Werk

Titel: Halbeinfache Gruppenschemata über vollständigen Kurven.

Autor: Harder, G.

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0006|log17

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Inventiones math. 6, 107 – 149 (1968)

Halbeinfache Gruppenschemata über vollständigen Kurven

GÜNTER HARDER (Heidelberg)

Einleitung

Diese Arbeit entstand aus einem Versuch, die folgende Vermutung zu beweisen: Sei K ein eindimensionaler Funktionenkörper über einem endlichen Konstantenkörper $\mathbf{F}_q$. Sei G/K eine halbeinfache, einfach zusammenhängende algebraische Gruppe. Dann ist $H^1(K, G)=0$. (Siehe z.B. [15], Chap. II, § 3.) Es ist mir bislang nicht gelungen, diese Vermutung zu beweisen.

In dieser Arbeit wird zunächst eine ganz andere Frage untersucht. Sei k ein Körper, sei Y/k eine glatte, projektive Kurve über k (s. [9], Chap. IV, 6.8). Sei K/k der Funktionenkörper der Kurve Y/k. Wir wollen in dieser Arbeit halbeinfache Gruppenschemata G/Y, die lokal bezüglich der Zariskitopologie zerfallen, studieren. (Siehe [6], § 3 und [13], 1.1.) Wir wollen solche Gruppenschemata *rational trivial* nennen; denn es sind genau diejenigen, für die $G_K = G \underset{Y}{\times} K$ ein Chevalleyschema ist (s. [13], § 3).

Die ersten beiden Paragraphen dieser Arbeit sind dem systematischen Studium der Boreluntergruppen rational trivialer Gruppenschemata gewidmet. Jeder Boreluntergruppe B eines rational trivialen Gruppenschemas G/Y werden wir ein r-Tupel ganzer Zahlen $n_1(B)\ldots n_r(B)$ zuordnen, wobei r der Rang von G/Y ist. Diese Zahlen $n_i(B)$ sind wie folgt definiert. Sei $\pi=\{\alpha_1\ldots\alpha_r\}$ die Menge der einfachen Wurzeln von B, jeder dieser einfachen Wurzeln ist ein inversibler $\mathcal{O}_Y$-Modul $\tilde{U}_{\alpha_i}$ zugeordnet, und dessen Grad $c(\tilde{U}_{\alpha_i})$ ist $n_i(B)$. (Siehe 1.1 und 2.1.) Als Hauptergebnisse dieser Arbeit sind nun der Satz 2.2.6, der Satz 2.2.13 und das Korollar 2.2.14 anzusehen. Der Satz 2.2.6 besagt: Sei g das Geschlecht der Kurve Y/k, sei $h>0$ die kleinste Zahl, so daß es einen inversiblen $\mathcal{O}_Y$-Modul vom Grad h über Y gibt, dann gibt es stets eine Boreluntergruppe B in G/Y, so daß $n_i(B)\geqq -2g-2(h-1)$. Wir werden eine Boreluntergruppe, deren Invarianten $n_i(B)$ der obigen Ungleichung genügen, *reduziert* nennen. Der Satz 2.2.13 besagt: Sind für eine reduzierte Boreluntergruppe B einige der Invarianten $n_{i_1}(B)\ldots n_{i_s}(B)$ „sehr groß", so sind für jede reduzierte Boreluntergruppe B_1 von G/Y die gleichen Invarianten $n_{i_1}(B_1)\ldots n_{i_s}(B_1)$ auch „sehr groß". Sei unter den gleichen Voraussetzungen $P\supset B$

die parabolische Untergruppe vom Typ $t(P)=\pi-\{\alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_s}\}$ (s. 1.2), so sagt Korollar 2.2.14, daß auch $B_1 \subset P$.

Im § 3 wenden wir unsere Resultate auf den Fall an, daß Y die projektive Gerade $\mathbf{P}^1_k/k$ ist (s. [9], Chap. II, § 4). Falls k die Charakteristik 0 hat, erhalten wir dann gerade die Ergebnisse von Grothendieck in [11], die hier für beliebige Charakteristik von k bewiesen werden. Wir werden dann noch einige „arithmetische" Anwendungen geben, indem wir Strukturaussagen über beliebige Gruppenschemata G/Y machen werden, wobei Y/k eine glatte projektive Kurve vom Geschlecht 0 ist (Satz 3.5). Der Satz 3.6 ergibt sich dann als Anwendung unserer Methoden auf die Galoiskohomologie. Damit haben wir in einem sehr speziellen Fall unser eingangs formuliertes Problem teilweise gelöst.

Zu dieser Arbeit wird ein zweiter Teil mit dem Titel „Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern" erscheinen. Wir werden dort unsere Resultate auf den Fall anwenden, wo der Grundkörper k endlich ist. Sei K wieder der Funktionenkörper der Kurve Y/k, sei $\hat{A}$ der Adelering von K (s. [17], Chap. I). Wir betrachten den Quotientenraum $G(\hat{A})/G(K)$ und werden dann die zu den Ergebnissen von Borel und Harish-Chandra im Zahlkörperfall (s. [1] und [8]) analogen Resultate im Funktionenkörperfall herleiten. Um es genauer zu sagen, wir werden zeigen, daß $G(\hat{A})/G(K)$ genau dann kompakt ist, wenn G/K anisotrop ist, d.h. keine echte parabolische Untergruppe über K besitzt. Ferner werden wir die Analoga zu den Siegelbereichen konstruieren (s. [8], § 10). Diese Siegelbereiche sind Fundamentalbereiche, sie können zwar unendlich viele Nachbarn haben, haben aber trotzdem befriedigende Endlichkeitseigenschaften. Alle diese Resultate werden sich aus den Hauptergebnissen dieser Arbeit ergeben, wenn man den Zusammenhang zwischen der Zariskikohomologie $H^1(Y_{\text{zar}}, G)$ und den Doppelklassen $\hat{G}(Y)\backslash G(\hat{A})/G(K)$, wie er in [13], 2.3 erläutert wurde, konsequent ausnutzt und noch ein wenig verallgemeinert. Dabei treten eine Reihe von Schwierigkeiten rein technischer Natur auf, die dafür verantwortlich sein werden, daß auch der zweite Teil dieser Arbeit recht umfangreich sein wird.

Herr H. Behr hat die Resultate des zweiten Teils dieser Arbeit mit anderen Methoden und weniger Aufwand erhalten, indem er dem Ansatz von Godement und Weil in [8] folgte. Er muß allerdings einige einschränkende Voraussetzungen an die Charakteristik des Grundkörpers machen ($\neq 2, 3, 5$). Seine Arbeit wird vermutlich demnächst erscheinen.

Ich hoffe, daß die konsequente Weiterverfolgung der hier dargestellten Methoden schließlich auch zur Lösung des eingangs formulierten Problems führt. (Siehe Bemerkung 2 im Anschluß an Satz 2.2.1.)

§ 1. Vorbereitungen

1.0. Bezeichnungen

Wir werden uns bei der Wahl unserer Bezeichnungen im wesentlichen an das Seminar von Demazure und Grothendieck ([7], zitiert SGAD), an die Thèse von Demazure ([6], zitiert TD) und an Grothendiecks Eléments de géometrie algébrique ([9], zitiert EGA) halten. Wenn wir davon abweichende Bezeichnungen benutzen, so werden wir uns an die Arbeit [13] halten. Wir wollen ganz kurz auf einige der wichtigsten Abweichungen eingehen: Sei S ein zusammenhängendes Präschema, sei T/S ein trivialer Torus, d.h. $T/S \xrightarrow{\sim} G_m^r/S$ (s. SGAD, Exp. IX), so bezeichnen wir den Charaktermodul $\mathrm{Hom}_S(T, G_m)$ mit $X(T)$. Ist G/S ein reduktives Gruppenschema, ist $T \hookrightarrow G$ ein maximaler zerfallender Torus (s. TD, S. 378), dann bezeichnen wir die Menge der Wurzeln mit $\Delta \subset X(T)$, die Wurzeln bezeichnen wir mit $\alpha, \beta \ldots$, und die assoziierten einparametrigen vektoriellen Untergruppen bezeichnen wir mit $U_\alpha, U_\beta \ldots$. Wir nennen T einen zerfällenden Torus, falls die U_α für alle α trivial über S sind (s. TD, § 3). Ein Chevalleyschema G/S ist ein halbeinfaches Gruppenschema, das einen zerfällenden Torus besitzt. Wir wollen den Terminus „lokal" für die Zariskitopologie reservieren, d.h. lokal trivial soll stets heißen, lokal trivial bezüglich der Zariskitopologie. Schließlich wollen wir wie schon in [13] affine Schemata durch ihre Koordinatenringe bezeichnen; ist also A ein kommutativer Ring mit 1, so sei $\mathrm{Spec}(A)$ auch wieder mit A bezeichnet. Ein Präschema über A wird mit X/A bezeichnet, ist $\varphi: A \to B$ ein Homomorphismus, so sei X_B oder X_B/B die Konstantenerweiterung von X mit B über A, und $X(B)$ sei die Menge der Punkte von X mit Werten in B.

1.1. Rational triviale Gruppenschemata und ihre Boreluntergruppen

Sei k ein Körper, sei Y/k eine glatte, projektive Kurve über k (s. EGA, Chap. II, 7.4). Die Tatsache, daß Y/k glatt ist, bedeutet, daß die Kurve $\overline{Y} = Y \underset{k}{\times} \bar{k}$ singularitätenfrei ist (s. EGA, Chap. IV, 6.8). Dies ist ferner damit gleichwertig, daß für alle Erweiterungen L/k die Kurve Y_L normal ist. Sei K/k im folgenden stets der Funktionenkörper von Y/k. Sei G/Y ein halbeinfaches, rational triviales Gruppenschema (d.h. $G \underset{Y}{\times} K$ ist ein Chevalleyschema). Wir wissen, daß dann G/Y lokal ein Chevalleyschema ist ([13], § 3).

Wir haben schon in [13], § 3 bemerkt, daß unter diesen Voraussetzungen die Boreluntersuchungen der allgemeinen Faser $G_K = G \underset{Y}{\times} K$ eineindeutig den Boreluntergruppen B von G/Y entsprechen. Ein wesentlicher Unterschied zu der in [13] betrachteten Situation besteht nun darin, daß jetzt die Boreluntergruppe keinen maximalen Torus zu besitzen braucht.

Sei $B_u \subset B$ das unipotente Radikal der Boreluntergruppe B von G/Y. Dann ist $T = B/B_u$ ein trivialer Torus über Y, was z.B. daraus folgt, daß $T \underset{Y}{\times} K$ ein trivialer Torus ist. Nach SGAD, Exp. XX, Prop. 5.9.5 besitzt das unipotente Radikal B_u nun eine Filtrierung

$$B_u = U_0 \supset U_1 \cdots \supset U_n = \{e\}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die U_i sind glatt über Y, und ihre Fasern sind zusammenhängend.

(2) Die Gruppenschemata $W_i = U_i/U_{i+1}$ sind vektorielle Gruppenschemata der Dimension 1 über Y (s. TD, 1.6).

Die Gruppe B operiert vermöge der inneren Automorphismen auf B, d.h. wir haben einen Homomorphismus

$$\mathrm{ad}: B \to \mathrm{Aut}_Y(B).$$

Die U_i sind invariant unter dieser Operation, deshalb induziert die Operation von B auf B_u auch Operationen von B auf $W_i = U_i/U_{i+1}$. Diese Operationen von B auf W_i sind eingeschränkt auf B_u trivial, wir erhalten also Operationen von $T = B/B_u$ auf den W_i. Die W_i sind vektorielle Gruppen vom Rang 1 über Y, sie sind lokal zu der vektoriellen Gruppe G_a/Y isomorph (s. TD, 1.6); daher ist $\mathrm{Aut}_Y(W_i) \xrightarrow{\sim} G_m/Y$. Dann werden also die Operationen von T auf den W_i durch Charaktere

$$\alpha_i: T \to G_m$$

gegeben, man sagt, daß T durch den Charakter α_i auf W_i operiert. Die Menge Δ^+ der dabei auftretenden Charaktere wollen wir die Menge der *positiven Wurzeln* von B nennen, wir nennen $\Delta = \Delta^+ \cup (-\Delta^+)$ die Menge der *Wurzeln*.

Hierzu ist folgendes zu bemerken: Im SGAD, Prop. 5.9.5 ist die Behauptung ein wenig anders formuliert, dort sind nämlich die $W_i = U_i/U_{i+1}$ vektorielle Gruppenschemata, die nicht notwendig vom Rang 1 sind. Wir wollen hier kurz andeuten, wie wir diese feinere Filtrierung erhalten, es wird später wichtig sein. Die Details sind wie im Beweis der Prop. 5.9.5. Sei $V \subset Y$ offen, so daß $B_V = B \underset{Y}{\times} V$ einen maximalen Torus T_1/V enthält. Dann ist $T_1 \xrightarrow{\sim} T_V$, sei $\Delta_1 \subset X(T_1)$ die Menge der Wurzeln von $X(T_1)$, sei Δ_1^+ die Menge der bezüglich B_V positiven Wurzeln. Sei $\pi_1 = \{\alpha_1 \ldots \alpha_r\}$ das System der einfachen Wurzeln in Δ_1^+. Im Beweis von Prop. 5.9.5 wird nun jeder Wurzel

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i \in \Delta_1^+$$

die Zahl

$$h(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} m_i$$

zugeordnet, und die Wurzeln werden nach der Größe der Zahl $h(\alpha)$ geordnet, d.h.

$$\alpha \leqq \beta \Leftrightarrow h(\alpha) \leqq h(\beta).$$

Wir verfeinern nun diese Ordnung, indem wir die Wurzeln mit gleicher Höhe $h(\alpha)$ total ordnen. Wir erhalten so eine totale Ordnung der Wurzeln in Δ_1^+, z.B.

$$\alpha_1 \ll \alpha_2 \ll \alpha_3 \ldots \alpha_r \ll \alpha_{r+1} \ll \cdots \ll \alpha_d.$$

Es gilt nun $h(\alpha) > h(\beta) \Rightarrow \alpha \gg \beta$. Sei nun

$$U'_\nu = \prod_{i=\nu+1}^{d} U_{\alpha_i},$$

so liefern uns die U'_ν eine Filtrierung über V mit den verlangten Eigenschaften. Der Torus T_V operiert auf $U'_\nu/U'_{\nu+1}$ durch den Charakter $\alpha'_{\nu+1}$, wobei $\alpha'_{\nu+1}$ das Bild von $\alpha_{\nu+1} \in X(T_1)$ unter dem natürlichen Isomorphismus $X(T_1) \xrightarrow{\sim} X(T_V)$ ist. Man zeigt nun, daß diese Filtrierung von $B_{u,V}$ und die $\alpha'_{\nu+1}$ nicht von T_1 abhängen. Wählt man eine zweite offene Menge $V' \subset Y$, so daß $V \cup V' = Y$, und führt man die gleichen Konstruktionen über V' durch, so stimmen die beiden Filtrierungen auf $V \cap V'$ überein, und das ergibt die Behauptung.

Wir können jetzt die positiven Wurzeln α von B benutzen, um die $W_i = U_i/U_{i+1}$ zu indizieren, d.h. operiert B durch den Charakter α auf $W_i = U_i/U_{i+1}$, so setzen wir

$$W_i = W_\alpha.$$

Damit haben wir jeder positiven Wurzel α von B ein vektorielles Gruppenschema W_α/Y vom Rang 1 zugeordnet. Der Unterschied zu den U_α besteht darin, daß die W_α nicht in B_u enthalten sind; die U_α sind Unterschemata von B_u und sind nur definiert, wenn ein maximaler Torus T_1 von B gegeben ist.

Sind B_1 und B_2 zwei Boreluntergruppen eines rational trivialen Gruppenschemas G/Y, so können wir die (positiven, einfachen) Wurzeln von B_1 und B_2 kanonisch identifizieren, da B_1 und B_2 lokal ineinander konjugierbar sind. (SGAD, Exp. XXIV.) Wir werden uns deswegen erlauben, auch von der Menge der (positiven, einfachen) Wurzeln von G/Y zu sprechen, d.h. wenn zwei Boreluntergruppen B_1 und B_2 gegeben sind, so denken wir uns oft deren Wurzeln identifiziert.

Sei W/Y ein vektorielles Gruppenschema, das lokal zu G_a/Y isomorph ist. Die Garbe, die man erhält, indem man jeder offenen Menge $V \subset Y$ die Gruppe $W(V)$ der Schnitte von W über V zuordnet, besitzt nach Definition die Struktur eines inversiblen $\mathcal{O}_Y$-Moduls, wir wollen diesen inversiblen Modul mit $\tilde{W}$ bezeichnen. Man kann umgekehrt das vektorielle Gruppenschema W/Y wiederfinden, wenn man $\tilde{W}$ kennt (s. TD, 1.6). Wir nennen $\tilde{W}$ den zu W/Y assoziierten $\mathcal{O}_Y$-Modul und W/Y das zu $\tilde{W}$

assoziierte vektorielle Gruppenschema. Die Automorphismengarbe von $\tilde{W}$ ist die Garbe $\mathcal{O}_Y^*$, das Automorphismenschema von W/Y ist das Gruppenschema G_m/Y. Also entsprechen die Isomorphieklassen inversibler $\mathcal{O}_Y$-Moduln, bzw. vektorieller Gruppenschemata vom Rang 1 eineindeutig den Elementen von

$$H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*) \quad \text{bzw.} \quad H^1(Y_{\text{zar}}, G_m)$$

(s. EGA, Chap. O_I, 5.4.7 und TD 1.6). Nun ist aber offensichtlich

$$\psi: H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*) \xrightarrow{\sim} H^1(Y_{\text{zar}}, G_m),$$

was natürlich weiter nichts sagt, als daß inversible $\mathcal{O}_Y$-Moduln und vektorielle Gruppenschemata eineindeutig miteinander korrespondieren. Ist $\tilde{L}$ ein inversibler $\mathcal{O}_Y$-Modul, L/Y das assoziierte vektorielle Gruppenschema, sind $\xi(\tilde{L})$ und $\xi(L)$ die zugehörigen Kohomologieklassen, so ist $\psi(\xi(\tilde{L}))=\xi(L)$.

Die Menge der Isomorphieklassen inversibler $\mathcal{O}_Y$-Moduln besitzt eine natürliche Struktur als abelsche Gruppe unter dem Tensorprodukt (s. EGA, Chap. O_I, 5.4). Diese Gruppe wird mit $\mathrm{Pic}(Y)$ bezeichnet. Die Abbildung

$$h: \mathrm{Pic}(Y) \xrightarrow{\sim} H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*)$$
$$h: [\tilde{L}] \longmapsto \xi(\tilde{L})$$

ist ein Isomorphismus zwischen abelschen Gruppen. (EGA, Chap. O_I, 5.4.7.) Dabei ist $[\tilde{L}]$ die zu $\tilde{L}$ gehörige Isomorphieklasse inversibler Moduln.

Sei G_0/Y ein Chevalleyschema, sei $T_0 \hookrightarrow G_0$ ein zerfällender maximaler Torus, sei $B_0 \supset T_0$ eine Boreluntergruppe. Sei Δ_0, bzw. Δ_0^+ bzw. π_0 die Menge der Wurzeln, bzw. positiven Wurzeln, bzw. einfachen Wurzeln von B_0. Die vektoriellen Gruppenschemata $W_{0,\alpha}/Y$ sind dann trivial, denn sie sind zu $U_{0,\alpha}$ isomorph. Sei G/Y ein rational triviales Gruppenschema vom gleichen Typ wie G_0/Y (s. TD, 5.1), sei $B \hookrightarrow G$ eine Boreluntergruppe, seien Δ, Δ^+, π die Mengen der Wurzeln etc. Wir können π und π_0 nicht kanonisch miteinander identifizieren; um dieser Schwierigkeit aus dem Wege zu gehen, fixieren wir eine Bijektion $\psi: \Delta_0 \tilde{\to} \Delta$, die π_0 auf π abbildet und für die gilt $\psi(\alpha+\beta)=\psi(\alpha)+\psi(\beta)$, falls α, β und $\alpha+\beta \in \Delta_0$. Sei nun

$$Y = V_1 \cup V_2$$

eine offene Überdeckung von Y durch affine Mengen, so daß es Isomorphismen

$$\varphi_1: (G_{V_1}, B_{V_1}) \xrightarrow{\sim} (G_{0,V_1}, B_{0,V_1})$$
$$\varphi_2: (G_{V_2}, B_{V_2}) \xrightarrow{\sim} (G_{0,V_2}, B_{0,V_2})$$

gibt, die überdies auf der Menge der Wurzeln die Abbildung ψ^{-1} induzieren. Dann ist

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon (G_{0,V_1\cap V_2}, B_{0,V_1\cap V_2}) \xrightarrow{\sim} (G_{0,V_1\cap V_2}, B_{0,V_1\cap V_2})$$

ein innerer Automorphismus des Paares

$$(G_{0,V_1\cap V_2}, B_{0,V_1\cap V_2})/V_1\cap V_2.$$

(Siehe SGAD, Exp. XXIV, 2.) Dieser Automorphismus wird also durch ein Element

$$g_{1,2}\in B_0^{\mathrm{ad}}(V_1\cap V_2)$$

gegeben. (SGAD, loc. cit.) Dann ist $g_{1,2}$ ein Kozyklus, und wir erhalten das Paar $(G, B)/Y$ durch „Twisten" mit $g_{1,2}$. Die durch $g_{1,2}$ in

$$H^1(Y_{\mathrm{zar}}, B_0^{\mathrm{ad}})$$

definierte Kohomologieklasse ξ ist die zu (G, B, ψ) gehörige Kohomologieklasse. (Vgl. SGAD, Exp. XXIV, Cor. 2.3.) Die Wurzeln $\alpha\in\Delta_0$ sind Charaktere $\alpha\colon B_0\to G_m$, aber jeder solche Charakter faktorisiert über $B_0\to B_0^{\mathrm{ad}}$, d.h. jede Wurzel α definiert auch einen Charakter auf B_0^{ad}, den wir auch mit α bezeichnen wollen.

Satz 1.1.1. *Seien G_0, B_0 und G, B wie oben, die Abbildung ψ sei gegeben. Sei ξ die zu (G, B, ψ) gehörige Kohomologieklasse in*

$$H^1(Y_{\mathrm{zar}}, B_0^{\mathrm{ad}}).$$

Sei $\xi(W_{\psi(\alpha)})$ die zu $W_{\psi(\alpha)}$ gehörige Kohomologieklasse in $H^1(Y_{\mathrm{zar}}, G_m)$. Dann gilt

$$\xi(W_{\psi(\alpha)}) = \alpha^*(\xi),$$

wobei $\alpha^*\colon H^1(Y_{\mathrm{zar}}, B_0^{\mathrm{ad}})\to H^1(Y_{\mathrm{zar}}, G_m)$ die durch α induzierte natürliche Abbildung ist.

Beweis. Dies ist evident, man erhält $(G, B)/Y$ aus $(G_0, B_0)/Y$ durch „Twisten" mit dem Kozyklus $g_{1,2}\in B_0^{\mathrm{ad}}(V_1\cap V_2)$. Also erhält man $W_{\psi(\alpha)}$ durch „Twisten" mit dem Kozyklus $\alpha(g_{1,2})\in G_m(V_1\cap V_2)$. (Vgl. z.B. [10], Chap. V.)

Für uns wird die folgende Konsequenz dieses Satzes 1.1.1 von Bedeutung sein:

Korollar 1.1.2. *Sei G/Y rational trivial, sei B/Y eine Boreluntergruppe. Seien α, β positive Wurzeln von B, sei $\alpha+\beta$ auch eine Wurzel. Dann ist*

$$\tilde{W}_{\alpha+\beta} = \tilde{W}_\alpha \otimes \tilde{W}_\beta.$$

1.2. *Parabolische Untergruppen*

Wir wollen jetzt die parabolischen Untergruppen rational trivialer Gruppenschemata G/Y studieren. (Siehe SGAD, Exp. XXVI.) Sind P_1 und P_2 zwei parabolische Untergruppen von G/Y, so sagt man, daß P_1 und P_2 vom gleichen Typ sind, falls sie sich lokal ineinander konjugieren lassen. Jeder parabolischen Untergruppe P von G/Y kann man in natürlicher Weise eine Teilmenge $t(P)$ der Menge π der einfachen Wurzeln zuordnen. Wir wollen uns diese Zuordnung hier noch einmal vergegenwärtigen: Sei $B \subset P$ eine Boreluntergruppe, sei Δ^+ die Menge der einfachen Wurzeln von B. Das unipotente Radikal $R_u(P)$ von P ist dann in B_u enthalten. Die in 1.1 angegebene Filtrierung von B_u induziert eine Filtrierung von $R_u(P)$:

$$R_u(P) = U_0' \supset U_1' \cdots \supset U_m' = \{e\}.$$

Dabei sind die U_i' von der Gestalt

$$U_i' = R_u(P) \cap U_j,$$

und ist $R_u(P) \cap U_j \neq R_u(P) \cap U_{j+1}$, so ist

$$U_i'/U_{i+1}' \xrightarrow{\sim} U_j/U_{j+1}.$$

Auf dem Quotienten U_i'/U_{i+1}' operiert $B/B_u = T$ durch Charaktere aus Δ^+, die Menge der dabei auftretenden Charaktere nennen wir Δ_P^+, und wir nennen diese Menge Δ_P^+ die Menge der *positiven Wurzeln von P*. Dann setzen wir

$$t(P) = \{\alpha_i \in \pi \mid \alpha_i \notin \Delta_P^+\}.$$

Sei $\{\alpha_1 \dots \alpha_s\} = \pi \setminus t(P)$. Dann besteht Δ_P^+ genau aus denjenigen Wurzeln

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i,$$

in denen mindestens eine der Wurzeln $\alpha_i \in \pi \setminus t(P)$ mit echt positiven Koeffizienten auftaucht. (Siehe SGAD, Exp. XXVI, Prop. 1.12.) Man beweist die hier formulierten Aussagen genauso wie die analogen Aussagen in 1.1 über Boreluntergruppen. Diese Aussagen sind klar, wenn B einen zerfällenden Torus besitzt, also sind sie über genügend kleinen offenen Mengen $V \subset Y$ richtig, und dann folgen die Behauptungen auch sehr leicht für ganz Y (s. z.B. SGAD, Exp. XXVI, Prop. 2.1). Ist $B_1 \subset P$ eine zweite Boreluntergruppe und ist Δ_1^+ die Menge der positiven Wurzeln von B_1, sowie π_1 die Menge der einfachen Wurzeln von Δ_1^+, so können wir Δ_1^+ und π_1 in kanonischer Weise mit Δ^+ und π identifizieren, und bei dieser Identifizierung gehen $\Delta_{1,P}^+$ und $t_1(P)$ in Δ_P^+ und $t(P)$ über. Wir können also Δ_P^+ und $t(P)$ auch als Teilmengen der Menge

der positiven Wurzeln von G/Y und der Menge der einfachen Wurzeln von G/Y auffassen.

Man weiß, daß P_1 und P_2 genau dann vom gleichen Typ sind, falls $t(P_1)=t(P_2)$ ist. (SGAD, Exp. XXVI, Cor. 5.5.) Die verschiedenen Typen parabolischer Untergruppen entsprechen also eineindeutig den Teilmengen $\pi'\subset\pi$. Ist π' gegeben, so sei

$$\mathrm{Par}_G^{\pi'}\to Y$$

das Schema der parabolischen Untergruppen vom Typ π'. Man weiß, daß $\mathrm{Par}_G^{\pi'}/Y$ ein glattes projektives Schema mit zusammenhängenden Fasern über Y ist (s. SGAD, Exp. XXVI, 3. Th. 3.3). Ist $\pi''\supset\pi'$, so ist jede parabolische Untergruppe vom Typ π' in genau einer parabolischen Untergruppe vom Typ π'' enthalten, das liefert einen Morphismus

$$\begin{tikzcd} \varphi_{\pi',\pi''}\colon \mathrm{Par}_G^{\pi'} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Par}_G^{\pi''} \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Wir betrachten nun ein festes π' und bezeichnen $\mathrm{Par}_G^{\pi'}/Y$ mit X'/Y. Dann entsprechen die parabolischen Untergruppen $P\hookrightarrow G$ vom Typ π' eineindeutig den Schnitten $t\colon Y\to X'$. Wir wollen die Menge dieser Schnitte mit $\Gamma(X'/Y)(k)$ bezeichnen, ist $t\in\Gamma(X'/Y)(k)$, so sei P_t die entsprechende parabolische Untergruppe von G/Y.

Das Gruppenschema G/Y operiert durch innere Automorphismen auf X'/Y, ist also $t\in\Gamma(X/Y)(k)$, so erhalten wir einen Morphismus

$$\begin{tikzcd} \varphi_t\colon G \arrow[rr] \arrow[dr] & & X' \arrow[dl] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

der durch $\varphi_t(g)=gP_tg^{-1}$ für $g\in G(S)$ definiert ist. Daraus erhalten wir einen Isomorphismus

$$\bar{\varphi}_t\colon G/P_t\xrightarrow{\sim}X'.$$

(Siehe SGAD, Exp. XXVI, Cor. 3.6.)

Sei nun $T_{X'/Y}$ die relative Tangentialgarbe, und $\Omega_{X'/Y}$ sei die Garbe der relativen 1-Formen von X'/Y (s. SGAD, Exp. II). Beides sind lokal freie $\mathcal{O}_{X'}$-Moduln, deren Rang gleich der relativen Dimension d von X'/Y ist. Es gilt

$$\Omega_{X'/Y}\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(T_{X'/Y},\mathcal{O}_{X'}).$$

(Siehe SGAD, Exp. II, 3.) Ist $t\in\Gamma(X'/Y)(k)$, so setzen wir

$$L^t(X'/Y)=t^*(T_{X'/Y}).$$

Unter der Abbildung φ_t geht das Einselement $e \in G(Y)$ in den Schnitt t über, wir erhalten einen Morphismus zwischen $\mathcal{O}_Y$-Moduln

$$d\varphi_t\colon\ L^e(G/Y) \to L^t(X'/Y).$$

Nun ist aber $L^e(G/Y) = \mathrm{Lie}(G/Y)$, wobei wir $\mathrm{Lie}(G/Y)$ auch als $\mathcal{O}_Y$-Modul auffassen (s. SGAD, Exp. II). Da der Morphismus $\bar{\varphi}_t$ ein Isomorphismus ist, erhalten wir einen Isomorphismus

$$d\bar{\varphi}_t\colon\ \mathrm{Lie}(G/Y)/\mathrm{Lie}(P_t/Y) \xrightarrow{\sim} L^t(X'/Y).$$

Sei nun X/Y das Schema der Boreluntergruppen. Sei $\varphi\colon X \to X'$ der kanonische Morphismus; sei $B \subset P_t$ eine Boreluntergruppe, sei $t_0 \in \Gamma(X/Y)(k)$ der korrespondierende Schnitt. Wir erhalten dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Lie}(G/Y)/\mathrm{Lie}(P_t/Y) & \xrightarrow{d\bar{\varphi}_t\ \sim} & L^t(X'/Y) \\ \uparrow{\scriptstyle \pi} & & \uparrow{\scriptstyle d\varphi} \\ \mathrm{Lie}(G/Y)/\mathrm{Lie}(B/Y) & \xrightarrow{d\bar{\varphi}_{t_0}\ \sim} & L^{t_0}(X/Y). \end{array}$$

Wir setzen $\mathrm{Lie}(G/Y)/\mathrm{Lie}(B/Y) = \mathrm{Lie}(G/B)$, und analog wird $\mathrm{Lie}(G/P_t)$ definiert. Auf den vier Moduln des obigen Diagramms operiert B über die adjungierte Darstellung; alle Pfeile des Diagramms sind mit den Operationen von B verträglich.

Satz 1.2.1. *Der lokal freie $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathrm{Lie}(G/B)$ besitzt eine unter den Operationen von B invariante Filtrierung*

$$\mathrm{Lie}(G/B) = \mathfrak{u}_0 \supset \mathfrak{u}_1 \ldots \mathfrak{u}_n = \{0\}$$

mit den Eigenschaften

(1) *Die $\mathfrak{u}_i/\mathfrak{u}_{i+1}$ sind inversible $\mathcal{O}_Y$-Moduln, auf denen der Torus $T = B/B_u$ durch einen Charakter operiert.*

(2) *Die dabei auftretenden Charaktere sind gerade die negativen Wurzeln von B, d.h. die Elemente der Menge $\Delta^- = -\Delta^+$; jede negative Wurzel tritt genau einmal auf.*

Durch $\pi\colon \mathrm{Lie}(G/B) \to \mathrm{Lie}(G/P_t)$ wird auf $\mathrm{Lie}(G/P_t)$ eine unter den Operationen von B invariante Filtrierung induziert:

$$\mathrm{Lie}(G/P_t) = \mathfrak{u}'_0 \supset \mathfrak{u}'_1 \ldots \mathfrak{u}'_m = \{0\}.$$

Die Filtrierung besitzt auch die Eigenschaft (1). *Die hier auftretenden Charaktere sind aber jetzt gerade die negativen Wurzeln von P_t, d.h. die Elemente von $-\Delta^+_{P_t}$.*

Der Beweis dieses Satzes ist einfach, man kann genau wie bei den entsprechenden Aussagen über die Struktur von B_u und $R_u(P_t)$ vorgehen (s. 1.1).

Wir können jetzt die Wurzeln $\alpha \in \Delta^-$ wieder benutzen, um die Quotienten u_i/u_{i+1} zu indizieren. Operiert T durch α auf u_i/u_{i+1}, so setzen wir

$$\tilde{W}_\alpha^- = u_i/u_{i+1}.$$

Ist $\alpha \in -\Delta_{P_t}^+$, so ist $u_i'/u_{i+1}' = u_i/u_{i+1} = \tilde{W}_\alpha^-$.

Ferner kann man wie in Satz 1.1.1 die zu $\tilde{W}_\alpha^-$ gehörige Kohomologieklasse berechnen, wir wollen die entsprechende Aussage hier nicht formulieren; uns interessiert nur das Analogon zu Korollar 1.1.2, das eine Konsequenz von Satz 1.1.1 ist.

Korollar 1.2.2. *Sei $\alpha \in \Delta^+$, dann gilt*

$$\tilde{W}_\alpha^{-1} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\tilde{W}_\alpha, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\sim} \tilde{W}_{-\alpha}^-.$$

Sei d die relative Dimension von X'/Y. Dann setzen wir $\omega_{X'/Y} = \Lambda^d \Omega_{X'/Y}$. Es gilt

$$t^*(\omega_{X'/Y}) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\alpha \in \Delta_{P_t}^+} \tilde{W}_\alpha$$

$$\Lambda^d L^1(X'/Y) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\alpha \in \Delta_{P_t}^+} \tilde{W}_{-\alpha}^-.$$

Dieses Korollar beweist man, indem man jeweils nach dem in Satz 1.1.1 angegebenen Prinzip auf beiden Seiten die zugehörigen Kohomologieklassen in $H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*)$ ausrechnet.

1.3. Die Struktur einiger Picardgruppen

Die im folgenden Abschnitt dargestellten Ergebnisse sind bekannt, da ich jedoch keine befriedigende Referenz gefunden habe, will ich diese Resultate hier kurz erläutern.

Sei k ein Körper, sei G/k eine halbeinfache zerfallende algebraische Gruppe. Sei P eine parabolische Untergruppe von G/k, sei $X = G/P$, sei $\pi: G \to X$ die natürliche Projektion, die Abbildung π ist eine lokal triviale Faserung. (Siehe [2], Th. 4.13.) Sei $\chi: P \to G_m$ ein Homomorphismus, d.h. ein Charakter von P. Wir wollen diesem Charakter χ einen inversiblen Modul $\tilde{L}_\chi$ auf X zuordnen, der wie folgt definiert ist: Für jede offene Menge $U \subset X$ ist

$$\tilde{L}_\chi(U) = \{f \in \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_G) \mid f(g p^{-1}) = \chi(p) f(g), \text{ wobei } g \in G(\bar{k}) \text{ und } p \in P(\bar{k})\}.$$

Da π lokal trivial ist, folgt, daß $\tilde{L}_\chi$ ein inversibler $\mathcal{O}_X$-Modul ist; man kann $\tilde{L}_\chi$ auch dadurch erhalten, daß man $G \to X$ als prinzipales Bündel mit Strukturgruppe P auffaßt. Dann induziert jeder Homomorphismus $\chi: P \to G_m = GL(1)$ in kanonischer Weise einen inversiblen $\mathcal{O}_X$-Modul

(s. [3], S. 203 und [5], Exp. 5.4). Dieser Modul ist gerade $\tilde{L}_\chi$. Man zeigt leicht, daß

$$\varphi\colon \chi \mapsto \tilde{L}_\chi$$

einen Homomorphismus von $\mathrm{Hom}(P, G_m)$ nach $\mathrm{Pic}(X)$ induziert.

Satz 1.3.1. *Ist G einfach zusammenhängend, so ist*

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}(P, G_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(X)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall, daß $P=B$ eine Boreluntergruppe ist. In diesem Fall ist die Picardgruppe $\mathrm{Pic}(X)$ in [4], Exp. 15, vollständig beschrieben: Sei B_u das unipotente Radikal der Gruppe B, unter der Operation von B_u auf X zerfällt X in endlich viele Bahnen X_i; jede dieser Bahnen ist invariant unter B, und ist $T \subset B$ ein maximaler Torus, so enthält jede Bahn genau einen Fixpunkt $x_i \in X_i(k)$ unter $T(\bar{k})$. Diese Fixpunkte x_i werden unter der Weylgruppe $W=N(T)/T$ genau einfach transitiv vertauscht (s. [4], Exp. 13). Sei $\Theta \in W$ dasjenige Element, das die bezüglich B positiven Wurzeln in die negativen Wurzeln überführt, sei $\bar{e} \in X(k)$ der Punkt, der der Untergruppe B entspricht, d.h. $\bar{e}=\pi(e)$, und sei $x_0=\Theta \bar{e}$. Dann ist die Bahn $X_0=B_u x_0$ isomorph zu B_u, und sie ist offen in X. Seien $w_{\alpha_i} \in W$ die Spiegelungen an den einfachen Wurzeln, dann sei

$$x_i = w_{\alpha_i} x_0 .$$

Die Bahnen $B_u x_i = X_i$ sind genau diejenigen Bahnen, die die Kodimension 1 besitzen (s. [4], Exp. 13). Sei $D_i = \overline{X}_i$ der Abschluß von X_i. In [4], Exp. 15, wird nun gezeigt, daß jeder Divisor D auf X zu einem Divisor der Gestalt $\sum n_i D_i$ linear äquivalent ist und daß die n_i durch D eindeutig bestimmt sind. Nun ist aber die Gruppe der Divisoren modulo linearer Äquivalenz zur Picardgruppe $\mathrm{Pic}(X)$ isomorph. Der Isomorphismus wird dadurch erhalten, daß man jedem Divisor D den zugehörigen inversiblen Modul $\tilde{L}_D$ zuordnet (s. EGA, Chap. IV, § 21.3). Daraus folgt, daß $\mathrm{Pic}(X)$ eine freie abelsche Gruppe mit der Basis $\tilde{L}_{D_1}, \ldots \tilde{L}_{D_r}$ ist. Da G/k einfach zusammenhängend ist, wird $\mathrm{Hom}(B, G_m) = \mathrm{Hom}(T, G_m)$ von den Fundamentalcharakteren $\gamma_1, \ldots \gamma_r$ erzeugt, diese Fundamentalcharaktere sind dadurch definiert, daß gilt

$$2\frac{\langle \gamma_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = \delta_{ij},$$

wobei $\langle\ ,\ \rangle$ eine unter W invariante Bilinearform auf $\mathrm{Hom}(T, G_m)$ ist. (Siehe [4], Exp. 16.) Der Satz 1.3.1 ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß gilt

$$\tilde{L}_{\gamma_i} \xrightarrow{\sim} \tilde{L}_{D_i}.$$

Sei U_{α_i} die zu der Wurzel α_i gehörige einparametrige Untergruppe, sei

$$Z_i = \overline{U_{\alpha_i} x_0}$$

der Abschluß der Bahn von U_{α_i} in X, die x_0 enthält. Dann ist Z_i eine projektive Gerade, alle Punkte dieser Geraden bis auf einen liegen in X_0, der „Endpunkt" ist x_i. Ist $i \neq j$, so ist also $Z_i \cap D_j = \emptyset$, und Z_i und D_i schneiden sich im Punkt x_i mit der Multiplizität 1. Also induziert D_i auf Z_i einen Divisor vom Grad 1 und auf Z_j für $i \neq j$ den Nulldivisor. (Siehe [4], Exp. 16, S. 5.) Aus der Definition der $\tilde{L}_{\gamma_i}$ folgt aber

$$\tilde{L}_{\gamma_i} | Z_j = \begin{cases} \text{trivial für } i \neq j \\ \text{vom Grad 1, falls } i = j. \end{cases}$$

Da sich die $\tilde{L}_{\gamma_i}$ durch die $\tilde{L}_{D_j}$ ausdrücken lassen, folgt die Behauptung.

Wir kommen nun auf den allgemeinen Fall zurück, sei $X = G/P$. Sei $B \subset P$ eine Boreluntergruppe, sei $T \hookrightarrow B$ ein maximaler Torus, sei $\pi \subset X(T)$ das zu B gehörige System einfacher Wurzeln. Sei $\pi' \subset \pi$ das zu P gehörige Teilsystem, d.h. eine einfache Wurzel $\alpha_i \notin \pi'$ genau dann, wenn $U_{-\alpha_i} \not\subset P$. Sei $X' = G/B$, wir betrachten die Abbildung

$$\psi\colon X' \to X.$$

Wir betrachten nun die Operation von B_u auf dem Morphismus ψ: $X' \to X$. Sei $x \in X$, sei $B_{u,x}$ der Stabilisator. Wir wollen zeigen, daß es einen Punkt $y \in \psi^{-1}(x)$ gibt, dessen Bahn unter $B_{u,x}$ offen in $\psi^{-1}(x)$ ist. Sei ohne Einschränkung $k(x) = k$. Dann korrespondiert zu x eine parabolische Untergruppe P_x von G/k, die zu P konjugiert ist. Es gibt nun eine Levi-Untergruppe $H \subset P$, die auch Levi-Untergruppe von P_x ist (s. [2], Prop. 4.7). Dann ist $B_H = B \cap H$ eine Boreluntergruppe von H, sei B_H^- eine opponierende Boreluntergruppe, und $B_y \subset P_x$ sei eine Boreluntergruppe von P_x, die B_H^- enthält. Da die Punkte in $\psi^{-1}(x)$ genau den Boreluntergruppen von P_x entsprechen und diese wiederum den Boreluntergruppen von H entsprechen, folgt, daß die Bahn von y unter $B_{H,u} \subset B_{u,x}$ offen in $\psi^{-1}(x)$ ist. Aus unseren Überlegungen folgt jetzt, daß es zu jeder Bahn $X_i \subset X$ unter B_u eine Bahn $X_i' \subset X'$ gibt, für die gilt $\psi(X_i') = X_i$ und die in X' die gleiche Kodimension hat wie X_i in X. Das Bild der offenen Bahn $X_0' \subset X'$ ist die offene Bahn $X_0 \subset X$, und X_0 ist zu einem affinen Raum isomorph. Seien $X_1 \ldots X_s$ die Bahnen der Kodimension 1 in X, sei $D_i = \overline{X_i}$. Dann ist $\mathrm{Pic}(X)$ die freie abelsche Gruppe, die von den $\tilde{L}_{D_i}$ erzeugt wird ([4], Exp. 15). Nun sind aber die X_i genau die Bilder gewisser Bahnen $X_i' \subset X'$, die auch die Kodimension 1 haben, und zwar genau derjenigen X_i', für die $\alpha_i \notin \pi'$. Nun ist aber auch

$$\gamma_i \in \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(P, G_m) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(B, G_m))$$

genau dann, wenn $\alpha_i \notin \pi'$, und daraus folgt der Satz 1.3.1 im allgemeinen Fall.

Wir betrachten noch den Spezialfall, daß $X = X_i = G/P_i$, wobei P_i die maximale parabolische Untergruppe ist, die durch $t(P) = \pi_i = \pi \setminus \{\alpha_i\}$ definiert ist. Dann ist

$$\mathrm{Hom}(P_i, G_m) = \mathbf{Z}\gamma_i.$$

Die parabolische Untergruppe P_i operiert nun auf $\mathrm{Lie}(R_u(P_i))$ durch die adjungierte Darstellung. Betrachten wir von dieser Darstellung die Determinante, so erhalten wir einen Homomorphismus

$$\tilde{\gamma}_i\colon\ P_i \xrightarrow{\det \circ \mathrm{ad}} GL(\Lambda^{d_i} \mathrm{Lie}(R_u(P_i))) \xrightarrow{\sim} G_m.$$

Dieser Homomorphismus $\tilde{\gamma}_i$ ist also ein Charakter von P_i, also ist

$$\tilde{\gamma}_i = f_i \gamma_i,$$

wobei offensichtlich $f_i > 0$ ist. Andererseits ist unmittelbar klar, daß

$$\tilde{\gamma}_i = \sum_{\alpha \in \Delta_{P_i}^{+}} \alpha,$$

wobei wir uns jetzt $\tilde{\gamma}_i$ als Charakter auf T vorstellen.

Sei $T_{X_i/k}$ jetzt die relative Tangentialgarbe und $\Omega_{X_i/k}$ die Garbe der 1-Formen auf X_i/k. Dann setzen wir

$$\omega_{X_i/k} = \Lambda^{d_i} \Omega_{X_i/k} \quad \text{und} \quad \tilde{L}_i' = \Lambda^{d_i} T_{X_i/k}.$$

Jetzt ist klar, daß

$$\omega_{X_i/k} \xrightarrow{\sim} \tilde{L}_{-\tilde{\gamma}_i} \quad \text{und} \quad \tilde{L}_i' \xrightarrow{\sim} \tilde{L}_{+\tilde{\gamma}_i}.$$

(Siehe z. B. 1.2.)

Sei jetzt wieder X/k das Schema der parabolischen Untergruppen eines gegebenen Typs $t(P) = \pi \setminus \pi'$ mit $\pi' = \{\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_s}\}$. Seien

$$t_{i_\nu}\colon\ X \to X_i$$

die kanonischen Morphismen in die Schemata maximaler parabolischer Untergruppen. Wir setzen

$$\tilde{L}_{i_\nu} = t_{i_\nu}^{*}(\tilde{L}_{i_\nu}').$$

Dann ist der inversible Modul

$$\tilde{L} = \bigotimes_{\nu=1}^{s} \tilde{L}_{i_\nu}$$

offensichtlich „ample" auf X/k. (Siehe EGA, Chap. II, 4.5.)

1.4. Die Darstellbarkeit einiger Schnittfunktoren

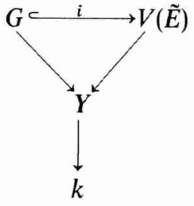
Sei Y/k ein projektives Schema, sei G/Y ein affines Schema. Für jedes Schema S/k setzen wir

$$\Gamma(G/Y)(S) = G(Y \underset{k}{\times} S).$$

Wir erhalten so einen Funktor

$$S \mapsto \Gamma(G/Y)(S),$$

und wir behaupten, daß dieser Funktor durch ein affines Schema $\Gamma(G/Y)/k$ darstellbar ist. Diese Tatsache ist eine unmittelbare Folgerung aus den Resultaten von Grothendieck in [12], unser Funktor $\Gamma(G/Y)$ ist dort mit $\Pi_{Y/k}(G)$ bezeichnet. Wir wollen dem dafür vielleicht ganz dankbaren Leser diese Darstellbarkeit durch ein einfaches Argument plausibel machen. Da G/Y affin ist, gibt es einen lokal freien $\mathcal{O}_Y$-Modul $\tilde{E}$ von endlichem Typ, so daß wir G/Y über Y in $V(\tilde{E})$ einbetten können (s. EGA, Chap. II, 1.7). Wir haben also ein Diagramm



Nach Lemma 1 im Beweis von Satz 2.1.1 dieser Arbeit genügt es, den Funktor

$$\Gamma(V(\tilde{E})/Y)$$

als darstellbar durch ein affines Schema nachzuweisen. Sei $\check{\tilde{E}}$ der duale Modul zu $\tilde{E}$, dann ist

$$\Gamma(V(\tilde{E})/Y) \xrightarrow{\sim} V(H^0(Y, \check{\tilde{E}}))/k$$

(s. EGA, Chap. II, 1.7), und damit ist die Behauptung bewiesen. Ist G/Y ein Gruppenschema, so ist $\Gamma(G/Y)/k$ auch ein Gruppenschema.

§ 2. Die numerischen Invarianten einer Boreluntergruppe

2.1. Definition der Invariantensysteme und die zwischen ihnen bestehenden Relationen

Sei k ein Körper, sei Y/k eine absolut irreduzible, glatte, projektive Kurve (s. 1.1). Sei L/Y ein vektorielles Gruppenschema, das lokal zu G_a/Y isomorph ist, sei $\tilde{L}$ der assoziierte inversible Modul. Mit $c(L)$ oder $c(\tilde{L})$ bezeichnen wir den Grad dieses inversiblen Moduls über Y. Sei g das Geschlecht der Kurve Y/k, dann gilt der Satz von Riemann-Roch

$$\dim H^0(Y, \tilde{L}) - \dim H^1(Y, \tilde{L}) = 1 - g + c(\tilde{L}).$$

(Siehe [14], Chap. II, Th. 1.) Dort wird zwar vorausgesetzt, daß k algebraisch abgeschlossen ist, nun gilt aber offensichtlich

$$H^0(\overline{Y}, \tilde{L}) = H^0(Y, \tilde{L}) \underset{k}{\otimes} \bar{k}$$

$$H^1(\overline{Y}, \tilde{L}) = H^1(Y, \tilde{L}) \underset{k}{\otimes} \bar{k},$$

und da nach Voraussetzung $\overline{Y}/\bar{k}$ singularitätenfrei ist, folgt auch sofort die scheinbar allgemeinere Version des Riemann-Roch, die wir hier benutzen.

Wir bemerken noch, daß die Abbildung

$$c\colon \operatorname{Pic}(Y) \to \mathbf{Z}$$
$$c\colon [\tilde{L}] \to c(\tilde{L})$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Sei E/Y ein vektorielles Gruppenschema, sei $\tilde{E}$ der assoziierte lokal freie $\mathcal{O}_Y$-Modul. Sei n der Rang von E, wir setzen

$$c(\tilde{E}) = c(E) = c(\Lambda^n E).$$

Es gibt in diesem Fall stets Filtrierungen

$$0 \subset \tilde{E}_1 \subset \tilde{E}_2 \cdots \subset \tilde{E}_n = \tilde{E},$$

so daß $\tilde{E}_i/\tilde{E}_{i-1}$ inversibel ist. (Siehe [11], S. 127.) Dann ist

$$c(\tilde{E}) = \sum_{i=1}^{n} c(\tilde{E}_i/\tilde{E}_{i-1}),$$

und es gilt der Riemann-Roch-Satz

$$\dim H^0(Y, \tilde{E}) - \dim H^1(Y, \tilde{E}) = (1-g)\, n + c(\tilde{E}).$$

Sei nun G/Y ein rational triviales halbeinfaches Gruppenschema. Sei $B \subset G$ eine Boreluntergruppe und $T = B/B_u$ (s. 1.1). Sei $\pi = \{\alpha_1 \dots \alpha_r\} \subset \Delta^+ \subset X(T)$ das System der einfachen Wurzeln. In 1.1 haben wir jeder Wurzel $\alpha \in \Delta^+$ ein vektorielles Gruppenschema W_α/Y zugeordnet. Wir setzen jetzt

$$n_i(B) = c(W_{\alpha_i}).$$

Damit haben wir jeder Boreluntergruppe B/Y von G/Y ein r-Tupel numerischer Invarianten $(n_1(B) \dots n_r(B))$ zugeordnet. Da wir die einfachen Wurzeln zweier Boreluntergruppen identifizieren können, können wir deren numerische Invarianten auch vergleichen.

Wir können jetzt aber jeder Boreluntergruppe B/Y von G/Y noch ein zweites r-Tupel numerischer Invarianten zuordnen. Sei α_i eine einfache Wurzel, sei $P_i \subset B$ die maximale parabolische Untergruppe vom Typ

$$t(P_i) = \pi \setminus \{\alpha_i\}.$$

Sei X_i/Y das Schema der parabolischen Untergruppen von G/Y vom Typ P_i, sei

$$t_i\colon Y \to X_i$$

der zu P_i gehörige Schnitt. Dann setzen wir

$$p_i(B) = c\big(t_i^*(\omega_{X_i/Y})\big)$$

(s. 1.2). Sei $\tilde{\gamma}_i$ der Charakter

$$\tilde{\gamma}_i = \sum_{\alpha \in \Delta^+_{P_i}} \alpha.$$

Dann wissen wir, daß $\tilde{\gamma}_i = f_i \gamma_i$ mit $f_i > 0$, wobei γ_i der zu α_i gehörige Fundamentalcharakter ist (s. 1.3). Außerdem wissen wir (Korollar 1.2.2), daß

$$t_i^*(\omega_{X_i/Y}) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\alpha \in \Delta_{P_i}^+} \tilde{W}_\alpha .$$

Schreiben wir nun

$$\tilde{\gamma}_i = \sum_{j=1}^{r} m_{ij} \alpha_j$$

mit $m_{ij} \in \mathbf{Z}$ und

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} c_{ij} \tilde{\gamma}_j$$

mit $c_{ij} \in \mathbf{Q}$, so erhalten wir aus Korollar 1.2.2 die Relationen

$$\begin{aligned} p_i(B) &= \sum_{j=1}^{r} m_{ij} n_j(B) \\ n_i(B) &= \sum_{j=1}^{r} c_{ij} p_j(B). \end{aligned} \tag{R}$$

Die Invarianten $p_i(B)$ haben den Vorteil, daß man sie auch für parabolische Untergruppen P/Y von G/Y definieren kann: Sei X/Y das Schema der parabolischen Untergruppen eines gegebenen Typs, seien

$$\varphi_{i_\nu} \colon X \to X_{i_\nu}$$

die kanonischen Morphismen in die Schemata der maximalen parabolischen Untergruppen, die oberhalb des gegebenen Typs liegen.

Sei $t \colon Y \to X$ ein Schnitt, sei P_t die zugehörige parabolische Untergruppe, sei $t_{i_\nu} = \varphi_{i_\nu} \circ t$, dann setzen wir

$$p_{i_\nu}(P_t) = c\left(t_{i_\nu}^*(\omega_{X_{i_\nu}/Y})\right).$$

Sei $S \to \mathrm{Spec}(k)$ ein Präschema, wir betrachten die Menge

$$\Gamma(X/Y)(S) = \mathrm{Hom}_Y(Y \underset{k}{\times} S, X),$$

d.h. $\Gamma(X/Y)(S)$ sind die parabolischen Untergruppen von $G \underset{k}{\times} S$, die von dem vorgegebenen Typ sind. Sei $x \in S$ mit dem Restklassenkörper $k(x)$. Ist $t \in \Gamma(X/Y)(S)$, so erhalten wir durch Einschränken einen Schnitt

$$t(x) \in \Gamma(X/Y)\left(\mathrm{Spec}(k(x))\right).$$

Sei $P_t(x)$ die zugehörige parabolische Untergruppe von $G \underset{k}{\times} k(x)$ über $Y \underset{k}{\times} k(x)$. Für diese parabolische Untergruppe sind nun die numerischen Invarianten $p_{i_\nu}(P_t(x))$ definiert. Wir setzen für ein s-Tupel $(p_{i_1}, \ldots, p_{i_s})$ und $S \to \mathrm{Spec}(k)$

$$\Gamma^{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}(X/Y)(S) = \{t \in \Gamma(X/Y)(S) \mid p_{i_\nu}(P_t(x)) = p_{i_\nu} \text{ für alle } x \in S\}.$$

Satz 2.1.1. *Der Funktor*

$$S \to \Gamma^{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}(X/Y)(S)$$

ist durch ein quasiprojektives Schema

$$\Gamma^{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}(X/Y)$$

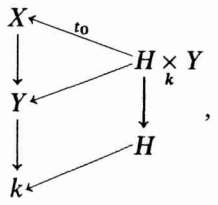
über k darstellbar.

Beweis. Dieser Satz ist eine Konsequenz der allgemeinen Resultate von Grothendieck in [12]. Dort sagt Grothendieck, daß die Darstellbarkeit der Funktoren $\Gamma(X/Y)$ aus der Existenz der Hilbertschemata folgt; man kann die Schnitte von $Y \to X$ mit gewissen Unterschemata von X identifizieren. Daß dann $\Gamma^{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}(X/Y)$ quasiprojektiv ist, folgt daraus, daß die Neron-Severi-Gruppe von X in unserem Falle von den $\tilde{L}_i$ und der Klasse einer Faser $f^{-1}(y)$ modulo Torsion erzeugt wird (s. 1.3). Ist also $\tilde{L}$ auf X ein sehr ampler inversibler Modul und $t\colon Y \to X$ ein Schnitt, so ist der Grad von $t^*(\tilde{L})$ durch die $p_i(P_i)$ bestimmt. Dann folgt wie in [12], daß $\Gamma^{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}(X/Y)$ ein offenes quasi-projektives Unterschema von $\Gamma(X/Y)$ ist.

Wir haben hier einen etwas direkteren Beweis für Satz 2.1.1 durchgeführt, wir halten uns im wesentlichen an die Argumentation in [12], die spezielle Situation erlaubt aber einige Vereinfachungen.

Lemma 1. *Sei Y ein Präschema über einem Körper k. Sei $X \to Y$ ein Präschema über Y, und sei $X_1 \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Unterschema von X. Der Funktor $\Gamma(X/Y)$ sei durch ein Präschema H/k darstellbar. Dann ist $\Gamma(X_1/Y)$ durch ein abgeschlossenes Unterschema von H/k darstellbar.*

Beweis. Nach Definition gibt es einen Schnitt t_0



so daß gilt: Für jedes Präschema S über k ist die Abbildung

$$\psi\colon \mathrm{Hom}_k(S, H) \to \mathrm{Hom}_Y(S \underset{k}{\times} Y, X),$$

die durch

$$\psi\colon t \longmapsto t_0 \circ (t \times \mathrm{id})$$

$$t \times \mathrm{id} \in \mathrm{Hom}_Y(S \underset{k}{\times} Y, H \underset{k}{\times} Y)$$

gegeben ist, ein Isomorphismus. Sei nun $T \subset H \underset{k}{\times} Y$ das Urbild von X_1 unter t_0, dann ist ein Element $\psi(t)$ genau dann in $\mathrm{Hom}(S \underset{k}{\times} Y, X_1)$ enthalten, wenn der Morphismus

$$t \times \mathrm{id}\colon S \underset{k}{\times} Y \to H \underset{k}{\times} Y$$

sich über T faktorisieren läßt. Wir haben also zu zeigen, daß es ein abgeschlossenes Unterschema $H_1 \subset H$ gibt mit der Eigenschaft, daß sich ein Morphismus

$$\begin{array}{ccc} & & H \\ t\colon & S & \nearrow \\ & \searrow & \downarrow \\ & & k \end{array}$$

genau dann über H_1 faktorisieren läßt, wenn sich $t \times \mathrm{id}$ über T faktorisieren läßt. Um die Existenz von H_1 nachzuweisen, können wir annehmen, daß H und Y und damit auch S affin sind. Wir setzen $\mathrm{Spec}(A) = H$, $\mathrm{Spec}(B) = Y$, und sei $J \subset A \underset{k}{\otimes} B$ das zu T gehörige Ideal. Wir haben zu zeigen: Es gibt ein Ideal $J_1 \subset A$, so daß für jede k-Algebra C ein k-Homomorphismus

$$f\colon A \to C$$

genau dann J_1 im Kern enthält, wenn der Morphismus

$$f \otimes 1\colon A \underset{k}{\otimes} B \to C \underset{k}{\otimes} B$$

das Ideal J im Kern enthält. Das heißt wir müssen für J_1 das kleinste Ideal wählen, für das gilt

$$J_1 \underset{k}{\otimes} B \supset J.$$

Die Existenz eines solchen kleinsten Ideals ergibt sich daraus, daß für zwei Ideale $J_1', J_2' \subset A$ gilt

$$J_1' \underset{k}{\otimes} B \cap J_2' \underset{k}{\otimes} B = (J_1' \cap J_2') \underset{k}{\otimes} B.$$

Sei nun Y wieder eine glatte Kurve über k, sei G/Y ein rational triviales halbeinfaches Gruppenschema, sei X/Y das Schema der parabolischen Untergruppen eines gegebenen Typs. Sei

$$\tilde{L}'_{i_\nu} = \mathscr{H}om(\omega_{X_{i_\nu}/Y}, \mathcal{O}_{X_{i_\nu}})$$

der inverse Modul zu $\omega_{X_{i_\nu}/Y}$, und sei

$$\tilde{L}_{i_\nu} = t_{i_\nu}^*(\tilde{L}'_{i_\nu}).$$

Lemma 2. *Der inversible Modul*

$$\tilde{L} = \bigotimes_{\nu=1}^{s} \tilde{L}_{i_\nu}$$

ist relativ ample über Y. (Siehe EGA, Chap. II, 4.6.)

Beweis. Die Aussage ist lokal in Y (s. EGA, loc. cit.), sei also $U \subset Y$ offen, so daß

$$G/U \xrightarrow{\sim} G_0 \underset{k}{\times} U,$$

wobei G_0 ein Chevalleyschema über k ist. Dann ist zu zeigen, daß $\tilde{L} \mid X \underset{Y}{\times} U$ relativ ample ist. Jetzt ist aber

$$X \underset{Y}{\times} U \xrightarrow{\sim} X_0 \underset{k}{\times} U,$$

wobei X_0 das entsprechende Schema parabolischer Untergruppen über k ist. Jetzt genügt es zu zeigen, daß der analog definierte inversible Modul $\tilde{L}_0$ auf X_0 ample ist. (Siehe EGA, Chap. II, 4.5.) Den Beweis dieser Tatsache haben wir in 1.3 angedeutet.

Wenn nun $\tilde{L}$ ein ampler inversibler Modul ist, so gibt es ein $n>0$, so daß $\tilde{L}^{\otimes n} = \tilde{M}$ sehr ample ist (s. EGA, Chap. II, 4.6). Dann sei $f: X \to Y$ der Strukturmorphismus. Wir setzen $\tilde{E} = f_*(\tilde{M})$. Da X/Y lokal trivial ist, folgt, daß $\tilde{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_Y$-Modul von endlichem Rang ist. Sei $\mathbf{P}(\tilde{E})$ das zugehörige projektive Schema über Y, nach Definition haben wir eine Injektion

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{P}(\tilde{E}) \\ i: & X \subset & \searrow \swarrow \\ & & Y \end{array}$$

so daß $\tilde{M} = i^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\tilde{E})}(1))$. (Siehe EGA, Chap. II, loc. cit.) Sei $S \to \mathrm{Spec}(k)$ ein Präschema, dann ist

$$\Gamma^{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}(X/Y)(S) = \{t \in \Gamma(X/Y)(S) \mid c(t(x)^*(\tilde{L}_i)) = -p_i \text{ für alle } x \in S\},$$

also gilt insbesondere

$$c(t(x)^*(\tilde{M})) = -n\left(\sum_{\nu=1}^{s} p_{i_\nu}\right) = m$$

für $t \in \Gamma^{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}(X/Y)(S)$ und alle $x \in S$. Sei

$$\Gamma^{(m)}(X/Y)(S) = \{t \in \Gamma(X/Y)(S) \mid c(t(x)^*(\tilde{M})) = m \text{ für alle } x \in S\}.$$

Wenn wir zeigen können, daß

$$S \mapsto \Gamma^{(m)}(X/Y)(S)$$

durch ein quasiprojektives Schema über k darstellbar ist, folgt sofort, daß

$$S \mapsto \Gamma^{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}(X/Y)(S)$$

durch ein offenes und abgeschlossenes Unterschema davon dargestellt wird (s. EGA, Chap. $\mathrm{III}_{\mathrm{II}}$, 7.9). Nach Lemma 1 genügt es jetzt aber zu

zeigen, daß der analog definierte Funktor

$$S \mapsto \Gamma^{(m)}(\mathbf{P}(\tilde{E})/Y)(S)$$

durch ein quasiprojektives Schema über k darstellbar ist. Dabei wird $\tilde{M}$ durch $O_{\mathbf{P}(\tilde{E})}(1)$ ersetzt.

Sei $p\colon S \underset{k}{\times} Y \to Y$ die Projektion, dann entsprechen die Schnitte $t\colon Y \underset{k}{\times} S \to \mathbf{P}(\tilde{E})$ eineindeutig den inversiblen Untermoduln $\tilde{L} \subset p^*(\tilde{E})$, die lokal direkte Summanden sind (s. EGA, Chap. II, 4.4). Wir erhalten also

$$\Gamma^{(m)}(\mathbf{P}(\tilde{E})/Y)(S) = \{\tilde{L} \subset p^*(\tilde{E}) \mid \tilde{L} \text{ ist inversibel und lokal direkter Summand, und für alle } x \in S \text{ gilt } c(\tilde{L}_x) = -m\}.$$

Dabei ist $\tilde{L}_x$ die Einschränkung von $\tilde{L}$ auf $Y \underset{k}{\times} k(x)$. Sei $\tilde{H}$ ein inversibler Modul, wir ersetzen $\tilde{E}$ durch $\tilde{E} \otimes \tilde{H}$, dann müssen wir $-m$ durch $-m+c(h)$ ersetzen. Da wir an der ganzen Situation nichts geändert haben, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $-m \geqq 2g$ ist. Dann gilt für $\tilde{L} \in \Gamma^{(m)}(\mathbf{P}(\tilde{E})/Y)(S)$ und $x \in S$

1. Es ist $H^1(Y \underset{k}{\times} k(x), \tilde{L}_x) = 0$.

2. Für jeden Punkt $y \in Y \underset{k}{\times} k(x)$ erzeugen die globalen Schnitte in $H^0(Y \underset{k}{\times} k(x), \tilde{L}_x)$ den Halm über y.

Ferner können wir durch geeignete Wahl von H erreichen, daß auch die folgende dritte Bedingung erfüllt ist:

3. Es ist $H^1(Y \underset{k}{\times} k(x), \tilde{E}_x/\tilde{L}_x) = 0$.

Wir betrachten nun das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xleftarrow{\ p\ } & Y \underset{k}{\times} S \\ \downarrow{\scriptstyle q_0} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ k & \xleftarrow{\ p_0\ } & S \end{array}$$

Es gilt $p_0^*(H^0(Y, \tilde{E})) = q_* p^*(\tilde{E})$ (s. EGA, Chap. III, Prop. 1.4.15). Aus den Bedingungen 1 und 3 folgt, daß der Modul $q_*(\tilde{L})$ lokal direkter Summand in $q_* p^*(\tilde{E})$ ist, sein Rang ist nach dem Satz von Riemann-Roch gleich $m_1 = m - g + 1$ (s. EGA, Chap. III, Th. 7.7.5). Wir setzen nun $V = H^0(Y, \tilde{E})$, und es sei $G_{m_1}(V)$ das Graßmannschema der m_1-dimensionalen Teilräume von V (s. [12], S. 13). Die Abbildung

$$\varphi\colon \tilde{L} \mapsto q_*(\tilde{L}) \subset p_0^*(V)$$

liefert uns einen injektiven funktoriellen Morphismus

$$\varphi\colon\ \Gamma^{(m)}(\mathbf{P}(\tilde{E})/Y)(S)\to G_{m_1}(V)(S).$$

Wir wollen nun zeigen, daß wir durch φ eine Darstellung von $\Gamma^{(m)}(\mathbf{P}(\tilde{E})/Y)$ als Unterschema von $G_{m_1}(V)$ erhalten. Auf dem Schema $G_{m_1}(V)$ ist ein kanonischer lokal freier Modul $\tilde{F}$ vom Rang m_1 gegeben. Sei $t\in G_{m_1}(V)(S)$, d.h. t ist ein Morphismus

$$\begin{array}{ccc} t\colon\ S & \longrightarrow & G_{m_1}(V) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & k & \end{array}$$

Dann ist $t^*(\tilde{F})$ lokal frei auf S, und $q^*t^*(\tilde{F})$ ist ein lokal freier Modul auf $Y\underset{k}{\times}S$, und zwar ein Untermodul von $q^*(p_0^*(V))=q^*(q_*p^*(\tilde{E}))$. Nun gibt es einen kanonischen Morphismus

$$\Phi\colon\ q^*(q_*p^*(\tilde{E}))\to p^*(\tilde{E})$$

(s. EGA, Chap. O_I, 4.4). Sei $\tilde{F}_t$ das Bild des Untermoduls $q^*t^*(\tilde{F})\subset q^*(p_0^*(V))$ unter φ. Man überlegt sich nun sehr leicht: Ist $\tilde{L}$ ein inversibler Modul aus $\Gamma^{(m)}(\mathbf{P}(\tilde{E})/Y)(S)$, sei $t\in G_{m_1}(V)(S)$ der Bildpunkt unter φ, dann ist nach Definition

$$t^*(\tilde{F})=q_*(\tilde{L}),$$

und es ist $\tilde{F}_t=\tilde{L}$, weil die Abbildung

$$q^*(q_*(\tilde{L}))\to\tilde{L}$$

surjektiv ist (Bedingung 2).

Wir wollen sagen, daß der Untermodul $\tilde{F}_t\subset p^*(\tilde{E})$ vom Rang 1 ist, falls für jede offene Menge $W\subset Y\underset{k}{\times}S$ und je zwei lokale Schnitte

$$s_1, s_2\in\Gamma(W,\tilde{F}_t)\subset\Gamma(W,p^*(\tilde{E}))$$

gilt $s_1\wedge s_2=0$, d.h. s_1 und s_2 sind linear abhängig.

Der Beweis des folgenden Lemmas ist einfach:

Lemma 3. *Es gibt ein Unterschema $X\subset G_{m_1}(V)$ mit der Eigenschaft:*

$$X(S)=\{t\in G_{m_1}(V)(S)\mid\tilde{F}_t\ \textit{ist vom Rang}\ 1\}.$$

Der Morphismus φ faktorisiert über X.

Sei nun $x\in X$, sei t_x: $\mathrm{Spec}(k(x))\hookrightarrow X$ die natürliche Inklusion. Setzen wir $S=\mathrm{Spec}(k(x))$, so liefern uns die obigen Betrachtungen einen Modul

$\tilde{F}_{t_x}$ auf $Y \underset{k}{\times} k(x)$, der ein Untermodul von $\tilde{E}_x = p^*(\tilde{E})$ ist. Sei

$$X_1 = \{x \in X \mid \text{Zu jedem abgeschlossenen Punkt } y \in Y \underset{k}{\times} k(x)$$
$$\text{gibt es einen globalen Schnitt } v \in \Gamma\big(Y \underset{k}{\times} k(x), \tilde{F}_{t_x}\big),$$
$$\text{dessen Bild in } \tilde{E}_x \text{ an der Stelle } y \text{ nicht Null ist.}$$

Lemma 4. *Die Teilmenge $X_1 \subset X$ ist offen, sie besteht aus genau denjenigen Punkten $x \in X$, für die $\tilde{F}_{t_x}$ lokal direkter Summand in E_x ist.*

Auch der Beweis dieses Lemmas ist reine Routine, und es ist klar, daß φ über X_1 faktorisiert und daß gilt

$$\varphi\colon\ \Gamma^{(m)}\big(\mathbf{P}(E)/Y\big)(S) \xrightarrow{\sim} X_1(S).$$

Damit ist die Behauptung von Satz 2.1.1 bewiesen.

Für die s-Tupel $(p_{i_1} \dots p_{i_s})$ wollen wir abkürzende Bezeichnungen einführen, wir setzen

$$(p_{i_1} \dots p_{i_s}) = \mathbf{p},$$

und ferner schreiben wir

$$\Gamma^{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}(X/Y) = \Gamma^{\mathbf{p}}(X/Y).$$

Ist X/Y das Schema der Boreluntergruppen, so können wir ganz analog das Schema

$$\Gamma_{n_1 \dots n_r}(X/Y)$$

definieren, dies ist das Schema der Boreluntergruppen mit vorgegebenen Invarianten $n_i(B) = n_i$, und wir setzen wieder $(n_1 \dots n_r) = \mathbf{n}$. Es gilt

$$\Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y) = \Gamma^{\mathbf{p}}(X/Y),$$

wenn $(n_1 \dots n_r)$ und $(p_1 \dots p_r)$ in der Relation (R) zueinander stehen.

Sei X' das Schema der parabolischen Untergruppen vom Typ π', sei $\pi'' \supset \pi'$ und X''/Y das Schema der parabolischen Untergruppen vom Typ π''. Dann induziert der Morphismus $\varphi_{\pi', \pi''}$ (s. 1.2) eine Familie von Morphismen

$$\varphi_{\mathbf{p}', \mathbf{p}''}\colon\ \Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y) \to \Gamma^{\mathbf{p}''}(X''/Y),$$

wobei $\mathbf{p}''$ aus $\mathbf{p}'$ durch Weglassen der geeigneten Komponenten entsteht. Sei insbesondere wieder $X' = X$ das Schema der Boreluntergruppen von G/Y, sei $\pi'' = \{\alpha_1 \dots \alpha_s\} \subset \pi = \{\alpha_1 \dots \alpha_r\}$. Sei

$$B \in \Gamma^{\mathbf{p}}(X/Y)(k) \quad \text{und} \quad P = \varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}''}(B) \in \Gamma^{\mathbf{p}''}(X''/Y)(k).$$

Die Boreluntergruppen von P entsprechen nun aber den Boreluntergruppen von H, wobei

$$H = P/R(P)$$

der halbeinfache Anteil von P ist. Das System der einfachen Wurzeln von H ist aber $\alpha_1 \dots \alpha_s$, d.h. die Faser von $\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}''}$ über dem Punkt

$P \in \Gamma^{\mathfrak{p}''}(X''/Y)(k)$ ist gleich $\Gamma_{n_1 \ldots n_s}(X_H/Y)$, wobei X_H das Schema der Boreluntergruppen von H/Y ist.

2.2 Strukturaussagen über $\Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)$

Sei X/Y das Schema der Boreluntergruppen des rational trivialen Gruppenschemas G/Y. Sei Δ^+ die Menge der positiven Wurzeln von G/Y (s. 1.1). Mit $\#\Delta^+$ bezeichnen wir die Anzahl der positiven Wurzeln. Sei $\mathbf{n}=(n_1 \ldots n_r)$. Wir setzen für $\alpha = \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i \in \Delta^+$

$$d_{\mathbf{n}}(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} m_i n_i .$$

Sei g wieder das Geschlecht der Kurve. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Satz 2.2.1. *Es sei für alle i*

$$n_i \leqq -2g+1, \qquad \text{falls } g>0$$
$$n_i \leqq 0, \qquad \text{falls } g=0.$$

Dann ist $\Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)$ ein glattes Schema über k. Bezeichnen wir die Dimension von $\Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)$ mit $d(\mathbf{n})$, so gilt

$$d(\mathbf{n}) = \#\Delta^+(1-g) - \sum_{\alpha \in \Delta^+} d_{\mathbf{n}}(\alpha).$$

Beweis. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß k algebraisch abgeschlossen ist. Es genügt nun, zu zeigen, daß $\Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)$ in jedem Punkt $t \in \Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)(k)$ glatt ist, und die Dimension des Zariskitangentialraums in t zu bestimmen. Sei B_t die zu t korrespondierende Boreluntergruppe. Ferner definiert der Schnitt t ein Unterschema $Z_t \subset X$, nämlich das Bild von Y unter t. Die Projektion von $X \to Y$ definiert auf Z_t einen Isomorphismus mit Y; diesen Isomorphismus wollen wir mit

$$t' \colon Y \xrightarrow{\sim} Z_t$$

bezeichnen. Sei $\mathfrak{N}_{Z_t/X}$ die Normalgarbe von Z_t in X ([12], S. 23), dann ist

$$t'^*(\mathfrak{N}_{Z_t/X}) = L^t(X/Y) = t^*(T_{X/Y})$$

(s. 1.2).

Nach Satz 1.2.1 besitzt nun $L^t(X/Y)$ eine unter den Operationen von B_t invariante Filtrierung, so daß die sukzessiven Quotienten inversible Moduln sind, auf denen $B_t/B_{t,u}$ durch einen Charakter $\alpha \in -\Delta^+$ operiert. Die sukzessiven Quotienten entsprechen gerade den negativen Wurzeln, der der Wurzel α entsprechende Quotient sei mit $\tilde{W}_\alpha^-$ bezeichnet. Aus Korollar 1.1.2 und 1.2.2 folgt dann

$$c(\tilde{W}_\alpha^-) = -d_{\mathbf{n}}(\alpha).$$

Dann ergibt sich aus unseren Voraussetzungen über die n_i

$$\dim H^0(Y, \tilde{W}_\alpha^-) = -d_{\mathbf{n}}(\alpha)+1-g$$
$$H^1(Y, \tilde{W}_\alpha^-)=0.$$

Also folgt $H^1(Z_t, \mathfrak{R}_{Z_t/X})=H^1(Y, L(X/Y))=0$.

Die Behauptungen aus Satz 2.2.1 folgen nun sofort aus Cor. 5.4 in [12].

Bemerkung 1. In die Voraussetzungen gehen die Invarianten $\mathbf{n}(B)$ wesentlich ein, deswegen scheint es mir schwierig zu sein, eine analoge Aussage für $\Gamma^{\mathbf{p}}(X/Y)$ zu erhalten, falls X/Y nicht das Schema der Boreluntergruppen, sondern irgendeiner Klasse parabolischer Untergruppen ist.

Bemerkung 2. Es scheint mir eine interessante Frage zu sein, ob die $\Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)$ geometrisch zusammenhängend sind, falls die n_i alle sehr klein sind. Falls man diese Frage positiv beantworten kann, hätte man einen wesentlichen Schritt zu der Lösung des am Anfang der Einleitung gestellten Problems getan. Genauer gesagt, man könnte dann zeigen: Ist k endlich und G_0/K ein einfach zusammenhängendes Chevalleyschema über K, so ist $H^1(K, G_0)=0$.

Sei X/Y das Schema der Boreluntergruppen von G/Y, sei $\pi' \subset \pi$ eine Teilmenge, sei X'/Y das Schema der parabolischen Untergruppen vom Typ π'. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}=\varphi\colon\ \Gamma^{\mathbf{p}}(X/Y) \to \Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)$$

für festes $\mathbf{p}$ und $\mathbf{p}'$. Der Vektor $\mathbf{p}=(p_1 \dots p_r)$ bestimmt einen Vektor $\mathbf{n}=(n_1 \dots n_r)$, so daß $\mathbf{p}$ und $\mathbf{n}$ in der Relation (R) zueinander stehen. Wir setzen für jede Wurzel $\alpha \in \Delta$:

$$d_{\mathbf{p}}(\alpha)=d_{\mathbf{n}}(\alpha).$$

Es gilt dann die folgende Verallgemeinerung von Satz 2.2.1:

Satz 2.2.2. *Sei $t \in \Gamma^{\mathbf{p}}(X/Y)(k)$, und sei $\varphi(t)=t' \in \Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)(k)$. Sei $P_{t'}$ die zugehörige parabolische Untergruppe. Sei für alle $\alpha \in \Delta^+_{P_t}$*

$$d_{\mathbf{p}}(\alpha) \leqq -2g+1, \quad \text{falls } g>0$$
$$d_{\mathbf{p}}(\alpha) \leqq 0, \quad \text{falls } g=0.$$

Dann ist $\Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)$ im Punkt t' glatt, und die Dimension von $\Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)$ im Punkt t' ist durch

$$(1-g)\#\Delta^+_{P_t} - \sum_{\alpha \in \Delta^+_{P_t}} d_{\mathbf{p}}(\alpha)$$

gegeben.

Beweis. Genauso wie in Satz 2.2.1.

Wir haben bislang immer den Fall betrachtet, daß die $(n_1 \dots n_r)$ relativ klein sind, wir wollen jetzt eine entgegengesetzte Situation studieren. Sei X/Y wieder das Schema der Boreluntergruppen von G/Y und X'/Y das Schema der parabolischen Untergruppen eines gegebenen Typs π'. Sei Δ^+ die Menge der positiven Wurzeln von G/Y, sei $\Delta^+_{\pi'} \subset \Delta^+$ die Menge der positiven Wurzeln der parabolischen Untergruppen vom Typ π' (s. 1.2).

Satz 2.2.3. *Sei* $\mathbf{p}=(p_1 \dots p_r)$ *gegeben. Für* $\alpha \in \Delta^+_{\pi'}$ *gelte*

$$d_{\mathbf{p}}(\alpha) > \max(2g-2, 0).$$

Sei $\Gamma^{\mathbf{p}}(X/Y)$ *nicht leer. Dann gibt es einen Punkt* $a \in \Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)$, *der zugleich abgeschlossen und offen ist, dessen Restklassenkörper* $k(a)$ *gleich* k *ist, und für den gilt, daß* $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}: \Gamma^{\mathbf{p}}(X/Y) \to \Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)$ *über die Injektion* $\mathrm{Spec}(k(a)) \hookrightarrow \Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)$ *faktorisiert, m.a.W. das Bild von* $\Gamma^{\mathbf{p}}(X/Y)$ *unter* $\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}$ *ist das reduzierte abgeschlossene und offene Unterschema* $\{a\} \subset \Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)$. *Ist* $\mathbf{p}_1$ *ein zweiter Vektor, für den die gleichen Voraussetzungen gelten wie für* $\mathbf{p}$, *dann ist* $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'$ *und* $\varphi_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}'}$ *faktorisiert auch über* $\{a\}$.

Beweis. Man überlegt sich leicht, daß man den Grundkörper k als algebraisch abgeschlossen voraussetzen kann; dann können wir die abgeschlossenen Punkte von $\Gamma^{\mathbf{p}}(X/Y)$ und $\Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)$ mit den geometrischen Punkten dieser beiden Schemata mit Werten in k identifizieren. (Siehe EGA, Chap. I, Cor. 6.4.3.) Sei $t \in \Gamma^{\mathbf{p}}(X/Y)(k)$, sei a das Bild von t in $\Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)(k)$. Jetzt liefern uns die gleichen Argumente wie die im Beweis von Satz 2.2.1 benutzten, daß gilt

$$H^0(Y, L^a(X'/Y)) = 0;$$

denn jetzt haben die bei der Filtrierung auftretenden Quotienten negativen Grad. Also ist nach [12] Cor. 5.4 der Zariskitangentialraum von $\Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)$ im Punkte a gleich Null. Daraus folgt, daß a auch ein offener Punkt in $\Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)$ ist und daß das offene und abgeschlossene Unterschema $\{a\} \subset \Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)$ reduziert ist. Sei nun $\mathbf{p}_1$ ein Vektor, der den gleichen Voraussetzungen wie $\mathbf{p}$ genüge. Sei $t_1 \in \Gamma^{\mathbf{p}_1}(X/Y)(k)$, sei b das Bild von t_1 in $\Gamma^{\mathbf{p}'_1}(X'/Y)(k)$. Wenn wir zeigen, daß $a=b$ gilt (a und b aufgefaßt als Punkte in $\Gamma(X'/Y)$), so sind wir fertig. Seien P, bzw. P_1 die zu a und b korrespondierenden parabolischen Untergruppen von G/Y, seien $B \subset P$, bzw. $B_1 \subset P_1$ die zu t, bzw. t_1 korrespondierenden Boreluntergruppen. Seien $R_u(P)$ bzw. $R_u(P_1)$ die unipotenten Radikale von P bzw. P_1. Wir betrachten nun die Schemata der globalen Schnitte (s. 1.4)

$$\Gamma(Y, R_u(P)) \quad \text{und} \quad \Gamma(Y, R_u(P_1)).$$

Es gilt der folgende

Hilfssatz. *(Der Körper k werde weiterhin als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt.) Die Schemata* $\Gamma(Y, R_u(P))$ *und* $\Gamma(Y, R_u(P_1))$ *sind glatte, zusammenhängende unipotente Gruppenschemata über k. Für fast alle abgeschlossenen Punkte* $y \in Y$ *ist die natürliche Abbildung*

$$\Gamma(Y, R_u(P)) \to \Gamma(k(y), R_u(P) \underset{Y}{\times} k(y)) = R_u(P)(k)$$

surjektiv, dasselbe gilt für $R_u(P_1)$.

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $R_u(P)$ zu beweisen. Wir betrachten die durch $B \subset P$ induzierte Filtrierung auf $R_u(P)$ (s. 1.2)

$$R_u(P) = U_0 \supset U_1 \supset U_2 \cdots \supset U_n = \{e\}.$$

Auf den U_i/U_{i+1} operiert $B/B_u = T$ durch die Charaktere $\alpha \in \Delta_\pi^+$, also ist der Grad der eindimensionalen vektoriellen Schemata U_i/U_{i+1} größer als $\max(2g-2, 0)$. Daraus folgt für alle i

$$H^1(Y, U_i) = 0.$$

Dann ist für alle i die Folge

$$1 \to \Gamma(Y, U_{i+1}) \to \Gamma(Y, U_i) \to \Gamma(Y, U_i/U_{i+1}) \to 1$$

exakt, und daraus folgt leicht, daß das Schema $\Gamma(Y, R_u(P))$ unipotent, glatt und zusammenhängend ist. Die letzte Behauptung folgt nun daraus, daß für einen inversiblen Modul $\tilde{L}$ über Y mit $c(\tilde{L}) > \max(2g-2, 0)$ für alle bis auf eventuell einen Punkt $y \in Y$ die Abbildung

$$H^0(Y, L) \to H^0(k(y), L_y) = L_y$$

surjektiv ist. (Dies folgt aus dem Riemann-Roch-Satz.) Betrachtet man dann die exakten Folgen, die sich aus der Filtrierung ergeben, folgt auch die letzte Behauptung des Hilfssatzes.

Wir lassen $\Gamma(Y, R_u(P))$ durch innere Automorphismen auf $\Gamma^{\mathfrak{pi}}(X'/Y)$ operieren. Da $b \in \Gamma^{\mathfrak{pi}}(X'/Y)$ ein offener, abgeschlossener Punkt ist, muß b unter diesen Operationen invariant bleiben, da $\Gamma(Y, R_u(P))$ zusammenhängend ist. Dann folgt aber, daß für fast alle y die Faser $R_u(P)_y = R_u(P) \underset{Y}{\times} k(y)$ die Faser $P_{1,y}$ normalisiert, also ist für fast alle y die Gruppe $R_u(P)_y$ in $P_{1,y}$ enthalten. Nach [2], Cor. 4.5 folgt, daß für fast alle y gilt $P_y = P_{1,y}$, daraus folgt aber $P = P_1$. Q.e.d.

Wir möchten an dieser Stelle darauf hinweisen, daß wir noch eine Variante dieses Satzes, nämlich Korollar 2.2.14 beweisen werden.

Die folgenden beiden Lemmata dienen zur Vorbereitung des Satzes 2.2.6.

Lemma 2.2.4. *Sei* G/Y *ein rational triviales Gruppenschema vom Typ* A_1. *Dann gibt es einen lokal freien* $\mathcal{O}_Y$*-Modul* $\tilde{E}$ *vom Rang* 2, *so daß* $G \xrightarrow{\sim} SL(\tilde{E})$ *oder* $G \xrightarrow{\sim} PL(\tilde{E})$. (Siehe SGAD, Exp. I, 4.5.)

Beweis. Da G/Y rational trivial ist, ist G auch lokal trivial. Also ist G/Y lokal zu $SL(2)$ oder $PL(2)$ isomorph. Zu G/Y gehört dann eine Kohomologieklasse

$$\xi \in H^1(Y_{\text{zar}}, PL(2)).$$

Aus der bezüglich der Zariskitopologie exakten Folge

$$1 \to G_m \to GL(2) \to PL(2) \to 1$$

erhält man dann, daß ξ von einer Klasse $\eta \in H^1(Y, GL(2))$ herkommt, weil $H^2(Y_{\text{zar}}, G_m) = 0$. Nun ist $GL(2)$ das Automorphismenschema des trivialen $\mathcal{O}_Y$-Moduls $\tilde{E}_0 = \mathcal{O}_Y \oplus \mathcal{O}_Y$. Zu η gehört eine getwistete Isomorphieklasse von $\mathcal{O}_Y$-Moduln, sei $\tilde{E}$ aus dieser Klasse. Dann ist offensichtlich

$$G \xrightarrow{\sim} PL(\tilde{E}) \quad \text{oder} \quad G \xrightarrow{\sim} SL(\tilde{E}).$$

Lemma 2.2.5. *Sei G/Y halbeinfach und rational trivial. Dann sind die numerischen Invarianten $p_i(P)$ der parabolischen Untergruppen nach oben beschränkt.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß für die maximalen parabolischen Untergruppen P_i/Y von G/Y die Zahlen $p(P_i)$ nach oben beschränkt sind. Es ist (s. 1.2, Kor. 1.2.2)

$$p(P_i) = c(t^*(\omega_{X_i/Y})) = c(\Lambda^{d_i} \operatorname{Lie}(R_u(P_i)/Y).$$

Nun ist nach dem Satz von Riemann-Roch

$$\dim H^0(Y, \operatorname{Lie}(R_u(P_i)) \geqq p(P_i) + (1-g) \cdot d_i.$$

Andererseits ist

$$\dim H^0(Y, \operatorname{Lie}(R_u(P_i)) \leqq \dim H^0(Y, \operatorname{Lie}(G)).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Satz 2.2.6. *Sei G/Y rational trivial. Sei $h > 0$ die kleinste Zahl, für die es einen inversiblen $\mathcal{O}_Y$-Modul $\tilde{H}$ mit $c(\tilde{H}) = h$ gibt. Dann gibt es eine Boreluntergruppe $B \subset G$ mit*

$$n_i(B) \geqq -2g - 2(h-1).$$

Beweis. Wir beweisen diesen Satz zuerst in dem Fall, wo G/Y vom Typ A_1 ist. Wir können dann annehmen, daß $G \tilde{\to} SL(\tilde{E})$, wobei $\tilde{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_Y$-Modul vom Rang 2 ist. Nun entsprechen aber die Boreluntergruppen $B \subset G$ eineindeutig den inversiblen Untermoduln $\tilde{L} \subset \tilde{E}$, die lokal direkte Summanden sind, d.h. für die $\tilde{E}/\tilde{L}$ auch inversibel ist. Ist nämlich $\tilde{L} \subset \tilde{E}$ ein solcher inversibler Teilmodul, so ist die zugehörige Boreluntergruppe $B \subset SL(\tilde{E})$ diejenige Untergruppe, die $\tilde{L}$ invariant läßt. Ferner ist klar, daß die vektorielle Gruppe B_u kanonisch zu $\operatorname{Hom}(E/L, L)$ isomorph ist. Nun gibt es nur eine Wurzel, und es ist

$B_u = W_\alpha$, also ist

$$n(B) = c(W_\alpha) = c(\tilde{L}) - c(\tilde{E}/\tilde{L}) = 2c(\tilde{L}) - c(\tilde{E}).$$

Außerdem ist klar, daß $SL(\tilde{E}) \tilde{\to} SL(\tilde{E} \otimes \tilde{H})$, wir können also wegen der Formel

$$c(\tilde{E}) = c(\tilde{E} \otimes \tilde{H}) - 2c(\tilde{H}) = c(\tilde{E} \otimes \tilde{H}) - 2h$$

ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$2g - 2 < c(\tilde{E}) \leqq 2g - 2 + 2h = 2g + 2(h-1)$$

ist. Dann ist aber nach dem Riemann-Rochschen Satz sicher

$$H^0(Y, \tilde{E}) \neq 0.$$

Sei $0 \neq t \in H^0(Y, \tilde{E})$, dann liegt t in einem inversiblen Untermodul $\tilde{L}_t \subset \tilde{E}$, wobei $\tilde{E}/\tilde{L}_t$ frei ist. Da $H^0(Y, \tilde{L}_t) \neq 0$ ist, folgt $c(L_t) \geqq 0$. Dann ist

$$n(B_t) \geqq -2g - 2(h-1),$$

wobei B_t die zu L_t gehörige Boreluntergruppe ist.

Wir haben hier eine Verallgemeinerung von Lemma 2.3 in [11] bewiesen.

Wir kommen nun zu dem allgemeinen Fall. Sei B/Y eine Boreluntergruppe, für die der Vektor

$$\mathbf{p} = (p_1(B) \ldots p_r(B))$$

maximal ist; das soll heißen, es gibt keine Boreluntergruppe B_1 von G/Y mit $p_i(B_1) \geqq p_i(B)$ und $p_{i_0}(B_1) > p_{i_0}(B)$ für einen Index i_0. Eine solche Boreluntergruppe B existiert wegen Lemma 2.2.5. Wir werden nun zeigen, daß dann für diese Boreluntergruppe automatisch die verlangten Ungleichungen

$$n_i(B) \geqq -2g - 2(h-1)$$

erfüllt sind. Sei i_0 ein Index, für den die obige Ungleichung nicht erfüllt ist, sei $P^{(i_0)} \supset B$ die parabolische Untergruppe vom Typ

$$t(P^{(i_0)}) = \{\alpha_{i_0}\}.$$

Sei $R(P^{(i_0)})$ das Radikal von $P^{(i_0)}$, dann ist $H^{(i_0)} = P^{(i_0)}/R(P^{(i_0)})$ ein halbeinfaches rational triviales Gruppenschema über Y vom Typ A_1. Die Boreluntergruppen von $H^{(i_0)}$ entsprechen genau den Boreluntergruppen von $P^{(i_0)}$, sie sind genau die Bilder der Boreluntergruppen von $P^{(i_0)}$ unter der Projektionsabbildung $P^{(i_0)} \to P^{(i_0)}/R(P^{(i_0)})$. Sei B' insbesondere die der Boreluntergruppe B entsprechende Boreluntergruppe von $H^{(i_0)}$. Die Boreluntergruppe B' besitzt nur eine numerische Invariante $n(B')$, und es ist $n(B') = n_{i_0}(B)$ (s. 2.1). Da wir jetzt angenommen haben, daß für

$n_{i_0}(B)$ die verlangte Ungleichung nicht gilt, können wir in $H^{(i_0)}$ eine Boreluntergruppe B_1' finden mit

$$n(B_1') > n(B').$$

Wir wissen ja, daß unser Satz für Gruppen vom Typ A_1 gilt. Sei $B_1 \subset P^{(i_0)}$ die zu B_1' korrespondierende Untergruppe von $P^{(i_0)}$, es ist

$$n(B_1') = n_{i_0}(B_1) > n_{i_0}(B).$$

Sei nun $j \neq i_0$, sei P_j die parabolische Untergruppe vom Typ $t(P_j) = \pi \setminus \{\alpha_j\}$. Dann ist $P_j \supset P^{(i_0)}$, also insbesondere $P_j \supset B$ und $P_j \supset B_1$. Daraus folgt

$$p_j(B) = p_j(B_1)$$

für $j \neq i_0$. Ich behaupte nun, daß jetzt aus $n_{i_0}(B_1) > n_{i_0}(B)$ folgt, daß $p_{i_0}(B_1) > p_{i_0}(B)$, und das ergibt einen Widerspruch zur Wahl von B. Um nun diese letzte Behauptung einzusehen, schreiben wir:

$$\tilde{\gamma}_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} m_i' \tilde{\gamma}_i + c_{i_0} \cdot \alpha_{i_0}.$$

(Das ist sicher möglich!) Dann ist

$$0 < f_{i_0} = \frac{\langle \alpha_{i_0}, \tilde{\gamma}_{i_0} \rangle}{\langle \alpha_{i_0}, \alpha_{i_0} \rangle} = \sum_{i \neq i_0} m_i' \frac{\langle \tilde{\gamma}_i, \alpha_{i_0} \rangle}{\langle \alpha_{i_0}, \alpha_{i_0} \rangle} + c_{i_0} \frac{\langle \alpha_{i_0}, \alpha_{i_0} \rangle}{\langle \alpha_{i_0}, \alpha_{i_0} \rangle} = c_{i_0}.$$

Also ist $c_{i_0} = f_{i_0} > 0$. Nun folgt aber

$$p_{i_0}(B) = \sum_{i \neq i_0} m_i' p_i(B) + f_{i_0} \cdot n_{i_0}(B).$$

Da $p_i(B) = p_i(B_1)$ für $i \neq i_0$ und $n_{i_0}(B_1) > n_{i_0}(B)$, folgt $p_{i_0}(B_1) > p_{i_0}(B)$.

Wir wollen nun die Sätze 2.2.3 und 2.2.6 kombinieren, und wir werden daraus eine Variante von Satz 2.2.3 erhalten. Wir wollen mit einigen heuristischen Überlegungen beginnen. Eine Boreluntergruppe B eines rational trivialen Gruppenschemas G/Y heiße *reduziert*, falls für alle numerischen Invarianten gilt $n_i(B) \geqq -2g - 2(h-1)$. Der Satz 2.2.6 garantiert gerade die Existenz solcher reduzierter Boreluntergruppen. Die numerischen Invarianten einer reduzierten Boreluntergruppe sind per definitionem nach unten abgeschätzt; wir wollen uns überlegen, was passiert, wenn einige von ihnen „sehr groß" werden. Sei also B/Y eine reduzierte Boreluntergruppe von G/Y, sei $\pi' = \{\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_s}\}$. Es seien die Invarianten $n_{i_1}(B) \ldots n_{i_s}(B)$ „sehr groß". Sei $P \supset B$ die parabolische Untergruppe vom Typ $t(P) = \pi \setminus \pi'$. Dann ist eine Wurzel $\alpha \in \Delta^+$ genau dann in Δ_P^+, falls in der Darstellung

$$\alpha = \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i$$

mindestens eine der Wurzeln $\alpha_{i_\nu} \in \pi'$ mit echt positiven Koeffizienten auftaucht. Sei $\mathbf{n} = (n_1(B) \dots n_r(B))$, dann ist $d_{\mathbf{n}}(\alpha)$ sehr groß für $\alpha \in \Delta_P^+$. Dann folgt aus Satz 2.2.3, daß P ein isolierter Punkt auf $\Gamma^{\mathfrak{p}'}(X'/Y)$ ist. Ferner liefert uns der gleiche Satz: Ist B_1 eine zweite reduzierte Boreluntergruppe und sind die *gleichen Invarianten* $n_{i_1}(B_1) \dots n_{i_s}(B_1)$ „sehr groß", dann ist $B_1 \subset P$. Das Ziel der nun folgenden Betrachtungen ist, uns von der Bedingung, daß die Invarianten $n_{i_1}(B_1) \dots n_{i_s}(B_1)$ „sehr groß" sind, zu befreien; wir wollen also zeigen, daß jede reduzierte Boreluntergruppe in P enthalten ist. Das Ergebnis dieser Bemühungen sind Satz 2.2.13 und Korollar 2.2.14. Wir beginnen mit einigen vorbereitenden Hilfssätzen:

Wir nennen einen Vektor $\mathbf{n} = (n_1 \dots n_r)$ *reduziert*, falls gilt $n_i \geqq -2g - 2(h-1)$.

Lemma 2.2.7. *Es gibt eine Konstante c_1, die nur vom Typ von G/Y dem Geschlecht g von Y/k und von h abhängt, so daß*

$$\dim \Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y) \leqq c_1$$

für jeden reduzierten Vektor $\mathbf{n}$.

Beweis. Sei $t \in \Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)(\bar{k})$, wir berechnen die Dimension des Zariskitangentialraumes $H^0\big(Y \underset{k}{\times} \bar{k}, L^t(X/Y)\big)$ von $\Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)$ im Punkte t (s. Beweis von Satz 2.2.1). Nun sind aber die Grade der sukzessiven Quotienten der kanonischen Filtrierung von $L^t(X/Y)$ beschränkt (s. 1.2), weil $\mathbf{n}$ reduziert ist; also folgt, daß auch

$$\dim H^0\big(Y \underset{k}{\times} \bar{k}, L^t(X/Y)\big)$$

durch eine nur vom Typ G/Y, von g und von h abhängige Konstante abgeschätzt werden kann. Daraus folgt die Behauptung.

Lemma 2.2.8. *Sei B in G/Y eine reduzierte Boreluntergruppe. Dann ist*

$$\dim \Gamma(Y, G) - c_1 \leqq \dim \Gamma(Y, B) \leqq \dim \Gamma(Y, G).$$

Beweis. Sei $\mathbf{n} = (n_1(B) \dots n_r(B))$, man lasse $\Gamma(Y, G)$ durch innere Automorphismen auf $\Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)$ operieren.

Wir führen nun eine weitere Konstante ein, die auch wieder nur vom Typ G/Y, von g und von h abhängt. Sei $c_2 \geqq 0$ so gewählt, daß gilt: Ist $\mathbf{n} = (n_1 \dots n_r)$ ein reduzierter Vektor und ist für einen Index i_0 die Komponente $n_{i_0} \geqq c_2$, so ist für jede Wurzel $\alpha = \sum_{i=1}^{r} m_i \alpha_i$ mit $m_{i_0} > 0$

$$d_{\mathbf{n}}(\alpha) > \max(2g - 2, 0).$$

Wir wollen die Konstante c_2 so wählen, daß sie ganz und mit den obigen Eigenschaften minimal ist; dann ist sie durch den Typ von G/Y, durch g und durch h eindeutig bestimmt.

Wir wollen eine parabolische Untergruppe P von G/Y *isoliert* nennen, wenn der zu P gehörige Punkt t in $\Gamma(X'/Y)(k)$ isoliert ist, d.h. wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_t$ im Punkte t gleich k ist. Das ist gleichwertig damit, daß der Zariskitangentialraum von $\Gamma(X'/Y)$ im Punkte t der Nullraum ist.

Ist nun B eine reduzierte Boreluntergruppe, dann definiert B stets in kanonischer Weise eine isolierte parabolische Untergruppe $P \supset B$. Sei nämlich

$$\pi' = \{\alpha_{i_\nu} \in \pi \mid n_{i_\nu}(B) \geqq c_2\}.$$

Dann sei $P \supset B$ die parabolische Untergruppe vom Typ $t(P) = \pi \setminus \pi'$, falls $\pi' = \emptyset$, sei $P = G$. Nach Satz 2.2.3 und der Definition von c_2 ist P eine isolierte parabolische Untergruppe. Wir wollen P die *über B liegende isolierte parabolische Untergruppe* nennen.

Lemma 2.2.9. *Es gibt eine Konstante c_3, die nur vom Typ von G/Y, von g und von h abhängt, mit der folgenden Eigenschaft: Ist $B \subset G$ eine reduzierte Boreluntergruppe und ist $P \supset B$ die über B liegende isolierte parabolische Untergruppe, so ist*

$$\dim \Gamma(Y, G) - c_3 \leqq \dim \Gamma(Y, R_u(P)).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Differenz

$$\dim \Gamma(Y, B) - \dim \Gamma(Y, R_u(P))$$

beschränkt bleibt. Betrachten wir die exakte Folge

$$1 \to B_u \to B \to T \to 1.$$

Dann genügt es wegen $\dim \Gamma(Y, T) = r$ zu zeigen, daß die Differenz

$$\dim \Gamma(Y, B_u) - \dim (Y, R_u(P))$$

beschränkt ist. Wir betrachten nun die kanonische Filtrierung von B_u (s. 1.1). Es ist klar, daß

$$\dim \Gamma(Y, B_u) \leqq \sum_{\alpha \in \Delta^+} \dim \Gamma(Y, W_\alpha)$$

$$\dim \Gamma(Y, R_u(P)) = \sum_{\alpha \in \Delta_P^+} \dim \Gamma(Y, W_\alpha).$$

Dabei sind die W_α die sukzessiven Quotienten; in der zweiten Relation steht das Gleichheitszeichen, weil für alle $\alpha \in \Delta_P^+$ gilt

$$H^1(Y, W_\alpha) = 0.$$

Nun sind aber die Grade $c(W_\alpha) = d_{\mathfrak{n}}(\alpha)$ für die $\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_P^+$ beschränkt, und daraus folgt die Behauptung.

Lemma 2.2.10. *Sei P in G/Y eine isolierte parabolische Untergruppe. Dann enthält P eine reduzierte Boreluntergruppe $B \subset P$ von G/Y.*

Beweis. Sei $H=P/R(P)$ der halbeinfache Anteil von P. Die in P enthaltenen Boreluntergruppen von G/Y entsprechen den Boreluntergruppen von H/Y. Sei nun $B_H \subset H$ eine reduzierte Boreluntergruppe von H, sei $B \subset G$ die korrespondierende Boreluntergruppe von G/Y.

Sei P vom Typ $t(P)=\pi'=\{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_s}\}$, dann gilt

$$n_{i_\nu}(B)=n_{i_\nu}(B_H) \quad \text{für} \quad \alpha_{i_\nu}\in\pi',$$

wobei man sich π' mit den einfachen Wurzeln von B_H identifiziert denkt (s. 2.1). Wir müssen nun noch die restlichen Invarianten $n_i(B)$ für $\alpha_i\in\pi\setminus\pi'$ abschätzen. Dabei gehen wir davon aus, daß P isoliert ist, also ist $H^0(Y, L^t(X'/Y))=0$, wenn t der zu P korrespondierende Punkt ist. Betrachtet man nun aber die durch B definierte Filtrierung

$$0\subset V_1\subset V_2 \cdots \subset V_m=L^t(X'/Y),$$

so sieht man leicht, daß man durch geeignete Anordnung der Wurzeln (s. 1.1) erreichen kann, daß V_1 zu einem gegebenen Charakter $-\alpha_i$ mit $\alpha_i\in\pi\setminus\pi'$ korrespondiert. Nun ist $H^0(Y, V_1)=0$, daraus folgt, daß $c(V_1)\leqq g$, also ist

$$n_i(B)=-c(V_1)\geqq -g,$$

und daraus folgt, daß B reduziert ist.

Lemma 2.2.11. *Seien B und B_1 zwei reduzierte Boreluntergruppen von G/Y. Seien P bzw. P_1 die über B bzw. B_1 liegenden isolierten parabolischen Untergruppen. Dann ist $P'=P\cap P_1$ eine isolierte parabolische Untergruppe von G/Y.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß k algebraisch abgeschlossen ist. Aus der Definition der $P\supset B$ bzw. $P_1\supset B_1$ folgt, daß für fast alle abgeschlossenen Punkte $y\in Y$ die Abbildungen

$$\Gamma(Y, R_u(P))\to R_u(P)(k(y))=(R_u(P)(k))$$
$$\Gamma(Y, R_u(P_1))\to R_u(P_1)(k(y))$$

surjektiv sind (s. Hilfssatz im Beweis von Satz 2.2.3). Also wird an fast allen Stellen die Faser P_y von $R_u(P_1)_y$ normalisiert. Dann folgt aus [2], Prop. 4.4, daß für fast alle y der Durchschnitt

$$P_y\cap P_{1,y}$$

eine parabolische Untergruppe von G_y ist. Es gibt also sicher eine offene Menge $W\subset Y$, über der $P_W\cap P_{1,W}$ parabolisch in G_W ist. (Siehe SGAD, Exp. XXVI, 4.4.) Da aber in unserem Fall die parabolischen Untergruppen durch ihre allgemeinen Fasern bestimmt sind, folgt die Behauptung, daß $P\cap P_1=P'$ parabolisch ist. Andererseits ist klar, daß

die Abbildung

$$\mathrm{Lie}(G/P') \to \mathrm{Lie}(G/P_1) \oplus \mathrm{Lie}(G/P)$$

eine Injektion ist. Also folgt

$$H^0(Y, \mathrm{Lie}(G/P')) = 0;$$

denn da P und P_1 isoliert sind, verschwinden die Räume $H^0(Y, \mathrm{Lie}(G/P_1))$ und $H^0(Y, \mathrm{Lie}(G/P))$ (s. 1.2 und Beweis von Satz 2.2.1). Daraus folgt aber umgekehrt, daß P' isoliert ist. Q.e.d.

Lemma 2.2.12. *Sei $\tilde{E}/Y$ ein lokal freier Modul. Sei*

$$0 \subset \tilde{E}_1 \subset \tilde{E}_2 \cdots \subset \tilde{E}_n = \tilde{E}$$

eine Filtrierung, so daß die $\tilde{E}_i/\tilde{E}_{i-1}$ inversibel sind und so daß $c(\tilde{E}_i/\tilde{E}_{i-1}) \geqq m$. Sei $E' \subset E$ ein Untermodul, so daß $\tilde{E}/\tilde{E}' = \tilde{L}$ inversibel ist. Dann ist $c(\tilde{L}) \geqq m$.

Beweis. Sei ω_Y die Garbe der holomorphen Differentiale auf Y, wir betrachten

$$\tilde{E} \otimes \tilde{L}^{-1} \otimes \omega_Y,$$

wobei $\tilde{L}^{-1}$ der zu $\tilde{L}$ inverse Modul ist. Dann ist $H^1(Y, \tilde{E} \otimes \tilde{L}^{-1} \otimes \omega_Y) \neq 0$; denn es ist $H^1(Y, \omega_Y) = k$ (s. [14], Chap. II, 9). Dann gibt es also einen Index i mit

$$H^1(Y, \tilde{E}_i/\tilde{E}_{i-1} \otimes \tilde{L}^{-1} \otimes \omega_Y) \neq 0,$$

und daraus folgt, $c(\tilde{L}) \geqq c(\tilde{E}_i/\tilde{E}_{i-1}) \geqq m$.

Satz 2.2.13. *Es gibt eine Konstante c_4, die nur vom Typ von G/Y, von g und von h abhängt, so daß gilt: Ist B in G/Y eine reduzierte Boreluntergruppe und ist für eine einfache Wurzel α_{i_0} die Invariante $n_{i_0}(B) \geqq c_4$, so ist für jede reduzierte Boreluntergruppe B_1 von G/Y die Invariante $n_{i_0}(B_1) \geqq c_2$.*

Beweis. Seien B und B_1 zwei reduzierte Boreluntergruppen von G/Y, seien $P \supset B$ bzw. $P_1 \supset B_1$ die über B bzw. B_1 liegenden isolierten parabolischen Untergruppen. Nach Lemma 2.2.11 ist $P \cap P_1 = P'$ eine isolierte parabolische Untergruppe von G/Y. Sei $B' \subset P'$ eine reduzierte Boreluntergruppe von G/Y. (Siehe Lemma 2.2.10.) Es sei $n_{i_0}(B) = c_2 + c$ mit $c > 0$, es genügt zu zeigen, daß für hinreichend großes c folgt, daß $n_{i_0}(B_1) \geqq c_2$. Jetzt ist aber für jede positive Wurzel α, in der α_{i_0} mit echt positivem Koeffizienten auftritt,

$$d_{\mathfrak{n}}(\alpha) > \max(2g-2, 0) + c,$$

wobei $\mathfrak{n} = (n_1(B), \ldots, n_r(B))$ ist. Die Gruppenschemata $R_u(P)$ und $R_u(P_1)$ sind in B'_u enthalten, wir studieren die von B' auf $R_u(P)$ und $R_u(P_1)$ induzierten Filtrierungen (s. 1.2)

$$R_u(P) \supset U'_1 \supset U'_2 \cdots \supset U'_n = \{e\},$$

$$R_u(P_1) \supset V'_1 \supset V'_2 \cdots \supset V'_m = \{e\}.$$

Wir bemerken, daß diese Filtrierungen sehr wohl von der Wahl von B' abhängen, insbesondere kann es durchaus sein, daß B auf $R_u(P)$ eine ganz andere Filtrierung induziert; aber die dabei auftretenden Charaktere, durch die $B/B_u = T$, bzw. $B'/B'_u = T'$ auf den Quotienten operieren, sind immer die gleichen, wenn man sich die Wurzeln von B mit denen von B' identifiziert denkt; das gleiche gilt für B_1 und B' (s. 1.1 und 1.2). Sei nun $n_{i_0}(B_1) < c_2$, dann taucht α_{i_0} (aufgefaßt als Charakter von T'!) nicht unter den Charakteren, die auf den V'_i/V'_{i+1} operieren, auf. Andererseits kann man es leicht einrichten, daß T' auf $R_u(P)/U'_1$ gerade durch den Charakter α_{i_0} operiert, man braucht die die Filtrierung definierende Ordnung auf $X(T')$ nur so zu wählen, daß α_{i_0} die kleinste Wurzel in $t(P) \subset \pi$ ist (s. 1.1). Wir betrachten die gleiche Filtrierung auf der Liealgebra

$$\mathrm{Lie}(R_u(P)) \supset \mathfrak{u}_1 \supset \mathfrak{u}_2 \ldots \mathfrak{u}_n = \{0\}.$$

Dann folgt aus Lemma 2.2.12, daß

$$n_{i_0}(B') = c(\mathrm{Lie}(R_u(P))/\mathfrak{u}_1) > \max(2g-2, 0) + c.$$

Wählen wir c so groß, daß

$$\max(2g-2, 0) + c \geqq c_2,$$

so folgt, weil B' reduziert ist, daß die Grade $c(U'_i/U'_{i+1}) > \max(2g-2, 0)$. Also ist $H^1(Y, U'_i/U'_{i+1}) = 0$, daraus folgt, daß $H^1(Y, U'_1) = 0$ ist und daß die Abbildung

$$\Gamma(Y, R_u(P)) \to \Gamma(Y, R_u(P)/U'_1)$$

surjektiv ist. Nun ist aber klar, daß $R_u(P) \cap R_u(P_1) \subset U'_1$; diese Aussage ist lokal in Y, ist $W \subset Y$ offen, so daß B' über W einen maximalen Torus T'_1 besitzt, so ist

$$(R_u(P) \cap R_u(P_1))_W = \prod_{\alpha \in \Delta_P^+ \cap \Delta_{P_1}^+} U_\alpha \subset \prod_{\alpha \in \Delta_P^+ - \{\alpha_{i_0}\}} U_\alpha \quad (\text{es ist } \alpha_{i_0} \notin \Delta_{P_1}^+).$$

Dabei sind die U_α die assoziierten vektoriellen Untergruppen bezüglich T'_1. Nun ist aber nach Lemma 2.2.9

$$\begin{aligned} c_3 &\geqq \dim \Gamma(Y, G) - \dim \Gamma(Y, R_u(P_1)) \\ &\geqq \dim \Gamma(Y, R_u(P)) - \dim \Gamma(Y, R_u(P) \cap R_u(P_1)) \\ &\geqq \dim \Gamma(Y, R_u(P)) - \dim \Gamma(Y, U'_1) \\ &= \dim \Gamma(Y, R_u(P)/U'_1) = \max(2g-2, 0) + c + 1 - g. \end{aligned}$$

Die Annahme $n_{i_0}(B_1) < c_2$ ergibt also eine Abschätzung von c nach oben, das beweist unsere Behauptung.

Korollar 2.2.14. *Sei $B \subset G$ eine reduzierte Boreluntergruppe. Sei*

$$\pi' = \{\alpha_{i_\nu} \in \pi \mid n_{i_\nu}(B) \geqq c_4\},$$

wobei c_4 die Konstante aus Satz 2.2.13 *ist. Sei $P \supset B$ die parabolische Untergruppe vom Typ $t(P) = \pi \setminus \pi'$. Dann ist jede reduzierte Boreluntergruppe B_1 von G/Y in P enthalten.*

§ 3. Eine Anwendung

Wir wollen in diesem Paragraphen den Fall untersuchen, daß das Geschlecht der Kurve Y/k gleich 0 ist, insbesondere werden wir den Fall betrachten, daß Y die projektive Gerade $\mathbf{P}^1_k/k$ ist. (Siehe EGA, Chap. II, § 4.) Wenn die Charakteristik von k gleich 0 ist, sind unsere Ergebnisse im wesentlichen mit den Resultaten von Grothendieck in [11] äquivalent.

Satz 3.1. *Sei $G/\mathbf{P}^1_k$ ein rational triviales halbeinfaches Gruppenschema. Dann besitzt G eine Boreluntergruppe B mit $n_i(B) \geqq 0$. Diese Boreluntergruppe B besitzt überdies einen maximalen Torus $T/\mathbf{P}^1_k$.*

Beweis. Die erste Aussage ist ein Spezialfall von Satz 2.2.6, denn hier ist $g = 0$ und $h = 1$. Um die zweite Behauptung einzusehen, betrachten wir die in 1.1 erläuterte Filtrierung von B_u. Die auftretenden W_α haben alle den Grad $\geqq 0$, also ist stets $H^1(\mathbf{P}^1_k, W_\alpha) = 0$, also ist $H^1(\mathbf{P}^1_k, B_u) = 0$. Dann folgt die Existenz von T aus SGAD, Exp. XXI, Cor. 5.9.7.

Dieser Satz 3.1 liefert im Fall $\mathrm{char}(k) = 0$ gerade das Cor. 2 auf S. 133 in [11].

Die reduzierten Boreluntergruppen von $G/\mathbf{P}^1_k$ sind in diesem Fall genau diejenigen, für die gilt $n_i(B) \geqq 0$. Ist B reduziert und ist

$$\pi' = \{\alpha_{i_\nu} \in \pi \mid n_{i_\nu}(B) > 0\},$$

so ist die parabolische Untergruppe $P \supset B$ vom Typ $t(P) = \pi \setminus \pi'$ genau die über B liegende isolierte parabolische Untergruppe.

Satz 3.2. *Seien B, B_1 reduzierte Boreluntergruppen von $G/\mathbf{P}^1_k$. Seien P, P_1 die über B bzw. B_1 liegenden isolierten parabolischen Untergruppen. Dann ist $n_i(B) = n_i(B_1)$ für alle i und $P = P_1$.*

Beweis. Wir beweisen diesen Satz, indem wir die Argumente im Beweis von Satz 2.2.13 variieren und dem Fall $g = 0$ anpassen. Zunächst können wir wieder annehmen, daß k algebraisch abgeschlossen ist. Es ist ferner klar, daß $\Gamma(\mathbf{P}^1_k, B_u)$ zusammenhängend ist und daß für $y \in \mathbf{P}^1_k(k)$ die Restriktionsabbildung

$$\Gamma(\mathbf{P}^1_k, B_u) \to B_u(k(y))$$

surjektiv ist (s. Hilfssatz im Beweis von Satz 2.2.3). Daraus folgt, daß $B_{u,y}$ die parabolische Untergruppe $P_{1,y}$ von G_y für alle y normalisiert, weil P_1 isoliert ist. Also ist $B \subset P_1$. Wir betrachten die von B auf $R_u(P_1)$ induzierte Filtrierung

$$R_u(P_1) \supset U_1' \supset U_2' \cdots \supset U_n' = \{e\}.$$

Ist α_{i_0} eine einfache Wurzel mit $n_{i_0}(B_1) > 0$, so können wir die Filtrierung so einrichten, daß $T = B/B_u$ durch den Charakter α_{i_0} auf $R_u(P_1)/U_1'$ operiert. Betrachten wir andererseits die durch B_1 auf $R_u(P_1)$ induzierte Filtrierung, so haben alle sukzessiven Quotienten den Grad >0. Gehen wir also zur Liealgebra über (s. Beweis Satz 2.2.13), so folgt aus Lemma 2.2.12, daß

$$n_{i_0}(B) = c\big(R_u(P_1)/U_1'\big) > 0.$$

Also gilt: Aus $n_i(B_1) > 0$ folgt, daß $n_i(B) > 0$ ist, und umgekehrt. Dann sind also P und P_1 vom gleichen Typ, es folgt $P = P_1$ (Satz 2.2.3). Sei $\pi' = \{\alpha_{i_\nu} \in \pi \mid n_{i_\nu}(B) > 0\}$, seien γ_{i_ν} die zu den α_{i_ν} aus π' gehörigen Fundamentalcharaktere. Jetzt gilt für $\alpha_{i_\nu} \in \pi'$

$$p_{i_\nu}(B) = p_{i_\nu}(B_1) = p_{i_\nu}(P)$$

und für $\alpha_{i_{\nu'}} \notin \pi'$

$$n_{i_{\nu'}}(B) = n_{i_{\nu'}}(B_1) = 0.$$

Da nun aber die Fundamentalcharaktere γ_{i_ν} zusammen mit den Wurzeln $\alpha_{i_{\nu'}} \notin \pi'$ eine Basis von $X(T) \otimes \mathbf{Q}$ bilden, folgt, daß B und B_1 die gleichen numerischen Invarianten besitzen.

Sei nun $G_0/\mathbf{P}_k^1$ ein Chevalleyschema, sei T_0 in G_0 ein zerfällender maximaler Torus, sei $B_0 \supset T_0$ eine Boreluntergruppe. Da in diesem Fall die Abbildung

$$c\colon H^1(\mathbf{P}_k^1, G_m) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$$

ein Isomorphismus ist, ergibt sich

$$H^1(\mathbf{P}_k^1, T_0) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}^r,$$

und die Abbildung

$$\varphi\colon H^1(\mathbf{P}_k^1, T_0) \hookrightarrow \mathbf{Z}^r$$

$$\varphi\colon \xi \mapsto \big(c(\alpha_1^*(\xi)) \cdots c(\alpha_r^*(\xi))\big)$$

ist ein injektiver Homomorphismus. Dabei sind $\alpha_1 \cdots \alpha_r$ die zu $B_0 \supset T_0$ gehörigen einfachen Wurzeln in $X(T_0)$. Wir identifizieren die α_i auch mit den einfachen Wurzeln von B_0, d.h. wir fassen die α_i auch als Charaktere von B_0 auf. Sei

$$H_+^1(\mathbf{P}_k^1, T_0) = \{\xi \in H^1(\mathbf{P}_k^1, T_0) \mid c(\alpha_i^*(\xi)) \geqq 0\}.$$

$$H_+^1(\mathbf{P}_k^1, B_0) = \{\xi \in H^1(\mathbf{P}_k^1, B_0) \mid c(\alpha_i^*(\xi)) \geqq 0\}.$$

Lemma 3.3. *Die natürliche durch die Injektion $T_0 \hookrightarrow B_0$ induzierte Abbildung*

$$i^*\colon H^1_+(\mathbf{P}^1_k, T_0) \xrightarrow{\sim} H^1_+(\mathbf{P}^1_k, B_0)$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \to & B_{0,u} & \to & B_0 & \to & B_0/B_{0,u} & \to 1 \\ & & & \uparrow & \nearrow_{s} & & \\ & & & T_0 & & & \end{array}$$

Sei $\xi \in H^1_+(\mathbf{P}^1_k, B_0)$ und $\bar{\xi}$ das Bild in $H^1(\mathbf{P}^1_k, B_0/B_{0,u})$. Dann ist die Faser der Abbildung $H^1(\mathbf{P}^1_k, B_0) \to H^1(\mathbf{P}^1_k, B_0/B_{0,u})$ im Punkt $\bar{\xi}$ gleich $H^1(\mathbf{P}^1_k, B_{1,u})$, wobei B_1 eine mit einem ξ repräsentierenden Kozyklus getwistete Form von B_0 ist (s. [10], 5.6). Betrachten wir nun die Filtrierung von $B_{1,u}$, so sind die Grade der sukzessiven Quotienten $\geqq 0$ (s. Satz 1.1.1), weil $c(\alpha_i^*(\xi)) \geqq 0$ nach Voraussetzung. Aus der Positivitätsbedingung für ξ folgt also $H^1(\mathbf{P}^1_k, B_{1,u}) = 0$. Daraus folgt die Behauptung von Lemma 3.3.

Satz 3.4. *Sei $G_0/\mathbf{P}^1_k$ ein Chevalleyschema, sei $T_0 \subset G_0$ ein zerfällender Torus, sei $B_0 \supset T_0$ eine Boreluntergruppe. Dann ist*

$$H^1_+(\mathbf{P}^1_k, T_0) \xrightarrow{\sim} H^1_+(\mathbf{P}^1_k, B_0) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbf{P}^1_{k,\mathrm{zar}}, G_0).$$

Beweis. Sei $\xi \in H^1(\mathbf{P}^1_{k,\mathrm{zar}}, G_0)$, sei G/Y eine zu ξ gehörige Form von G_0, dann ist G/Y rational trivial. Sei $B \subset G$ eine reduzierte Boreluntergruppe, d.h. es gilt $n_i(B) \geqq 0$, sei $T \subset B$ ein maximaler Torus. Die Auswahl von B und T in $G/\mathbf{P}^1_k$ definiert eine Reduktion der Kohomologieklasse ξ, d.h. durch diese Auswahl wird ein Element $\eta \in H^1(\mathbf{P}^1_k, T_0)$ definiert, dessen Bild in $H^1(\mathbf{P}^1_k, G_0)$ gleich ξ ist. (Siehe SGAD, Exp. XXIV, 2.5.) Da die $n_i(B) \geqq 0$ sind, folgt $c(\alpha_i^*(\eta)) \geqq 0$. (Siehe Satz 1.1.1.) Also ist $\eta \in H^1_+(\mathbf{P}^1_k, T_0)$. Da die numerischen Invarianten von B nach Satz 3.2 eindeutig bestimmt sind, folgt, daß das Element η eindeutig bestimmt ist. Q.e.d.

Sei $W = N(T_0)/T_0$ die Weylgruppe des Torus T_0. Es ist evident, daß es zu jedem Element $\xi \in H^1(\mathbf{P}^1_k, T_0)$ ein Element $w \in W(k)$ gibt, so daß

$$\xi^w \in H^1_+(\mathbf{P}^1_k, T_0).$$

Dabei ist ξ^w das mit w transformierte Element. Ferner ist klar, daß ξ^w eindeutig durch ξ bestimmt ist, also erhalten wir

$$H^1_+(\mathbf{P}^1_k, T_0) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathbf{P}^1_k, T_0)/W.$$

Wir sehen: Ist $\mathrm{char}(k) = 0$, so ist unser Satz 3.4 gerade mit dem Théorème 1.1 in [11] äquivalent.

Wir wollen die Ergebnisse des § 3 noch ein wenig verallgemeinern. Wir wollen $\mathbf{P}^1_k$ durch eine beliebige glatte Kurve Y/k vom Geschlecht 0

ersetzen, d.h. wir fordern nicht $Y(k) \neq \emptyset$. Ist $\bar{k}$ der algebraische Abschluß von k, so ist

$$\bar{Y} = Y \underset{k}{\times} \bar{k} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^1_{\bar{k}}/\bar{k}.$$

Sei nun G/Y ein beliebiges halbeinfaches Gruppenschema, wir setzen also im Unterschied zu früher nicht voraus, daß G/Y rational trivial ist.

Dann betrachten wir

$$\bar{G} = G \underset{Y}{\times} \bar{Y}/\bar{Y},$$

und wir wollen uns überlegen, daß $\bar{G}/\bar{Y}$ rational trivial ist. Sei $\tilde{K}$ der Funktionenkörper von $\bar{Y}/\bar{k}$, nach dem Satz von Tsen ist K ein Körper der Dimension $\leqq 1$. (Siehe [15], Chap. II, § 3.) Dann folgt aber nach Steinberg [16], Cor. 10.2, daß $\bar{G} \underset{Y}{\times} \tilde{K}$ quasizerfallend ist. (In [16] wird zwar vorausgesetzt, daß der Grundkörper vollkommen ist; zieht man aber die Resultate des SGAD hinzu, insbesondere Th. 3.18 in Exp. XIV, so sieht man, daß diese Voraussetzung überflüssig ist.) Dann ist also $\bar{G}/\bar{Y}$ rational quasitrivial über $\bar{Y}$ im Sinne von [13]. Also gibt es eine unverzweigte Überlagerung von $\bar{Y}$, über der $\bar{G}$ rational trivial wird (s. SGAD, Exp. XXIV, Cor. 3.9.2). Da $\bar{Y}$ keine echten unverzweigten Überlagerungen besitzt, folgt die Behauptung.

Sei $\bar{B}$ eine Boreluntergruppe von $\bar{G}/\bar{Y}$, sei σ ein Element der Galoisgruppe $\Gamma(\bar{k}/k)$. Dann sei $\bar{B}^\sigma$ die mit σ konjugierte Boreluntergruppe. Dann definiert σ eine Bijektion zwischen der Menge π_1 der einfachen Wurzeln von $\bar{B}$ und der Menge π_2 der Menge der einfachen Wurzeln von $\bar{B}^\sigma$. Andererseits sind π_1 und π_2 kanonisch mit der Menge π der einfachen Wurzeln von $\bar{G}/\bar{Y}$ identifiziert (s. 1.1). Wir erhalten also eine Permutationsdarstellung von $\Gamma(\bar{k}/k)$ auf der Menge π. (Siehe SGAD, Exp. XXIV, 3.) Sei $\mathbf{n} = (n_1 \dots n_r)$ ein unter $\Gamma(\bar{k}/k)$ invarianter Vektor, d.h. ist $\sigma \in \Gamma(\bar{k}/k)$ und permutiert man die Komponenten von $\mathbf{n}$ genauso wie die entsprechenden Elemente in π durch σ permutiert werden, so bleibt $\mathbf{n}$ invariant. Ist k_1/k eine endliche Erweiterung, so ist es sinnvoll zu sagen, daß eine Boreluntergruppe B_1 von $G \underset{Y}{\times} Y_{k_1}$ die numerischen Invarianten $(n_1 \dots n_r) = \mathbf{n}$ hat. Ist nämlich k_1 über k in $\bar{k}$ eingebettet, sagen wir durch eine Abbildung

$$\begin{tikzcd} j\colon k_1 \arrow[rr, hook] & & \bar{k} \\ & k \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd},$$

so können wir vermöge j die Konstantenerweiterung

$$B_1 \underset{Y_{k_1}}{\times} \bar{Y}/\bar{Y} \hookrightarrow \bar{G}/\bar{Y}$$

konstruieren. Wir sagen, daß B_1 die Invarianten $(n_1 \dots n_r)$ hat, wenn $B_1 \underset{Y_{k_1}}{\times} \bar{Y}$ die Invarianten $(n_1 \dots n_r) = \mathbf{n}$ besitzt.

Diese Definition hängt nicht von j ab, weil $\mathbf{n}$ invariant ist. Wir können also die Menge

$$\Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)(k_1)$$

definieren, das ist die Menge der Boreluntergruppen von $G \underset{Y}{\times} Y_{k_1}$, deren Invariantenvektor $\mathbf{n}$ ist. Ganz entsprechend definiert man für beliebige Erweiterungen L/k die Menge $\Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)(L)$, indem man L in geeignete Erweiterungen von $\bar{k}$ einbettet. Das erlaubt uns nun, für einen invarianten Vektor $\mathbf{n}$ den Funktor

$$S \to \Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)(S)$$

(s. 2.1) zu definieren. Da dieser Funktor bei der Erweiterung $\mathrm{Spec}(\bar{k}) \to \mathrm{Spec}(k)$ in den Funktor

$$\bar{S} \to \Gamma_{\mathbf{n}}(\bar{X}/\bar{Y})(\bar{S})$$

übergeht und da dieser Funktor durch ein quasiprojektives Schema

$$\Gamma_{\mathbf{n}}(\bar{X}/\bar{Y})/\bar{k}$$

darstellbar ist (Satz 2.1.1), folgt, daß auch der Funktor

$$S \to \Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)(S)$$

durch ein quasiprojektives Schema

$$\Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y)/k$$

darstellbar ist (s. [14], Chap. V, § 4).

Sei $\mathbf{p} = (p_1 \dots p_r)$ der entsprechende Vektor in den $\mathbf{p}$-Komponenten, der mit $\mathbf{n}$ in der Relation (R) steht. Sei $\pi' \subset \pi$ eine unter $\Gamma(\bar{k}/k)$ invariante Teilmenge von π, sei X'/Y das Schema der parabolischen Untergruppen vom Typ $t(P) = \pi \backslash \pi'$. Sei $\mathbf{p}' = (p_{i_1} \dots p_{i_s})$, wobei α_{i_ν} die Wurzeln aus π' durchläuft, dann definiert man ganz analog wie oben das Schema

$$\Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)/k$$

und den Morphismus

$$\varphi_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}\colon \Gamma^{\mathbf{p}}(X/Y) \longrightarrow \Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)$$

(s. 2.1).

Satz 3.5. *Sei G/Y ein halbeinfaches Gruppenschema über einer glatten Kurve Y/k vom Geschlecht 0. Wenn die allgemeine Faser $G \underset{Y}{\times} K$ anisotrop ist, ist G/Y „konstant", d.h. es gibt ein halbeinfaches Gruppenschema G_0/k, so daß*

$$G_0 \underset{k}{\times} Y \xrightarrow{\sim} G$$

Beweis. Sei $\bar{G} = G \underset{Y}{\times} \bar{Y}$, wir haben schon gesehen, daß $\bar{G}/\bar{Y}$ rational trivial ist, außerdem wissen wir, daß $\bar{Y}/\bar{k} = \mathbf{P}^1_{\bar{k}}/\bar{k}$. Sei $\bar{B} \hookrightarrow \bar{G}$ eine reduzierte Boreluntergruppe. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Im Fall 1 sind alle $n_i(\bar{B}) = 0$. Dann ist nach Satz 3.4 $\bar{G}/\bar{Y}$ ein Chevalleyschema. Es ist also $\bar{G} = \bar{G}_0 \underset{\bar{k}}{\times} \bar{Y}$, wobei $\bar{G}_0/\bar{k}$ ein Chevalleyschema ist. Ferner gilt

$$\begin{array}{ccc} \bar{G}_0 & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(\bar{Y}, \bar{G}) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \bar{k} & \end{array}$$

die natürliche Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\varphi}\colon \Gamma(\bar{Y}, \bar{G}) \underset{\bar{k}}{\times} \bar{Y} & \xrightarrow{\sim} & \bar{G} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \bar{Y} & \end{array}$$

ist also ein Isomorphismus. Wegen $\Gamma(\bar{Y}, \bar{G}) \tilde{\to} \Gamma(Y, G) \underset{k}{\times} \bar{k}$ folgt, daß $\Gamma(Y, G)/k$ halbeinfach ist. Da

$$\begin{array}{ccccc} \varphi\colon \Gamma(Y, G) \underset{k}{\times} Y & \xrightarrow{\sim} & G \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Y & \end{array}$$

bei der Erweiterung von k zu $\bar{k}$ in $\bar{\varphi}$ übergeht, ergibt sich, daß φ ein Isomorphismus ist. Damit ist der Fall 1 erledigt.

Im Fall 2 nehmen wir an, daß es Indizes i gibt mit $n_i(\bar{B}) > 0$. Sei $\pi' \subset \pi$ die Menge derjenigen α_i, für die gilt $n_i(\bar{B}) > 0$. Dann ist $\pi' \subset \pi$ eine unter $\Gamma(\bar{k}/k)$ invariante Teilmenge. Sei X'/Y das Schema der parabolischen Untergruppen vom Typ $t(P) = \pi \backslash \pi'$. Sei $\mathbf{p} = (p_1 \dots p_r)$ in der Relation (R) zu $\mathbf{n}$. Wir betrachten den Morphismus

$$\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}\colon \Gamma_{\mathbf{n}}(X/Y) = \Gamma^{\mathbf{p}}(X/Y) \to \Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y).$$

Nach Satz 3.2, kombiniert mit Satz 2.2.3 faktorisiert der Morphismus $\bar{\varphi}_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}$, den wir durch die Konstantenerweiterung $\mathrm{Spec}(\bar{k}) \to \mathrm{Spec}(k)$ erhalten, durch ein offenes, einpunktiges, reduziertes Unterschema von $\Gamma^{\mathbf{p}'}(\bar{X}'/\bar{Y})$. Dann muß aber schon $\varphi_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}$ durch ein offenes, einpunktiges und reduziertes Unterschema von $\Gamma^{\mathbf{p}'}(X'/Y)$ faktorisieren. Dies bedeutet, daß die über $\bar{B}$ liegende isolierte parabolische Untergruppe $\bar{P}$ durch Konstantenerweiterung aus einer parabolischen Untergruppe $P \hookrightarrow G/Y$ entsteht. Dann kann $G \underset{Y}{\times} K$ nicht anisotrop sein. Damit ist der Satz 3.5 bewiesen.

Man kann jetzt im Prinzip die halbeinfachen Gruppenschemata G/Y klassifizieren, wobei Y/k eine glatte Kurve vom Geschlecht 0 ist. Sei nämlich $\bar{B} \hookrightarrow \bar{G}/\bar{Y}$ eine reduzierte Boreluntergruppe, sei $\bar{P} \supset \bar{B}$ die

über $\bar{B}$ liegende isolierte parabolische Untergruppe, dann ist nach den Beweisargumenten von Satz 3.5 $\bar{P} = P \underset{Y}{\times} \bar{Y}$, wobei $P \subset G$ parabolisch ist. Da nach den üblichen Argumenten $H^1(Y, R_u(P)) = 0$ ist, folgt, daß P eine Leviuntergruppe H/Y besitzt (s. SGAD, Exp. XXVI, 4.3). Die gleichen Argumente wie beim Beweis von Satz 3.5 zeigen uns nun, daß H konstant ist, d.h. $H = H_0 \underset{k}{\times} Y$. Dann ist G/Y durch die folgenden Daten bestimmt,

1. den Typ von G und die Operation von $\Gamma(\bar{k}/k)$ auf,
2. die Invarianten $p_i(P)$,
3. die Isomorphieklasse des reduktiven Gruppenschemas H_0/k.

Wir wollen noch auf eine weitere Anwendung des Satzes 3.5 zu sprechen kommen. Es handelt sich hierbei um eine Anwendung auf die Galoiskohomologie. Der Leser wird sich erinnern, daß in der Einleitung ein Problem der Galoiskohomologie formuliert wird, das den Ausgangspunkt zu dieser Arbeit bildete.

Sei K/k ein Funktionenkörper vom Geschlecht 0. Sei Y/k die zugehörige glatte Kurve. Sei G_0/Y ein Chevalleyschema. Sei G_0'/K die allgemeine Faser von G_0/Y. Sei $\mathfrak{p} \in Y$ ein abgeschlossener Punkt, dann sei $\hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$ die Komplettierung des lokalen Ringes $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$, sei $K_\mathfrak{p}$ der Quotientenkörper von $\hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$. Ist $\xi \in H^1(K, G_0')$, so sei $\xi_\mathfrak{p}$ das Bild von ξ unter der Restriktionsabbildung

$$H^1(K, G_0') \to H^1(K_\mathfrak{p}, G_0').$$

Wir haben in [13], Lemma 4.1.3 gezeigt, daß eine Kohomologieklasse $\xi \in H^1(K, G_0')$ genau dann im Bild der natürlichen Abbildung

$$\psi\colon\ H^1(Y, G_0) \to H^1(K, G_0')$$

liegt, wenn für alle $\mathfrak{p} \in Y$ die Klasse $\xi_\mathfrak{p}$ im Bild der Abbildungen

$$\psi_\mathfrak{p}\colon\ H^1(\hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}, G_0 \underset{Y}{\times} \hat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}) \to H^1(K_\mathfrak{p}, G_0' \underset{K}{\times} K_\mathfrak{p})$$

liegt. Dabei ist das H^1 bezüglich der flachen oder der étalen Kohomologie zu berechnen. Wir wollen eine Kohomologieklasse *ganz* nennen, wenn sie im Bild von ψ liegt. Ist ξ ganz und ist G'/K eine zu ξ gehörige Form von G_0'/K, so folgt sofort aus Satz 3.5 und den anschließenden Bemerkungen, daß der anisotrope Anteil von G'/K konstant ist. Insbesondere folgt

Satz 3.6. *Sei $K = k(x)$ und $\xi \in H^1(K, G_0')$. Ist $\xi_\mathfrak{p} = 0$ für alle $\mathfrak{p}$, so ist $\xi = 0$.*

Beweis. Es ist G'/K notwendig trivial, also ist das Bild von ξ in $H^1(K, \mathrm{ad}\, G_0')$ trivial, dann ist aber ξ selber trivial, da G_0'/K einen zerfallenden maximalen Torus hat.

Literatur

1. Borel, A., and Harish Chandra: Arithmetic subgroups of algebraic groups. Ann. of Math. (2) **75**, 485 – 535 (1962).
2. –, et J. Tits: Groupes réductifs. Publ. Math. I.H.E.S., **27**, 55 – 151 (1965).
3. Bott, R.: Homogeneous vector bundles. Ann. of Math. (2) **66**, 203 – 248 (1957).
4. Chevalley, C.: Classification des groupes de Lie algébriques. Séminaire Chevalley E.N.S. Paris t. 1, 2 (1956 – 1958).
5. – Anneaux de Chow, Séminaire E.N.S. Paris 1958.
6. Demazure, M.: Schémas en groupes réductifs. Bull. Soc. Math. de France **93**, 369 – 413 (1965), zitiert TD.
7. –, et A. Grothendieck: Schémas en groupes. Séminaire I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, 1963/64, zitiert SGAD.
8. Godement, R.: Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques. Séminaire Bourbaki, Exp. 257, Paris 1963.
9. Grothendieck, A.: Éléments de géometrie algébrique. Publ. Math. I.H.E.S. Paris, 4, 8, 11 (1960).
10. – General theory of fiber spaces with structure sheaf. Kansas 1955.
11. – Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphère de Riemann. Am. Journ. of Math. **79**, 121 – 138 (1957).
12. – Les Schémas de Hilbert. Séminaire Bourbaki, Exp. 221, Paris 1960/61.
13. Harder, G.: Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen. Inventiones math. **4**, 165 – 191 (1967).
14. Serre, J. P.: Groupes algébriques et corps de classes. Paris: Hermann 1959.
15. – Cohomologie galoisienne, Lecture notes. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.
16. Steinberg, R.: Regular elements of semisimple algebraic groups. Publ. Math., I.H.E.S., Paris **25**, 49 – 80 (1965).
17. Weil, A.: Adeles and algebraic groups, Lecture notes. Princeton N.J. 1961.

Günter Harder
Mathematisches Institut der Universität
6900 Heidelberg, Tiergartenstraße

(Eingegangen am 15. Mai 1968)