an ideal in $\bar{\mathfrak{g}}$. Furthermore $\bar{\mathfrak{h}}\cap\bar{\mathfrak{g}}'=0$; therefore $\bar{\mathfrak{g}}=\bar{\mathfrak{h}}+\bar{\mathfrak{g}}'$ is a direct sum decomposition of $\bar{\mathfrak{g}}$ as a vector space, and $\bar{\mathfrak{h}}'\subset\bar{\mathfrak{h}}\cap\bar{\mathfrak{g}}'=0$, so that $\bar{\mathfrak{h}}$ is Abelian.

Each $\bar{x}\in\bar{\mathfrak{g}}$ is uniquely expressible as $\bar{y}+\bar{x}'$ with $\bar{y}\in\bar{\mathfrak{h}}$, $\bar{x}'\in\bar{\mathfrak{g}}'$. Define maps θ, φ: $\mathfrak{g}\to\bar{\mathfrak{g}}$ by $\theta(x)=x+h\cap\mathfrak{g}'=\bar{x}$, and $\varphi(x)=\bar{y}$. θ is clearly a Lie algebra morphism, and it easily seen that φ also is. Since $\mathfrak{h}\not\supset\mathfrak{g}'$, there exists $x'\in\mathfrak{g}'$ with $x'\notin\mathfrak{h}$, and $\theta(x')=\bar{x}'\neq 0$, while $\varphi(x')\in\varphi(\mathfrak{g}')=0$, so that θ and φ are distinct on $\mathfrak{g}$. However $\theta(y)=\bar{y}=\varphi(y)$ for $y\in\mathfrak{h}$, so $\theta=\varphi$ on $\mathfrak{h}$. Thus $\mathfrak{h}$ is not epimorphically embedded in $\mathfrak{g}$, and the proposition is proved.

Note that if $\mathfrak{h}$ is a maximal proper subalgebra which is not an ideal, then $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{g}'$ so that morphisms into the ground field alone do not suffice to distinguish $\mathfrak{h}$ from $\mathfrak{g}$.

The next obvious class to consider is the semisimple algebras, but here the result fails and we shall give an example of a proper subalgebra of a semisimple Lie algebra which is embedded epimorphically (in the category of finite-dimensional algebras).

Let $\mathfrak{g}$ be the three-dimensional simple Lie algebra with basis x, y, z such that $[x,y]=y$, $[x,z]=-z$, $[y,z]=x$; and let $\mathfrak{h}$ be the subalgebra spanned by x and y. We assert that $\mathfrak{h}$ is epimorphically embedded in $\mathfrak{g}$ in the category of finite-dimensional Lie algebras.

For suppose not, Then there exists a finite-dimensional Lie algebra $\mathfrak{k}$ containing elements x, y, z, z' with $z\neq z'$ and such that $[x,y]=y$, $[x,z]=-z$, $[y,z]=x$, $[x,z']=-z'$, $[y,z']=x$. Since $\mathfrak{g}$ is simple and $z\neq z'$ implies $x\neq 0$, we have that x, y, z are linearly independent.

Put $u_0=z-z'$, so we have $[x,u_0]=-u_0$, $[y,u_0]=0$; and then inductively define $u_n=[z,u_{n-1}]$. It is straightforward to prove by induction

that

$$[y, u_n] = -\tfrac{1}{2}n(n+1)u_{n-1}, \quad [x, u_n] = -(n+1)u_n.$$

It follows that the elements x, y, z, u_n $(n \geqq 0)$ are linearly independent. For otherwise some u_n will be a linear combination of x, y, z, u_i $(i<n)$. So applying $\operatorname{ad} y$, we see that if $n>0$, u_{n-1} is a linear combination of x, y, u_i $(i<n-1)$. Hence u_0 will be a linear combination of x, y, z; say $u_0 = ax+by+cz$. Then $[x, u_0] = -u_0$ implies $a=b=0$, and then $[y, u_0]=0$ implies $c=0$. Thus $u_0=0$ contrary to assumption.

Hence $\mathfrak{k}$ must be infinite-dimensional, which is contrary to hypothesis, and therefore $\mathfrak{h}$ is epimorphically embedded in $\mathfrak{g}$.

Unfortunately we have no complete description of the epimorphically embedded subalgebras of a given finite-dimensional semisimple Lie algebra. However we do have

Proposition 7. *Any finite-dimensional semisimple Lie algebra over an algebraically closed field of characteristic zero contains a proper epimorphically embedded subalgebra.*

Proof. Let $\mathfrak{g}$ be such an algebra. Take a Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ of $\mathfrak{g}$ and take a system of positive roots with respect to $\mathfrak{h}$ with root vectors $x_\alpha, x_{-\alpha} (\alpha>0)$, so that

$$[y, x_\alpha] = \alpha(y)x, \quad [y, x_{-\alpha}] = -\alpha(y)x \quad (y \in \mathfrak{h}).$$

Then we assert that the maximal soluble subalgebra $\mathfrak{s}$ of $\mathfrak{g}$ generated by $\mathfrak{h}$ and the vectors x_α $(\alpha>0)$ is an epimorphically embedded subalgebra of $\mathfrak{g}$.

For let θ be any morphism of $\mathfrak{g}$ into a finite-dimensional Lie algebra $\mathfrak{k}$. For each $\alpha>0$, the vectors x_α, $x_{-\alpha}$ and α, considered as an element of $\mathfrak{h}$, form a three-dimensional simple Lie algebra isomorphic to that considered above. Thus the values of θ on x_α and α suffice to determine its value on $x_{-\alpha}$. Hence the values of θ on $\mathfrak{s}$ determine its values on all $x_{-\alpha}$, and hence on the whole of $\mathfrak{g}$.

It is not, by the way, true that any epimorphically embedded subalgebra necessarily contains a maximal soluble subalgebra $\mathfrak{s}$. For example consider the simple algebra of type G_2. This has positive roots of the form $\alpha, \beta, \beta+\alpha, \beta+2\alpha, \beta+3\alpha, 2\beta+3\alpha$, where α, β are simple roots. Then $\mathfrak{h}$, x_α and $x_{\beta+3\alpha}$ span a subalgebra $\mathfrak{m}$ which is in fact metabelian (that is $\mathfrak{m}''=0$) and which, we assert, is epimorphically embedded in $\mathfrak{g}$.

For let θ be any morphism of $\mathfrak{g}$ into a finite-dimensional algebra. The values of θ on x_α, $x_{\beta+3\alpha}$ and $\mathfrak{h}$ determine its values on $x_{-\alpha}$ and $x_{-\beta-3\alpha}$. But $[x_{-\alpha}, x_{\beta+3\alpha}]$ is some nonzero multiple of $x_{\beta+2\alpha}$, so the value of θ on $x_{\beta+2\alpha}$ is determined. Likewise so are the values of $x_{\beta+\alpha}$ and x_β. Then $[x_\beta, x_{\beta+3\alpha}]$ is a nonzero multiple of $x_{2\beta+3\alpha}$, so the value of θ is determined on $x_{2\beta+3\alpha}$, hence on $\mathfrak{s}$, and hence on $\mathfrak{g}$.

A like situation apertains generally. For a semisimple Lie algebra of rank r over an algebraically closed field of characteristic zero, we may always find a metabelian subalgebra $\mathfrak{m}$ of dimension $2r$, spanned by $\mathfrak{h}$ and r of the positive root vectors, such that $\mathfrak{m}$ is epimorphically embedded in $\mathfrak{g}$.

We shall see later by contrast that for compact real Lie algebras proper epimorphically embedded subalgebras do not exist.

7. Locally Compact Groups

We are indebted to Hofmann for observing that the negative result for finite-dimensional Lie algebras of the previous section implies that the category of locally compact groups with continuous morphisms also has epimorphisms which are not surjective.

Proposition 8. *Let $G = SL(2, \mathbf{R})$ and let H be the soluble subgroup of all 2×2 real matrices*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \quad (a \neq 0).$$

Then H is epimorphically embedded in G.

Proof. Suppose that we have two continuous morphisms θ, φ from G to some locally compact group K equal on H but distinct on G. By [7], Chapter 4, K has an open subgroup K' such that every neighbourhood of the identity in K' contains a normal subgroup N with K'/N a Lie group. Since G is connected it is mapped into K' by both θ and φ, and so we can suppose that $K' = K$. There exists some g in G with $\theta(g) \neq \varphi(g)$, so there is some symmetric neighbourhood of the identity in K not containing $\theta(g)\,\varphi(g)^{-1}$ and we can take a normal subgroup N contained in this neighbourhood with K/N a Lie group. Then composing θ and φ with the canonical projection $K \to K/N$, we have two maps of G into a Lie group which are equal on H but distinct on G. Thus we can suppose K above taken to be a Lie group. The maps θ, φ induce maps $\bar{\theta}, \bar{\varphi}$ from $\mathfrak{g}$ to the Lie algebra $\mathfrak{k}$ of K in the usual way. These differ on $\mathfrak{g}$ since the image of the exponential map generates G, and are equal on $\mathfrak{h}$. But since $\mathfrak{k}$ is finite-dimensional and $\mathfrak{g}$ is the three-dimensional simple algebra with subalgebra $\mathfrak{h}$ that we considered above, this is a contradiction. Thus H is epimorphically embedded.

8. Compact Groups and Lie Algebras

The question that now naturally arises is how far must we specialise the category of locally compact groups to obtain positive results. We have already seen in Proposition 3 that epimorphisms are surjective in

the category of discrete groups, and it is trivial to see that the same is true of the category of locally compact Abelian groups. We now ask what the situation is in the category of compact groups.

Proposition 9. *Epimorphisms are necessarily surjective in the category of compact groups.*

Proof. We use the same split extension technique that was applied in the proof of Proposition 3. For this we require (given a compact group G and a proper closed subgroup H) to find a (not necessarily commutative) G-module A having an element fixed by H but not fixed by the whole of G. Since we are now in the category of compact groups we must require in addition that the module action $G \times A \to A$ be jointly continuous, and that A (ignoring the G-structure) be a compact topological group. Our aim, then, is to construct such an A.

Let us denote by $R(G)$ the subspace of the space $C(G)$ of continuous functions on G spanned (algebraically) by the coefficients of the continuous irreducible representations of G. These representations are all finite-dimensional and equivalent to unitary representations; and since any finite-dimensional unitary representation is completely reducible into a sum of irreducible components, we see, by means of tensor products, that $R(G)$ is in fact a subalgebra of $C(G)$. Furthermore, if π is a finite-dimensional representation so is its complex conjugate $\bar{\pi}$, and thus $R(G)$ is a self-adjoint subalgebra of $C(G)$. $R(G)$ contains the identity function 1, and by the Peter-Weyl theorem it separates the points of G, therefore by the Stone-Weierstrass theorem it is dense in $C(G)$.

$C(G)$ is a G-module by right translation: ${}_x f)(y) = f(y\,x)$ for $f \in C(G)$ and x, $y \in G$. And $R(G)$ is a submodule in this action since $\pi(y\,x) = \pi(y)\,\pi(x)$, and so

$$ {}_x(\pi_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \pi_{kj}(x)\,\pi_{ik}, $$

where $n = \dim \pi$.

Note that the elements of $C(G)$ fixed by H are precisely those functions which are constant on the left cosets $x\,H$ of H. For $f \in C(G)$ define $\tilde{f} \in C(G)$ constant on the left cosets of H by

$$ \tilde{f}(x) = \int_H f(x\,y)\,d\mu_H(y), $$

where μ_H is Haar measure on H normalised to have total mass 1. $R(G)$ is invariant under this operation since

$$ \tilde{\pi}_{ij}(x) = \int_H \pi_{ij}(x\,y)\,d\mu_H(y) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_H \pi_{kj}(y)\,d\mu_H(y) \right) \pi_{ik}(x). $$

We assert that there is a function f in $R(G)$ fixed under H but not fixed under the whole of G. For suppose not. Any $g \in C(G)$ can be uniformly approximated by $f \in R(G)$, and then $\tilde{g}$ is approximated by $\tilde{f}$. But $\tilde{f}$ is fixed under H and so, by assumption, under G; therefore $\tilde{g}$ is fixed under G. But since it is possible to find a function in $C(G)$ fixed under H but not fixed under the whole of G, this gives a contradiction.

Since the space spanned by π_{ik} for $k=1$ to n is G-invariant, since the representation induced on this space is exactly π, since this space is also invariant under $f \to \tilde{f}$, and since these spaces for varying i and π are independent, it follows that we can find f in such a subspace fixed under H but not under G. In other words, there is a continuous irreducible unitary representation π of G on some finite dimensional Hilbert space, V say, and a vector $v \in V$ fixed under H but not under G.

If V is one-dimensional, then H is contained in the proper closed normal subgroup $\ker \pi$ of G, and in the usual way maps $G \to G/\ker \pi$ will separate H and G.

Suppose that $\dim V > 1$. π induces a representation of G on $\mathrm{Hom}(V, V)$ by $T \to \pi(x)\, T\pi(x)^{-1}$ for $x \in G$, and the unitary group A of V is invariant under this action. A is compact and the induced module action is jointly continuous; finally the unitary operator $U = 2(v \otimes v) - 1$ is an element of A fixed under H but not fixed under G. (For otherwise the one-dimensional subspace generated by v would be invariant under G, contradicting π irreducible and $\dim V > 1$.)

As a corollary to this result we obtain.

Proposition 10. *Epimorphisms are necessarily surjective in the category of real compact Lie algebras.*

Proof. Let $\mathfrak{g}$ be a real compact Lie algebra, and $\mathfrak{h}$ be a proper subalgebra of $\mathfrak{g}$. We may take a compact connected Lie group G having $\mathfrak{g}$ as Lie algebra, and then corresponding to $\mathfrak{h}$ there will be a Lie subgroup H of G. The difficulty of course is that H may not be closed in G; let $\bar{H}$ denote its closure.

Suppose first that $\bar{H} = G$, so that H is dense in G. Now a Lie subgroup of G is normal if and only if its Lie algebra is invariant under the adjoint representation of G. But $\mathfrak{h}$ is invariant under the adjoint representation of H, and H is dense in G. Therefore $\mathfrak{h}$ is invariant under the adjoint representation of G, and so H is normal in G. Thus $\mathfrak{h}$ is an ideal in $\mathfrak{g}$, and two morphisms $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ will separate $\mathfrak{h}$ and $\mathfrak{g}$.

If now $\bar{H}$ is a proper subgroup of G, we can find a compact group K and two morphisms $G \to K$ equal on $\bar{H}$ but distinct on G. Then the same argument as in the proof of Proposition 8 shows that we can take K to be a Lie group and obtain two morphisms from $\mathfrak{g}$ to the Lie algebra $\mathfrak{k}$ of K which are equal on $\mathfrak{h}$ but distinct on $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{k}$ will be compact since K is.

References

1. Arens, R.: Operations induced in function classes. Monatsh. für Math. **55**, 1 – 19 (1951).
2. Dixmier, J.: Les C^*-algrèbres et leurs représentations. Paris: Gauthier-Villars 1964.
3. – Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann). Paris: Gauthier-Villars 1e ed. 1957, 2e ed. 1969.
4. Glimm, J.: A Stone-Weierstrass theorem for C^*-algebras. Ann. Math. **72**, 216 – 244 (1960).
5. Guichardet, A.: Sur la catégorie des algèbres de von Neumann. Bull. Sci. Math. **2**, 41 – 64 (1966).
6. Jacobson, N.: Lie algebras. New York: Interscience 1962.
7. Montgomery, D., Zippin, L.: Topological transformation groups. New York: Interscience 1955.
8. Reid, G. A.: A theorem of Stone-Weierstrass type. Proc. Cambridge Phil. Soc. **62**, 649 – 666 (1966).

G. A. Reid
St. John's College
Cambridge, England

(Received November 12, 1969)

Inventiones math. 9, 308 – 317 (1970)

Existence de traces pour les éléments d'espaces de distributions définis comme domaines d'opérateurs différentiels maximaux

CH. GOULAOUIC (Rennes) et P. GRISVARD (Nice)

Introduction

Soient Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, A un opérateur différentiel d'ordre m dans Ω, et Γ un ouvert de la frontière $\partial\Omega$ de Ω. On note $E(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega);\ Au\in L^2(\Omega)\}$, le domaine de l'opérateur maximal associé à A dans $L^2(\Omega)$.[1]

On montre que, sous certaines hypothèses, les éléments de E ont des traces successives γ_i sur Γ, qui appartiennent aux espaces de Sobolev $H^{-\frac{1}{2}-i}(\Gamma)$, pour $0\leqq i\leqq m-1$.

Des résultats de ce type sont connus (cf. [3]), pour des opérateurs A elliptiques par exemple, mais obtenus généralement par des méthodes globales, alors que la méthode utilisée ici est «locale».

On donne d'abord les hypothèses utilisées (que l'on prend assez fortes afin de dégager le plus clairement possible la méthode) et le résultat correspondant. Puis on décompose la démonstration en plusieurs étapes: Localisation du problème – Passage à $\mathbf{R}^n$ – Méthode par dualité – Obtention des traces successives. Enfin on signale quelques extensions possibles, dont une rédaction détaillée sera faite ultérieurement. Certains des résultats démontrés ici ont été annoncés dans une note aux C. R. Acad. Sci. (cf. [2]).

Nous remercions M.S.Baouendi pour l'aide qu'il nous a apportée dans ce travail.

1. Hypothèses et résultat

On fait les hypothèses suivantes:

H_1) Les coefficients de l'opérateur A sont de classe C^m sur $\bar{\Omega}$ et $\bar{\Omega}$ est une variété à bord de classe C^m.

H_2) $\bar{\Gamma}$ n'est caractéristique pour l'opérateur A en aucun point.

H_3) On peut trouver un ouvert V qui soit l'intersection de Ω avec un voisinage de $\bar{\Gamma}$, tel que $\mathfrak{D}(\bar{V})$ soit dense dans $E(V)$ pour la norme du graphe.

[1] Les notations utilisées sont celles de [3], par exemple.

On obtient alors le résultat:

Théorème 1. *Sous les hypothèses* H_1), H_2), H_3) *l'application* γ_i *de* $\mathfrak{D}(\bar{V})$ *dans* $\mathfrak{D}(\bar{\Gamma})$ *qui à* $u \in \mathfrak{D}(\bar{V})$ *fait correspondre la trace de* $\dfrac{\partial^i u}{\partial \nu i}$ *sur* Γ, *se prolonge en une application linéaire continue de* $E(\Omega)$ *dans* $H^{-\frac{1}{2}-i}(\Gamma)$, *pour* $0 \leqq i \leqq m-1$.

Remarque 1. Les hypothèses de régularité H_1) ne sont utiles qu'au voisinage de $\bar{\Gamma}$.

On signalera au paragraphe 5 l'extension aux cas où $\bar{\Gamma}$ peut être caractéristique.

L'hypothèse de densité H_3) peut être encore affaiblie et on peut même s'en passer pour définir les traces; cette hypothèse est cependant commode ici et est vérifiée dans des cas très généraux (cf. [1]) (par exemple pour A elliptique ou parabolique ou à coefficients constants, pour certains opérateurs hyperboliques à coefficients variables ... etc.).

2. Localisation du problème

Il existe un difféomorphisme θ de classe C^m d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ sur un voisinage de Γ tel que: $V=\theta(R)$ avec

$$R=\{(x, y);\ x=(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in I \text{ ouvert de } \mathbf{R}^{n-1} \text{ et } y \in]0, 1[\}$$

et $\theta(I)=\Gamma$; et toutes les dérivées partielles de θ et de θ^{-1} d'ordre $\leqq m$ soient bornées sur R et sur V.[2]

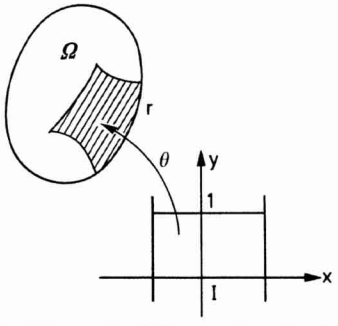

Fig. 1. Schema du difféomorphism local θ

On pose $\tilde{u}=u|_V \circ \theta$ et $\tilde{A}$ l'opérateur différentiel sur R défini par $\tilde{A}(u|_V \circ \theta)=Au|_V \circ \theta$.

On est ramené à chercher les traces pour $y=0$ des éléments de l'espace: $\tilde{E}(R)=\{u \in L^2(R);\ \tilde{A}u \in L^2(R)\}$.

[2] On peut toujours se ramener à cette situation en considérant au lieu de Γ les parties d'un recouvrement ouvert de Γ.

Comme $\bar{\Gamma}$ est non caractéristique pour l'opérateur A, on peut supposer:

$$\tilde{A}=D_y^m+\sum_{\alpha<m} D_y^\alpha A_\alpha,$$

où A_α désigne un opérateur différentiel par rapport aux variables $(x_i)_{1\leqq i\leqq n-1}$, d'ordre $\leqq m-\alpha$.

En écrivant

$$D_y^m u=f-\sum_{\alpha<m} D_y^\alpha A_\alpha u$$

pour $u\in\tilde{E}(R)$ avec $f\in L^2$ on obtient que les éléments u de $\tilde{E}(R)$ vérifient:

(a)
$$\begin{cases} u(x,y)\in L^2(0,1;\,L^2(I)) \\ D_y^m u\in\sum_{i=0}^{m-1} H^{-i}(0,1;\,H^{-m+i}(I)). \end{cases}$$

(Remarquons que les éléments qui vérifient (a) sont bien plus généraux que ceux de $\tilde{E}(R)$, en particulier la fonction f pouvant être prise dans un espace plus grand que $L^2(R)$.)

On va montrer que si u vérifie (a), alors u a une trace pour $y=0$ en un sens que l'on précisera.

On sait que les éléments de l'espace

$$\{u\in L^2(0,1;\,L^2(I));\ D_y^m u\in L^2(0,1;\,H^{-m}(I))\}$$

ont une trace pour $y=0$ dans l'espace $H^{-\frac{1}{2}}(I)$. On peut, dans certains cas, se ramener à cette situation par changement de variables pour supprimer les dérivées mixtes.

On va utiliser une méthode différente, qui nécessite d'abord quelques lemmes préliminaires de densité et de prolongement.

3. Résultats de densité et prolongement

Ces résultats sont démontrés dans le cas général dont nous aurons besoin plus tard (pour les traces d'ordre supérieur).

On note, pour $0\leqq p$ entier $\leqq m-1$,

$$E_{m,p}(R)=\{u\in H^{-p}(R);\ D_y^{m-p}u\in F_{m,p}\}$$

avec

$$F_{m,p}=\sum_{i=0}^{m-p-1} H^{-i}(0,1;\,H^{-m+i}(I)).$$

Il est immédiat que $\mathfrak{D}(R)$ est dense dans $F_{m,p}$ et que:

$$F'_{m,p}=\bigcap_{i=0}^{m-p-1} H_0^i(0,1;\,H_0^{m-i}(I)) \text{ et } F_{m,p} \text{ est réflexif.}$$

On démontre alors le résultat:

Lemme 1. *L'espace* $\mathfrak{D}(\bar{R})$ *est dense dans l'espace* $E_{m,p}(R)$ *(muni de la norme naturelle).*

Démonstration. On va démontrer que toute forme linéaire continue sur $E_{m,p}(R)$, nulle sur $\mathfrak{D}(\bar{R})$, est identiquement nulle. Toute forme linéaire continue T sur $E_{m,p}(R)$ peut s'écrire, avec $f\in H_0^p(R)$ et $g\in F'_{m,p}$:

$$T(u)=\langle f,u\rangle_{H_0^p(R),H^{-p}(R)}+\langle g,D_y^{m-p}u\rangle_{F'_{m,p},F_{m,p}} \quad \text{pour tout } u\in E_{m,p}.$$

On suppose que, pour tout $u\in\mathfrak{D}(\bar{R})$, on a $T(u)=0$. En considérant les seules fonctions u de $\mathfrak{D}(R)$, on a:

$$(-1)^{m-p}D^{m-p}g+f=0 \quad \text{dans } \mathfrak{D}'(R),$$

donc:

$$D^{m-p}g\in H_0^p(R)$$

et par ailleurs:

$$g\in\bigcap_{i=0}^{m-p-1}H_0^i(0,1;H_0^{m-i}(I)).$$

Il en résulte que $g\in H^m(R)$ et pour $y=0$ ou 1, les traces de $D_y^k g$ sont nulles pour $0\leqq k\leqq m-1$, *sauf éventuellement pour* $k=m-p-1$, et il suffit d'écrire $T(u)=0$ avec maintenant u arbitraire dans $\mathfrak{D}(\bar{R})$ pour obtenir finalement que toutes les traces de g sur ∂R jusqu'à l'ordre $m-1$ sont nulles, donc $g\in H_0^m(R)$.

Il existe donc une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathfrak{D}(R)$ qui converge vers g dans $H^m(R)$ et en particulier

$$f=(-1)^{m-p}D^{m-p}g=\lim_{n\to\infty}(-1)^{m-p}D^{m-p}\varphi_n \quad \text{dans } H_0^p(R).$$

Donc, pour tout $u\in E_{m,p}$, on a:

$$T(u)=\lim_{n\to\infty}[\langle(-1)^{m-p}D^{m-p}\varphi_n,u\rangle+\langle\varphi_n,D^{m-p}u\rangle]$$

$$T(u)=0.$$

Ce qui démontre le lemme.

On utilise aussi le résultat:

Lemme 2. *On peut construire un opérateur linéaire continu* Π *de l'espace* $E_{m,p}(R)$ *dans l'espace*

$$E_{m,p}(\mathbf{R}^n)=\left\{u\in H^{-p}(\mathbf{R}^n);\ D_y^{m-p}u\in\sum_{i=0}^{m-p-1}H^{-i}(\mathbf{R};H^{-m+i}(\mathbf{R}^{n-1}))\right\},$$

tel que: $\Pi u|_R=u$ *pour tout* $u\in E_{m,p}(R)$.

Démonstration. a) On passe de $E_{m,p}(R)$ à $E_{m,p}(]0,1[\times\mathbf{R}^{n-1})$ sans difficulté; il suffit d'utiliser un opérateur P_1 de prolongement de $H^{-r}(I)$ à $H^{-r}(\mathbf{R}^{n-1})$ valable pour $0\leqq r\leqq m$ (ce qui existe si on suppose I, donc Γ, assez régulier).

b) On considère l'opérateur P défini sur les fonctions régulières sur $\mathbf{R}^n_+=\mathbf{R}^{n-1}\times\mathbf{R}_+$ par:

$$Pu(x,y)=\begin{cases}u(x,y) & \text{si } y>0\\ \sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i u(x,-\alpha_i y) & \text{si } y<0\end{cases}$$

où les α_i sont des réels distincts strictement positifs et les λ_i seront déterminés par la condition:

$$\|Pu\|_{E_{m,p}(\mathbf{R}^n)}\leqq C\,\|u\|_{E_{m,p}(\mathbf{R}^n_+)}. \tag{1}$$

On vérifie d'abord que P est continu pour les normes induites par $H^{-r}(\mathbf{R}^n_+)$ et $H^{-r}(\mathbf{R}^n)$ pour $0\leqq r\leqq p$, pourvu que l'on ait:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i\alpha_i^{-1}=-1\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i\alpha_i^{-1}(-\alpha_i)^{-p+1}=-1.\end{aligned} \tag{2}$$

Ceci se voit par transposition[3].

On a alors:

$$D_y^{m-p}(Pu)(x,y)=\begin{cases}(D_y^{m-p}u)(x,y) & \text{si } y>0\\ \sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i(-\alpha_i)^{m-p}(D_y^{m-p}u)(x,-\alpha_i y) & \text{si } y<0.\end{cases}$$

Notons Q l'opérateur de prolongement défini par

$$Qv(x,y)=\begin{cases}v(x,y) & \text{si } y>0\\ \sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i(-\alpha_i)^{m-p}v(x,-\alpha_i y) & \text{si } y<0,\end{cases}$$

et exprimons que Q est continu pour les normes induites par

$$H^{-i}\big(\mathbf{R}_+,H^{-m+i}(\mathbf{R}^{n-1})\big)\quad\text{et}\quad H^{-i}\big(\mathbf{R},H^{-m+i}(\mathbf{R}^{n-1})\big)$$

[3] On montre que l'application transposée ${}^tP$ est continue de $H^r(\mathbf{R}^n)$ dans $H^r_0(\mathbf{R}^n_+)$ et vérifie ${}^tP\,\tilde{\varphi}=\varphi$ pour tout $\varphi\in H^r_0(\mathbf{R}^n_+)$, $\tilde{\varphi}$ désignant l'élément de $H^r(\mathbf{R}^n)$ obtenu en prolongeant φ par 0 pour $y<0$.

pour $i=0, 1, \ldots, m-p-1$; cela se traduit par les conditions:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i(-\alpha_i)^{m-p-1}=1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i(-\alpha_i)=1. \end{aligned} \tag{3}$$

Le système (2) (3) est un système de Cramer par rapport aux variables $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, donc le prolongement P est construit pour les fonctions régulières; comme ces fonctions sont denses dans $E_{m,p}(\mathbf{R}^n_+)$ on a construit un prolongement P de $E_{m,p}(\mathbf{R}^n_+)$ dans l'espace $E_{m,p}(\mathbf{R}^n)$.

c) Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions de $\mathfrak{D}([0,1[)$ et $\mathfrak{D}(]0,1])$ respectivement; on montre que l'application $u \mapsto \varphi_i u$ est continue de $E_{m,p}(]0,1[\times \mathbf{R}^{n-1})$ dans lui-même, pour $i=1,2$. On choisira φ_1 et φ_2 telles que $\varphi_1+\varphi_2=1$ sur $[0,1]$.

d) Soit $u \in E_{m,p}(R)$; on obtient $P_1 u \in E_{m,p}(]0,1[\times \mathbf{R}^{n-1})$; puis

$$\begin{aligned} &\varphi_1 P_1 u \in E_{m,p}(\mathbf{R}^n_+) \\ &\varphi_2 P_1 u \in E_{m,p}(\mathbf{R}^n_-) \quad \text{avec } \mathbf{R}^n_- =]-\infty, 1[\times \mathbf{R}^{n-1} \\ &v_1 = P(\varphi_1 P_1 u) \in E_{m,p}(\mathbf{R}^n) \\ &v_2 = P_-(\varphi_2 P_1 u) \in E_{m,p}(\mathbf{R}^n), \end{aligned}$$

où P_- désigne le prolongement analogue à P, $\mathbf{R}^n_+$ étant remplacé par $\mathbf{R}^n_-$.

Enfin, on pose $\Pi u = v_1 + v_2$.

Remarque 2. Il aurait été possible d'éviter ce prolongement, mais il est plus agréable de travailler dans $\mathbf{R}^n$, pour les techniques de dualité et relèvement des traces, que l'on va utiliser.

4. Méthode par dualité

On démontre d'abord un résultat de «relèvement».

Proposition 1. *L'application* T: $\varphi \to \delta_{(y=0)} \otimes \varphi$ *est linéaire continue de* $H^{p+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ *dans*

$$E'_{m,p}(\mathbf{R}^n) = \left\{ f + D^{m-p} g;\ f \in H^p(\mathbf{R}^n) \text{ et } g \in \bigcap_{i=0}^{m-p-1} H^i(\mathbf{R}, H^{m-i}(\mathbf{R}^{n-1})) \right\}.$$

Démonstration. On sait cf. [3] qu'il existe un relèvement continu R de $H^{p+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ dans $H^m(\mathbf{R}^n_+)$ qui à φ associe $R\varphi = W$ vérifiant:

$$\begin{aligned} &\gamma_0 W = \cdots = \gamma_{m-p-2} W = 0 \\ &\gamma_{m-p-1} W = \varphi \\ &\gamma_{m-p} W = \cdots = \gamma_{m-1} W = 0 \end{aligned}$$

$\gamma_i W$ désigne $(D^i_y W)(x, 0)$.

On note $\tilde{W}$ la distribution obtenue en prolongeant W par 0 pour $y<0$. On a:

$$D_y^{m-p}\tilde{W}=\widetilde{D_y^{m-p}W}+\delta_{(y=0)}\otimes\varphi.$$

Donc

$$\delta_{(y=0)}\otimes\varphi=f+D_y^{m-p}g \quad \text{avec}$$
$$f=-\widetilde{D_y^{m-p}W}$$
$$g=\tilde{W}.$$

Il reste à vérifier:

$$\widetilde{D_y^{m-p}W}\in H^p(\mathbf{R}^n)$$
$$\tilde{W}\in\bigcap_{k=0}^{m-p-1}H^k(\mathbf{R},H^{m-k}(\mathbf{R}^{n-1})).$$

On a:

1) La fonction $D_y^{m-p}W$ a toutes ses traces d'ordre $<p$ nulles pour $y=0$, donc $\widetilde{D_y^{m-p}W}\in H^p(\mathbf{R}^n)$ et on a:

$$\|\widetilde{D_y^{m-p}W}\|_{H^p(\mathbf{R}^n)}\leqq C_1\|W\|_{H^m(\mathbf{R}^n_+)}\leqq C_2\|\varphi\|_{H^{p+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})},$$

2) La fonction W a toutes ses traces sur $y=0$ nulles jusqu'à l'ordre $m-p-2$, donc

$$\tilde{W}\in\bigcap_{k=0}^{m-p-1}H^k(\mathbf{R},H^{m-k}(\mathbf{R}^{n-1}))$$

et on a:

$$\|\tilde{W}\|\leqq C_3\|\varphi\|_{H^{p+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

La proposition est complètement démontrée.

Par transposition, on déduit de la proposition 1 un résultat de «traces».

Théorème 2. *L'application γ_0 de $\mathfrak{D}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathfrak{D}(\mathbf{R}^{n-1})$, qui à $u\in\mathfrak{D}(\mathbf{R}^n)$ fait correspondre sa trace pour $y=0$, se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $E_{m,p}(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{-\frac{1}{2}-p}(\mathbf{R}^{n-1})$.*

Démonstration. On démontre d'abord (même méthode que pour le lemme 1 ou régularisation par convolution) que $\mathfrak{D}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans $E_{m,p}(\mathbf{R}^n)$.

On vient de montrer que l'application T est linéaire continue de $H^{p+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{n-1})$ dans $E'_{m,p}$; donc l'application transposée ${}^tT$ est linéaire continue de $E_{m,p}(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{-\frac{1}{2}-p}(\mathbf{R}^{n-1})$. Il suffit de montrer que la restriction à $\mathfrak{D}(\mathbf{R}^n)$ coïncide avec la trace. Or, pour $f\in\mathfrak{D}(\mathbf{R}^n)$, on a:

$$\forall u\in H^{\frac{1}{2}+p}(\mathbf{R}^{n-1}),\ \langle {}^tTf,u\rangle=\langle f,Tu\rangle_{E_{m,p},E'_{m,p}}$$
$$=\langle f,\delta_{(y=0)}\otimes u\rangle.$$

Comme f est régulière, ceci peut s'écrire aussi

$$\langle {}^tTf, u\rangle = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f(x,0)\,u(x)\,dx = \langle \gamma_0 f, u\rangle .$$

Donc la restriction de ${}^tT$ à $\mathfrak{D}(\mathbf{R}^n)$ est γ_0.

Donc le théorème 2 est démontré. En utilisant les résultats de prolongement, on en déduit immédiatement:

Théorème 2'. *L'application γ_0 de $\mathfrak{D}(\bar{R})$ dans $\mathfrak{D}(I)$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $E_{m,p}(R)$ dans $H^{-\frac{1}{2}-p}(I)$.*

5. Application aux traces des éléments de $E(R)$

a) On a immédiatement, d'après le théorème 2' pour $p=0$, que les éléments de $\tilde{E}(R)$ ont une trace γ_0 pour $y=0$ et que cette trace est dans $H^{-\frac{1}{2}}(I)$.

b) *Recherche des traces d'ordre supérieur.*

Il est facile de voir que les éléments de $E_{m,0}(R)$ (ou $E_{m,0}(\mathbf{R}^n)$) n'ont pas nécessairement de traces d'ordre supérieur à 0, au sens précédent. Par exemple, on peut vérifier que $u\in L^2(\mathbf{R}^2)$ et $D_y^2 u\in H^{-1}(\mathbf{R}, H^{-1}(\mathbf{R}))$ n'impliquent pas que $\gamma_1 u$ existe pour $y=0$, en prenant u quelconque dans $H^1(\mathbf{R}^2)$.

Il faut donc reprendre le problème plus tôt.

Pour $u\in\tilde{E}(R)$ on peut écrire, avec $f\in L^2(R)$:

$$D_y^{m-1}(D_y u + A_{m-1}u) = f - \sum_{\alpha\leqq m-2} D_y^{\alpha} A_\alpha u .$$

On pose: $v = D_y u + A_{m-1}u$.

On obtient que v vérifie:

$$(a_1)\qquad \begin{cases} v(x,y)\in H^{-1}(R) \\ D_y^{m-1} v \in \sum_{i=0}^{m-1} H^{-i}(0,1; H^{-m+i}(I)). \end{cases}$$

Donc la distribution v appartient à $E_{m,1}(R)$ et sa trace pour $y=0$ est définie dans $H^{-\frac{3}{2}}(I)$, d'après le théorème 2'. On a donc obtenu la trace d'une dérivée oblique de u. On en déduit la trace de toute dérivée oblique et en particulier de $D_y u$; en effet:

On raisonne sur les fonctions de $\mathfrak{D}(\bar{R})$.

L'application $u\mapsto \gamma_0(A_{m-1}u)$ est continue pour les normes induites par $\tilde{E}(R)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(I)$, car l'opérateur A_{m-1} étant un opérateur différentiel

par rapport aux seules variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$, on a $\gamma_0 A_{m-1} u = A_{m-1}(\gamma_0 u)$ pour $y=0$.

On en déduit que $u \mapsto \gamma_0 D_y u$ est continue pour les normes induites par $\tilde{E}(R)$ et $H^{-\frac{1}{2}}(I)$, et de façon générale, pour obtenir les traces $\gamma_0 D_y^\alpha u$ pour $u \in \tilde{E}(R)$ et $1 \leqq \alpha \leqq m-1$, on procède par récurrence, en utilisant le théorème 2' pour $1 \leqq p \leqq m-1$. On en déduit les traces successives sur Γ des éléments de $E(R)$ (pour les traces d'ordre $\geqq 1$, il faut limiter la classe des difféomorphismes permettant de localiser le problème; cf. paragraphe 2).

6. Quelques généralisations possibles et remarques

1. On remarque d'abord que la théorie faite ici à partir de $L^2(\Omega)$ peut se faire de la même manière à partir de $L^p(\Omega)$ avec $1<p<\infty$ et même à partir de certains espaces avec poids.

2. *Bord caractéristique.*

Pour l'étude des traces des éléments de $E(\Omega)$, il peut se présenter diverses situations, où les difficultés rencontrées ne sont pas de même nature. Signalons, par exemple dans $\mathbf{R}^n_+$, le cas où l'opérateur A est de la forme:

$$(1) \quad Au = y^\gamma D_y^m u + \sum_{\alpha \leqq m-1} D_y^\alpha A_\alpha u, \quad \text{ou}$$

$$(2) \quad Au = x^\gamma D_y^m u + \sum_{\alpha \leqq m-1} D_y^\alpha A_\alpha u, \quad \text{avec } \gamma > 0,$$

et A_α désignant un opérateur différentiel par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$ d'ordre au plus $m-\alpha$. Dans le cas (2) on peut obtenir les traces successives de u dans des espaces d'interpolation entre des espaces de Sobolev avec poids, en suivant la méthode ci-dessus; tandis que dans le cas (1) on peut obtenir les traces successives de u (ou de $y^\beta u$ avec β convenable) dans des espaces $H^s(\mathbf{R}^{n-1})$, mais il faut adapter, la méthode utilisée ici (en particulier pour le résultat de relèvement, cf. proposition 1).

3. Si on ne peut démontrer que les fonctions régulières sont denses dans $E(\Omega)$ (plus précisément, l'hypothèse H_3), on peut cependant définir les traces des éléments de $E(\Omega)$ sur Γ. On montre que si $u \in \tilde{E}(R)$, alors u est une fonction de y presque partout égale à une fonction continue à valeurs dans $H^{-\frac{1}{2}}(I)$; en composant avec θ^{-1}, on montre que $u \in E(\Omega)$ est presque partout égale à une fonction continue (en variable normale) à valeurs dans $H^{-\frac{1}{2}}$ (en variables tangentielles). Ceci suppose le choix de difféomorphismes θ privilégiés.

4. *Surjectivité des traces.* Les espaces de traces obtenus sont les meilleurs possibles lorsqu'on ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur l'opérateur A, et dans certains cas (par exemple: A elliptique) l'ap-

plication $\gamma=(\gamma_0, \ldots, \gamma_{m-1})$ est surjective de $E(\Omega)$ sur

$$\prod_{i=0}^{m-1} H^{-\frac{1}{2}-i}(\Gamma).$$

Cependant, pour certains opérateurs A, les espaces de traces correspondants peuvent être plus petits, et il n'y a donc pas surjectivité de γ en général (exemple: $\Omega=\mathbf{R}^2_+$, $\Gamma=\{(x, y);\ y=0\}$ et $A=D_y$); dans ces cas, on peut toujours adapter la méthode utilisée ici pour obtenir les meilleurs espaces de traces.

5. On peut aussi chercher par la même méthode les traces sur Γ des éléments de l'espace $E^s(\Omega)=\{u\in H^s(\Omega);\ Au\in L^2(\Omega)\}$ avec s réel >0. Pour $u\in E^s(\Omega)$, on obtient les traces $\gamma_i u$ dans $H^{s-i-\frac{1}{2}}$ pour $0\leqq i<s-\frac{1}{2}$, sans avoir à utiliser l'hypothèse «$Au\in L^2$».

Pour $s-\frac{1}{2}\leqq i$ (ce qui implique $s\leqq m-\frac{1}{2}$), on écrit encore:

$$D_y^{m-i}(D_y^i u+D_y^{i-1}A_1 u+\cdots+A_i u)=f-D_y^{m-i-1}A_{i+1}u-\cdots-A_m u$$

$$u\in H^s(R).$$

Ce qui donne, en posant $v=D_y^i u+\cdots+A_i u$,

$$v\in H^{s-i}(R)$$

$$D_y^{m-i}v\in H^{-m+i+1}(0, 1; H^{-s-i-1}(I))+\cdots+L^2(0, 1; H^{s-m}(I))$$

où on trouve encore, en généralisant les résultats des paragraphes 3 et 4, que $\gamma_0 v\in H^{s-i-\frac{1}{2}}$, donc que $\gamma_i u\in H^{s-i-\frac{1}{2}}(I)$.

Bibliographie

1. Baiocchi, C.: Définition d'opérateurs maximaux et applications. (A paraître aux annales de l'Ecole Normale Supérieure.)
2. Goulaouic, C., Grisvard, P.: Existence de traces pour les éléments d'espaces de distributions définis comme domaines d'opérateurs différentiels. C. R. Acad. Sci. Paris, tome 268, n° 25, p. 1537 (1969).
3. Lions, J. L., Magenes, E.: Problèmes aux limites non homogènes. Paris: Dunod 1968.

Ch. Goulaouic
Faculté des Sciences Mathématiques
Avenue du Général Leclerc
F-35 Rennes

P. Grisvard
Faculté des Sciences Mathématiques
Parc Valrose
F-06 Nice

(Reçu le 2 fevrier 1970)

Inventiones math. 9, 318 – 344 (1970)

Algebraic K-Theory and Quadratic Forms

JOHN MILNOR (Cambridge, Massachusetts)

The first section of this paper defines and studies a graded ring K_*F associated to any field F. By definition, K_nF is the target group of the universal n-linear function from $F^\bullet \times \cdots \times F^\bullet$ to an additive group, satisfying the condition that $a_1 \times \cdots \times a_n$ should map to zero whenever $a_i + a_{i+1} = 1$. Here $F^\bullet$ denotes the multiplicative group $F - 0$.

Section 2 constructs a homomorphism $\partial\colon K_nF \to K_{n-1}\bar{F}$ associated with a discrete valuation on F with residue class field $\bar{F}$. These homomorphisms ∂ are used to compute the ring $K_*F(t)$ of a rational function field, using a technique due to John Tate.

Section 3 relates K_*F to the theory of quadratic modules by defining certain "Stiefel-Whitney invariants" of a quadratic module over a field F of characteristic $\neq 2$. The definition is closely related to Delzant [5].

Let W be the Witt ring of anisotropic quadratic modules over F, and let $I \subset W$ be the maximal ideal, consisting of modules of even rank. Section 4 studies the conjecture that the associated graded ring

$$(W/I, I/I^2, I^2/I^3, \ldots)$$

is canonically isomorphic to $K_*F/2K_*F$. Section 5 computes the Witt ring of a field $F(t)$ of rational functions.

Section 6 describes the conjecture that $K_*F/2K_*F$ is canonically isomorphic to the cohomology ring $H^*(G_F; Z/2Z)$; where G_F denotes the Galois group of the separable closure of F. An appendix, due to Tate, computes $K_*F/2K_*F$ for a global field.

Throughout the exposition I have made free use of unpublished theorems and ideas due to Bass and Tate. I want particularly to thank Tate for his generous help.

§1. The Ring K_*F

To any field F we associate a graded ring

$$K_*F = (K_0F, K_1F, K_2F, \ldots)$$

as follows. By definition, K_1F is just the multiplicative group $F^\bullet$ written additively. To keep notation straight, we introduce the canonical isomorphism

$$l\colon F^\bullet \to K_1F,$$

where $l(a\,b)=l(a)+l(b)$. Then K_*F is defined to be the quotient of the tensor algebra

$$(Z,\ K_1F,\ K_1F\otimes K_1F,\ K_1F\otimes K_1F\otimes K_1F,\ \ldots)$$

by the ideal generated by all $l(a)\otimes l(1-a)$, with $a\neq 0, 1$. In other words each K_nF, $n\geqq 2$, is the quotient of the n-fold tensor product $K_1F\otimes\cdots\otimes K_1F$ by the subgroup generated by all $l(a_1)\otimes\cdots\otimes l(a_n)$ such that $a_i+a_{i+1}=1$ for some i.

In terms of generators and relations, K_*F can be described as the associative ring with unit which is generated by symbols $l(a)$, $a\in F^\bullet$, subject only to the defining relations $l(a\,b)=l(a)+l(b)$ and $l(a)\,l(1-a)=0$.

Explanation. This definition of the group K_2F is motivated by work of R. Steinberg, C. Moore, and H. Matsumoto on algebraic groups; and has already been the object of much study. (Compare references [2–4, 7–9, 17].) For $n\geqq 3$, the definition is purely ad hoc. Quite different definition of K_n for $n\geqq 3$ have been proposed by Swan [18] and by Nobile and Villamayor [11]; but no relationship between the various definitions is known.

First let us describe some fundamental properties of the ring K_*F. (Examples will be given in §§1.5–1.8.)

Lemma 1.1. *For every $\xi\in K_mF$ and every $\eta\in K_nF$, the identity*

$$\eta\,\xi=(-1)^{mn}\,\xi\,\eta$$

is valid in $K_{m+n}F$.

Proof (following Steinberg). Clearly it suffices to consider the case $m=n=1$. Since $-a=(1-a)/(1-a^{-1})$ for $a\neq 1$, we have

$$\begin{aligned} l(a)\,l(-a)&=l(a)\,l(1-a)-l(a)\,l(1-a^{-1})\\ &=l(a)\,l(1-a)+l(a^{-1})\,l(1-a^{-1})=0. \end{aligned}$$

Hence the sum $l(a)\,l(b)+l(b)\,l(a)$ is equal to

$$\begin{aligned} &l(a)\,l(-a)+l(a)\,l(b)+l(b)\,l(a)+l(b)\,l(-b)\\ &\quad=l(a)\,l(-a\,b)+l(b)\,l(-a\,b)\\ &\quad=l(a\,b)\,l(-a\,b)=0; \end{aligned}$$

which completes the proof.

Here are two further consequences of this argument:

Lemma 1.2. *The identity $l(a)^2=l(a)\,l(-1)$ is valid for every $l(a)\in K_1F$.*

For the equation $l(a)\,l(-a)=0$ implies that $l(a)^2=l(a)\big(l(-1)+l(-a)\big)$ must be equal to $l(a)\,l(-1)$.

Lemma 1.3. *If the sum $a_1+\cdots+a_n$ of non-zero field elements is equal to either 0 or 1, then $l(a_1)\ldots l(a_n)=0$.*

Proof by Induction on n. The statement is certainly true for $n=1, 2$; so we may assume that $n\geqq 3$. If $a_1+a_2=0$, then the product $l(a_1)\,l(a_2)$ is already zero. But if $a_1+a_2\neq 0$, then the equation

$$a_1/(a_1+a_2)+a_2/(a_1+a_2)=1$$

implies that

$$\big(l(a_1)-l(a_1+a_2)\big)\big(l(a_2)-l(a_1+a_2)\big)=0.$$

Multiplying by $l(a_3)\ldots l(a_n)$, and using 1.1 and the inductive hypothesis that

$$l(a_1+a_2)\,l(a_3)\ldots l(a_n)=0,$$

the conclusion follows.

Here is an application.

Theorem 1.4. *The element -1 is a sum of squares in F if and only if every positive dimensional element of K_*F is nilpotent.*

Proof. If -1 is not a sum of squares, then F can be embedded in a real closed field, and hence can be ordered. Choosing some fixed ordering, define an n-linear mapping from $K_1F\times\cdots\times K_1F$ to the integers modulo 2 by the correspondence

$$l(a_1)\times\cdots\times l(a_n)\mapsto \frac{1-\operatorname{sgn}(a_1)}{2}\cdots\frac{1-\operatorname{sgn}(a_n)}{2}.$$

Evidently the right hand side is zero whenever $a_i+a_{i+1}=1$. Hence this correspondence induces a homomorphism

$$K_nF\to Z/2Z;$$

which carries $l(-1)^n$ to 1. This proves that the element $l(-1)$ is not nilpotent.

Conversely, if say $-1=a_1^2+\cdots+a_r^2$, then it follows from 1.3 that

$$l(-a_1^2)\ldots l(-a_r^2)=0;$$

hence

$$l(-1)^r\equiv 0 \bmod 2K_rF.$$

Since $2l(-1)=0$, it follows immediately that $l(-1)^{r+1}=0$.

For any generator $\gamma=l(a_1)\ldots l(a_n)$ of the group K_nF, it follows from 1.2 that γ^s is equal to a multiple of $l(-1)^{n(s-1)}$. Hence $\gamma^s=0$ whenever $n(s-1)>r$. Similarly, for any sum $\gamma_1+\cdots+\gamma_k$ of generators, the power $(\gamma_1+\cdots+\gamma_k)^s$ can be expressed as a linear combination of monomials $\gamma_1^{i_1}\ldots\gamma_k^{i_k}$ with $i_1+\cdots+i_k=s$. Choosing $s>k$, note that each such monomial is a multiple of $l(-1)^{n(s-k)}$. If $s>k+r/n$, it follows that $(\gamma_1+\cdots+\gamma_k)^s=0$; which completes the proof.

To conclude this section, the ring K_*F will be described in four interesting special cases.

Example 1.5 (Steinberg). If the field is finite, then $K_2F=0$. In fact K_1F is cyclic, say of order $q-1$; so §1.1 implies that K_2F is either trivial or of order $\leqq 2$, according as q is even or odd. But, if q is odd, then an easy counting argument shows that 1 is the sum of two quadratic non-residues in F; from which it follows that $K_2F=0$. This implies, of course, that $K_nF=0$ for $n>2$ also.

Example 1.6. Let R be the field of real numbers. Then every K_nR, $n\geqq 1$, splits as the direct sum of a cyclic group of order 2 generated by $l(-1)^n$, and a divisible group generated by all products $l(a_1)\dots l(a_n)$ with $a_1, \dots, a_n>0$. This is easily proved by induction on n, using the argument of §1.4 to show that $l(-1)^n$ is not divisible.

Example 1.7. Let F be a *local field* (i.e. complete under a discrete valuation with finite residue class field), and let m be the number of roots of unity in F. Calvin Moore [10] proves that K_2F is the direct sum of a cyclic group of order m and a divisible group.

We will show that K_nF is divisible for $n\geqq 3$. Consider the algebra K_*F/pK_*F over Z/pZ; where p is a fixed prime. If p does not divide m, then Moore's theorem clearly implies that $K_2F/pK_2F=0$. Suppose that p does divide m. We claim then that:

(1) the vector space K_1F/pK_1F has dimension $\geqq 2$ over Z/pZ;

(2) the vector space K_2F/pK_2F has dimension 1; and

(3) for each $\alpha\neq 0$ in K_1F/pK_1F there exists β in K_1F/pK_1F so that $\alpha\beta\neq 0$.

In fact (1) is clear; (2) follows from Moore's theorem; and (3) is an immediate consequence of the classical theorem which asserts that, for each $a\in F^\bullet$ which is not a p-th power, there exists b so that the p-th power norm residue symbol $(a, b)_F$ is non-trivial. (See for example [20, p. 260].) The correspondence

$$l(a)\,l(b)\mapsto (a, b)_F$$

clearly extends to a homomorphism from K_2F to the group of p-th roots of unity. So, taking $\alpha\equiv l(a)$, $\beta\equiv l(b)$, the conclusion (3) follows.

Proof that every generator $\alpha\beta\gamma$ of K_3F/pK_3F is zero. Given α, β, γ one can first choose $\beta'\neq 0$ so that $\alpha\beta'=0$ (using (1) and (2)), and then choose γ' so that $\beta'\gamma'=\beta\gamma$ (using (2) and (3)). The required equation

$$\alpha\beta\gamma=\alpha\beta'\gamma'=0$$

follows.

Thus $K_3F/pK_3F=0$ for every prime p; which proves that K_3F is divisible.

Example 1.8. Let F be a *global field* (that is a finite extension of the field Q of rational numbers, or of the field of rational functions in one indeterminate over a finite field). Let F_v range over all local or real completions of F. The complex completions (if any) can be ignored for our purposes. The inclusions $F \to F_v$ induce a homomorphism

$$K_2 F \to \oplus_v K_2 F_v/(\text{max. divis. subgr.}),$$

where each summand on the right is finite cyclic by 1.6 and 1.7. Bass and Tate [3] have shown that the kernel of this homomorphism is finitely generated, but the precise structure of the kernel is not known. Moore has shown that the cokernel is isomorphic to the group of roots of unity in F.

The structure of $K_n F$ is not known for $n \geqq 3$, but Tate has proved the following partial result: *The quotient $K_n F/2K_n F$ maps isomorphically to the direct sum, over all real completions F_v, of*

$$K_n F_v/2K_n F_v \cong Z/2Z.$$

Thus the dimension of $K_n F/2K_n F$ as a mod 2 vector space is equal to the number of real completions. Tate's proof of this result is presented in the Appendix.

It may be conjectured that the subgroup $2K_n F$ is actually zero for $n \geqq 3$, so that $K_n F$ itself is a vector space over $Z/2Z$. As an example, for the field Q of rational numbers the isomorphism

$$K_n Q \cong Z/2Z$$

for $n \geqq 3$ can be established by methods similar to those of §2.3.

§ 2. Discrete Valuations and the Computation of $K_* F(t)$

Suppose that a field F has a discrete valuation v with residue class field $\bar{F}$ $(=\bar{F}_v)$. The group of *units* (elements u with $\operatorname{ord}_v u = 0$) will be denoted by U, and the natural homomorphism $U \to \bar{F}^\bullet$ by $u \mapsto \bar{u}$. An element π of $F^\bullet$ is *prime* if $\operatorname{ord}_v \pi = 1$.

Lemma 2.1. *There exists one and only one homomorphism $\partial = \partial_v$ from $K_n F$ to $K_{n-1}\bar{F}$ which carries the product $l(\pi)\, l(u_2) \ldots l(u_n)$ to $l(\bar{u}_2) \ldots l(\bar{u}_n)$ for every prime element π and for all units $u_2, \ldots, u_n$. This homomorphism ∂ annihilates every product of the form $l(u_1) \ldots l(u_n)$.*

(For $n = 1$ the defining property is to be that $\partial l(\pi) = 1$.)

Remarks. Evidently ∂ is always surjective. For $n = 1$ the homomorphism ∂ can essentially be identified with the homomorphism

$$\operatorname{ord}_v : F^\bullet \to Z;$$

and for $n=2$ it is closely related to the classical "tame symbol"

$$\pi^i u_1, \pi^j u_2 \mapsto (\overline{-1})^{ij} \bar{u}_2^i / \bar{u}_1^j$$

which is utilized for example in [3].

To begin the proof, note that any unit u_1 can be expressed as the quotient $\pi u_1/\pi$ of two prime elements. So the property

$$\partial(l(u_1)\dots l(u_n))=0$$

follows immediately from the defining equation.

Proof of Uniqueness. Choose a prime element π. Since $F^\bullet$ is generated by π and U, it follows that $K_n F$ is generated by products of the form $l(\pi)^r l(u_{r+1})\dots l(u_n)$. If $r=1$, then the image of any such product under ∂ has been specified; and if $r>1$ then using the identity $l(\pi)^r = l(\pi)\, l(-1)^{r-1}$ it is also specified. But if $r=0$, then any such product maps to zero. This proves that ∂ is unique, if it exists.

Proof of Existence[1]. It will be convenient to introduce an indeterminate symbol x which is to anticommute with all elements of $K_1 \bar{F}$. Given any n-tuple of elements

$$l(\pi^{i_1} u_1), \dots, l(\pi^{i_n} u_n) \in K_1 F,$$

construct a sequence of elements $\varphi_j \in K_j \bar{F}$ by the formula

$$(x\, i_1 + l(\bar{u}_1))\dots(x\, i_n + l(\bar{u}_n)) = x^n \varphi_0 + x^{n-1} \varphi_1 + \dots + \varphi_n.$$

Evidently each φ_j is n-linear as a function of $l(\pi^{i_1} u_1), \dots, l(\pi^{i_n} u_n)$. Now consider the linear combination

$$\varphi = l(\overline{-1})^{n-1} \varphi_0 + l(\overline{-1})^{n-2} \varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}.$$

Thus $\varphi \in K_{n-1} \bar{F}$, and evidently φ is also linear as a function of each $l(\pi^{i_j} u_j)$.

If two successive $\pi^{i_j} u_j$ add up to 1, we will prove that $\varphi = 0$. This will show that the correspondence

$$l(\pi^{i_1} u_1)\dots l(\pi^{i_n} u_n) \mapsto \varphi$$

---

1 *Added in Proof.* A much better construction of the homomorphism ∂ has been suggested by Serre. Adjoin to the ring $K_* \bar{F}$ a new symbol ξ of degree 1 which is to anticommute with the elements of $K_1 \bar{F}$, and to satisfy the identity $\xi^2 = \xi\, l(\overline{-1})$, but is to satisfy no other relations. Thus the enlarged ring $(K_* \bar{F})[\xi]$ is free over $K_* \bar{F}$ with basis $\{1, \xi\}$. It is not difficult to show that the correspondence

$$l(\pi^i u) \mapsto i\, \xi + l(\bar{u})$$

extends uniquely to a ring homomorphism θ_π from $K_* F$ to this enlarged ring. Now, setting

$$\theta_\pi(\alpha) = \psi(\alpha) + \xi\, \partial(\alpha)$$

with $\psi(\alpha)$ and $\partial(\alpha)$ in $K_* \bar{F}$, we obtain the required homomorphism ∂.

is well defined and extends to a homomorphism

$$K_n F \to K_{n-1} \bar{F}.$$

Since it is clear that $l(\pi u)\, l(u_2) \ldots l(u_n)$ maps to $l(\bar{u}_2) \ldots l(\bar{u}_n)$, this will complete the proof.

To avoid complicated notation, we will carry out details only for the case

$$\pi^{i_1} u_1 + \pi^{i_2} u_2 = 1.$$

There are four possibilities to consider.

If $i_1 > 0$, then it follows easily that

$$i_2 = 0, \quad \bar{u}_2 = 1.$$

Hence the factor $x\, i_2 + l(\bar{u}_2)$ is zero and it certainly follows that $\varphi = 0$.

The case $i_1 = 0$, $i_2 > 0$ is disposed of similarly.

If $i_1 = i_2 = 0$, then $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = \bar{1}$, hence

$$\big(x\, i_1 + l(\bar{u}_1)\big)\big(x\, i_2 + l(\bar{u}_2)\big) = 0,$$

so again $\varphi = 0$.

Finally suppose that $i_1 < 0$. Then clearly $i_1 = i_2$ and $\bar{u}_2 = -\bar{u}_1$. In this case the product $\big(x\, i_1 + l(\bar{u}_1)\big)\big(x\, i_2 + l(\bar{u}_2)\big)$ evidently simplifies to

$$x^2\, i_1^2 + x\, i_1\, l(\overline{-1}) + 0.$$

Hence the expression $\sum x^{n-j} \varphi_j$ can be written as

$$x\big(x\, i_1^2 + i_1\, l(\overline{-1})\big)\big(x\, i_3 + l(\bar{u}_3)\big) \ldots \big(x\, i_n + l(\bar{u}_n)\big).$$

Cancelling the initial x, and then substituting $l(\overline{-1})$ for the remaining x's, we evidently obtain an expression for φ. But this substitution carries $x\, i_1^2 + i_1\, l(\overline{-1})$ to $l(\overline{-1})\, i_1^2 + i_1\, l(\overline{-1}) = 0$. So $\varphi = 0$ in this case also; which completes the proof of 2.1.

A similar argument proves the following.

Lemma 2.2. *Choosing some fixed prime element π, there is one and only one ring homomorphism*

$$\psi\colon\ K_* F \to K_* \bar{F}$$

which carries $l(\pi^i u)$ to $l(\bar{u})$ for every unit u.

In fact ψ is defined by the rule

$$l(\pi^{i_1} u_1) \ldots l(\pi^{i_n} u_n) \mapsto l(\bar{u}_1) \ldots l(\bar{u}_n).$$

Details will be left to the reader. Evidently this homomorphism ψ is less natural than ∂, since it depends on a particular choice of π.

Now let F be an arbitrary field. We will use 2.1 and 2.2 to study the field $F(t)$ of rational functions in one indeterminate over F.

Each monic irreducible polynomial $\pi \in F[t]$ gives rise to a (π)-adic valuation on $F(t)$ with residue class field $F[t]/(\pi)$. Here (π) denotes the prime ideal spanned by π. Hence there is an associated surjection

$$\partial_\pi\colon\ K_n F(t) \to K_{n-1} F[t]/(\pi).$$

Theorem 2.3. *These homomorphisms ∂_π give rise to a split exact sequence*

$$0 \to K_n F \to K_n F(t) \to \oplus K_{n-1} F[t]/(\pi) \to 0,$$

where the direct sum extends over all non-zero prime ideals (π).

This theorem is essentially due to Tate. In fact the proof below is an immediate generalization of Tate's proof for the special case $n=2$.

Proof. Keeping n fixed, let $L_d \subset K_n F(t)$ be the subgroup generated by those products $l(f_1)\dots l(f_n)$ such that $f_1, \dots, f_n \in F[t]$ are polynomials of degree $\leqq d$. Thus

$$L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots$$

with union $K_n F(t)$. Using the homomorphism

$$\psi_\pi\colon\ K_n F(t) \to K_n F$$

of 2.2, where π is any monic (irreducible) polynomial of degree 1, we see easily that L_0 is a direct summand of $K_n F(t)$, naturally isomorphic to $K_n F$.

Let π be a monic irreducible polynomial of degree d. Then each element $\bar{g}$ of the quotient $F[t]/(\pi)$ is represented by a unique polynomial $g \in F[t]$ of degree $< d$.

Lemma 2.4. *There exists one and only one homomorphism*

$$h_\pi\colon\ K_{n-1} F[t]/(\pi) \to L_d/L_{d-1}$$

which carries each product $l(\bar{g}_2)\dots l(\bar{g}_n)$ to the residue class of $l(\pi)\, l(g_2)\dots l(g_n)$ modulo L_{d-1}.

Proof. First consider the correspondence

$$l(\bar{g}_2) \times \cdots \times l(\bar{g}_n) \mapsto l(\pi)\, l(g_2)\dots l(g_n) \bmod L_{d-1}$$

from $K_1 F[t]/(\pi) \times \cdots \times K_1 F[t]/(\pi)$ to L_d/L_{d-1}. We will show that this correspondence is linear, for example as a function of $\bar{g}_2$. Suppose that

$$g_2 \equiv g_2' g_2'' \bmod (\pi),$$

where g_2, g_2', g_2'' are polynomials of degree $< d$. Then

$$g_2 = \pi f + g_2' g_2''$$

where f is also a polynomial of degree $<d$. Hence, if $f \neq 0$,

$$1 = \pi f/g_2 + g_2' g_2''/g_2$$

and therefore

$$\big(l(\pi)+l(f)-l(g_2)\big)\big(l(g_2')+l(g_2'')-l(g_2)\big)=0.$$

Multiplying on the right by $l(g_3)\dots l(g_n)$, and then reducing modulo L_{d-1}, we obtain

$$l(\pi)\big(l(g_2')+l(g_2'')-l(g_2)\big)\, l(g_3)\dots l(g_n) \equiv 0.$$

Since the case $f=0$ is straight forward, this proves that our correspondence is $(n-1)$-linear.

To prove that this correspondence gives rise to a homomorphism

$$l(\bar{g}_2)\dots l(\bar{g}_n) \mapsto l(\pi)\, l(g_2)\dots l(g_n)$$

from $K_{n-1}\bar{F}$ to L_d/L_{d-1}, it is now only necessary to note that the image is zero whenever $\bar{g}_j+\bar{g}_{j+1}=\bar{1}$ and hence $g_j+g_{j+1}=1$. This proves 2.4.

Lemma 2.5. *The homomorphisms ∂_π give rise to an isomorphism between L_d/L_{d-1} and the direct sum of $K_{n-1}F[t]/(\pi)$ as π ranges over monic irreducible polynomials of degree d.*

Proof. Inspection shows that each ∂_π induces a homomorphism

$$L_d/L_{d-1} \to K_{n-1}F[t]/(\pi).$$

Furthermore it is clear that the composition

$$K_{n-1}F[t]/(\pi) \xrightarrow{h_\pi} L_d/L_{d-1} \xrightarrow{\partial_{\pi'}} K_{n-1}F[t]/(\pi')$$

is either the identity or zero, according as $\pi=\pi'$ or $\pi \neq \pi'$. So to complete the argument we need only to show that L_d/L_{d-1} is generated by the images of the h_π.

Consider any generator of L_d, expressed as a product $l(f_1)\dots l(f_s)\, l(g_{s+1})\dots l(g_n)$ where $f_1, \dots, f_s$ have degree d and $g_{s+1}, \dots, g_n$ have degree $<d$. If $s \geqq 2$ then we can set

$$f_2 = -af_1 + g$$

with $a \in F^\bullet$ and degree $g<d$. If $g \neq 0$ it follows that

$$af_1/g + f_2/g = 1$$

hence

$$\big(l(a)+l(f_1)-l(g)\big)\big(l(f_2)-l(g)\big)=0.$$

Thus the product $l(f_1)\, l(f_2)$ can be expressed as a sum of terms

$$l(f_1)\, l(g)+l(g)\, l(f_2)-l(a)\, l(f_2)+l(a)\, l(g)-l(g)^2,$$

each of which involves at most one polynomial of degree d. A similar situation obtains when $g=0$. It follows, by induction on s, that every element of L_d can be expressed, modulo L_{d-1}, in terms of products $l(f_1)\,l(g_2)\ldots l(g_n)$ where only f_1 has degree d. If f_1 is irreducible, then setting $f=a\,\pi$ this product evidently belongs to the image of h_π. But if f_1 is reducible then the product is congruent to zero modulo L_{d-1}. Thus L_d/L_{d-1} is generated by the images of the homomorphisms h_π, which completes the proof of 2.5.

An easy induction on d now shows that the homomorphisms ∂_π induce an isomorphism from L_d/L_0 to the direct sum of $K_{n-1}F[t]/(\pi)$, taken over all monic irreducible π of degree $\leqq d$. Passing to the direct limit as $d\to\infty$, this completes the proof of Theorem 2.3.

To conclude this section, let us record a similar, but easier statement.

Lemma 2.6. *Suppose that a field E is complete under a discrete valuation with residue class field $\bar{E}=F$. Then for any prime p distinct from the characteristic of $\bar{E}$ there is a natural split exact sequence*

$$0\to K_nF/p\,K_nF\to K_nE/p\,K_nE\xrightarrow{\partial}K_{n-1}F/p\,K_{n-1}F\to 0.$$

Proof. If a unit of E maps to 1 in F, then it has a p-th root. Hence the correspondence $l(\bar{u})\mapsto l(u) \bmod p\,K_1E$ is well defined. This correspondence extends to a ring homomorphism

$$K_*F\to K_*E/p\,K_*E.$$

Further details will be left to the reader.

§ 3. The Stiefel-Whitney Invariants of a Quadratic Module

For the rest of this paper we will only be interested in the quotient of the ring K_*F by the ideal $2K_*F$. To simplify the notation, let us set

$$k_nF=K_nF/2\,K_nF.$$

Thus k_*F is a graded algebra over $Z/2Z$, with $k_1F\cong F^\bullet/F^{\bullet 2}$. *We will always assume that F has characteristic $\neq 2$.*

The symbol $k_\Pi F$ will stand for the algebra consisting of all formal series $\xi_0+\xi_1+\xi_2+\cdots$ with $\xi_i\in k_iF$. Thus $k_\Pi F$ is additively isomorphic to the cartesian product $k_0F\times k_1F\times k_2F\times\cdots$.

Let M be a *quadratic module* over F. That is M is a finite dimensional vector space with a non-degenerate symmetric bilinear inner product. Then M is isomorphic to an orthogonal direct sum $\langle a_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle a_r\rangle$ of one dimensional modules. Here $\langle a\rangle$ denotes the one dimensional quadratic module such that the inner product of a suitable basis vector with itself is a.

Define the *Stiefel-Whitney invariant*

$$w(M) \in k_\Pi F$$

of a quadratic module $M \cong \langle a_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle a_r \rangle$ by the formula

$$w(M) = (1 + l(a_1))(1 + l(a_2)) \ldots (1 + l(a_r)).$$

Thus $w(M)$ can be written as

$$1 + w_1(M) + \cdots + w_r(M)$$

where $w_i(M)$, the i-th *Stiefel-Whitney invariant*, is equal to the i-th elementary symmetric function of $l(a_1), \ldots, l(a_r)$ considered as an element of $k_i F$.

Evidently w_1 is just the classical "discriminant" of M, and w_2 is closely related to the classical Hasse-Witt invariant.

Remark. This definition is very similar to the definition proposed by Delzant [5]. However Delzant's Stiefel-Whitney classes belong to the cohomology $H^*(G_F; Z/2Z)$ of the maximal Galois extension of F. They are precisely the images of our w_i under a canonical homomorphism

$$k_* F \to H^*(G_F; Z/2Z)$$

which is described in § 6.

Lemma 3.1. *The invariant $w(M)$ is a well defined unit in the ring $k_\Pi F$ and satisfies the Whitney sum formula*

$$w(M \oplus N) = w(M)\, w(N).$$

Proof. Just as in the classical proof that the Hasse-Witt invariant is well defined, it suffices to consider the rank 2 case. (Compare O'Meara [12, p. 150].) Suppose then that

$$\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \cong \langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle.$$

Then the discriminant ab must be equal to $\alpha\beta$ multiplied by a square; or in other words

$$l(a) + l(b) \equiv l(\alpha) + l(\beta) \mod 2K_1 F. \tag{4}$$

Furthermore, the equation $\alpha = a x^2 + b y^2$ must have a solution $x, y \in F$. Since the case $x = 0$ or $y = 0$ is easily disposed of, we may assume that $x \neq 0$, $y \neq 0$. Then the equation

$$1 = a x^2/\alpha + b y^2/\alpha$$

implies that

$$\begin{aligned} 0 &= (l(a) + 2l(x) - l(\alpha))(l(b) + 2l(y) - l(\alpha)) \\ &\equiv (l(a) - l(\alpha))(l(b) - l(\alpha)) \mod 2K_2 F. \end{aligned}$$

Rearranging terms, and then substituting (4) this implies that

$$\begin{aligned} l(a)\,l(b) &\equiv l(\alpha)\,(l(a)+l(b)-l(\alpha)) \\ &\equiv l(\alpha)\,l(\beta) \mod 2K_2F; \end{aligned}$$

which completes the proof.

Remark. Delzant shows that a quadratic module over a number field is determined up to isomorphism by its rank and Stiefel-Whitney cohomology classes. But Scharlau points out that the corresponding statement for an arbitrary field is false. The same statements, proofs, and examples apply to our Stiefel-Whitney invariants.

Now let us introduce the *Witt-Grothendieck ring* $\hat{W}F$, consisting of all formal differences $M-N$ of quadratic modules over F; where $M-N$ equals $M'-N'$ if and only if the orthogonal direct sum $M\oplus N'$ is isomorphic to $M'\oplus N$. (Compare [5, 14].) The product operation in $\hat{W}F$ is characterized by the identity

$$\langle a\rangle\langle b\rangle=\langle a\,b\rangle.$$

The *augmentation ideal*, consisting of all $M-N$ in $\hat{W}F$ with $\operatorname{rank}M=\operatorname{rank}N$, will be denoted by $\hat{I}F$, and its n-th power by $\hat{I}^nF$.

Evidently the function w extends uniquely to a homomorphism from the additive group of $\hat{W}F$ to the multiplicative group of units in $k_\Pi F$; where

$$w(M-N)=w(M)/w(N)$$

by definition.

Next consider a generator

$$\xi=(\langle a_1\rangle-\langle 1\rangle)(\langle a_2\rangle-\langle 1\rangle)\ldots(\langle a_n\rangle-\langle 1\rangle) \tag{5}$$

of the ideal $\hat{I}^nF$. Let $t=2^{n-1}$.

Lemma 3.2. *The Stiefel-Whitney invariant w of such a product ξ is equal to either*

$$1+l(a_1)\ldots l(a_n)\,l(-1)^{t-n}$$

or

$$(1+l(a_1)\ldots l(a_n)\,l(-1)^{t-n})^{-1}$$

according as n is odd or even.

Proof. Multiplying out the formula (5), we obtain

$$\xi=\sum\pm\langle a_1^{\varepsilon_1}\ldots a_n^{\varepsilon_n}\rangle,$$

to be summed as $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ range over 0 and 1. Here and subsequently, $\pm$ stands for the sign $(-1)^{\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n+n}$. Therefore

$$w(\xi)=\prod(1+\varepsilon_1\,l(a_1)+\cdots+\varepsilon_n\,l(a_n))^{\pm 1}.$$

Consider the corresponding product

$$\prod (1+\varepsilon_1 x_1+\cdots+\varepsilon_n x_n)^{\pm 1} \tag{6}$$

in the ring of formal power series with mod 2 coefficients in n indeterminates. If we substitute 0 for some x_i, then evidently this product becomes 1. Hence the product (6) must be equal to

$$1+x_1 \ldots x_n f(x_1, \ldots, x_n)$$

for some formal power series f. Therefore

$$\begin{aligned} w(\xi) &= 1+l(a_1)\ldots l(a_n) f\big(l(a_1), \ldots, l(a_n)\big) \\ &= 1+l(a_1)\ldots l(a_n) f\big(l(-1), \ldots, l(-1)\big); \end{aligned}$$

using § 1.2.

To compute the power series $f\big(l(-1), \ldots, l(-1)\big)$ it suffices to substitute $x_1=\cdots=x_n=x$ in (6), so as to compute $f(x, \ldots, x)$. Evidently the product reduces to either $(1+x)^t$ or $(1+x)^{-t}$ according as n is odd or even; where $t=2^{n-1}$. For n odd it follows that

$$1+x^n f(x, \ldots, x)=(1+x)^t=1+x^t,$$

so that

$$f(x, \ldots, x)=x^{t-n};$$

and a similar computation can be carried out for n even. This completes the proof.

Corollary 3.3 *If $t=2^{n-1}$, then the invariants $w_1, \ldots w_{t-1}$ annihilate the ideal $\hat{I}^n F$, while w_t induces a homomorphism*

$$w_t\colon \hat{I}^n F/\hat{I}^{n+1} F \to k_t F$$

which carries the product

$$(\langle a_1\rangle-\langle 1\rangle)\ldots(\langle a_n\rangle-\langle 1\rangle)$$

to $l(a_1)\ldots l(a_n)\, l(-1)^{t-n}$.

Proof. Since the elements $\langle a\rangle-\langle 1\rangle$ form an additive set of generators for $\hat{I}F$, it is clear that the n-fold products of such elements generate $\hat{I}^n F$. The conclusion now follows immediately.

Remark 3.4. These formulas suggest that the Stiefel-Whitney invariants are not independent of each other. In fact the following is true: *If n is not a power of 2, then $w_n(M)$ can be expressed as a product $w_r(M)\, w_{n-r}(M)$ where r is the highest power of 2 dividing n.*

(Compare also [14, § 2.2.2].) The proof can be outlined as follows. Interpreting w_s as an elementary symmetric function, and using § 1.2,

it is not difficult to show that

$$w_r w_s = \sum (i, r-i, s-i)\, w_{r+s-i}\, l(-1)^i,$$

to be summed over $0 \leqq i \leqq \mathrm{Min}\{r, s\}$. Here (i, j, k) stands for the trinomial coefficient $(i+j+k)!/i!\,j!\,k!$. But if r is a power of 2, and if

$$s \equiv 0 \bmod 2r,$$

then this identity takes the simple form

$$w_r w_s = w_{r+s}$$

which completes the outlined proof.

§4. The Surjection $K_n/2K_n \to I^n/I^{n+1}$

Let F be a field of characteristic $\neq 2$. The Witt ring $W = WF$ can be defined as the quotient $\hat{W}/H$, where $\hat{W}$ is the Witt-Grothendieck ring of §3, and H is the free cyclic additive group spanned by $\langle 1\rangle \oplus \langle -1\rangle$. Clearly H is an ideal, so that W is a ring. Note that the augmentation ideal $\hat{I}$ in $\hat{W}$ maps bijectively to a maximal ideal in W. This image ideal will be denoted by $I = IF$.

(Remark. The utility of working with W, rather than $\hat{W}$, will become apparent only in §5.)

As in §3, we set $k_n F = K_n F/2K_n F$. This will sometimes be abbreviated as $k_n = K_n/2K_n$.

Theorem 4.1. *There is one and only one homomorphism*

$$s_n\colon\ k_n F \to I^n F/I^{n+1} F$$

which carries each product $l(a_1)\dots l(a_n)$ in $k_n F$ to the product

$$(\langle a_1\rangle - \langle 1\rangle)\dots(\langle a_n\rangle - \langle 1\rangle)$$

modulo $I^{n+1}F$. The homomorphisms s_1 and s_2 are bijective (compare [13]*); and every s_n is surjective.*

Proof. The correspondence

$$l(a_1) \times \cdots \times l(a_n) \mapsto \prod (\langle a_i\rangle - \langle 1\rangle) \quad \bmod I^{n+1}$$

from $K_1 \times \cdots \times K_1$ to I^n/I^{n+1} is n-linear since

$$\langle a\rangle - \langle 1\rangle + \langle b\rangle - \langle 1\rangle \equiv \langle a\,b\rangle - \langle 1\rangle \quad \bmod I^2.$$

Furthermore, if $a_i + a_{i+1} = 1$ then an easy computation shows that

$$(\langle a_i\rangle - \langle 1\rangle)(\langle a_{i+1}\rangle - \langle 1\rangle) = 0,$$

so the image is zero. Thus this correspondence gives rise to a homomorphism $K_n \to I^n/I^{n+1}$. This homomorphism annihilates $2K_n$ since

$$2l(a_1)\dots l(a_n) = l(a_1^2)\, l(a_2)\dots l(a_n)$$

with

$$\langle a_1^2\rangle - \langle 1\rangle = 0.$$

Thus we have shown that the homomorphism

$$s_n\colon\ K_n/2K_n \to I^n/I^{n+1}$$

exists and is well defined. This homomorphism is clearly surjective, since the elements $\langle a\rangle - \langle 1\rangle$ form an additive set of generators for the ideal I.

Now let $t = 2^{n-1}$, and consider the homomorphism

$$w_t\colon\ I^n/I^{n+1} \cong \hat{I}^n/\hat{I}^{n+1} \to k_t$$

of § 3.3. Evidently the composition $w_t \circ s_n$ is just multiplication by $l(-1)^{t-n}$.

But if n equal 1 or 2, then $t = n$, and the appropriate statement is that $w_n \circ s_n$ is the identity. This shows that s_1 and s_2 are bijective; which completes the proof of 4.1.

Remark 4.2. For $n > 2$, this argument proves the following: *If multiplication by $l(-1)^{t-n}$ carries k_nF injectively into k_tF, then the homomorphism*

$$s_n\colon\ k_nF \to I^n/I^{n+1}$$

is necessarily bijective.

Evidently there are two key questions in relating k_* to the Witt ring W. Let F be any field of characteristic $\neq 2$.

Question 4.3. *Is the homomorphism $s_n\colon\ k_nF \to I^n/I^{n+1}$ bijective for all values of n?*

Question 4.4. *Is the intersection of the ideals I^n equal to zero?* (Compare [13, 14].)

This section will conclude by proving two preliminary results. (See also §§ 5.2 and 5.8.)

Lemma 4.5. *If F is a global field, or a direct limit of global fields, then both questions have affirmative answers.*

Proof. Using Tate's explicit computation of k_*F for a global field (§ 1.8 or the Appendix), we see that multiplication by $l(-1)$ induces isomorphisms

$$k_3F \to k_4F \to k_5F \to \cdots.$$

Together with § 4.2, this proves that s_n is bijective in the case of a global field. The corresponding statement for a direct limit follows immediately.

As to the intersection of the ideals I^n, first note that each embedding of F in the real field gives rise to a ring homomorphism

$$WF \to WR \cong Z$$

called the *signature*. Note that an element of $I^3 F$ is zero if and only if its signature at every embedding $F \to R$ is zero. In the case of a global field, this statement follows immediately from the Hasse-Minkowski theorem; and for the direct limit of a sequence

$$F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$$

of global fields it follows easily using the isomorphisms

$$W \varinjlim F_\alpha = \varinjlim WF_\alpha$$

and

$$\mathrm{Emb}(\varinjlim F_\alpha, R) = \varprojlim \mathrm{Emb}(F_\alpha, R).$$

But each such signature carries the ideal IF to $2Z$, and hence carries the intersection of the ideals $I^n F$ to $\bigcap 2^n Z = 0$. This completes the proof.

Lemma 4.6. *Now suppose that F is a field such that $k_2 F$ has at most two distinct elements. Then again the s_n are bijective and $\bigcap I^n = 0$.*

Notice that this includes the case of a finite, or local, or real closed, or quadratically closed field; as well as any direct limit of such fields.

Proof. If k_1, modulo the null-space of the pairing $k_1 \otimes k_1 \to k_2$, has dimension $\neq 1$, then Kaplansky and Shaker [6] show that a quadratic module is completely determined by its rank, discriminant, and Hasse-Witt invariant. It follows that $I^3 = 0$. But just as in §1.7 one sees that $k_3 = 0$. Since s_1 and s_2 are already known to be bijective, it certainly follows that every s_n is bijective.

On the other hand if k_1 modulo this null-space has dimension 1, then it is easy to define the "signature" of a quadratic module, and to show that the rank, discriminant, and signature form a complete invariant. (Compare [6, Lemma 1].) Since the signature of an element in I^n is divisible by 2^n, it follows that $\bigcap I^n = 0$. Futhermore, techniques similar to those of §1.4 show that k_n is cyclic of order 2, generated by $l(-1)^n$, for every $n \geqq 2$; hence §4.2 implies that every s_n is bijective. This completes the proof.

§5. The Witt Ring of a Rational Function Field

This section will study the Witt ring, using constructions very similar to those of §2.

First consider a field E which is complete under a discrete valuation v, with residue class field $\bar{E}$ of characteristic $\neq 2$. Let π be a prime element.

Theorem of Springer. *The Witt ring WE contains a subring W_0 canonically isomorphic to $W\bar{E}$. Furthermore WE, splits additively as the direct sum of W_0 and $\langle\pi\rangle W_0$.*

In fact W_0 can be defined as the subring generated by $\langle u\rangle$ as u ranges over units of E, and the isomorphism $W_0 \to W\bar{E}$ is defined by the correspondence $\langle u\rangle \mapsto \langle\bar{u}\rangle$.

For the proof, see T.A. Springer [16]. Since $\langle\pi\rangle^2 = \langle 1\rangle$, it follows that the ring WE is completely determined by $W\bar{E}$.

Corollary 5.1. *There is a split exact sequence*

$$0 \to W\bar{E} \to WE \xrightarrow{\partial} W\bar{E} \to 0,$$

where the first homomorphism carries $\langle\bar{u}\rangle$ to $\langle u\rangle$, and where ∂ is defined by the conditions

$$\partial\langle u\rangle = 0, \quad \partial\langle\pi u\rangle = \langle\bar{u}\rangle.$$

Note however that ∂ depends on the particular choice of the prime element π.

The proof is straightforward.

Corollary 5.2. *If the questions* 4.3 *and* 4.4 *have affirmative answers for the residue class field $\bar{E}$, then they also have affirmative answers for E.*

Proof. It will be convenient to identify $W\bar{E}$ with the sub-ring $W_0 \subset WE$. Note that the ideal IE then splits as a direct sum

$$IE = I\bar{E} \oplus (\langle\pi\rangle - \langle 1\rangle)\, W\bar{E}.$$

It follows inductively that

$$I^n E = I^n \bar{E} \oplus (\langle\pi\rangle - \langle 1\rangle)\, I^{n-1}\bar{E}.$$

Hence the sequence 5.1 gives rise to a split exact sequence

$$(7_n) \qquad 0 \to I^n\bar{E} \to I^n E \to I^{n-1}\bar{E} \to 0.$$

Consider the diagram

$$\begin{array}{ccccc} k_n\bar{E} & \longrightarrow & k_n E & \longrightarrow & k_{n-1}\bar{E} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ I^n\bar{E}/I^{n+1}\bar{E} & \to & I^n E/I^{n+1}E & \to & I^{n-1}\bar{E}/I^n\bar{E}, \end{array}$$

where the top sequence comes from §2.6, the vertical arrows from §4.1, and the bottom sequence is the quotient of (7_n) by (7_{n+1}). Checking that this diagram is commutative, and then applying the Five Lemma, the conclusion follows.

Now consider a field $E=F(t)$ of rational functions. For each monic irreducible $\pi\in F[t]$ we can form the π-adic completion E_π, with residue class field

$$\bar{E}_\pi \cong F[t]/(\pi).$$

Let

$$\partial_\pi\colon\ WE \to W\bar{E}_\pi$$

denote the composition of the natural map $WE \to WE_\pi$ with the homomorphism ∂ of 5.1. Evidently $\partial_\pi\langle u\rangle = 0$ and $\partial_\pi\langle \pi u\rangle = \langle \bar{u}\rangle$.

Theorem 5.3. *These homomorphisms ∂_π give rise to a split exact sequence*

$$0 \to WF \to WE \to \oplus W\bar{E}_\pi \to 0,$$

where $E=F(t)$, and where the summation extends over all monic irreducible polynomials π in $F[t]$.

The proof will be based on the Tate technique already utilized in §2.3. Let $L_d \subset WE$ denote the subring generated by all $\langle f\rangle$ such that $f\in F[t]$ is a polynomial of degree $\leqq d$. Thus

$$L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots$$

with union WE. Additively, L_d is generated by all products $\langle f_1 \ldots f_s\rangle$ where the f_i are polynomials of degree $\leqq d$.

Note that L_0 is just the image of the natural homomorphism $WF \to WE$.

Lemma 5.4. *In fact WF maps bijectively to L_0. Furthermore L_0 is a retract of WE under a ring homomorphism*

$$\rho\colon\ WE \to WF \cong L_0.$$

Proof. Choose some monic polynomial π of degree 1, and define ρ by the conditions

$$\rho\langle u\rangle = \langle \bar{u}\rangle, \qquad \rho\langle \pi u\rangle = \langle \bar{u}\rangle.$$

Here u denotes any unit with respect to the (π)-adic valuation. It follows from Springer's theorem, applied to the (π)-adic completion, that ρ is a well defined ring homomorphism. Since the composition

$$WF \to WE \xrightarrow{\rho} WF$$

is the identity, this proves 5.4.

Now suppose that $d\geqq 1$.

Lemma 5.5. *The additive group L_d is generated, modulo L_{d-1}, by expressions $\langle \pi g_1 \ldots g_s\rangle$ where π is an irreducible polynomial of degree d, and $g_1, \ldots, g_s$ are polynomials of degree $<d$. Furthermore if f is the poly-*

nomial of degree $<d$ defined by

$$f \equiv g_1 \dots g_s \mod (\pi),$$

then

$$\langle \pi f \rangle \equiv \langle \pi g_1 \dots g_s \rangle \mod L_{d-1}.$$

Proof. First note that the identity

$$\langle a+b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle - \langle a\, b(a+b) \rangle \tag{8}$$

holds in the Witt ring of any field.

Consider a generator $\langle f_1 \dots f_r g_1 \dots g_s \rangle$ of L_d, where the polynomials $f_1, \dots, f_r$ are distinct, monic of degree d, and where $g_1, \dots, g_s$ have degree $<d$. If $r \geqq 2$, then defining a polynomial h of degree $<d$ by

$$f_1 = f_2 + h,$$

the identity (8) becomes

$$\langle f_1 \rangle = \langle f_2 \rangle + \langle h \rangle - \langle f_1 f_2 h \rangle.$$

Multiplying by $\langle f_2 \dots f_r g_1 \dots g_s \rangle$ and cancelling all squared factors, it follows that $\langle f_1 \dots f_r g_1 \dots g_s \rangle$ is equal to

$$\langle f_3 \dots g_s \rangle + \langle h f_2 \dots g_s \rangle - \langle f_1 h f_3 \dots g_s \rangle.$$

Since each of these terms has at most $r-1$ factors of degree d, it follows by induction on r that L_d is generated, modulo L_{d-1}, by expressions $\langle f g_1 \dots g_s \rangle$ where f is monic of degree d and the g_i have degree $<d$. We may clearly assume that f is irreducible.

Consider then such a generator $\langle \pi g_1 \dots g_s \rangle$ with π monic and irreducible. Setting

$$g_1 g_2 \equiv h \mod (\pi)$$

with degree $h < d$, we have

$$g_1 g_2 = h + \pi k$$

for some k of degree $<d$, hence

$$\langle g_1 g_2 \rangle = \langle h \rangle + \langle \pi k \rangle - \langle \pi k h g_1 g_2 \rangle.$$

Multiplying by $\langle \pi g_3 \dots g_s \rangle$, this shows that $\langle \pi g_1 \dots g_s \rangle$ is equal to

$$\langle \pi h g_3 \dots g_s \rangle + \langle k g_3 \dots g_s \rangle - \langle k h g_1 \dots g_s \rangle \equiv \langle \pi h g_3 \dots g_s \rangle \mod L_{d-1}.$$

An easy induction now completes the proof of 5.5.

Now consider the field $\bar{E}_\pi = F[t]/(\pi)$, where π is monic irreducible of degree d. For each residue class $\bar{f}$ modulo (π), let f denote the unique polynomial of degree $<d$ representing $\bar{f}$.

Lemma 5.6. *The correspondence*

$$\langle \bar{f} \rangle \mapsto \langle \pi f \rangle \mod L_{d-1}$$

gives rise to a homomorphism from $W\bar{E}_\pi$ *to* L_d/L_{d-1}.

Proof. For any field F of characteristic $\neq 2$ it is not difficult to show that the additive group of WF has a presentation in terms of generators $\langle a \rangle$, where a ranges over $F^\bullet$, subject only to the relations

$$\langle a b^2 \rangle = \langle a \rangle,$$
$$\langle a+b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle - \langle a\, b(a+b) \rangle,$$
$$\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle = 0,$$

and their consequences. But, substituting $\bar{E}_\pi$ for F, each such relation in $W\bar{E}_\pi$ maps to a valid relation in L_d/L_{d-1}. Thus if

$$f g(f+g) \equiv h \mod (\pi),$$

where f, g, h are non-zero polynomials of degree $< d$, then the relation

$$\langle \bar{f} + \bar{g} \rangle = \langle \bar{f} \rangle + \langle \bar{g} \rangle - \langle \bar{h} \rangle$$

in $W\bar{E}_\pi$ corresponds to the relation

$$\begin{aligned} \langle \pi(f+g) \rangle &= \langle \pi f \rangle + \langle \pi g \rangle - \langle \pi f g(f+g) \rangle \\ &\equiv \langle \pi f \rangle + \langle \pi g \rangle - \langle \pi h \rangle \mod L_{d-1}; \end{aligned}$$

making use of Lemma 5.5. Similarly, if $f g^2 \equiv k \mod (\pi)$, then the relation $\langle \bar{f} \rangle = \langle \bar{k} \rangle$ corresponds to $\langle \pi f \rangle = \langle \pi f g^2 \rangle \equiv \langle \pi k \rangle$. Finally, the relation $\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle = 0$ corresponds to $\langle \pi \rangle + \langle -\pi \rangle = 0$. So it follows that the correspondence $\langle \bar{f} \rangle \mapsto \langle \pi f \rangle \mod L_{d-1}$ does indeed define a homomorphism from $W\bar{E}_\pi$ to L_d/L_{d-1}. This proves 5.6.

Proof of Theorem 5.3. The argument is very similar to that in §2.5. First one checks that the composition

$$W\bar{E}_\pi \to L_d/L_{d-1} \xrightarrow{\partial_{\pi'}} W\bar{E}_{\pi'}$$

is either the identity or zero according as $\pi = \pi'$ or $\pi \neq \pi'$. Using 5.5, it follows that L_d/L_{d-1} splits canonically as the direct sum of those $W\bar{E}_\pi$ for which degree $\pi = d$.

Now induction on d shows that the homomorphisms ∂_π give rise to an isomorphism

$$L_d/L_0 \to \oplus_{\text{degree } \pi \leqq d} W\bar{E}_\pi.$$

Passing to the direct limit as $d \to \infty$, this completes the proof of 5.3.

Remark. More generally, suppose that E is a finite extension field of $F(t)$. Every valuation v of E which is trivial on F gives rise to a homomorphism

$$\partial_v\colon WE \to W\bar{E}_v,$$

well defined up to multiplication by a unit of the form $\langle \bar{e} \rangle$. It would be very interesting to know something about the kernel and cokernel of the associated homomorphism

$$WE \to \oplus W\bar{E}_v.$$

For the special case $E=F(t)$, both kernel and cokernel turn out to be isomorphic to WF.

Perhaps one may find some clue by applying the analogous construction to a global field. As an example, for the field Q of rationals, there is an additive isomorphism

$$WQ \to Z \oplus (Z/2Z) \oplus \oplus_{p \text{ odd}} W(Z/pZ),$$

using the signature and the correspondence

$$\langle q \rangle \mapsto \operatorname{ord}_2 q \mod 2$$

to map to the first two summands, and using the homomorphisms ∂_p for the third.

Now let us bring the multiplicative structure of W into Theorem 5.3. Again let $E=F(t)$.

Lemma 5.7. *The sequence* 5.3 *gives rise to an exact sequence*

$$0 \to I^n F \to I^n E \to \oplus I^{n-1} \bar{E}_\pi \to 0$$

for any $n \geqq 1$.

Proof. The proof of 5.2 shows that each ∂_π maps $I^n E$ to $I^{n-1}\bar{E}_\pi$. Consider any generator

$$\eta = (\langle \bar{f}_2 \rangle - \langle \bar{1} \rangle) \ldots (\langle \bar{f}_n \rangle - \langle \bar{1} \rangle)$$

of $I^{n-1}\bar{E}_\pi$. Let degree $\pi = d$. Then the product

$$\xi = (\langle \pi \rangle - \langle 1 \rangle)(\langle f_2 \rangle - \langle 1 \rangle) \ldots (\langle f_n \rangle - \langle 1 \rangle)$$

in $I^n E$, where each representative f_i has degree $< d$, satisfies $\partial_\pi \xi = \eta$, and satisfies $\partial_{\pi'} \xi = 0$ for every $\pi' \neq \pi$ with degree $\pi' \geqq d$.

Now, given any element (η_π) of $\oplus I^{n-1}\bar{E}_\pi$, let

$$d_0 = \operatorname{Max} \{\text{degree } \pi \mid \eta_\pi \neq 0\}.$$

Then it follows by induction on d_0 that (η_π) is the image of some element in $I^n E$.

To prove exactness in the middle of the sequence 5.7, consider any $\xi \in I^n E$ which maps to zero in $\oplus I^{n-1}\bar{E}_\pi$. According to 5.3, ξ comes from some element ζ of WF. Now apply the homomorphism ρ of §5.4. Evidently ρ maps $I^n E$ into $I^n F$, and evidently $\rho(\xi)=\zeta$. This proves that $\zeta \in I^n F$; which completes the proof of 5.7.

Corollary 5.8. *If the questions* 4.3 *and* 4.4 *have affirmative answers for every finite extension* $\bar{E}_\pi$ *of a field* F, *then they have affirmative answers for the field* $E=F(t)$ *of rational functions.*

The proof is completely analogous to that of 5.2.

§6. Relations with Galois Cohomology

The following construction is due to Bass and Tate. For any field F of characteristic $\neq 2$, let F_s be a separable closure, and let $G=G_F$ be the Galois group of F_s over F. Then the exact sequence

$$1 \to \{\pm 1\} \to F_s^\bullet \xrightarrow{2} F_s^\bullet \to 1,$$

upon which G operates, leads to an exact sequence

$$H^0(G; F_s^\bullet) \xrightarrow{2} H^0(G; F_s^\bullet) \to H^1(G; \{\pm 1\}) \to H^1(G; F_s^\bullet)$$

of cohomology groups; where the right hand group is zero. Identifying the first two groups with $F^\bullet$, and substituting $Z/2Z$ for $\{\pm 1\}$, this yields

$$F^\bullet \xrightarrow{2} F^\bullet \xrightarrow{\delta} H^1(G; Z/2Z) \to 0.$$

The quotient $F^\bullet/F^{\bullet 2}$ can of course be identified with $k_1 F$.

Lemma 6.1 (Bass, Tate). *The isomorphism* $l(a) \mapsto \delta(a)$ *from* $k_1 F$ *to* $H^1(G; Z/2Z)$ *extends uniquely to a ring homomorphism*

$$h_F\colon\ k_* F \to H^*(G; Z/2Z).$$

Proof. It is only necessary to verify that each of the defining relations $l(a)\, l(1-a)=0$ for the ring $k_* F$ maps to a valid relation

$$\delta(a)\, \delta(1-a)=0$$

in $H^2(G; Z/2Z)$. But in fact, if we identify $H^2(G; Z/2Z)$ with the set of elements of order 2 in the Brauer group $H^2(G; F_s^\bullet)$, then $\delta(a)\, \delta(b)$ corresponds to the quaternion algebra associated with a, b. (Compare Delzant [5].) Since the quaternion algebra associated with $a, 1-a$ splits, the relation $\delta(a)\, \delta(1-a)=0$ follows.

Remark. Bass and Tate [3] also consider the more general homomorphism associated with the sequence

$$1 \to \{m\text{-th roots of } 1\} \to F_s^\bullet \xrightarrow{m} F_s^\bullet \to 1,$$

but we will only be interested in the case $m=2$.

I do not know of any examples for which the homomorphism $h=h_F$ fails to be bijective. Here is a list of special cases.

Lemma 6.2. *If the field F is finite, or local, or global, or real closed, then the homomorphism*

$$h_F\colon\ k_* F \to H^*(G; Z/2Z)$$

is bijective. Furthermore if F is the direct limit of subfields F_α, and if each h_{F_α} is bijective, then h_F is bijective.

Proof. The finite, local, and real closed cases are straightforward. (Compare §1, together with Serre [15, II, pp. 10–20].) Suppose then that F is a global field. Bass and Tate [3] prove that the homomorphism

$$h_2\colon\ k_2 F \to H^2(G; Z/2Z)$$

is bijective. But for $n \geqq 3$ the group $H^n(G; Z/2Z)$ has been completely described by Tate [19, §3.1]. Comparing with Tate's computation of $k_n F$, as described in §1.8 or the Appendix, it follows that h_n is bijective also.

Finally, the statement for direct limits follows easily from [15, I, p. 9]. This completes the proof.

Here is one final partial result. Let $F((t))$ be the field of formal power series in one variable over F.

Theorem 6.3. *If h_F is bijective, then $h_{F((t))}$ is bijective.*

Proof. We will concentrate on the characteristic p case, leaving characteristic zero to the reader. Recall that $p \neq 2$.

Let V be the maximal tamely ramified extension of $F((t))$. (Compare Artin [1, pp. 70, 81].) Then V can be obtained from $F_s((t))$ by adjoining $t^{1/r}$ for every integer r prime to p. The Galois group G_V is a pro-p-group; and the quotient $G_{F_s((t))}/G_V$, which we denote briefly by $G_{V/F_s((t))}$, is isomorphic to $\varprojlim (Z/rZ)$, taking the inverse limit over integers r prime to p. Hence the mod 2 cohomology group

$$H^n G_{F_s((t))} \cong H^n G_{V/F_s((t))}$$

is cyclic of order 2 for $n=0, 1$, and is zero otherwise.

Clearly there is an exact sequence

$$1 \to G_{F_s((t))} \to G_{F((t))} \to G_F \to 1.$$

Dividing the first two groups by G_V, we obtain a sequence

$$1 \to G_{V/F_s((t))} \to G_{V/F((t))} \to G_F \to 1$$

which is actually split exact, since each automorphism of F_s over F lifts uniquely to an automorphism of V which keeps each $t^{1/r}$ fixed.

The associated cohomology spectral sequence now gives rise to a split exact sequence

$$0 \to H^n G_F \to H^n G_{V/F((t))} \to H^{n-1} G_F \to 0.$$

Note that the middle group is canonically isomorphic to $H^n G_{F((t))}$.

With a little work one can check that the homomorphism $H^n G_{F((t))} \to H^{n-1} G_F$ carries each product $\delta(t)\,\delta(u_2)\ldots\delta(u_n)$ to $\delta(\bar{u}_2)\ldots\delta(\bar{u}_n)$. Hence the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccccc} k_n F & \longrightarrow & k_n F((t)) & \longrightarrow & k_{n-1} F \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^n G_F & \longrightarrow & H^n G_{F((t))} & \longrightarrow & H^{n-1} G_F. \end{array}$$

(Compare §2.6.) Applying the Five Lemma, the conclusion 6.3 follows.

Appendix: $K_*/2K_*$ for a Global Field

The arguments in this appendix are due to Tate.

Let F be a global field of characteristic $\neq 2$. We will again use the abbreviation $k_* F$ for the algebra $K_* F/2K_* F$.

The group $k_2 F$ has been computed by Bass and Tate as follows.

Lemma A.1. *There is an exact sequence*

$$0 \to k_2 F \to \oplus\, k_2 F_v \to Z/2Z \to 0,$$

where the summation extends over all completions F_v of F. Here the homomorphism $k_2 F \to k_2 F_v$ is induced by inclusion, and the homomorphism $k_2 F_v \to Z/2Z$ is injective.

In fact we recall from §1 that the group $k_2 F_v$ is cyclic of order 2, unless F_v is the complex field in which case $k_2 F_v$ is clearly zero. The composition

$$k_2 F \to k_2 F_v \subset Z/2Z$$

evidently carries each generator $l(a)\,l(b)$ of $k_2 F$ to either 0 or 1 according as the quadratic Hilbert symbol $(a, b)_v$ is trivial or not.

For the proof, we refer to Bass and Tate [3]. (Alternatively, this lemma can be proved by comparing the isomorphism $k_2 F \cong I^2/I^3$ of §4.1 with standard descriptions of the Witt ring of a global field.)

Theorem A.2 (Tate). *For $n \geqq 3$ the natural homomorphism*

$$k_n F \to \oplus k_n F_v$$

is an isomorphism.

Here the group $k_n F_v$ is cyclic of order 2 if F_v is the real field, and is zero otherwise. So it follows that the groups

$$k_3 F \cong k_4 F \cong k_5 F \cong \cdots$$

are finite, and in fact are zero unless F has a real completion.

To prove A.2, first consider any homomorphism Φ from $k_n F$ to the multiplicative group $\{\pm 1\}$. The image $\Phi(l(a_1) \ldots l(a_n))$ will be denoted briefly by $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$. Thus φ is a symmetric function of n variables, multiplicative in each variable, and $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = 1$ whenever $a_1 + a_2 = 1$.

If $n = 2$, then it follows from A.1 that any such function $\varphi(a, b)$ can be expressed in terms of the Hilbert symbols $(a, b)_v$ as a product

$$\varphi(a, b) = \prod_v (a, b)_v^{\varepsilon_v},$$

where each exponent ε_v is 0 or 1. These exponents are well defined except that we may simultaneously replace each ε_v by $1 - \varepsilon_v$.

Now suppose that $n = 3$. For fixed c the correspondence

$$a, b \mapsto \varphi(a, b, c)$$

can be described as above. Thus there exist exponents $\varepsilon_v(c)$ so that

$$\varphi(a, b, c) = \prod_v (a, b)_v^{\varepsilon_v(c)}.$$

Fixing b and c, consider the idele (d_v) whose v-th component is

$$d_v = b^{\varepsilon_v(c)} c^{\varepsilon_v(b)}.$$

Using the symmetry relation

$$\varphi(a, b, c) = \varphi(a, c, b)$$

it follows that

$$\prod_v (a, d_v)_v = 1. \tag{9}$$

We will need the following classical result.

Lemma A.3. *If an idele (d_v) satisfies the product formula (9) for every non-zero field element a, then (d_v) can be expressed as the product of a field element d and the square of an idele.*

This is proved for example in Weil [20, p. 262].

Thus, given field elements b and c, we can construct the idele (d_v), and hence the field element d, so that

$$d \in b^{\varepsilon_v(c)} c^{\varepsilon_v(b)} F_v^{\bullet 2} \tag{10}$$

for every v.

Consider the extension field $F(\sqrt{b}, \sqrt{c})$. Since d is a square in every completion of this field, it follows that d is a square in the field $F(\sqrt{b}, \sqrt{c})$ itself. By Kummer theory, this implies that d can be expressed as $b^i c^j$ times the square of an element of F. Here the exponents i and j are equal to 0 or 1. The assertion (10) now implies that

$$b^{\varepsilon_v(c)-i} c^{\varepsilon_v(b)-j} \in F_v^{\bullet 2} \tag{11}$$

for every v.

Lemma A.4. *If v and w are discrete valuations (i.e. corresponding to finite primes), then $\varepsilon_v(c) = \varepsilon_w(c)$ for all c.*

Proof. Note that the groups $F_v^{\bullet}/F_v^{\bullet 2}$ and $F_w^{\bullet}/F_w^{\bullet 2}$ both have order at least 4. So given c it is possible to choose b so that the image of b in $F_v^{\bullet}/F_v^{\bullet 2}$ is independent of c, and simultaneously so that the image of b in $F_w^{\bullet}/F_w^{\bullet 2}$ is independent of c. Thus (11) implies that

$$\varepsilon_v(c) - i = 0, \quad \varepsilon_w(c) - i = 0;$$

which proves A.4.

Proof of Theorem A.2. Replacing every $\varepsilon_v(c)$ by $1 - \varepsilon_v(c)$ if necessary, we may assume that $\varepsilon_v(c) = 0$ for every discrete valuation v. Hence in the formula

$$\varphi(a, b, c) = \prod_v (a, b)_v^{\varepsilon_v(c)},$$

we need only take the product over real completions of F. It follows that $\varphi(a, b, c) = 1$ unless there exists a real completion at which both a and b are negative.

But this is true for every φ. So it follows that:

Lemma A.5. *The product $l(a)\, l(b)\, l(c) \in k_3 F$ is zero unless there exists a real completion at which both a and b are negative.*

The rest of the proof is easy. Let $v_1, \ldots, v_r$ be the real valuations, and let $e_1, \ldots, e_r$ be field elements such that e_j is negative in the v_j-th completion but positive in the other real completions. Then A.5 implies that a product $l(e_{i_1}) \ldots l(e_{i_n})$ with $n \geqq 3$ is zero unless $i_1 = \cdots = i_n$. On the other hand the powers $l(e_1)^n, \ldots, l(e_r)^n$ certainly are linearly independent, since they map into linearly independent elements of $\oplus_v k_n F_v$.

Since $F^\bullet$ is generated by $e_1, \ldots, e_r$ together with the totally positive elements, it follows immediately that these powers $l(e_1)^n, \ldots, l(e_r)^n$ actually form a basis for $k_n F$, $n \geqq 3$. This completes the proof.

References

1. Artin, E.: Algebraic numbers and algebraic functions. New York: Gordon and Breach 1967.
2. Bass, H.: K_2 and symbols, pp. 1 – 11 of Algebraic K-theory and its geometric applications. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **108**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1969.
3. – Tate, J.: K_2 of global fields (in preparation).
4. Birch, B. J.: K_2 of global fields (mimeographed proceedings of conference, S. U. N. Y. Stony Brook 1969).
5. Delzant, A.: Definition des classes de Stiefel-Whitney d'un module quadratique sur un corps de caractéristique différente de 2. C. R. Acad. Sci. Paris **255**, 1366 – 1368 (1962).
6. Kaplansky, I., Shaker, R. J.: Abstract quadratic forms. Canad. J. Math. **21**, 1218 – 1233 (1969).
7. Kervaire, M.: Multiplicateurs de Schur et K-théorie (to appear in de Rham Festschrift).
8. Matsumoto, H.: Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples deployés. Ann. Sci. Ec. Norm Sup. 4e série **2**, 1 – 62 (1969).
9. Milnor, J.: Notes on algebraic K-theory (to appear).
10. Moore, C.: Group extensions of p-adic and adelic linear groups. Publ. Math. I. H. E. S. **35**, 5 – 74 (1969).
11. Nobile, A., Villamayor, O.: Sur la K-théorie algébrique. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4e série **1**, 581 – 616 (1968).
12. O'Meara, O. T.: Introduction to quadratic forms. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.
13. Pfister, A.: Quadratische Formen in beliebigen Körpern. Inventiones math. **1**, 116 – 132 (1966).
14. Scharlau, W.: Quadratische Formen und Galois-Cohomologie. Inventiones math. **4**, 238 – 264 (1967).
15. Serre, J. P.: Cohomologie Galoisienne. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **5**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1964.
16. Springer, T. A.: Quadratic forms over a field with a discrete valuation. Indag. Math. **17**, 352 – 362 (1955).
17. Swan, R.: Algebraic K-theory. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **76**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.
18. – Non-abelian homological algebra and K-theory, (mimeographed) Univ. of Chicago, 1968.
19. Tate, J.: Duality theorems in Galois cohomology over number fields. Proc. Int. Congr. Math. Stockholm, 288 – 295 (1963).
20. Weil, A.: Basic number theory. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.

John Milnor
Mathematics Department
Massachusetts Institute of Technology
Cambridge, Mass. 02139 (USA)

(Received February 10, 1970)

Notes for Authors

Authors are kindly requested to note the following points:

Manuscripts should be typed with double spacing on one side only. The paper must be in its final form in order to avoid corrections of the proofs. Changes in content and style are to be avoided; expenses accruing from such additional corrections will be charged to the authors.

Formulae should be written so that no uncertainty can arise as to the meaning and position of signs and characters, even if the reader is not an expert. *Formulae should be type written* and special care taken that indices and exponents can be recognized as such even if they show no difference in size; otherwise they are to be written in a smaller size by hand. Special type (Greek, Gothic, Script) must be indicated by underlining in colour. In order to avoid confusions, the *underlining of Greek characters in red, Gothic in blue and Script in green* is recommended. Characters written by hand are apt to be formed differently in different countries and are frequently hard to identify. For this reason it is advisable to employ Roman characters also for Gothic and Script and to distinguish them simply by underlining in colour. If however, hand written characters have been used, *small and capital letters should be clearly distinguished by underlining capital letters twice and small letters once.* This also applies to Roman characters written by hand such as *c, C*; *k, K*; *o, O*; *p, P*; *s, S*; *u, U*; *v, V*; *w, W*; *x, X*; *z, Z*. Special care should be taken to show the difference between *e* and *l* or *u* and *n* or *n* and *r* or *o* and 0, wherever they appear simultaneously as mathematical symbols written by hand. The characters *v* and *ν* as well as $\in$ and ε are also liable to cause confusion when they appear together. Underlining of formulae and mathematical signs in ink or by means of a typewriter should be avoided as this would inevitably lead to inclusion of the underlining in the composition as part of the mathematical symbol.

The fact that typewriters usually show no difference between the figure 0 (zero) and the letter O, nor, frequently, between 1 (one) and the letter l, leads to considerable confusion. Here it is absolutely essential that each letter and each numeral be individually distinguished. The numeral 1 should be written clearly as such (i.e. with a preceding hook) and not merely as a downward stroke. The latter is particularly disastrous where 1 appears as a superscript. In manuscripts written in English, in which the small (Roman) letter a is employed as a mathematical symbol care must be taken to avoid any confusion with the indefinite article.

All letters contained in formulae, as well as single letters in the text are automatically composed in italics and therefore require no underlining. On the other hand abbreviations in Roman type (the type normally used for the text) that appear in formulae (except in the case of generally familiar abbreviations such as log, or of the trigonometrical functions) must be specially marked (by underlining in yellow, if possible). Bold type should be specially marked (by underlining in brown if possible).

Footnotes which do not belong to the head of the article should be numbered consecutively.

References to the literature should appear not as footnotes but as a numbered and complete bibliography at the end of the article. Journal articles should be cited by initials and name(s) of the author(s), the internationally recognized abbreviation for the name of the journal, the volume, the numbers of the first and last pages and the year of publication. Citations of books should include the author(s), full title, edition, place of publication, publisher and year of publication. In the text a reference to the bibliography should be indicated by the corresponding number enclosed in square brackets and placed on the same level as the rest of line (e.g. [5]).

Diagrams and illustrations should be submitted on separate sheets, apart from the text. A clear unambiguous sketch is satisfactory, since it will be redrawn by the publisher.

75 reprints of each article will be supplied to the author free-of-charge and additional copies may be obtained at cost price if ordered before the issue goes to press.

Manuscripts should be sent to the journal under the following address:

REINHOLD REMMERT
I. Mathematisches Institut der Universität
44 Münster, Schloßplatz 2

Manuscripts may also be submitted through the other editors.

Business communications should be directed to:

Springer-Verlag
69 Heidelberg 1, P.O. 1780
Telephone (06221) 49101, Telex 04-61723

Recommandations aux auteurs

Les auteurs sont priés de se conformer aux instructions suivantes:

Les manuscrits doivent être dactylographiés, avec double interligne, et au recto seulement. Ils doivent être soumis sous forme définitive, afin d'éviter toute modification ultérieure des épreuves. Les corrections d'auteur sont à la charge de ceux-ci.

La lecture des formules ne doit soulever aucun doute quant à l'emplacement et à la signification des symboles et des lettres. *Les formules seront tapées à la machine dans la mesure du possible.* On veillera à éviter toute ambiguïté concernant les exposants et les indices, lorsqu'on utilise pour ceux-ci des caractères de taille normale; sinon, il est recommandé de les écrire à la main, plus petits que les lettres usuelles. Les lettres spéciales (grecques, gothiques, script) seront soulignées en couleur *(rouge pour les lettres grecques, bleu pour les gothiques et vert pour le script)*. Pour éviter des difficultés d'interprétation, il est souhaitable de taper les lettres gothiques et script à la machine, en caractères latins, en les distinguant seulement par le soulignement de couleur. Dans la mesure où l'on emploierait néanmoins des lettres manuscrites, on distinguera (même pour les caractères latins) *les majuscules des minuscules en soulignant les premières deux fois et les autres une fois;* les cas les plus fréquents de confusion sont les suivants: *c*, *C*; *k*, *K*; *o*, *O*; *p*, *P*; *s*, *S*; *u*, *U*; *v*, *V*; *w*, *W*; *z*, *Z*. Il existe aussi un risque de confusion pour les paires *e* et *l*, *u* et *n*, *n* et *r*, *v* et *ν*, ϵ et ε lorsque ces lettres sont écrites à la main.

Toutes les lettres utilisées dans une formule ou isolées dans le texte sont automatiquement composées en italique, et n'ont donc pas besoin d'être soulignées. Cependant, les abréviations qui paraissent dans une formule et doivent être composées en caractères ordinaires (excepté pour des abréviations universellement connues, telles que log, sin, ...) seront soulignées en *jaune*. Les lettres grasses seront soulignées en *brun*. Tout soulignement à l'encre ou à la machine dans une formule ou un symbole sera interprété comme ayant une signification particulière et reproduit dans le texte imprimé.

La plupart des machines à écrire ne distinguant pas le chiffre 0 de la lettre *O* ni le chiffre 1 de la lettre *l*, il importe de préciser dans chaque cas. Le chiffre 1 sera figuré clairement, et non pas simplement par un trait vertical, surtout lorsqu'il est employé comme indice supérieur. Dans les textes en anglais, on distinguera soigneusement la lettre minuscule *a* employée comme signe mathématique de l'article indéfini.

Les notes de bas de page seront numérotées à la suite, et non page par page.

Les références bibliographiques seront groupées en une liste numérotée à la fin de l'article, et non pas insérées dans des notes de bas de page. Pour les articles de revue, on indiquera l'initiale et le nom de l'auteur (ou des auteurs), le nom du journal selon les abréviations internationales en vigueur, le numéro du volume, de la première et de la dernière page, et l'année de la publication. Pour les livres, on mentionnera l'auteur, le titre exact, l'édition, le lieu de publication, l'éditeur et l'année de la parution. Dans le cours du texte, les chiffres entre crochets disposés sur la ligne (par ex. [5]) renvoient aux ouvrages cités dans la bibliographie.

Les schémas et les figures doivent figurer sur des feuillets séparés. Il suffit d'une esquisse nette et sans ambiguïté, l'éditeur se chargeant de recomposer les figures.

Le journal fournit aux auteurs 75 tirés à part gratuits; des exemplaires supplémentaires à prix coûtant peuvent être commandés par les auteurs.

Les manuscrits doivent parvenir à la rédaction du journal, à l'adresse suivante:

REINHOLD REMMERT
I. Mathematisches Institut der Universität
44 Münster, Schloßplatz 2

Ils peuvent également être reçus par les autres membres du comité d'édition.

Adresser toute correspondance administrative ou commerciale à:

Springer-Verlag
69 Heidelberg 1, Postfach 1780
Téléphone (06221) 49101, Télex 04-61723