Werk

Titel: Rationale Singularitäten komplexer Flächen.

Autor: BRIESKORN, E.

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0004|log34

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Inventiones math. 4, 336—358 (1968)

Rationale Singularitäten komplexer Flächen

EGBERT BRIESKORN (Bonn)

Einleitung

Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist der folgende Satz: Es gibt nur einen nicht regulären, zweidimensionalen analytischen lokalen Ring, der faktoriell ist. Dieser faktorielle lokale Ring ist der lokale Ring des singulären Punktes des Quotientenraumes, der aus der komplexen Ebene durch die Aktion der binären Ikosaedergruppe entsteht. Nach KLEIN ist dies der lokale Ring $\mathbb{C}\{x,y,z\}/(x^2+y^3+z^5)$. Daß dieser lokale Ring faktoriell ist, wurde von MUMFORD in seiner Arbeit über die Topologie normaler Singularitäten algebraischer Flächen bewiesen. Die Ergebnisse der Arbeit von MUMFORD benutze ich auch, um in § 3 die Einzigkeit dieses faktoriellen Ringes zu zeigen. Außerdem brauche ich dazu die Ergebnisse von ARTIN über rationale Singularitäten, die in §1 referiert werden.

Die Bedeutung der rationalen Singularitäten in diesem Zusammenhang ergibt sich daraus, daß sie gerade die zweidimensionalen normalen Singularitäten mit einem fastfaktoriellen lokalen Ring sind. Über fastfaktorielle und faktorielle lokale Ringe gibt es eine Reihe neuerer Untersuchungen, für fastfaktorielle Ringe z. B. die Arbeiten von KOESTNER und STORCH [20] und [29], für faktorielle lokale Ringe mehrere Arbeiten von SAMUEL, z. B. [24], und SCHEJA [25, 26]. Dort findet man auch schon Spezialfälle des Satzes über die Einzigkeit der Ikosaedersingularität.

Die Ikosaedersingularität gehört zu einer speziellen Klasse von Singularitäten, nämlich zu den Singularitäten von Quotientenräumen, die aus einer zweidimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit durch die Operation einer eigentlich diskontinuierlichen Gruppe entstehen. Diese Singularitäten habe ich in § 2 unter Benutzung von Ergebnissen von HIRZEBRUCH, MUMFORD, und PRILL vollständig klassifiziert. Die Klassifikation ist nach den allgemeinen Resultaten von PRILL über Quotienten komplexer Räume [22] nur noch eine Etüde. Trotzdem ist sie auch abgesehen von ihrer Bedeutung für den Beweis des Hauptsatzes aus mehreren Gründen interessant: Erstens stellt sie eine systematische Zusammenfassung der Ergebnisse zahlreicher Untersuchungen von GODEAUX über Quotientensingularitäten dar, zweitens wird der Zusammenhang zwischen der analytischen Struktur dieser Singularitäten und ihrer mehrfach untersuchten topologischen Struktur geklärt, und drittens ergibt sich aus der Klassifikation unmittelbar, daß die Singularitäten der Quotientenräume von 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten starr sind. Einen

Spezialfall dieses Ergebnisses, die Starrheit der rationalen Doppelpunkte, hatte ich schon in [4] aus einem Satz von KIRBY abgeleitet, und die Starrheit gewisser anderer rationaler Singularitäten hat vor kurzem TJURINA mit den Methoden von GRAUERT und HIRONAKA bewiesen.

MICHAEL ARTIN und DAVID MUMFORD danke ich herzlich für die Diskussionen, aus denen diese Arbeit hervorgegangen ist.

§ 1. Rationale Singularitäten

1.1. Dieser Abschnitt ist eine Zusammenstellung einiger Resultate von ARTIN über rationale Singularitäten (vgl. [1, 2]). (X, x) sei eine 2-dimensionale normale Singularität, d.h. (X,x) sei der Keim eines 2-dimensionalen reduzierten komplexen Raumes und der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ im Punkte x normal. (Die im folgenden verwendete Terminologie bez. der Keime (X,x) ist hoffentlich ohne weitere Erläuterungen verständlich und bei Bedarf präzisierbar; vgl. auch [13]).

Definition. (X,x) ist eine *rationale Singularität*, wenn für eine Auflösung f: $X' \to X$ das erste direkte Bild $R^1 f_* \mathcal{O}_{X'}$ der Strukturgabe $\mathcal{O}_{X'}$ von X' in x verschwindet.

Ein Kriterium für die Rationalität von (X,x) erhält man wie folgt. f: $X' \to X$ sei eine Auflösung der Singularitäten. Die Kurven $C_1, \ldots, C_k$ seien die irreduziblen Komponenten von $f^{-1}(x)$. Ein Zykel $Z = r_1 C_1 + \cdots + r_k C_k$ heißt positiv, wenn nicht alle r_i verschwinden und $r_i \geqq 0$ für $i = 1, \ldots, k$. Die durch diese Definition teilweise geordnete Menge derjenigen positiven Zykeln Z, für deren Schnittzahlen $Z \cdot C_i \leqq 0$ für $i = 1, \ldots, k$ gilt, enthält ein minimales Element Z_0.

Definition. Z_0 heißt der *Fundamentalzykel* der Auflösung f der Singularität (X,x).

Für einen Zykel Z wird das virtuelle Geschlecht $p(Z)$ wie üblich durch die folgende Formel definiert, in der K der kanonische Divisor von X' ist,

$$p(Z) = \tfrac{1}{2}(Z \cdot Z + K \cdot Z) + 1.$$

Nun sei f eine beliebige fest gewählte Auflösung von (X,x) und Z_0 der Fundamentalzykel. Dann gilt ([2] Prop. 1, Theorem 3, Corollary 6)

Satz 1.1 (ARTIN). *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i) (X,x) *ist rational.*

ii) $p(Z) \leqq 0$ *für jeden positiven Zykel* Z.

iii) $p(Z_0) = 0$ *für den Fundamentalzykel* Z_0.

Satz 1.2 (ARTIN). (X,x) *sei eine rationale Singularität,* $\mathcal{O}_{X,x}$ *ihr lokaler Ring,* $\mathfrak{m}$ *dessen maximales Ideal. Dann gilt für die Multiplizität* $e(\mathcal{O}_{X,x})$

bzw. die Einbettungsdimension $\operatorname{ebdim}(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$

$$e(\mathcal{O}_{X,x}) = -Z_0 \cdot Z_0,$$

$$\operatorname{ebdim}(\mathcal{O}_{X,x}) = -Z_0 \cdot Z_0 + 1.$$

Aus Satz 1.1 ergibt sich trivial

Lemma 1.3. *Für das exzeptionelle Kurvensystem* $\{C_i\}$ *einer Auflösung einer rationalen Singularität gilt*:

i) *Alle* C_i *sind singularitätenfrei und rational.*

ii) $C_i \cap C_j \cap C_k = \emptyset$ *für paarweise verschiedene* i, j, k.

iii) $C_i \cdot C_j = 0$ *oder* $C_i \cdot C_j = 1$ *für* $i \neq j$.

iv) $\{C_i\}$ *ist zyklenfrei.*

Wegen (iii) kann man die negativ definite Schnittmatrix $(C_i \cdot C_j)$ in einfacher Weise durch einen bewerteten Graphen beschreiben, dessen Punkte den C_i entsprechen und mit $+C_i \cdot C_i$ bewertet werden und dessen Kanten Punktepaare $\{C_i, C_j\}$ mit $C_i \cdot C_j = 1$ verbinden. Wegen (iv) ist dieser Graph ein Baum. Auf diese Weise ergeben sich beispielsweise wegen Satz 1.2 für die minimalen Auflösungen der rationalen Doppelpunkte als bewertete Graphen – bis auf das Vorzeichen der Bewertung – gerade die Dynkinschemata derjenigen einfachen Lieschen Algebren, deren Wurzeln gleiche Länge haben. Die zu $e = 3$ gehörigen bewerteten Graphen hat ARTIN in [2] aufgezählt.

Definition. Eine *reguläre Auflösung* ist eine Auflösung einer 2-dimensionalen Singularität mit den Eigenschaften von Lemma 1.3.

1.2. Dieser Abschnitt handelt von dem Zusammenhang zwischen rationalen Singularitäten und fastfaktoriellen lokalen Ringen.

Definition. R sei ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit Einselement.

R heißt *faktoriell*, wenn jedes von Null verschiedene Element von R, das keine Einheit ist, ein Produkt von Primelementen ist. R heißt *fastfaktoriell*, wenn für jedes von Null verschiedene Element x von R, das keine Einheit ist, eine Potenz x^n ein Produkt von Primärelementen ist.

Es gilt

Satz 1.4. *R sei ein Krullring, $C(R)$ seine Divisorenklassengruppe. Dann gilt*

i) *R ist faktoriell genau, wenn $C(R) = 0$.*

ii) *R ist fastfaktoriell genau, wenn $C(R)$ Torsionsgruppe ist.*

Aussage (i) ist wohlbekannt (s. z. B. [3] § 3).

Aussage (ii) wird in [29] § 1, Satz 1 bewiesen.

Nun sei R der lokale Ring einer 2-dimensionalen normalen Singularität (X,x), ferner $f\colon X'\to X$ eine Auflösung der Singularitäten, $C=f^{-1}(x)$ und $C_1,\ldots,C_k$ die irreduziblen Komponenten von C. Die Auflösung sei so gewählt, daß die C_i singularitätenfrei sind und sich transversal schneiden. Aus der üblichen kurzen exakten Sequenz

$$0\to\mathbb{Z}\to\mathcal{O}_{X'}\to\mathcal{O}_{X'}^*\to 0$$

und der entsprechenden langen exakten Sequenz der Bildgarben deduziert MUMFORD eine exakte Sequenz

$$(1)\qquad 0\to H^1(C,\mathbb{Z})\to(R^1f_*\,\mathcal{O}_{X'})_x\to(R^1f_*\,\mathcal{O}_{X'}^*)_x\to H^2(C,\mathbb{Z})\to 0.$$

Ferner gibt es eine kanonische Surjektion.

$$(2)\qquad (R^1f_*\,\mathcal{O}_{X'}^*)_x\to C(\mathcal{O}_{X,x})\to 0,$$

deren Kern aus der Gruppe der Zykeln $\sum n_iC_i$ besteht. Es sei M der Rand einer „guten" Umgebung von x. (Eine solche Umgebung kann z. B. wie bei MUMFORD konstruiert werden oder bez. einer lokalen Einbettung von (X,x) als Schnitt von X mit einer kleinen Kugel um x.) Es sei $H_1(M,\mathbb{Z})_0$ die Torsionsgruppe von $H_1(M,\mathbb{Z})$. Dann erhält MUMFORD aus (1) und (2) eine exakte Sequenz.

$$(3)\qquad 0\to H^1(C,\mathbb{Z})\to(R^1f_*\,\mathcal{O}_{X'})_x\to C(\mathcal{O}_{X,x})\to H_1(M,\mathbb{Z})_0\to 0.$$

Aus (3) und 1.4 (ii) folgert man leicht (vgl. STORCH [29] § 6, Satz 1).

Satz 1.5. *Eine zweidimensionale normale Singularität (X,x) ist rational genau, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ fastfaktoriell ist.*

Wegen Lemma 1.3 ist im Falle von rationalen Singularitäten zur Berechnung von $H_1(M,\mathbb{Z})$ ein leicht zu beweisendes Korollar von HIRZEBRUCH in [16] p. 04 anwendbar, und man erhält für rationales (X,x)

$$C(\mathcal{O}_{X,x})\cong H_1(M,\mathbb{Z}),$$

$$\text{ordnung } C(\mathcal{O}_{X,x})=|\det(C_i\cdot C_j)|.$$

Korollar 1.6. *Ein 2-dimensionaler analytischer lokaler Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ist faktoriell genau, wenn (X,x) rational ist und* $\det(C_i\cdot C_j)=\pm 1$.

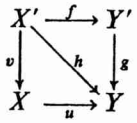
Bemerkung. Die Aussagen von 1.5 und 1.6 gelten vermutlich für andere als analytische lokale Ringe. Zum Beweis entsprechender Verallgemeinerungen müßte man allerdings die transzendenten Methoden durch andere ersetzen. Vgl. Zusatz bei der Korrektur.

1.3. Der folgende Satz über rationale Singularitäten und Überlagerungen kann wegen Satz 1.5 aus einem entsprechenden Satz von STORCH über fastfaktorielle lokale Ringe gefolgert werden. ([29], § 3, Satz 2). Ich gebe trotzdem einen anderen Beweis an, weil dieser direkt auf die Definition der rationalen Singularitäten zurückgeht, nicht die im Beweis von Satz 1.5 benützten transzendenten Methoden involviert, und über den analytischen Fall hinaus verallgemeinert werden kann. Dieser Beweis wurde mir von MUMFORD mitgeteilt.

Satz 1.7. *(X,x) und (Y,y) seien normale 2-dimensionale Singularitäten, $u\colon (X,x)\to(Y,y)$ eine Überlagerung und (X,x) rational. Dann ist (Y,y) rational.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werde vorausgesetzt, daß X bzw. Y höchstens in x bzw. y Singularitäten haben.

$g\colon Y'\to Y$ sei eine Auflösung der Singularitäten von Y. $m=g^{-1}\circ u$ ist meromorph, G_m sei der Graph, $p'\colon G_m\to X$ und $p''\colon G_m\to Y'$ die Projektionen. $n\colon X'\to G_m$ sei eine Auflösung der Singularitäten von G_m. Mit $v=p'\circ n$ und $f=p''\circ n$ sowie $h=gf$ hat man ein kommutatives Diagramm



Man hat (EGA III 12.2.4 oder Tohuku) zwei spektrale Sequenzen

i) $E_2^{p\,q}=R^p g_*(R^q f_*\mathcal{O}_{X'}) \Rightarrow R^* h_*\mathcal{O}_{X'}$,

ii) $E_2'^{p\,q}=R^p u_*(R^q v_*\mathcal{O}_{X'}) \Rightarrow R^* h_*\mathcal{O}_{X'}$.

Weil (X,x) eine rationale Singularität und $v\colon X'\to X$ eine Auflösung der Singularitäten von X ist, ist $R^q v_*\mathcal{O}_{X'}=0$ für $q>0$ und $R^0 v_*\mathcal{O}_{X'}=\mathcal{O}_X$. Weil u diskret und eigentlich ist, ist $R^p u_* F=0$ für $p>0$ und jede kohärente Garbe F. Also ist $E_2'^{p\,q}=0$ für $(p,q)\neq(0,0)$ und $E_2'^{0\,0}=u_*\mathcal{O}_X$. Also ist $R^k h_*\mathcal{O}_{X'}=0$ für $k>0$. Weil f und g höchstens 1-dimensionale Fasern haben, ist $E_2^{p\,q}=0$ für $p>1$ oder $q>1$. Also ist $R^1 g_*(f_*\mathcal{O}_{X'})=E_2^{1,0}=E_\infty^{1,0}=0$ wegen $R^1 h_*\mathcal{O}_{X'}=0$. Dann ist aber auch, wie zu zeigen, $R^1 g_*\mathcal{O}_{Y'}=0$, weil $\mathcal{O}_{Y'}$ ein direkter Summand von $f_*\mathcal{O}_{X'}$ ist. Beweis für letzteres: $X'\xrightarrow{a}Y''\xrightarrow{b}Y'$ sei die Steinfaktorisierung von f. Y'' ist normal, a zusammenhängend, b eine Überlagerung. Es ist $f_*\mathcal{O}_{X'}=b_* a_*\mathcal{O}_{X'}=b_*\mathcal{O}_{Y''}$. Man hat eine natürliche Injektion $i\colon \mathcal{O}_{Y'}\to b_*\mathcal{O}_{Y''}$, außerdem aber die Spurabbildung $t\colon b_*\mathcal{O}_{Y''}\to\mathcal{O}_{Y'}$. Es ist $t\circ i=c\cdot\mathrm{Id}$ ($c=$Überlagerungsgrad), und daher $\mathcal{O}_{Y'}$ direkter Summand. (Definition von t: für y in Y', über denen b nicht verzweigt ist, ist $(b_*\mathcal{O}_{Y''})_y=\mathcal{O}_{Y',y}^c$, und $t(f_1,\ldots,f_c)=f_1+\cdots+f_c$. In die Verzweigungsmenge wird stetig fortgesetzt.)

§ 2. Singularitäten von Quotientenräumen

2.1. Dieser Abschnitt ist eine Zusammenstellung der im folgenden benutzten Resultate von CARTAN und PRILL über Quotienten komplexer Räume (vgl. [7, 22]). X sei ein normaler komplexer Raum, G eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Automorphismen von X. Der topologische Quotientenraum X/G wird wie folgt mit einer Strukturgarbe von Funktionskeimen $\mathcal{O}_{X/G}$ versehen: Es sei $p: X \to X/G$ die Restklassenabbildung. Dann ist für jede offene Menge U von X/G

$$\mathcal{O}_{X/G}(U) = \{f \mid f \circ p \in \mathcal{O}_X(p^{-1}(U))\}.$$

Satz 2.1 (CARTAN). i) *$(X/G, \mathcal{O}_{X/G})$ ist ein normaler komplexer Raum.*

ii) *Die Abbildung $X \to X/G$ ist holomorph, surjektiv, diskret und für endliches G eigentlich und damit eine analytisch verzweigte Überlagerung.*

Definition. Eine *Quotientensingularität* ist eine Singularität, die isomorph ist zu einer Singularität eines Quotienten X/G einer komplexen Mannigfaltigkeit X nach einer eigentlich diskontinuierlichen Gruppe G.

Die folgende Aussage über Quotientensingularitäten ist wohlbekannt (CARTAN [7], p. 97).

Lemma 2.2. *Jede Quotientensingularität ist isomorph zu einer Singularität $(\mathbb{C}^n/G, 0)$, wo G eine endliche Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ ist, und 0 der dem Ursprung von $\mathbb{C}^n$ entsprechende Punkt.*

Beweis. Die Singularität von X/G in dem $0 \in X$ entsprechenden Punkt ist isomorph zur entsprechenden Singularität von X/G_0, wo G_0 die (endliche) Isotropiegruppe von 0 ist. Es seien $(z_1, \ldots, z_n)$ komplexe Koordinaten in einer Umgebung von $0 = (0, \ldots, 0)$. Man führe in einer geeigneten Umgebung von 0 neue Koordinaten z' ein durch

$$z' = \sum_{g \in G_0} g'^{-1} g z,$$

wo $g' = (\partial g / \partial z)_0$ ist. Dann operiert G_0 bezüglich dieser neuen Koordinaten linear.

PRILL hat in [22] die Quotientensingularitäten $(\mathbb{C}^n/G, 0)$ vollständig klassifiziert:

Definition. Eine Untergruppe G von $GL(n, \mathbb{C})$ heißt *klein*, genau wenn kein $g \in G$ die Zahl 1 als Eigenwert der Multiplizität $n-1$ hat.

Satz 2.3 (PRILL). i) *Jede Quotientensingularität ist isomorph zu einer Singularität $(\mathbb{C}^n/G, 0)$, wo G eine endliche kleine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{C})$ ist.*

ii) *G und G' seien kleine Untergruppen von $GL(n, \mathbb{C})$. Dann sind die Singularitäten $(\mathbb{C}^n/G, 0)$ und $(\mathbb{C}^n/G', 0)$ isomorph genau, wenn G und G' konjugiert sind.*

Man vergleiche hierzu auch die Arbeit von GOTTSCHLING [11]. Ist $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ eine beliebige endliche Gruppe, H die normale Untergruppe, die von den Elementen mit 1 als Eigenwert der Multiplizität $n-1$ erzeugt wird, so ist $\mathbb{C}^n/H$ singularitätenfrei und die „reduzierte" Gruppe $\bar{G}=G/H$ operiert äquivalent zu einer kleinen Gruppe auf $\mathbb{C}^n/H$.

2.2. Der in dieser Arbeit geführte Beweis für die Einzigkeit der Ikosaedersingularität ist ein transzendenter Beweis, denn er benutzt die Topologie der Singularität, genauer: die lokale Fundamentalgruppe. In diesem Abschnitt werden einige bekannte diesbezügliche Resultate zusammengestellt.

X sei ein komplexer Raum, $x \in X$ und X irreduzibel in x. Eine Umgebung U von x in X heißt nach PRILL eine *gute Umgebung*, wenn es eine Umgebungsbasis $\{U_i\}$ von x gibt, so daß jedes $U_i - x$ Deformationsretrakt von $U-x$ ist. Für alle guten Umgebungen U hat $U-x$ den gleichen Homotopietyp, und daher kann man insbesondere die lokale Fundamentalgruppe $\pi_{X,x}$ von X in x durch $\pi_1(U-x)$ definieren. Um die Definition auch formal unabhängig von U zu machen, kann man definieren

$$\pi_{X,x} = \varprojlim \pi_1(U-x),$$

wobei U das System der Umgebungen von x durchläuft oder, was auf dasselbe hinausläuft, das cofinale Teilsystem der guten Umgebungen. Dabei ist die obige Definition wie in [14], Exposé XIII und Commentaires à l'Exposé XIII zu interpretieren.

Die fundamentale Tatsache für 2-dimensionale Singularitäten ist das folgende Resultat von MUMFORD.

Satz 2.4 (MUMFORD). *(X,x) sei eine 2-dimensionale normale Singularität und $\pi_{X,x}=1$. Dann ist $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär.*

Korollar 2.5 (MUMFORD). *(X,x) sei eine 2-dimensionale normale Singularität und X in x eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann ist X in x nicht singulär.*

Bemerkung. Aus den Beispielen, die ich in [5] beschrieben habe, geht hervor, daß es keine diesem Korollar entsprechende Aussage für höhere Dimensionen gibt. Daher lassen sich einige der folgenden Argumente für 2-dimensionale Singularitäten nicht auf höhere Dimensionen übertragen.

Lemma 2.6. *f: $(X,x) \to (Y,y)$ sei eine Überlagerung normaler Singularitäten und $\pi_{X,x}$ endlich. Dann ist auch $\pi_{Y,y}$ endlich.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f^{-1}(y)=x$. Es sei V_1 eine gute Umgebung von y, U_1 eine gute Umgebung von x mit

$f(U_1) \subset V_1$, ferner V_2 eine gute Umgebung von y mit $V_2 \subset V_1$ und $f^{-1}(V_2) \subset U_1$ und schließlich sei $U_2 = f^{-1}(V_2)$. Es sei $V_i^- = V_i - \{y\}$ und $U_i^- = U_i - \{x\}$. Es sei $\tilde{V}_1 \to V_1^-$ die universelle Überlagerung von V_1^- und $\tilde{U}_1 \to U_1^-$ die universelle Überlagerung von U_1^-. $\tilde{U}_1$ und $\tilde{V}_1$ sind in kanonischer Weise mit einer komplexen Struktur versehen, so daß die Überlagerungsabbildungen lokal biholomorph sind. Daher sind auch die gefaserten Produkte

$$\tilde{U}_2 = U_2^- \times_{U_1^-} \tilde{U}_1 \quad \text{und} \quad \tilde{V}_2 = V_2^- \times_{V_1^-} \tilde{V}_1 \quad \text{und} \quad \tilde{\tilde{U}}_i = \tilde{U}_i \times_{V_i^-} \tilde{V}_i$$

reduzierte normale komplexe Räume. Weil $\tilde{V}_1 \to V_1^-$ eine unverzweigte topologische Überlagerung ist, ist auch $\tilde{\tilde{U}}_1 \to \tilde{U}_1$ eine unverzweigte topologische Überlagerung und hat daher wegen des einfachen Zusammenhangs von $\tilde{U}_1$ einen Schnitt. Dann hat auch $\tilde{\tilde{U}}_2 \to \tilde{U}_2$ einen Schnitt, und dieser ist eine holomorphe Abbildung s: $\tilde{U}_2 \to \tilde{\tilde{U}}_2$. Durch Komposition von s mit $\tilde{\tilde{U}}_2 \to \tilde{V}_2$ erhält man ein kommutatives Diagramm von holomorphen Abbildungen.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_2 & \to & \tilde{V}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_2^- & \to & V_2^-. \end{array}$$

Behauptung: $\tilde{U}_2 \to \tilde{V}_2$ ist surjektiv. Beweis: Die Abbildung ist eigentlich, diskret, holomorph, das Bild also eine (abgeschlossene) analytische Teilmenge von $\tilde{V}_2$ mit der gleichen Dimension wie $\tilde{V}_2$, also eine Zusammenhangskomponente von $\tilde{V}_2$. Aber $\tilde{V}_2$ ist zusammenhängend, weil $\tilde{V}_1$ zusammenhängend ist und die Inklusion von guten Umgebungen $V_2^- \to V_1^-$ einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen induziert.

Es sei $O_x(f)$ die Ordnung von f in x und $O(\pi_{X,x})$ bzw. $O(\pi_{Y,y})$ die Ordnung der lokalen Fundamentalgruppen. Dann folgt wegen der Surjektivität von $\tilde{U}_2 \to \tilde{V}_2$ aus obigem Diagramm

$$O(\pi_{Y,y}) \leqq O_x(f)\, O(\pi_{X,x}),$$

und damit ist die Endlichkeit von $\pi_{Y,y}$ bewiesen.

(X,x) sei eine 2-dimensionale normale Singularität, mit einer regulären Auflösung mit exzeptionellem Kurvensystem $C_1, \ldots, C_k$. Es sei $s_{ij} = C_i \cdot C_j$. Dann kann man $\pi_{X,x}$ allein aus der Schnittmatrix (s_{ij}) berechnen, denn es gilt (vgl. MUMFORD [21], p. 12; HIRZEBRUCH [16]).

Lemma 2.7. *Unter den obigen Voraussetzungen wird $\pi_{X,x}$ von k Elementen $e_1, \ldots, e_k$ mit den folgenden Relationen erzeugt:*

$$e_i\, e_j^{s_{ij}} = e_j^{s_{ij}}\, e_i,$$

$$e_1^{s_{i1}}\, e_2^{s_{i2}} \ldots\, e_k^{s_{ik}} = 1.$$

2.3. Aus Lemma 2.6 folgt insbesondere, daß eine Singularität, die eine singularitätenfreie Überlagerung gestattet, eine endliche lokale Fundamentalgruppe hat. Die Umkehrung hiervon stimmt im allgemeinen nicht (vgl. jedoch PRILL [22], Proposition 5). Für 2-dimensionale Singularitäten hingegen gilt (vgl. PRILL [22], Theorem 3).

Satz 2.8. *(Y,y) sei eine 2-dimensionale normale Singularität. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*

i) *(Y,y) ist eine Quotientensingularität.*

ii) *Es existiert eine Überlagerung $(X,x)\to(Y,y)$ mit regulärem $\mathcal{O}_{X,x}$.*

iii) *$\pi_{Y,y}$ ist endlich.*

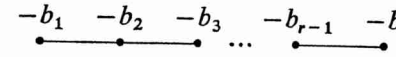
Beweis. (i) impliziert (ii) wegen Satz 2.1 und (ii) impliziert (iii) wegen Lemma 2.6. Zu zeigen ist, daß (iii) die Aussage (i) impliziert. Es sei V eine hinreichend kleine gute Umgebung von y in Y, $V'=V-\{y\}$ und $U'\to V'$ die universelle Überlagerung, die wegen der Endlichkeit von $\pi_{Y,y}$ endlichblättrig ist. Diese Überlagerung kann man (z.B. nach FOX [9]) durch Hinzufügen eines Punktes x in eindeutiger Weise zu einer verzweigten topologischen Abbildung $U\to V$ fortsetzen. Nach dem fundamentalen Resultat der Arbeit von GRAUERT und REMMERT über komplexe Räume [12] kann man U so mit einer normalen komplexen Struktur versehen, daß $U\to V$ eine analytisch verzweigte Überlagerung ist. Aus dem einfachen Zusammenhang von U' folgt $\pi_{U,x}=1$, und daher ist $\mathcal{O}_{U,x}$ wegen Satz 2.4 von MUMFORD regulär. $\pi_{Y,y}$ operiert durch Decktransformationen holomorph auf U' und auch auf U mit Fixpunkt x und Quotient $U/\pi_{Y,y}=V$. Also ist (V,y) eine Quotientensingularität.

2.4. a) Der Satz 2.3 von PRILL führt die Klassifikation der in Satz 2.8 beschriebenen Quotientensingularitäten auf die Aufzählung der Konjugationsklassen kleiner Untergruppen von $GL(2,\mathbb{C})$ zurück. Um weitere Informationen über die Quotientensingularitäten zu erhalten, kann man z.B. ihre lokalen Ringe mittels Invariantentheorie berechnen. Dies ist für die Untergruppen von $SL(2,\mathbb{C})$ z.B. von KLEIN [19], Kap. II, § 9–13 und DUVAL [22], p. 94–112 durchgeführt worden. Eine andere Methode besteht darin, die Quotientensingularitäten aufzulösen. Aus der Auflösung erhält man nach den Sätzen 1.2 und 1.7 Multiplizität und Einbettungsdimension des lokalen Ringes. Es zeigt sich, daß die Quotientensingularitäten auch durch die Schnittmatrix ihrer Auflösung klassifiziert werden. Dieser Abschnitt handelt vom Zusammenhang zwischen den erwähnten zwei Klassifikationen.

b) Die Schnittmatrix kann durch den entsprechenden bewerteten Baum beschrieben werden. Es wird sich herausstellen, daß für die Quotientensingularitäten die Bäume alle streckenförmig oder stern-

förmig mit drei Zweigen sind. Derartige bewertete Bäume können folgendermaßen beschrieben werden.

Definition. Es seien n und q teilerfremde ganze Zahlen mit $0<q<n$. Dann sei $\langle n,q\rangle$ der bewertete Baum



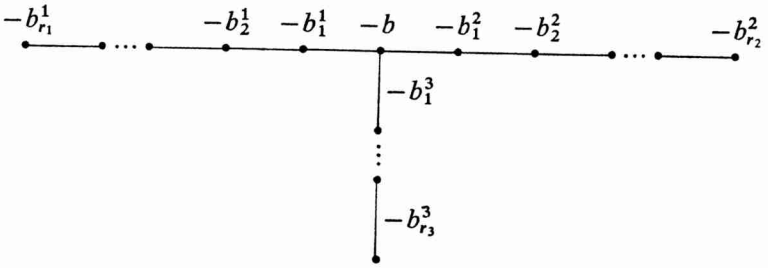
wobei die b_i diejenigen ganzen Zahlen sind, die durch die folgenden Beziehungen eindeutig charakterisiert sind:

$b_i \geqq 2$ für $i=1,\ldots,r$

$$\frac{n}{q}=b_1-\cfrac{1}{b_2-\cfrac{1}{b_3-\ddots\cfrac{1}{b_{r-1}-\cfrac{1}{b_r}}}}. \tag{4}$$

Nach [23], p. 61 sind $\langle n,q\rangle$ und $\langle n',q'\rangle$ der gleiche bewertete Baum genau wenn $n=n'$ und $q=q'$ oder $q\,q'\equiv 1(n)$.

Definition. $\langle b;n_1,q_1;n_2,q_2;n_3,q_3\rangle$ sei der bewertete Baum



wo die b, b^i_k ganze Zahlen mit b, $b^i_k \geqq 2$ sind und die ganzen Zahlen n_i, q_i mit $(n_i,q_i)=1$ und $0<q_i<n_i$ durch die folgenden Kettenbrüche gegeben sind.

$$\frac{n_i}{q_i}=b^i_1-\cfrac{1}{b^i_2-\cfrac{1}{b^i_3-\ddots\cfrac{1}{b^i_{r_i-1}-\cfrac{1}{b^i_{r_i}}}}}.$$

c) Es ist klar, daß man die Untergruppen von $GL=GL(2,\mathbb{C})$ folgendermaßen beschreiben kann: $SL\subset GL$ sei die spezielle lineare Gruppe, $ZL\subset GL$ das Zentrum und $\psi\colon ZL\times SL\to GL$ die Multiplikation. H_1 bzw. H_2 seien Untergruppen von ZL bzw. SL und N_i normale Untergruppen von H_i, für welche H_1/N_1 und H_2/N_2 isomorph sind; $\varphi\colon H_2/N_2\to H_1/N_1$ sei ein Isomorphismus. Es bezeichne $\bar{h}_i$ die Restklasse von h_i in H_i/N_i und

$$H_1\times_\varphi H_2=\{(h_1,h_2)\in H_1\times H_2\mid \bar{h}_1=\varphi(\bar{h}_2)\}$$

das gefaserte Produkt. Schließlich sei

$$(H_1,N_1;H_2,N_2)_\varphi=\psi(H_1\times_\varphi H_2).$$

Jede endliche Untergruppe von GL ist von der Form $(H_1, N_1; H_2, N_2)_\varphi$, und es ist nicht schwierig, festzustellen, wovon die Konjugationsklasse von $(H_1, N_1; H_2, N_2)_\varphi$ abhängt. Tatsächlich stellt sich heraus, daß sie in fast allen Fällen nicht von φ abhängt. In diesen Fällen wird daher das φ fortgelassen, und $(H_1, N_1; H_2, N_2)$ bezeichnet einen fest gewählten Repräsentanten der entsprechenden Konjugationsklasse.

Der einzige Fall, in dem φ eine Rolle spielt, ist der, wo H_1 und H_2 zyklisch sind. In diesem Fall ist aber die folgende Beschreibung der Gruppe zweckmäßiger. Man sieht leicht, daß jede nicht triviale kleine Gruppe $(H_1, N_1; H_2, N_2)_\varphi$ mit zyklischen H_i konjugiert zu einer der wie folgt definierten zyklischen Gruppen $\mathsf{C}_{n,q}$ ist:

$$\mathsf{C}_{n,q}=\left\{\begin{pmatrix} e^{2\pi i/n} & 0\\ 0 & e^{2\pi i q/n}\end{pmatrix}\right\}\qquad 0<q<n,\ (n,q)=1.$$

$\mathsf{C}_{n,q}$ und $\mathsf{C}_{n',q'}$ sind natürlich konjugiert genau wenn $n'=n$ und $q=q'$ oder $q\,q'\equiv 1(n)$.

Die Gruppen H_i werden folgendermaßen bezeichnet: Es ist

- Z_k die zyklische Gruppe der Ordnung k in ZL,
- C_k die zyklische Gruppe der Ordnung k in SL,
- D_k die binäre Diedergruppe der Ordnung $4k$,
- T die binäre Tetraedergruppe,
- O die binäre Oktaedergruppe,
- I die binäre Ikosaedergruppe.

Die Untergruppen von SL in dieser Liste sind natürlich nur bis auf Konjugation bestimmt. Es sei jeweils ein Repräsentant fest gewählt, und zwar so, daß man normale Untergruppen: $\mathsf{C}_{2n}\lhd\mathsf{D}_n$ und $\mathsf{D}_2\lhd\mathsf{T}$ hat.

d) Nach diesen Vorbereitungen können die 2-dimensionalen Quotientensingularitäten bis auf analytische Isomorphie folgendermaßen klassifiziert werden, wobei jeweils die reguläre Singularität bzw. die triviale Gruppe bzw. der leere Graph fortgelassen werden.

Satz 2.9. (i) *Die 2-dimensionalen Quotientensingularitäten werden klassifiziert durch die Konjugationsklassen kleiner Untergruppen von* $GL(2,\mathbb{C})$. *Jede kleine Untergruppe von* $GL(2,\mathbb{C})$ *ist konjugiert zu einer der folgenden Gruppen:*

$\mathsf{C}_{n,q}\quad 0<q<n,$	$(n,q)=1$
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{D}_n, \mathsf{D}_n)$	$(m,2)=1,\ (m,n)=1$
$(\mathsf{Z}_{4m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{D}_n, \mathsf{C}_{2n})$	$(m,2)=2,\ (m,n)=1$
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{T}, \mathsf{T})$	$(m,6)=1$
$(\mathsf{Z}_{6m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{T}, \mathsf{D}_2)$	$(m,6)=3$
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{O}, \mathsf{O})$	$(m,6)=1$
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{I}, \mathsf{I})$	$(m,30)=1.$

ii) $\mathsf{C}_{n,q}$ *und* $\mathsf{C}_{n',q'}$ *sind konjugiert genau wenn* $n=n'$ *und* $q=q'$ *oder* $q\,q' \equiv 1(n)$. *Die übrigen Gruppen sind paarweise nicht konjugiert.*

Beweis. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge aus dem Satz 2.3 von PRILL, der Definition der kleinen Gruppen und der wohlbekannten Klassifikation der endlichen Untergruppen von $GL(2,\mathbb{C})$ (vgl. z.B. [8] p. 57).

Satz 2.10. i) *Die 2-dimensionalen Quotientensingularitäten sind genau diejenigen 2-dimensionalen normalen Singularitäten, die eine reguläre Auflösung mit einem der folgenden bewerteten Graphen haben:* $\langle n,q\rangle$ *mit* $0<q<n$ *und* $(n,q)=1$, $\langle b; n_1, q_1; n_2, q_2; n_3, q_3\rangle$ *mit* $b\geqq 2$, $0<q_i<n_i$ *und* $(n_i, q_i)=1$, *wobei* (n_1, n_2, n_3) *eines der platonischen Tripel* (2, 2, *n*), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5) *ist.*

ii) *Diese bewerteten Graphen der minimalen Auflösung klassifizieren die Quotientensingularitäten bis auf analytische Isomorphie.*

Beweis. Satz 2.10 ist eine unmittelbare Konsequenz von Lemma 2.7 und Satz 2.8 und dem folgenden Satz.

Satz 2.11. *Die folgende Tabelle enthält in der 1. Spalte die kleinen Untergruppen G von* $GL(2,\mathbb{C})$, *in der 2. Spalte den bewerteten Graphen* Γ_G *der minimalen Auflösung der Quotientensingularität* $(\mathbb{C}^2/G, 0)$, *in der 3. Spalte die Multiplizität* e_G *des lokalen Ringes* $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2/G,0}$ *und in der 4. Spalte die Divisorenklassengruppen* $D_G = G/G'$ *von* $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2/G,0}$.

G	Γ_G		e_G	D_G
$\mathsf{C}_{n,q}$	$\langle n, q\rangle$	$0<q<n,\ (n,q)=1$	$2+\Sigma(b_i-2)$	Z_n
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{D}_n, \mathsf{D}_n)$	$\langle b; 2,1; 2,1; n, q\rangle$	$m=(b-1)\,n-q,\ 2\nmid m$	$2+\Sigma(b_i-2)$	$\mathsf{Z}_{2m}\times\mathsf{Z}_2$ $2\mid n$
$(\mathsf{Z}_{4m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{D}_n, \mathsf{C}_{2n})$	$\langle b; 2,1; 2,1; n, q\rangle$	$m=(b-1)\,n-q,\ 2\mid m$		Z_{4m} $2\nmid n$
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{T}, \mathsf{T})$	$\langle b; 2,1; 3,2; 3,2\rangle$	$m=6(b-2)+1$	b	Z_{3m}
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{T}, \mathsf{T})$	$\langle b; 2,1; 3,1; 3,1\rangle$	$m=6(b-2)+5$	$b+2$	Z_{3m}
$(\mathsf{Z}_{6m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{T}, \mathsf{D}_2)$	$\langle b; 2,1; 3,1; 3,2\rangle$	$m=6(b-2)+3$	$b+1$	Z_{3m}
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{O}, \mathsf{O})$	$\langle b; 2,1; 3,2; 4,3\rangle$	$m=12(b-2)+1$	b	Z_{2m}
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{O}, \mathsf{O})$	$\langle b; 2,1; 3,1; 4,3\rangle$	$m=12(b-2)+5$	$b+1$	Z_{2m}
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{O}, \mathsf{O})$	$\langle b; 2,1; 3,2; 4,1\rangle$	$m=12(b-2)+7$	$b+2$	Z_{2m}
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{O}, \mathsf{O})$	$\langle b; 2,1; 3,1; 4,1\rangle$	$m=12(b-2)+11$	$b+3$	Z_{2m}
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{I}, \mathsf{I})$	$\langle b; 2,1; 3,2; 5,4\rangle$	$m=30(b-2)+1$	b	Z_m
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{I}, \mathsf{I})$	$\langle b; 2,1; 3,2; 5,3\rangle$	$m=30(b-2)+7$	$b+1$	Z_m
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{I}, \mathsf{I})$	$\langle b; 2,1; 3,1; 5,4\rangle$	$m=30(b-2)+11$	$b+1$	Z_m
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{I}, \mathsf{I})$	$\langle b; 2,1; 3,2; 5,2\rangle$	$m=30(b-2)+13$	$b+1$	Z_m
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{I}, \mathsf{I})$	$\langle b; 2,1; 3,1; 5,3\rangle$	$m=30(b-2)+17$	$b+2$	Z_m
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{I}, \mathsf{I})$	$\langle b; 2,1; 3,2; 5,1\rangle$	$m=30(b-2)+19$	$b+3$	Z_m
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{I}, \mathsf{I})$	$\langle b; 2,1; 3,1; 5,2\rangle$	$m=30(b-2)+23$	$b+2$	Z_m
$(\mathsf{Z}_{2m}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{I}, \mathsf{I})$	$\langle b; 2,1; 3,1; 5,1\rangle$	$m=30(b-2)+29$	$b+4$	Z_m

Beweis. (a) Zunächst die Berechnung von Γ_G: Für den Fall, daß G zyklisch, d.h. ein $\mathsf{C}_{n,q}$ ist, wird Γ_G bereits in [15] mittels des Hirzebruch-Jungschen Algorithmus, d.h. mittels der modifizierten Kettenbruchentwicklung (4) für n/q, berechnet. Der allgemeine Fall läßt sich folgendermaßen auf den zyklischen Fall zurückführen. X sei die aus $\mathbb{C}^2$ durch σ-Prozeß in 0 entstehende Fläche und C die exzeptionelle Kurve von X. Die Gruppe G operiert auf X und X/G ist eine Modifikation von $\mathbb{C}^2/G$, in der der singuläre Punkt durch die C entsprechende rationale Kurve C' ersetzt ist. Die singulären Punkte von X/G entsprechen nach 2.3 den Punkten $x\in C$, für die die reduzierte Isotropiegruppe $\overline{G_x}$ nicht trivial ist. Dies sind, wenn $G=(H_1, N_1; H_2, N_2)_\varphi$, höchstens die Punkte, für die das Bild von H_2 in $PGL(1,\mathbb{C})$ nichttriviale Isotropiegruppen als Transformationsgruppe von P_1 hat. Dies ist bekanntlich für genau 2 Punktgruppen der Fall, falls H_2 zyklisch ist, und für 3 Punktgruppen in allen anderen Fällen. Die Isotropiegruppen von H_2 sind zyklisch, die G_x daher äquivalent zu gewissen $(\mathsf{Z}_{2mr}, \mathsf{Z}_{2m}; \mathsf{C}_{2nr}, \mathsf{C}_{2n})_\varphi$ und die $\overline{G_x}$ deshalb äquivalent zu gewissen $\mathsf{C}_{n,q}$, so daß man das Resultat von HIRZEBRUCH anwenden kann. Die Berechnung der n, q übergehe ich. Wegen Lemma 1.3 ist klar, daß in der minimalen Auflösung $\tilde{X}$ von X/G auch die C' entsprechende Kurve C_0 singularitätenfrei und rational ist und die anderen exzeptionellen Kurven transversal schneidet. Man sieht leicht, daß C_0

tatsächlich so schneidet, wie es in 2.11 behauptet wird. Damit bleibt im nichtzyklischen Fall zur Bestimmung von $\Gamma_G=\langle b; n_1, q_1; n_2, q_2; n_3, q_3\rangle$ nur noch $b=-C_0\cdot C_0$ zu berechnen. Es sei $G=(\mathbf{Z}_{2mr}, \mathbf{Z}_{2m}; H_2, N_2)$ und h die Ordnung des Bildes von G in $PGL(1,\mathbb{C})$. Aus der Tatsache, daß der Divisor einer holomorphen Funktion auf $\tilde{X}$ jede exzeptionelle Kurve mit Multiplizität 0 schneiden muß, erhält man für b leicht die folgende Formel

$$b=\frac{q_1}{n_1}+\frac{q_2}{n_2}+\frac{q_3}{n_3}+\frac{2m}{h}.$$

(b) Die Berechnung von e_G ergibt sich wegen Satz 1.2 und Satz 1.7 aus der von Γ_G. Denn, wenn $Z_0=\sum r_i C_i$ der Fundamentalzykel einer rationalen Singularität ist und $b_i=-C_i\cdot C_i$, so folgt aus 1.2 und 1.3

$$e=2+\sum r_i(b_i-2).$$

Man sieht leicht, daß für den Fundamentalzykel aller Γ_G aus 2.11 mit den Bewertungen $-b_i$ aus $b_i>2$ folgt $r_i=1$. Also gilt

$$e_G=2+\sum(b_i-2),$$

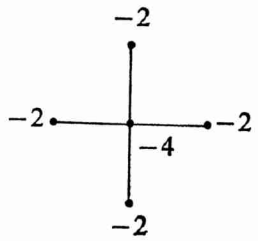
und daraus ergeben sich die Werte der Tabelle.

(c) Die Divisorenklassengruppe D_G der rationalen Singularität $(X,x)=(\mathbb{C}^2/G,0)$ ist nach den Bemerkungen im Anschluß an Satz 1.5 isomorph zu $H_1(S^3/G,\mathbb{Z})$, d.h. zum Quotienten von $G=\pi_{X,x}$ nach seiner Kommutatorgruppe G'. Damit berechnet man $D_G=G/G'$ ohne Schwierigkeiten aus G.

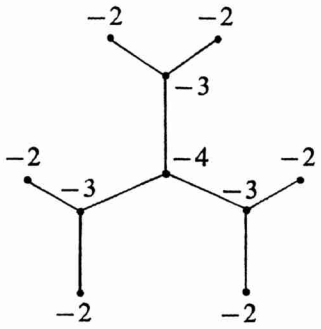
2.5. Als triviale Folgerung aus Satz 2.10 erhält man die folgende Verallgemeinerung von Satz 1 in [4]. In Abweichung vom üblichen Sprachgebrauch werde festgesetzt:

Definition. (X,x) sei eine 2-dimensionale normale Singularität mit einer minimalen regulären Auflösung und zugehörigem bewerteten Graphen Γ. (X,x) ist *starr*, wenn (X,x) bis auf Isomorphie die einzige Singularität mit einer regulären Auflösung mit bewertetem Graphen Γ ist.

Natürlich kann (X,x) nicht starr sein, wenn Γ einen Punkt hat, der Eckpunkt von mehr als 3 1-Simplices ist. Beispielsweise gehört



zu nicht starren rationalen Singularitäten. Aber selbst wenn (X,x) rational ist und jeder Punkt von Γ auf höchstens 3 1-Simplices liegt, braucht (X,x) nicht starr zu sein. Ein Beispiel für ein solches Γ ist nach einer brieflichen Mitteilung von TJURINA an ARTIN



Darum ist die folgende triviale Folgerung aus Satz 2.10 um so bemerkenswerter.

Korollar 2.12. *Die 2-dimensionalen Quotientensingularitäten sind starr.*

Dieses Korollar ist natürlich der Grund für die oben gegebene Definition der Starrheit. Natürlicher und schwächer wäre es, zu verlangen, daß (X,x) durch die erste infinitesimale Umgebung des exzeptionellen Kurvensystems determiniert ist. – Ich möchte noch anmerken, daß TJURINA gezeigt haben soll: Alle rationalen Tripelpunkte sind starr.

2.6. Dieser Abschnitt erläutert den Zusammenhang zwischen der analytischen Klassifikation der Quotientensingularitäten einerseits und den topologischen Untersuchungen von SEIFERT und THRELFALL über die Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen der dreidimensionalen Sphäre und über Seifertsche Faserräume sowie v. RANDOWS Resultaten über Baummannigfaltigkeiten andererseits.

(a) Jede Quotientensingularität $(\mathbb{C}^2/G,0)$ hat die 3-dimensionale geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit $M_G=S^3/G$ als Rand einer guten Umgebung, wobei S^3 die als G-Unterraum aufgefaßte Standard-3-Sphäre in $\mathbb{C}^2$ ist. In [28], Kap. III, wird gezeigt, daß die Gesamtheit der so erhaltenen Umgebungsränder M_G mit der Menge aller Mannigfaltigkeiten S^3/H übereinstimmt, wo H eine beliebige endliche Untergruppe von $SO(4)$ ist. Ist H auf S^3 fixpunktfrei, so heißt S^3/H nach HOPF eine *sphärische Raumform*. Die Umgebungsränder M_G der Quotientensingularitäten sind also gerade die sphärischen Raumformen. Das Homöomorphieproblem für diese Mannigfaltigkeiten ist vollständig gelöst: Wenn G zyklisch ist, ist M_G ein Linsenraum, genauer: $M_{C_{n,q}} = L(n,q)$, und nach BRODY [6] gilt: $L(n,q)$ und $L(n',q')$ sind homöomorph

genau wenn $n=n'$ und $q\equiv\pm q'(n)$ oder $q\,q'\equiv\pm 1(n)$. Für nicht zyklische kleine Untergruppen G von $GL(2,\mathbb{C})$ stimmen die Klassifikation bis auf Konjugation einerseits und bis auf abstrakte Isomorphie andererseits überein, wie man leicht durch Betrachtung von G/G' und $G/\text{Zentrum}(G)$ nachweist (vgl. [28], § 6). Daher ist für nichtzyklische kleine G_1, G_2 die Mannigfaltigkeit M_{G_1} homöomorph zu M_{G_2} genau wenn G_1 zu G_2 konjugiert ist. Für eine zweidimensionale normale Singularität (X,x) mit nichtzyklischem endlichem $\pi_{X,x}$ ist die analytische Struktur also durch die topologische bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

(b) Es sei U der Volltorus

$$U=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\,|\,|z_1|=1,\,|z_2|\leqq 1\}$$

und V die Kreisscheibe

$$V=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\,|\,|z_1|=0,\,|z_2|\leqq 1\}.$$

U werde orientiert, und zwar, wenn $z_1=e^{2\pi i\varphi}$ und $z_2=x+iy$, durch die Reihenfolge von Koordinaten (φ,x,y). Es sei $f\colon U\to V$ die Projektion, das heißt $f(z_1,z_2)=z_2$. Die in 2.4 definierte Gruppe $\mathsf{C}_{n,q}$ operiert auf U und V als Unterräumen von $\mathbb{C}^2$. Es sei $f_{n,q}\colon U/\mathsf{C}_{n,q}\to V/\mathsf{C}_{n,q}$ die durch f induzierte Abbildung der Quotientenräume und $U/\mathsf{C}_{n,q}$ mit der von U induzierten Orientierung versehen.

Definition. Ein *Seifertscher Faserraum* ist eine Abbildung $f\colon X\to Y$ einer dreidimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit X auf eine 2-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit Y mit 1-Sphären als Fasern, welche über geeigneten Umgebungen der Punkte von Y entweder lokal trivial oder vom gleichen Typ wie ein $f_{n,q}$ ist. (Zu Verallgemeinerungen vgl. [18].)

Die Seifertschen Faserräume mit einer Orientierung für X und orientierbarem Y werden in [27] durch ein Invariantensystem

$$(O,o;p\,|\,\beta;\alpha_1,\beta_1;\ldots;\alpha_n,\beta_n)$$

klassifiziert. Hierin verweisen O bzw. o auf die Orientierbarkeit von X bzw. Y, und p ist das Geschlecht von Y. Die ganze Zahl β ist die Schließungsinvariante (zur Definition vgl. [27], p. 181), und die ganzen teilerfremden Zahlen α_i, β_i mit $0<\beta_i<\alpha_i$ legen den orientierten Typ f_{α_i,β_i} der Ausnahmefasern fest. Bei Umkehr der Orientierung geht

$$(O,o;p\,|\,\beta;\alpha_1,\beta_1;\ldots,\alpha_r,\beta_r)$$

in

$$(O,o;p\,|\,-\beta-r;\alpha_1,\alpha_1-\beta_1;\ldots;\alpha_r,\alpha_r-\beta_r)$$

über.

Nun sei G eine endliche kleine Untergruppe von $GL(2,\mathbb{C})$. Die Gruppe G operiert auf S^3 und P_1, und dadurch erhält man aus der Hopffaserung $S^3 \to P_1$ einen Seifertschen Faserraum

$$S^3/G \to P_1/G\,.$$

$M_G = S^3/G$ ist als Umgebungsrand einer komplexen Singularität orientiert (zur Orientierung des Randes einer orientierten Mannigfaltigkeit vgl. das Lehrbuch der Topologie von SEIFERT-THRELFALL), und damit ist M_G ein orientierter Seifertscher Faserraum. Die Seifertschen Invarianten der M_G wurden bereits in [28] berechnet. Durch Vergleich mit Satz 2.11 erhält man:

Lemma 2.13. *Wenn die Singularität* $(\mathbb{C}^2/G,0)$ *eine Auflösung mit dem bewerteten Graphen* $\Gamma_G = \langle b; n_1, q_1; n_2, q_2; n_3, q_3\rangle$ *hat, dann hat ihr Umgebungsrand* M_G *als Seifertscher Faserraum die Invarianten*

$$(O, o; 0 \mid -b; n_1, q_1; n_2, q_2; n_3, q_3)\,.$$

In [27] wurden alle $(O, o; 0 \mid \beta; \alpha_1, \beta_1; \ldots; \alpha_r, \beta_r)$ mit endlicher Fundamentalgruppe aufgezählt. Durch Vergleich mit den in [28] oder in 2.11 und 2.13 bestimmten Faserinvarianten der M_G ergibt sich der Hauptsatz von [28]: Die Umgebungsränder der 2-dimensionalen Quotientensingularitäten sind gerade die Totalräume der orientierbaren Seifertschen Faserungen über S^2 mit endlicher Fundamentalgruppe.

(c) Wenn eine 2-dimensionale normale Singularität eine reguläre Auflösung mit bewertetem Baum Γ hat, dann ist ein geeigneter Umgebungsrand M die zu Γ gehörige *Baummannigfaltigkeit* im Sinne von v. RANDOW [23] (vgl. auch [16], [17]). v. RANDOW beweist in [23], Kap. V, daß jeder orientierbare Seifertsche Faserraum über S^2 homöomorph zu einer sternförmigen Baummannigfaltigkeit ist, und daß umgekehrt jede sternförmige Baummannigfaltigkeit mit einer gewissen zusätzlichen Bedingung eine Seifertsche Faserung gestattet. Diese Faserung ist in gewissen Fällen durch die Baumstruktur oder sogar durch den Homöomorphietyp eindeutig bestimmt (vgl. hierzu auch [30]), z. B. dann, wenn die Fundamentalgruppe endlich und nicht zyklisch ist oder wenn der Faserraum ein Poincarésches Raum ist. Daher hätte man Satz 2.11 auch aus den Resultaten von [28], § 8 und [23], Kap. V, herleiten können. Angesichts der Kompliziertheit der topologischen Argumente hielt ich aber einen direkten analytischen Beweis für wünschenswert.

(d) Nach einem Lemma in [16] hat eine 2-dimensionale Singularität, deren Umgebungsrand M ein Poincarésches Raum ist, eine reguläre Auflösung. M ist also eine Baummannigfaltigkeit. Ist M sternförmig, so ist es also in eindeutiger Weise ein gefaserter Poincarésches Raum.

Die gefaserten Poincaréschen Räume sind in [27], § 12, bestimmt worden. Eine interessante Klasse gefaserter Poincaréscher Räume, die die in [27], §13, betrachteten, von DEHN konstruierten umfaßt, sind die in [5] definierten Umgebungsränder von Singularitäten Σ_{a_1,a_2,a_3}, wo die a_i paarweise teilerfremd sind.

$$\Sigma_{a_1,a_2,a_3}=\{(z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^3 \mid z_1^{a_1}+z_2^{a_2}+z_3^{a_3}=0, |z|=1\}.$$

Dies sind Poincarésche Räume nach [5], p. 6, und sie werden offenbar mit 3 Ausnahmefasern gefasert durch die Operation von $S^1=\{t\in\mathbb{C} \mid |t|=1\}$ mit

$$(z_1,z_2,z_3)\to(t^{a_2a_3}z_1, t^{a_1a_3}z_2, t^{a_1a_2}z_3).$$

§ 3. Die Ikosaedersingularität

3.1. In diesem Paragraphen geht es um die Frage, welche analytischen lokalen Ringe faktoriell sind. Es zeigt sich, daß die Antwort auf diese Frage für verschiedene Dimensionen sehr verschieden ausfällt.

Für dim $\mathcal{O}_{X,x}\geqq 4$ hat man den folgenden Satz von GROTHENDIECK (vgl. [14], Exposé XI, Cor. 3.14 und [29], § 5).

Satz 3.1 (GROTHENDIECK). *(X,x) sei ein normaler vollständiger Durchschnitt und $\mathcal{O}_{X,y}$ faktoriell für alle y außerhalb einer 4-codimensionalen analytischen Menge. Dann ist $\mathcal{O}_{X,x}$ faktoriell.*

Für den Fall einer isolierten Hyperflächensingularität kann man diesen Satz auch leicht aus einem Resultat von MILNOR deduzieren (vgl. [5], p. 8).

Unter den lokalen Ringen von 3-dimensionalen Hyperflächensingularitäten gibt es sowohl unendlich viele nicht faktorielle als auch unendlich viele faktorielle Ringe. Beispielsweise gilt (vgl. [5], Korollar 1).

Satz 3.2. *Es seien a_1, a_2, a_3, a_4 natürliche Zahlen, von denen eine relativ prim zu den übrigen ist. Dann ist der folgende analytische lokale Ring faktoriell*

$$\mathbb{C}\{x_1,x_2,x_3,x_4\}/(x_1^{a_1}+x_2^{a_2}+x_3^{a_3}+x_4^{a_4}).$$

3.2. Es sei $\mathcal{O}=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ der lokale Ring von $\mathbb{C}^2$ in 0 und $\hat{\mathcal{O}}$ seine Komplettierung. Die binäre Ikosaedergruppe I operiert auf $\mathbb{C}^2$ mit Fixpunkt 0, und daher auch auf $\mathcal{O}$ und $\hat{\mathcal{O}}$. Es seien $\mathcal{O}^I$ bzw. $\hat{\mathcal{O}}^I$ die Unterringe der unter I invarianten Elemente von $\mathcal{O}$ bzw. $\hat{\mathcal{O}}$. Natürlich gilt (vgl. [7]):

$$\mathcal{O}^I\cong\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2/I,0} \quad \text{und} \quad \hat{\mathcal{O}}^I\cong\widehat{\mathcal{O}^I}.$$

KLEIN hat in [19], Teil I, Kap.II, §13 mittels Invariantentheorie explizit drei Erzeugende für $\mathcal{O}^I$ und die zwischen ihnen bestehende Relation

bestimmt. Es ergibt sich

$$\mathcal{O}' \cong \mathbb{C}\{x,y,z\}/(x^2+y^3+z^5)$$
$$\hat{\mathcal{O}}' \cong \mathbb{C}[\![x,y,z]\!]/(x^2+y^3+z^5).$$

Satz 3.3. *Die Ringe $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ sind bis auf Isomorphie die einzigen faktoriellen zweidimensionalen analytischen lokalen Ringe.*

Beweis. Nach Satz 1.4 und 2.11 sind $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ faktoriell. Nun sei umgekehrt (X,x) eine 2-dimensionale Singularität und $\mathcal{O}_{X,x}$ faktoriell und nicht regulär. $\mathcal{O}_{X,x}$ ist als faktorieller noetherscher Ring normal. Es sei $f\colon X' \to X$ die minimale Auflösung der Singularitäten von X und

$$f^{-1}(x) = \bigcup_{i=1}^{n} X_i,$$

wo die X_i die irreduziblen Komponenten sind. Es sei $S=(X_i \cdot X_j)$ die Schnittmatrix. Nach Korollar 1.6 ist (X,x) rational und $\det S = \pm 1$. Es sei $Z=\sum r_i X_i$ der Fundamentalzykel. Ferner werden Zykeln $Z_j=\sum r_{ij} X_i$ durch die Bedingung $Z_i \cdot X_k = -\delta_{ik}$ definiert. Aus $\det S = \pm 1$ folgt

(1) $$r_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Die Symmetrie von S impliziert

(2) $$r_{ij} = r_{ji}.$$

Weil S negativ definit ist und $X_i \cdot X_j \geqq 0$ für $i \neq j$ und weil $Z_i \cdot X_k \leqq 0$, gilt (vgl. [2], p. 130)

(3) $$r_{ij} > 0.$$

Die Minimalität von Z impliziert wegen (1) und (3), daß $Z \leqq Z_i$ für $i=1, \ldots, n$. Andererseits gilt wegen der Definition der Z_i die Beziehung $Z = -\sum (Z \cdot X_i) Z_i$ mit $Z \cdot X_i \leqq 0$. Daher muß für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ gelten $Z = Z_k$, also

(4) $$r_i = r_{ik} \quad \text{für } i=1, \ldots, n.$$

$Z \leqq Z_j$ impliziert $r_i \leqq r_{ij}$. Daher folgt insbesondere aus (2) und (4): $r_k = r_{kk} \leqq r_{kj} = r_{jk} = r_j$ und also

(5) $$r_k \leqq r_j \quad \text{für } j=1, \ldots, n.$$

Nach Satz 1.1 gilt

(6) $$Z \cdot Z + Z \cdot K + 2 = 0.$$

Nach Lemma 1.3 i) sind die X_i singularitätenfrei und rational, und daher gilt

$$X_i \cdot K = -2 - X_i \cdot X_i . \tag{7}$$

Die Gln. (4), (6), (7) und die Definition von Z_k implizieren

$$r_k = 2 - \sum_{i=1}^{n} (X_i \cdot X_i + 2)\, r_i . \tag{8}$$

Aber wegen der Minimalität der Auflösung f gilt

$$-(X_i \cdot X_i + 2) \geqq 0 . \tag{9}$$

Die Beziehungen (5), (8) und (9) implizieren

$$X_i \cdot X_i = -2 \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n . \tag{10}$$

Nach der klassischen Klassifizierung der mit 2 bewerteten Dynkinschemata folgt für den bewerteten Graphen Γ der Auflösung f aus (10) und $\det S = \pm 1$

$$\Gamma = \langle 2; 2,1; 3,2; 5,4 \rangle .$$

Daher gilt nach Satz 2.10 und 2.11

$$(X, x) \cong (\mathbb{C}^2/\mathrm{I}, 0),$$

und also

$$\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}^{\mathrm{I}}.$$

q.e.d.

3.3. (a) Während bisher in dieser Arbeit nur analytische lokale Ringe, d.h. lokale Ringe komplexer Räume, betrachtet worden sind, sollen in diesem letzten Abschnitt aus dem Hauptsatz 3.3 einige Aussagen über andere faktorielle lokale Ringe abgeleitet werden. Dabei habe ich nicht leicht zu beweisende Vergleichssätze von ARTIN und HIRONAKA benutzt. Möglicherweise lassen sich die folgenden Beweise vereinfachen.

Korollar 3.4. *Die lokalen Ringe $\hat{\mathcal{O}}$ und $\hat{\mathcal{O}}^{\mathrm{I}}$ sind bis auf Isomorphie die einzigen faktoriellen kompletten zweidimensionalen lokalen Ringe mit Restklassenkörper $\mathbb{C}$.*

Beweis. R sei ein faktorieller kompletter 2-dimensionaler lokaler Ring mit Restklassenkörper $\mathbb{C}$. Dann ist R als faktorieller noetherscher Ring normal. Nach ARTIN ist jeder komplette normale 2-dimensionale lokale Ring mit einem Restklassenkörper k der Charakteristik 0 die Komplettierung eines lokalen Ringes einer algebraischen Fläche über k (s. [2'], p. 36). Sei also R_a ein algebraisch-geometrischer lokaler Ring über $\mathbb{C}$ mit $R = \hat{R}_a$. Nach GAGA [30], Prop. 3, kann man R_a in kanonischer

Weise in einen analytischen lokalen Ring gleicher Dimension R_h einbetten, so daß für die Komplettierungen $\hat{R}_a = \hat{R}_h$ gilt. R_h ist nach MORI faktoriell, weil $\hat{R}_h$ faktoriell ist (vgl. z.B. [3], § 3, n° 7, Prop. 4). Nach Satz 3.3 folgt also $R_h = \mathcal{O}^!$ und damit $R = \hat{R}_h = \hat{\mathcal{O}}^!$. Daß $\hat{\mathcal{O}}^!$ faktoriell ist, folgt z.B. aus [25], Satz 1.

(b) SAMUEL hat in [24], p. 171, die folgende Vermutung ausgesprochen: Wenn R ein kompletter faktorieller lokaler Ring ist, ist der formale Potenzreihenring $R[\![X]\!]$ faktoriell. Beispiele von SAMUEL und anderen zeigen, daß die Voraussetzung der Komplettheit nicht fortgelassen werden kann. Die Vermutung ist meines Wissens bis jetzt nicht vollständig entschieden. Sie ist z.B. richtig für R mit $\operatorname{codh} R \geqq 3$ (SCHEJA [26], Satz 2). Für $\dim R = 2$ zeigt Korollar 3.4, daß die Vermutung richtig ist unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß der Restklassenkörper $\mathbb{C}$ ist. Daß $\hat{\mathcal{O}}^![\![X]\!]$ faktoriell ist, beweist SCHEJA in [26], Satz 4.

(c) Es gibt viele algebraisch-geometrische lokale Ringe über $\mathbb{C}$, d.h. hier: Lokalisierungen einer endlich erzeugten Algebra über $\mathbb{C}$ nach einem maximalen Ideal, welche Dimension 2 haben und faktoriell sind. Beispielsweise sind nach SAMUEL die 2-dimensionalen algebraisch-geometrischen lokalen Ringe

$$(\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/(x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + x_3^{a_3}))_{\mathfrak{m}},$$

wo $\mathfrak{m}$ das von x_1, x_2, x_3 erzeugte maximale Ideal ist, faktoriell, wenn die natürlichen Zahlen a_i paarweise teilerfremd sind (vgl. [3], § 3, p. 99, Exercise 7 und § 3, n° 4, prop. 3). Aber die Komplettierungen dieser lokalen Ringe

$$\mathbb{C}[\![x_1, x_2, x_3]\!]/(x_1^{a_1} + x_2^{a_2} + x_3^{a_3})$$

sind nach Korollar 3.4 nicht faktoriell, wenn $a_i > 1$ und $\{a_1, a_2, a_3\} \neq \{2, 3, 5\}$. Das folgende Korollar zeigt, daß die Faktorialität nicht erst bei der Komplettierung, sondern schon bei der Henselisierung verloren geht.

Korollar 3.5. *Der 2-dimensionale lokale Ring R sei die Henselisierung eines algebraisch-geometrischen lokalen Ringes über $\mathbb{C}$. Dann ist R faktoriell genau wenn die Komplettierung $\hat{R}$ isomorph zu $\hat{\mathcal{O}}$ oder $\hat{\mathcal{O}}^!$ ist.*

Beweis. R sei die Henselisierung $\tilde{R}_a$ des algebraisch-geometrischen lokalen Ringes R_a. R_a ist noethersch und daher ist auch $\tilde{R}_a$ noethersch, und da es außerdem faktoriell ist, ist $\tilde{R}_a$ normal. Dann sind auch $\hat{R}_a$ und der zu R_a gehörige analytische lokale Ring R_h normal. Daher sind die Spektren dieser lokalen Ringe außerhalb der abgeschlossenen Punkte $\hat{\mathfrak{m}}$ bzw. $\mathfrak{m}_h$ bzw. $\hat{\mathfrak{m}}$ regulär, und deshalb sind (vgl. [14], Exposé XI, Cor. 3.8) die Divisorenklassengruppen dieser lokalen Ringe gleich den Picardgruppen der gelochten Spektren. Nach einem unveröffentlichten

Ergebnis von HIRONAKA gilt allgemein für einen lokalen Ring R_a einer isolierten Singularität einer algebraischen Varietät über $\mathbb{C}$

$$\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(\tilde{R}_a)-\tilde{\mathfrak{m}})=\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(R_h)-\mathfrak{m}_h)=\mathrm{Pic}(\mathrm{Spec}(\hat{R}_a)-\hat{\mathfrak{m}}).$$

R ist also faktoriell genau, wenn $\hat{R}$ faktoriell ist, und damit folgt das Korollar trivialerweise aus 3.4.

Zusatz bei der Korrektur. Unter Benutzung eines Satzes von ARTIN kann 3.5 folgendermaßen verbessert werden. Wenn die Henselisierung eines 2-dimensionalen algebraisch-geometrischen lokalen Ringes über $\mathbb{C}$ faktoriell ist, ist sie isomorph zur Henselisierung von $\mathbb{C}[x, y]_{(x,y)}$ oder von $(\mathbb{C}[x, y, z]/x^2+y^3+z^5)_{(x,y,z)}$.

JOSEPH LIPMAN hat mir mitgeteilt, daß er inzwischen folgende Verallgemeinerungen von Resultaten dieser Arbeit erhalten hat: Korollar 1.6 gilt für jeden excellenten henselschen 2-dimensionalen normalen lokalen Ring R mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper k. Ist ein solches R also faktoriell, dann hat die minimale Auflösung nach § 3 den bewerteten Graphen $\langle 2; 2, 1; 3, 2; 5, 4\rangle$. Für char $k \neq 2, 3, 5$ wird das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R durch ein System von Parametern x, y, z mit $x^2+y^3+z^5 \in \mathfrak{m}^6$ erzeugt. Die Komplettierung hat dann ein System von Parametern x, y, z mit $x^2+y^3+z^5=0$, und ein Analogon zu Korollar 3.4 gilt daher unter diesen allgemeineren Voraussetzungen.

Literatur

1. ARTIN, M.: Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces. Amer. J. Math. **84**, 485–496 (1962).
2. — On isolated rational singularities of surfaces. Amer. J. Math. **88**, 129–136 (1966).

2′. — On algebraic extensions of local rings. Rend. Mat. e. Appl. **25**, 33–37 (1966).

3. BOURBAKI, N.: Algèbre commutative, chapitre 7, Diviseurs. Paris: Herman 1965.
4. BRIESKORN, E.: Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen. Math. Ann. **166**, 76–102 (1966).
5. — Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. Inventiones math. **2**, 1–14 (1966).
6. BRODY, E.J.: The topological classification of the Lens spaces. Ann. of Math. **71**, 163–184 (1960).
7. CARTAN, H.: Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. In "Algebraic geometry and topology", p. 90–102. Princeton: Princeton University Press 1957.
8. DUVAL, P.: Homographies, quaternions and rotations. Oxford: Oxford University Press 1964.
9. FOX, R.H.: Covering spaces with singularities. In "Algebraic geometry and topology", p. 243–257. Princeton: Princeton University Press 1957.
10. GODEAUX, L.: Note sur les involutions cycliques appartenants à une surface algébrique. Arch. Math. **6**, 1–4 (1955).
11. GOTTSCHLING, E.: Die Uniformisierbarkeit der Fixpunkte eigentlich diskontinuierlicher Gruppen von biholomorphen Abbildungen. Math. Ann. **169**, 26–54 (1967).
12. GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245–318 (1958).
13. GROTHENDIECK, A.: Étude locale des morphismes; germes d'espaces analytiques, platitude, morphismes simples. Exposé 13 in Séminaire Cartan 13 (1960/61).
14. — Séminaire de Géométrie Algébrique 1962.

15. HIRZEBRUCH, F.: Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Ann. **126**, 1—22 (1953).
16. — The topology of normal singularities of an algebraic surface. Séminaire Bourbaki, 15^e année 1962/63, No. 250.
17. — Über Singularitäten komplexer Flächen. Rend. Mat. e. Appl. **25**, 213—232 (1966).
18. HOLMANN, H.: Seifertsche Faserräume. Math. Ann. **157**, 138—166 (1964).
19. KLEIN, F.: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung vom fünften Grade. Leipzig 1884.
20. KOESTNER, A.: Lokale Darstellbarkeit eindimensionaler analytischer Mengen in zweidimensionalen normalen komplexen Räumen durch eine holomorphe Funktion. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, Münster 1967.
21. MUMFORD, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. Publ. Math. de l'Institut des Hautes Études Scientifiques No. 9, Paris 1961.
22. PRILL, D.: Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups. Duke Math. J. **34**, 375—386 (1967).
23. RANDOW, R. v.: Zur Topologie von dreidimensionalen Baummannigfaltigkeiten. Bonner Math. Schriften Nr. 14, Bonn 1962.
24. SAMUEL, P.: Sur les anneaux factoriels. Bull. Soc. Math. France **89**, 155—173 (1961).
25. SCHEJA, G.: Über Primfaktorzerlegung in zweidimensionalen lokalen Ringen. Math. Ann. **159**, 252—258 (1965).
26. — Einige Beispiele faktorieller lokaler Ringe. Math. Ann. **172**, 124—134 (1967).
27. SEIFERT, H.: Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume. Acta Math. **60**, 147—238 (1933).
28. —, u. W. THRELFALL: Topologische Untersuchung der Diskontinuitätsbereiche endlicher Bewegungsgruppen des dreidimensionalen sphärischen Raumes (Schluß). Math. Ann. **107**, 543—586 (1932).
29. STORCH, U.: Fastfaktorielle Ringe. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, Münster 1967.
30. SERRE, J.P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique. Ann. Inst. Fourier **6**, 1—42 (1956).
31. WALDHAUSEN, F.: Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I. Inventiones math. **3**, 308—333 (1967).

E. BRIESKORN
Mathematisches Institut der Universität
5300 Bonn, Wegelerstr. 10

(Eingegangen am 6. Oktober 1967)