Inventiones math. 4, 238—264 (1967)

Quadratische Formen und Galois-Cohomologie*

WINFRIED SCHARLAU (Bonn)

Einleitung

Diese Arbeit behandelt die Theorie quadratischer Formen über Körpern der Charakteristik $\neq 2$. Über einem solchen Körper bilden die Isometrieklassen nicht-degenerierter quadratischer Formen mit den Operationen direkte Summe und Tensorprodukt einen kommutativen Halbring, in dem der Kürzungssatz gilt. Den universellen Ring dieses Halbringes bezeichnen wir mit $W(K)$ und nennen ihn Witt-Grothendieck-Ring von K.

Zur Berechnung von $W(K)$ verwenden wir einen Ansatz von DELZANT [3]. DELZANT beschreibt nämlich den Witt-Grothendieck-Ring durch Erzeugende und Relationen; die Erzeugenden sind die Elemente der Cohomologiegruppe $H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, und die Relationen werden mittels des Cup-Produktes $\cup: H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H^1(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ definiert. Der Witt-Grothendieck-Ring ist insbesondere also vollständig durch die Galois-Gruppe $G(\bar{K}/K)$ bestimmt, wobei $\bar{K}$ eine separabel abgeschlossene Hülle von K bezeichnet. Hat man also genügend Information über die Galois-Gruppe $G(\bar{K}/K)$, wie sie z.B. durch die „Verzweigungstheorie" bewerteter Körper oder durch den Satz von TSEN geliefert wird, so kann man $W(K)$ berechnen, z.B. für *Hensel-Körper* (Abschnitt 4) und *reelle Funktionenkörper* (Abschnitt 5).

Ferner untersuchen wir die von DELZANT definierten Invarianten quadratischer Formen, die sogenannten Stiefel-Whitney-Klassen. Ein wichtiges Problem ist die Frage, wann diese Invarianten die quadratischen Formen klassifizieren. Wir geben dazu einige Beispiele und Gegenbeispiele.

Diese Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: In den ersten beiden Abschnitten bringen wir die grundlegenden Definitionen und einige einfache Eigenschaften des Witt-Grothendieck-Ringes. Im 3. Abschnitt haben wir eine Reihe verschiedenartiger Beispiele zusammengestellt, die zur Illustration der entwickelten Theorie dienen. Der 4. Abschnitt behandelt quadratische Formen über Hensel-Körpern, der 5. quadratische Formen über reellen Funktionenkörpern, über die wir Sätze beweisen, die sich im wesentlichen schon bei WITT finden. Im 6. Abschnitt gehen wir kurz auf die Theorie von PFISTER ein und erwähnen im Zusammenhang damit einige ungelöste Probleme.

* Diese Arbeit ist im wesentlichen die gleichnamige Dissertation des Verfassers, Bonn 1967.

In den Bezeichnungen halten wir uns weitgehend an [14], [15], für unbewiesene Tatsachen über quadratische Formen verweisen wir auf [8] und [18].

1. Der Witt-Grothendieck-Ring

1.1. Der Witt-Grothendieck-Ring eines Körpers

Sei K ein (kommutativer) Körper. Die Isometrie-Klassen der nicht-degenerierten quadratischen Formen über K bilden mit der Operation, die durch die direkte Summe von quadratischen Formen geliefert wird, eine abelsche Halbgruppe, in der der Kürzungssatz gilt (Satz von WITT). Diese Halbgruppe bezeichnen wir mit $Q(K)$. Es sei $i\colon Q(K)\to W(K)$ die Einbettung von $Q(K)$ in die zugehörige universelle abelsche Gruppe $W(K)$. Dann ist $i\colon Q(K)\to W(K)$ bis auf einen eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt durch die Forderung, daß man jeden Halbgruppen-Homomorphismus $f\colon Q(K)\to A$ in eine abelsche Gruppe A eindeutig über i faktorisieren kann.

Wir nennen $W(K)$ die Witt-Grothendieck-Gruppe (der nicht-degenerierten quadratischen Formen) *von K*. Jedes Element $\eta\in W(K)$ schreibt sich $\eta=i(f)-i(f')$ mit $f,f'\in Q(K)$. Von dieser Darstellung werden wir oft Gebrauch machen. Wir werden oft $Q(K)$ mit seinem Bild unter i identifizieren.

Hat K eine Charakteristik $\neq 2$, so ist das Tensorprodukt von quadratischen Formen über K definiert, und damit wird $W(K)$ zu einem kommutativen Ring mit Einselement. Die äußeren Potenzen von quadratischen Formen machen $W(K)$ sogar zu einem λ-Ring.

Das zu der quadratischen Form $a_1x_1^2+\cdots+a_nx_n^2$ gehörige Element von $W(K)$ ($\mathrm{char}(K)\neq 2$) bezeichnen wir mit $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$, das zu der hyperbolischen Ebene xy gehörige Element mit $\boldsymbol{H}$. Ist $\mathrm{char}(K)\neq 2$, so gilt $\boldsymbol{H}=\langle 1,-1\rangle$.

Die Dimension einer quadratischen Form definiert einen Homomorphismus

$$\dim\colon W(K)\to\mathbb{Z},$$

dessen Kern wir mit $W_0(K)$ bezeichnen. Im Fall $\mathrm{char}(K)\neq 2$ spaltet dim durch $1\mapsto\langle 1\rangle$, im Fall $\mathrm{char}(K)=2$ spaltet $\dim\colon W(K)\to 2\mathbb{Z}$ durch $2\mapsto\boldsymbol{H}$. Wir können also schreiben

$$W(K)\cong\mathbb{Z}+W_0(K) \quad \textit{falls} \quad \mathrm{char}(K)\neq 2$$

$$W(K)\cong 2\mathbb{Z}+W_0(K) \quad \textit{falls} \quad \mathrm{char}(K)=2.$$

1.2. Der Witt-Grothendieck-Ring einer profiniten Gruppe

Es sei G eine profinite Gruppe. Es sei in dieser Arbeit immer

$$H^n(G)=H^n(G,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Warnung: Aus Gründen, die gleich klar werden, schreiben wir die Operation in $H^1(G) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ immer multiplikativ!

Definition 1.2.1. *Der Witt-Grothendieck-Ring $W(G)$ von G werde durch folgende exakte Sequenz definiert*

$$0 \to \mathrm{Ke}(G) \to \mathbb{Z}[H^1(G)] \to W(G) \to 0.$$

Dabei sei $\mathbb{Z}[H^1(G)]$ der Gruppenring von $H^1(G)$ und $\mathrm{Ke}(G)$ das Ideal, erzeugt von den Elementen der Form $a+b-(c+d)$ mit $a,b,c,d \in H^1(G)$ und $a\,b = c\,d$ in $H^1(G)$ und $a \cup b = c \cup d$ in $H^2(G)$.

Die additive Gruppe von $W(G)$ nennen wir Witt-Grothendieck-Gruppe von G.

Statt $a_1 + \cdots + a_n$ schreiben wir auch $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Die kanonische Augmentation des Gruppenringes definiert eine Augmentation

$$\dim\colon W(G) \to \mathbb{Z},$$

deren Kern wir mit $W_0(G)$ bezeichnen. Man hat wieder $W(G) \cong \mathbb{Z} + W_0(G)$.

Proposition 1.2.2. *Es ist W ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der profiniten Gruppen in die Kategorie der kommutativen Ringe.*

Der Beweis ist trivial.

Lemma 1.2.3. *Sei N abgeschlossener Normalteiler von G mit $H^1(N) = 1$. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus*

$$W(G/N) \cong W(G).$$

Beweis. Nach [15], II-4 liefert die Gruppenerweiterung $1 \to N \to G \to G/N \to 1$ eine exakte Sequenz

$$0 \to H^1(G/N) \to H^1(G) \to 0 \to H^2(G/N) \to H^2(G).$$

Aus der Definition von $W(G)$ folgt unmittelbar die Behauptung.

Korollar 1.2.4. *Sei G eine profinite Gruppe und $G(2) = G/N$ der maximale Quotient von G, der eine pro-2-Gruppe ist. Dann gilt $W(G) \cong W(G(2))$.*

Beweis. Es gilt $H^1(N) = 1$.

Wegen dieses Korollares können wir uns bei unseren Untersuchungen oft auf pro-2-Gruppen beschränken.

Lemma 1.2.5. *Es gelte $H^2(G) = 0$. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $W(G) \cong \mathbb{Z} + H^1(G)$.*

Der Beweis ist trivial.

1.3. Zusammenhang der beiden Definitionen des Witt-Grothendieck-Ringes

Sei K ein Körper, K^+ seine additive Gruppe, K^* seine multiplikative Gruppe, $\bar{K}$ sei eine separable Hülle von K. Es bezeichne $B(K)$ die Brauer-Gruppe von K, $B_2(K)$ die Untergruppe der Elemente von der Ordnung 2. Sei G die Galois-Gruppe von $\bar{K}/K$. Die Hauptsätze der Galois-Cohomologie besagen

$$H^i(G,\bar{K}^+)=0 \qquad \text{für } i\geqq 1,$$
$$H^1(G,\bar{K}^*)=1$$
$$H^2(G,\bar{K}^*)\cong B(K).$$

Sei $\mathrm{char}(K)\neq 2$. Die exakte Sequenz

$$0\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to\bar{K}^*\xrightarrow{p}\bar{K}^*\to 0, \qquad p\colon x\mapsto x^2$$

liefert durch die zugehörige Cohomologie-Sequenz Isomorphismen

$$H^1(G)\cong K^*/K^{*2},$$
$$H^2(G)\cong B_2(K).$$

Das Cup-Produkt liefert eine Paarung

$$H^1(G)\times H^1(G)\to H^2(G), \qquad (a,b)\mapsto a\cup b,$$

die unter diesen Isomorphismen (a,b) auf die Klasse der Quaternionen-Algebra $((a,b)/K)$ abbildet [3].

Sei $\mathrm{char}(K)=2$. Die exakte Sequenz

$$0\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\to\bar{K}^+\xrightarrow{\wp}\bar{K}^+\to 0, \qquad \wp\colon x\mapsto x^2+x$$

liefert Isomorphismen

$$H^1(G)\cong K/\wp K,$$
$$H^i(G)=0 \qquad \text{für } i\geqq 2.$$

Wir kommen nun zu dem Zusammenhang zwischen den beiden Definitionen der Witt-Grothendieck-Gruppe.

Satz 1.3.1. (Delzant [3]). *Sei K ein Körper mit* $\mathrm{char}(K)\neq 2$, *sei $\bar{K}$ eine separable Hülle von K und G die Galois-Gruppe von $\bar{K}/K$. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $W(G)\cong W(K)$.*

Beweis. Über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$ ist jede quadratische Form direkte Summe eindimensionaler Formen. Wegen $\langle a\rangle = \langle a\,b^2\rangle$, $b\in K^*$ erhält man einen surjektiven Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[K^*/K^{*2}]\to W(K)$. Nach einem Satz von Witt ([18], Satz 7) wird der Kern dieser Abbildung erzeugt von Elementen der Form $a+b-(c+d)$

mit $a,b,c,d\in K^*/K^{*2}$ und $\langle a,b\rangle \cong \langle c,d\rangle$. Zweidimensionale quadratische Formen sind aber genau dann isometrisch, wenn ihre Diskriminanten und Witt-Invarianten übereinstimmen, also

$$ab=cd \quad \text{und} \quad ((a,b)/K)\cong((c,d)/K).$$

Unter den obigen Isomorphismen geht also die exakte Sequenz

$$0\to \mathrm{Kern}\to \mathbb{Z}[K^*/K^{*2}]\to W(K)\to 0$$

in die exakte Sequenz

$$0\to \mathrm{Ke}(G)\to \mathbb{Z}[H^1(G)]\to W(G)\to 0$$

über, q.e.d.

Satz 1.3.2. *Es sei K ein vollkommener Körper der Charakteristik 2, $\overline{K}$ eine separable Hülle und G die Galois-Gruppe von $\overline{K}/K$. Dann existiert ein kanonischer Isomorphismus $W(G)\cong W(K)$.*

Beweis. Wegen $H^2(G)=0$ gilt $W(G)\cong \mathbb{Z}+K/\wp K$. Ist f quadratische Form über K, so definiert $f\mapsto(\frac{1}{2}\dim f, \Delta f)$, wobei Δf die Arf-Invariante von f bezeichnet, einen Isomorphismus $W(K)\cong\mathbb{Z}+K/\wp K$, denn nichtdegenerierte quadratische Formen über vollkommenen Körpern der Charakteristik 2 werden durch Dimension und Arf-Invariante klassifiziert [1].

1.4. Funktorielle Eigenschaften des Witt-Grothendieck-Ringes

Die Kategorie der profiniten 2-Gruppen enthält Produkte und Coprodukte. Die folgende Proposition besagt, daß sich der Funktor W bezüglich dieser Produkte gut verhält. Sind G_1, G_2 profinite 2-Gruppen, so ist ihr Produkt das übliche direkte Produkt, welches wir mit $G_1\times G_2$ bezeichnen. Ihr Coprodukt ist das freie Produkt, das wir mit $G_1 \amalg G_2$ bezeichnen.

Proposition 1.4.1. *Es existieren kanonische Ring-Isomorphismen*

(i) $$W_0(G_1\amalg G_2)\cong W_0(G_1)\times W_0(G_2),$$

(ii) $$W(G_1\times G_2)\cong W(G_1)\otimes_{\mathbb{Z}} W(G_2).$$

Beweis. (i) Man hat kanonische Homomorphismen

$$G_k \xrightarrow{i_k} G_1\amalg G_2 \xrightarrow{p_k} G_k, \qquad k=1,2$$

mit $p_k\, i_k=\mathrm{id}$. Es ergibt sich

$$W_0(G_1)\times W_0(G_2)\xrightarrow{p} W_0(G_1\amalg G_2)\xrightarrow{i} W_0(G_1)\times W_0(G_2).$$

Es ist p injektiv, denn $i \circ p = \mathrm{id}$. Es ist $H^1(G_1 \amalg G_2) = H^1(G_1) \times H^1(G_2)$, und nach dem folgenden Lemma gilt für $a_k \in H^1(G_k)$, $k=1,2$ $a_1 \cup a_2 = 0$. Damit folgt leicht, daß p auch surjektiv ist. Man hat sich noch zu überlegen, daß p auch tatsächlich ein Ringhomomorphismus ist. Das folgt aus

$$(\langle a_1 \rangle - \langle 1 \rangle) \otimes (\langle a_2 \rangle - \langle 1 \rangle) = 0 \quad \text{in} \quad W_0(G_1 \amalg G_2).$$

(ii) Es ist $H^1(G_1 \times G_2) \cong H^1(G_1) + H^1(G_2)$, also

$$\mathbb{Z}[H^1(G_1 \times G_2)] \cong \mathbb{Z}[H^1(G_1)] \otimes \mathbb{Z}[H^1(G_2)].$$

Man hat folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathrm{Ke}(G_1) \otimes W(G_2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[H^1(G_1)] \otimes W(G_2) & \longrightarrow & W(G_1) \otimes W(G_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ke}(G_1) \otimes \mathbb{Z}[H^1(G_2)] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[H^1(G_1)] \otimes \mathbb{Z}[H^1(G_2)] & \longrightarrow & W(G_1) \otimes \mathbb{Z}[H^1(G_2)] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ke}(G_1) \otimes \mathrm{Ke}(G_2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[H^1(G_1)] \otimes \mathrm{Ke}(G_2) & \longrightarrow & W(G_1) \otimes \mathrm{Ke}(G_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Es wird $\mathrm{Ke}(G_1 \times G_2)$ erzeugt von den Elementen

$$\eta = \langle a_1 b_1, a_2 b_2 \rangle - \langle a_3 b_3, a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3 \rangle$$

mit $a_i \in H^1(G_1)$, $b_i \in H^1(G_2)$ und $a_1 b_1 \cup a_2 b_2 = a_3 b_3 \cup a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3$. Mittels des folgenden Lemmas zeigt man leicht, daß diese Bedingung dazu führt, daß entweder

$$\eta = (\langle a_1, a_2 \rangle - \langle a_3, a_1 a_2 a_3 \rangle) \otimes \langle b \rangle$$

mit $a_1 \cup a_2 = a_3 \cup a_1 a_2 a_3$, $b \in H^1(G_2)$ oder

$$\eta = (\langle b_1, b_2 \rangle - \langle b_3, b_1 b_2 b_3 \rangle) \otimes \langle a \rangle$$

mit $b_1 \cup b_2 = b_3 \cup b_1 b_2 b_3$, $a \in H^1(G_1)$. Also wird $\mathrm{Ke}(G_1 \times G_2)$ von $\mathbb{Z}[H^1(G_1)] \otimes \mathrm{Ke}(G_2)$ und $\mathrm{Ke}(G_1) \otimes \mathbb{Z}[H^1(G_2)]$ erzeugt, q.e.d.

Lemma 1.4.2. (i) *Für $a_k \in H^1(G_k)$, $k=1,2$ gilt $a_1 \cup a_2 = 0$ in $H^2(G_1 \amalg G_2)$.*

(ii) *Es seien $\{a_i\}_{i \in I}$ linear unabhängige Elemente von $H^1(G_1)$ und $\{b_i\}_{i \in I}$ beliebige Elemente von $H^1(G_2)$, die von 1 verschieden sind. Dann sind die Elemente $\{a_i \cup b_i\}_{i \in I}$ linear unabhängig in $H^2(G_1 \times G_2)/(H^2(G_1) + H^2(G_2))$.*

Beweis. (i) Sei $N_k = \mathrm{Kern}(a_k)$. Es genügt zu zeigen $a_1 \cup a_2 = 0$ in $H^2(G_1/N_1 \amalg G_2/N_2)$. Es ist aber $D = G_1/N_1 \amalg G_2/N_2$ isomorph zur unendlichen Dieder-Gruppe. Diese besitzt die Dieder-Gruppe D_8 der Ordnung 8 als Quotienten, und zwar so, daß man die Homomorphismen a_1, a_2: $G_1 \amalg G_2 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ über D_8 faktorisieren kann. Durch eine leichte Rechnung mit Coketten zeigt man $a_1 \cup a_2 = 0$ in D_8.

(ii) Wir überlassen den leichten Beweis dem Leser.

2. Die Invarianten quadratischer Formen

2.1. Stiefel-Whitney-Klassen

Es sei $\tilde{H}(G)$ die multiplikative Gruppe der Einheiten des Cohomologie-Ringes

$$H^{**}(G) = \prod_{n=0}^{\infty} H^n(G),$$

d.h.

$$\tilde{H}(G) = \{1 + x_1 + x_2 + \cdots \mid x_i \in H^i(G)\}.$$

Definition 2.1.1. *Ein Homomorphismus w_G des Funktors $W(G)$ in den Funktor $\tilde{H}(G)$ heißt totale Stiefel-Whitney-Klasse, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Sei $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und a: $G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Identität. Dann gilt für $\eta = \langle a \rangle$, daß $w_G(\eta) = 1 + a$.*

Diese Definition entspricht genau der axiomatischen Definition der Stiefel-Whitney-Klassen eines reellen Vektorraumbündels. Es ist trivial zu sehen, daß w_G existiert und eindeutig bestimmt ist.

Für $\eta \in W(G)$ schreiben wir

$$w_G(\eta) = w(\eta) = 1 + w_1(\eta) + w_2(\eta) + \cdots$$

mit $w_i(\eta) \in H^i(G)$. Wir nennen $w_i(\eta)$ i-te Stiefel-Whitney-Klasse von η. Für $\eta = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ ist $w_i(\eta)$ die i-te elementar-symmetrische Funktion in den a_j. Für den Zusammenhang mit den klassischen Invarianten der quadratischen Formen vgl. [3], w_1 ist im wesentlichen die Diskriminante, w_2 die Witt-Invariante.

Ein wichtiges Problem in der Theorie der quadratischen Formen ist die Frage nach der Injektivität von w: $W_0(G) \to \tilde{H}(G)$. Falls dies der Fall ist, sagen wir der Bequemlichkeit halber nicht ganz korrekt: die totale Stiefel-Whitney-Klasse ist injektiv.

2.2. Stiefel-Whitney-Klassen und Steenrod-Quadrate

Wie in der algebraischen Topologie bestehen Zusammenhänge zwischen den Stiefel-Whitney-Klassen und den Steenrod-Quadraten, die wir im folgenden kurz erläutern.

Sei G eine profinite Gruppe. Dann ist für jedes $r \geqq 0$ ein Homomorphismus

$$Sq^r\colon H^n(G) \to H^{n+r}(G)$$

definiert, und die Sq^r haben folgende Eigenschaften:

(i) $Sq^0 = \mathrm{id}$.

(ii) *Für* $x \in H^r(G)$ *gilt* $Sq^r(x) = x \cup x$.

(iii) $Sq = \sum_{r \geqq 0} Sq^r$ *ist ein Endomorphismus des Cohomologie-Ringes*

$$H^*(G) = \sum_{n \geqq 0} H^n(G).$$

Proposition 2.2.1. (Wu). *Für* $\eta \in W(G)$ *gilt*

$$Sq^r(w_s(\eta)) = \sum_{t=0}^{r} \binom{s+t-r-1}{t} w_{r-t}(\eta) \cup w_{s+t}(\eta).$$

Beweis. (i) Sei zunächst $\eta = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $a_i \in H^1(G)$. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n. Der Induktionsanfang ist trivial.

$$\begin{aligned} Sq(w_s(\eta + \langle a_{n+1} \rangle)) &= Sq(w_s(\eta) + w_{s-1}(\eta) \cup a_{n+1}) \\ &= Sq(w_s(\eta)) + Sq(w_{s-1}(\eta)) \cup (a_{n+1} + a_{n+1} \cup a_{n+1}). \end{aligned}$$

Die $r+s$-dimensionale Komponente dieser Cohomologie-Klasse ist nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} &\sum_{t=0}^{r} \binom{s+t-r-1}{t} w_{r-t}(\eta) \cup w_{s+t}(\eta) \\ &+ \sum_{t=0}^{r} \binom{s-1+t-r-1}{t} w_{r-t}(\eta) \cup w_{s+t-1}(\eta) \cup a_{n+1} \\ &+ \sum_{t=0}^{r-1} \binom{s+t-r-1}{t} w_{r-t-1}(\eta) \cup w_{s+t-1}(\eta) \cup a_{n+1} \cup a_{n+1}. \end{aligned}$$

Eine triviale Rechnung mit symmetrischen Funktionen und Binomial-Koeffizienten zeigt, daß dies dasselbe ist wie

$$\sum_{t=0}^{r} \binom{s+t-r-1}{t} w_{r-t}(\eta + \langle a_{n+1} \rangle) \cup w_{s+t}(\eta + \langle a_{n+1} \rangle).$$

(ii) Um den Beweis vollständig zu führen, betrachten wir ein beliebiges Element $\eta' - \eta$ von $W(G)$ mit $\eta' = \langle a'_1, \ldots, a'_m \rangle$, $\eta = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Es gilt

$$w(-\langle a_i \rangle) = a_i + a_i^2 + a_i^3 + \cdots,$$

$$w((2^l - 1)\langle a_i \rangle) = a_i + a_i^2 + \cdots + a_i^{2^l - 1} + 0 + 0 + \cdots.$$

Für genügend großes l sind die ersten $r+s$ Stiefel-Whitney-Klassen von $\eta'-\eta$ und $\eta'+(2^l-1)\eta$ also gleich. Damit haben wir die Behauptung auf den Fall (i) zurückgeführt.

Korollar 2.2.2. *Sei G eine profinite Gruppe, $\eta\in W(G)$. Die totale Stiefel-Whitney-Klasse $w(\eta)$ ist mittels der* WUschen *Formel* 2.2.1 *vollständig durch ihre Komponenten in den Dimensionen* 2^l, $l=0, 1, 2, \ldots$ *bestimmt.*

Beweis. Es genügt, zu zeigen, daß $w_n(\eta)$ mit $n\neq 2^l$ durch die $w_i(\eta)$ mit $i<n$ bestimmt ist. Sei $n=2^l+m$ mit $0<m<2^l$. Dann gilt nach 2.2.1

$$\begin{aligned} w_n(\eta) &= \binom{2^l-1}{m} w_0(\eta)\cup w_n(\eta) \\ &= Sq^m(w_{2^l}(\eta))+\sum_{t=0}^{m-1}\binom{2^l+t-m-1}{t} w_{m-t}(\eta)\cup w_{2^l+t}(\eta), \end{aligned}$$

und rechts stehen nur Stiefel-Whitney-Klassen der Dimension $<n$.

3. Beispiele

In diesem Teil der Arbeit stellen wir einige einfache Anwendungen und Illustrationen der bisher entwickelten Theorie zusammen. Da die meisten Ergebnisse bekannt sind, beschränken wir uns teilweise auf Andeutungen der Methoden und Resultate. Die einzelnen Abschnitte dieses Teiles sind weitgehend unabhängig voneinander.

3.1. Quadratische Formen über einigen einfachen Körpern

Beispiel 3.1.1. *Sei $G\cong\hat{\mathbb{Z}}_2=\varprojlim \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. Dann gilt $W(G)\cong\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Dieses Beispiel kann auf einen *endlichen Körper* oder einen *Potenzreihenkörper mit algebraisch-abgeschlossenem Konstantenkörper* angewandt werden.

Beispiel 3.1.2. *Sei G eine freie 2-Gruppe. Dann liefert die erste Stiefel-Whitney-Klasse einen Isomorphismus $W_0(G)\cong H^1(G)$.*

Dieses Beispiel kann unter Verwendung des Satzes von TSEN ([17], vgl. auch [14]) auf *Funktionenkörper mit algebraisch-abgeschlossenem Konstantenkörper* angewandt werden. Auch die *maximale abelsche Erweiterung von* $\mathbb{Q}$ erfüllt die Voraussetzung $H^2(G)=0$.

Beispiel 3.1.3. ([3]). *Sei $G\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann gilt $W(G)\cong\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$, und die totale Stiefel-Whitney-Klasse ist injektiv.*

Beweis. Es gilt $H^*(G)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[t]$, wobei t ein Erzeugendes von $H^1(G)$ bezeichnet. Damit folgt leicht die Behauptung.

Anwendung auf *reell-abgeschlossene Körper* liefert im wesentlichen den Satz von SYLVESTER. Es ist interessant, daß die Signatur einer quadratischen Form durch die Stiefel-Whitney-Klassen ausgedrückt werden kann.

Beispiel 3.1.4. *Sei G die unendliche Dieder-Gruppe. Dann gilt* $W(G) \cong \mathbb{Z}+\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$, *und die totale Stiefel-Whitney-Klasse ist injektiv.*

Beweis. Es ist $G \cong H_1 \sqcup H_2$, wobei H_1, H_2 Gruppen der Ordnung 2 sind. Nach Proposition 1.4.1 und dem letzten Beispiel gilt $W(G) \cong \mathbb{Z}+\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$. Ferner hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W_0(G) & \longrightarrow & W_0(H_1) \times W_0(H_2) \\ \downarrow w & & \downarrow w_1 \times w_2 \\ \tilde{H}(G) & \longrightarrow & \tilde{H}(H_1) \times \tilde{H}(H_2) \end{array}$$

Mit dem letzten Beispiel folgt die Injektivität von w.

Dieses Beispiel läßt sich auf einen *Potenzreihenkörper* $R((t))$ *mit reell-abgeschlossenem Konstantenkörper* anwenden.

Beispiel 3.1.5. *Sei G freie abelsche* 2*-Gruppe (d.h. die diskrete Gruppe* $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ *ist frei abelsch). Dann gilt* $W_0(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{(I)}$. *Dabei ist* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{(I)}$ *direkte Summe von mit* $I = H^1(G) - \{1\}$ *indizierten Exemplaren von* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Der Beweis ergibt sich leicht aus 1.4.1 oder auch direkt aus Lemma 1.4.2.

Dieses Beispiel läßt sich auf *Hensel-Körper* (bzgl. einer nicht notwendig einrangigen oder diskreten Bewertung) *mit algebraisch abgeschlossenem Restklassen-Körper der Charakteristik* $\neq 2$ anwenden (vgl. [4]).

3.2. Die Struktur der Witt-Grothendieck-Gruppe für $H^2(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Wir untersuchen nun als weiteres Beispiel die Witt-Grothendieck-Gruppe $W(G)$ im Fall $H^2(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Es wird sich zeigen, daß (wenigstens im Falle von Körpern) *die totale Stiefel-Whitney-Klasse injektiv ist.* Damit erhalten wir u. a. ein Resultat von KAPLANSKY.

Wir identifizieren $H^2(G)$ mit dem Körper von zwei Elementen $\mathbb{F}_2$ und haben dann eine symmetrische Bilinearform

$$\cup: H^1(G) \times H^1(G) \longrightarrow \mathbb{F}_2 .$$

Man kann dann $H^1(G)$ als direkte Summe dreier orthogonaler Teilräume V_1, V_2, V_3 schreiben und Basen $\{a_i\}$, $\{b_j\}$, $\{c_k, c_k'\}$ von V_1, V_2, V_3 finden mit

$a_i \cup x = 0$ für alle $x \in H^1(G)$ und alle i,

$b_j \cup b_j \neq 0$ für alle j,
b_j ist orthogonal zu allen anderen Basisvektoren,
$c_k \cup c_k' \neq 0$ für alle k,
c_k, c_k' sind orthogonal zu allen Basisvektoren außer c_k', c_k, d.h. $\{c_k, c_k'\}$ ist symplektische Basis von V_3.

Wir unterscheiden nun verschiedene Fälle:

(i) Sei $V_2=0$, d.h. für alle $x \in H^1(G)$ gilt $x \cup x = 0$, d.h. alle Elemente von $W_0(G)$ haben die Ordnung 2. Wir wählen nun zwei Vektoren c_{k_0}, c_{k_0}' der Basis von V_3 und behaupten, $W(G)$ wird von

$$\langle 1 \rangle, \quad \langle a_i \rangle, \quad \langle c_k \rangle, \quad \langle c_k' \rangle, \quad \langle c_{k_0} c_{k_0}' \rangle$$

erzeugt. Dazu zeigt man zunächst mittels der Relation

$$\langle c_k c_k' \rangle = \langle c_k c_{k_0}, c_k' c_{k_0}' \rangle - \langle c_{k_0} c_{k_0}' \rangle,$$

daß alle $\langle c_k c_k' \rangle$ in der von diesen Elementen erzeugten Untergruppe liegen. Die Durchführung der Einzelheiten überlassen wir dem Leser, ebenso den nun leichten Beweis der Injektivität von w. Offenbar ergibt sich

$$W(G) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{(I)},$$

wobei I eine Indexmenge von der Mächtigkeit *card*(*Basis von* $H^1(G)$)$+1$ ist.

(ii) Sei $\dim(V_2)=1$, d.h. wir haben einen Basisvektor b mit $b \cup b \neq 0$. Gilt $V_3=0$, so hat $\langle b \rangle - \langle 1 \rangle$ in $W_0(G)$ die Ordnung ∞, und es ergibt sich

$$W(G) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{(I)},$$

wobei I von der Mächtigkeit *card* (*Basis von* $H^1(G)$)-1 ist. Nach einem Satz von PFISTER liegen im Fall von Körpern im Kern von w nur Torsionselemente (vgl. 6.2.). Man sieht aber leicht, daß in unserem Fall die Torsionselemente schon durch w_1 klassifiziert werden.

Gilt $V_3 \neq 0$, so hat $\langle b \rangle - \langle 1 \rangle$ in $W_0(G)$ die Ordnung 4, und es ergibt sich

$$W(G) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{(I)},$$

wobei I dieselbe Mächtigkeit wie eben hat. Ein Erzeugenden-System von $W(G)$ ist $\langle 1 \rangle, \langle b \rangle, \langle c_k \rangle, \langle c_k' \rangle$. Um das zu zeigen, hat man folgende Relationen zu benutzen

$$\begin{aligned} \langle b, b, b, b \rangle &= \langle b\, c_k, b\, c_k, b\, c_k', b\, c_k' \rangle = \langle 1, c_k c_k', 1, c_k c_k' \rangle \\ &= \langle 1, 1, 1, 1 \rangle, \\ \langle c_k c_k', c_k \rangle &= \langle b\, c_k', b \rangle. \end{aligned}$$

Man sieht ebenfalls leicht, daß w injektiv ist.

(iii) Auch im Fall $\dim(V_2)>1$ kann man die Witt-Grothendieck-Gruppe leicht ausrechnen und zeigen, daß die Stiefel-Whitney-Klasse injektiv ist. Man benutzt die Relationen

$$\langle b_j, b_j\rangle = \langle b_{j_0}, b_{j_0}\rangle, \quad \langle b_j b_{j_0}, b_j b_{j_0}\rangle = \langle 1, 1\rangle.$$

Im Fall von Körpern kann man die ganze Diskussion vereinfachen, weil nämlich dann die Quadratklasse von -1 eine besondere Rolle spielt. Für Quaternionen-Algebren gilt nämlich (s. [8])

$$(a, a) \cong (a, -1).$$

Dann kann man zwei Fälle unterscheiden: (i) $(-1, -1) \neq 0$. Dann gilt für alle Elemente des orthogonalen Komplementes von -1 $(x, x)=0$, d.h. man hat $\dim(V_2)=1$. (ii) $(-1, -1)=0$, aber es gibt b mit $(-1, b) = (b, b) \neq 0$. Dann hat das orthogonale Komplement von $-1, b$ Codimension 2, und für alle Elemente x aus dem orthogonalen Komplement gilt $(x, x)=0$. Dann ergibt sich schnell die Behauptung.

Die Ergebnisse dieses Abschnittes lassen sich z.B. auf *$\mathfrak{p}$-adische Körper* anwenden und liefern die bekannten Resultate:

Sei K ein $\mathfrak{p}$-adischer Körper mit Restklassenkörper k.

(i) *Ist* $\operatorname{char}(k) \neq 2$ *und* -1 *ein Quadrat, so gilt*

$$W(K) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

(ii) *Ist* $\operatorname{char}(k) \neq 2$ *und* -1 *kein Quadrat, so gilt*

$$W(K) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

(iii) *Ist* $\operatorname{char}(k)=2$, $\operatorname{char}(K)=0$ *und* $(K:\mathbb{Q}_2)+2=n$ *und* -1 *ein Quadrat, so gilt*

$$W(K) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{(n+1)}.$$

(iv) *Ist unter den Voraussetzungen von* (iii) -1 *kein Quadrat, so gilt*

$$W(K) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{(n-1)}.$$

(Vgl. hierzu auch [5].)

3.3. Die Struktur der Witt-Grothendieck-Gruppe für $H^2(G) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Ähnlich wie im letzten Abschnitt kann man die Witt-Grothendieck-Gruppe auch für $\dim(H^2(G))=2$ berechnen. Wir machen die vereinfachende Annahme, daß ein Element $\alpha \in H^1(G)$ existiert, das die Rolle von -1 spielt, d.h. $\alpha \cup a = a \cup a$ für alle $a \in H^1(G)$. Man geht bei der Berechnung folgendermaßen vor: Wir identifizieren $H^2(G)$ mit $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$. Die Projektionen p_i: $H^2(G) \to \mathbb{F}_2$ $i=1, 2$ liefern uns zwei symmetrische

Bilinearformen $p_1 \circ \cup, p_2 \circ \cup$. Ähnlich wie in 3.2 bringt man $p_1 \circ \cup$ durch Wahl einer geeigneten Basis von $H^1(G)$ auf eine gewisse Normalform. Bezüglich dieser Basis wird $p_2 \circ \cup$ durch eine symmetrische Matrix beschrieben, und zwar stellt man fest, daß diese ohne Beschränkung der Allgemeinheit noch zusätzliche günstige Eigenschaften hat. Auf diese Weise erhält man schließlich ein überschaubares System von Relationen für $W_0(G)$. Da man eine ganze Reihe von Spezialfällen zu unterscheiden hat und die Berechnung im einzelnen ziemlich langweilig ist, beschränken wir uns darauf, das Ergebnis zu formulieren:

Es sind für $W_0(G)$ höchstens folgende Typen möglich:

$$T_2, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}+T_2, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}+T_2,$$
$$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}+T_2,$$
$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}+T_2, \quad \mathbb{Z}+\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}+T_2,$$
$$\mathbb{Z}+\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}+\mathbb{Z}+T_2.$$

Dabei steht T_2 als Abkürzung für nicht-triviale Torsionsgruppe vom Exponenten 2.

Wir werden gleich sehen, daß unter den gemachten Voraussetzungen die totale Stiefel-Whitney-Klasse im allgemeinen nicht injektiv ist. Es gilt jedoch folgende Verallgemeinerung eines Satzes von KAPLANSKY:

Proposition 3.3.1. (i) *Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ mit vier Quadratklassen. Dann ist die totale Stiefel-Whitney-Klasse injektiv.*

(ii) *Sei K wie in* (i), *aber K^*/K^{*2} habe acht Elemente, und es sei $(-1,-1)\neq 0$. Dann ist die totale Stiefel-Whitney-Klasse injektiv.*

Beweis. (i) Ist K nicht formal-reell, so wurde das von KAPLANSKY bewiesen [7]. Ein Beweis ist leicht durch Fallunterscheidungen für $H^1 \times H^1 \to H^2$ zu führen.

Sei K formal-reell, seien $1, -1, a, -a$ Repräsentanten der vier Quadratklassen von K. Es gelte

$$(a,-1)\cong(a,a)=0, \quad (-a,-1)\cong(-1,-1)\neq 0.$$

Dann ergibt sich leicht $W_0(K)\cong\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei der direkte Summand $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ von $\langle a\rangle-\langle 1\rangle$ erzeugt wird. Nach PFISTER können nur Torsionselemente im Kern von w liegen (vgl. 6.2), es folgt die Behauptung. (Man kann leicht einen Beweis angeben, der den tiefliegenden Satz von PFISTER nicht benutzt.)

Sei K formal-reell und o. B. d. A.

$$(a,a)\neq(-1,-1)\neq 0, \quad (a,a)\neq 0.$$

Dann gilt $W_0(G) \cong \mathbb{Z}+\mathbb{Z}$, und der Satz von PFISTER liefert wieder die Behauptung.

(ii) Sei $-1, a, b$ eine Basis von $H^1(K)$ und $(-1, -1)=A \neq 0$. Falls $W_0(K)$ keine Torsionselemente hat, ist alles bewiesen. Damit es Torsionselemente gibt, muß eine Relation $(x, x)=0$ bestehen, also o.B.d.A. $(a, a)=0$. Im Fall $(b, b)=0$ ergibt sich leicht aus schon durchgeführten Schlüssen die Injektivität von w. Den Fall $(b, b)=A$ kann man ausschließen, indem man b durch $-b$ ersetzt, also $(b, b)=B \neq 0, A$. Man hat nun verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1. $(a, b)=0 \Rightarrow W_0(K) \cong \mathbb{Z}+\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ von $\langle a\rangle - \langle 1\rangle$ erzeugt wird, also nicht im Kern von w liegt.

2. $(a, b)=A \Rightarrow W_0(K) \cong \mathbb{Z}+\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, wobei man als Erzeugende des Torsionsteiles $\langle ab\rangle - \langle b\rangle$ und $\langle a\rangle - \langle 1\rangle$ wählen kann. Es ist unmittelbar zu sehen, daß w auf den Torsionselementen injektiv ist.

3. $(a, b)=B \Rightarrow W_0(K) \cong \mathbb{Z}+\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit $\langle b\rangle - \langle 1\rangle$ und $\langle a\rangle - \langle 1\rangle$ als Erzeugenden des Torsionsteiles. Wieder ist die Injektivität von w klar.

4. $(a, b)=A+B$. Man ersetzt b durch $-b$ und erhält Fall 3.

5. $(a, b) \neq 0, A, B, A+B \Rightarrow W_0(K) \cong \mathbb{Z}+\mathbb{Z}+\mathbb{Z}+\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und die Behauptung ist wieder klar.

3.4. Gegenbeispiele zur Klassifikation durch Stiefel-Whitney-Klassen

Wir haben schon mehrmals den Satz benutzt, daß im Kern der totalen Stiefel-Whitney-Klasse w: $W_0(K) \to \tilde{H}(K)$ nur Elemente endlicher Ordnung liegen (vgl. 6.2). Für die in der klassischen Literatur behandelten Körper (lokale und globale Zahl- und Funktionenkörper) ist w immer injektiv [3]. Es scheint also, daß w eine recht „scharfe" Invariante ist. Der besonders günstige Fall (vgl. hierzu 6.) der Injektivität von w liegt aber nicht immer vor, wie die folgenden Beispiele zeigen sollen.

Beispiel 3.4.1. *Sei k algebraisch-abgeschlossen und*

$$K=k((t_1))((t_2))((\tau)).$$

Dann haben die quadratischen Formen

$$f=\langle 1, t_1, t_2, t_1 t_2\rangle \quad \text{und} \quad \tau f=\langle \tau, t_1 \tau, t_2 \tau, t_1 t_2 \tau\rangle$$

gleiche Stiefel-Whitney-Klassen (was man sofort nachrechnet), *sind aber nicht isometrisch,* denn f stellt z.B. nicht τ dar.

Der Körper K ist ein lokaler Körper, er besitzt acht Quadratklassen, die Galois-Gruppe $G(\bar{K}/K)$ ist abelsch, die Formen f, τf sind vierdimensional, d.h. in vieler Beziehung läßt sich ein einfacheres Gegenbeispiel nicht angeben.

Der Körper k sei nicht formal-reell. Es sei s die kleinste Zahl, so daß -1 Summe von s Quadraten ist. Dann heißt s die *Stufe* des Körpers k. Nach PFISTER [9] ist s immer eine Potenz von 2.

Sei $K_n = k(t_1)\dots(t_n)$, $K'_n = k((t_1))\dots((t_n))$. Dann gilt:

Proposition 3.4.2. *Sei k ein nicht formal-reeller Körper. Dann ist die totale Stiefel-Whitney-Klasse nicht injektiv für K_n, K'_n, $n \geqq 2$, es sei denn, k ist quadratisch-abgeschlossen. In diesem Fall ist w nicht injektiv für K_n, K'_n, $n \geqq 3$.*

Beweis. Es sei zunächst $s > 1$, d.h. -1 kein Quadrat. Dann ist die s-dimensionale Form $s\langle 1\rangle$ definit. Andernfalls würde nämlich nach dem Satz von WITT die Form $(s-1)\langle 1\rangle$ -1 darstellen. Die folgenden Formen sind dann definit und nicht isometrisch:

$$f = s\langle 1\rangle + s\langle t_1\rangle, \qquad t_2 f = s\langle t_2\rangle + s\langle t_1 t_2\rangle.$$

Da $s = 2^m$, verschwinden alle Stiefel-Whitney-Klassen von f außer eventuell

$$w_s(f_1) = t_1 \cup \cdots \cup t_1 = t_1 \cup (-1) \cup \cdots \cup (-1).$$

Aus der Multiplikativität von w und der Tatsache $-1 \cup \cdots \cup -1 = 0$ für mehr als s Faktoren folgt leicht, daß f und $t_2 f$ gleiche Stiefel-Whitney-Klassen haben.

Ist k quadratisch-abgeschlossen, so liefert Beispiel 3.4.1 die Behauptung. Ist $s=1$ und k nicht quadratisch-abgeschlossen, so sei $\langle 1, a\rangle$ eine definite Form über k. Die Formen

$$\langle 1, a, t_1, a\,t_1\rangle, \qquad \langle t_2, a\,t_2, t_1 t_2, a\,t_1 t_2\rangle$$

sind nicht äquivalent, haben aber gleiche Invarianten.

Korollar 3.4.3. *Der Körper k habe endliche cohomologische Dimension und sei nicht quadratisch-abgeschlossen. Dann ist die totale Stiefel-Whitney-Klasse nicht injektiv für K_n, K'_n, $n \geqq 2$.*

Beweis. Offenbar hat k endliche Stufe.

4. Quadratische Formen über Hensel-Körpern

4.1. Die Witt-Grothendieck-Gruppe eines Hensel-Körpers

Es sei K ein lokaler Körper (d.h. K ist vollständig unter einer diskreten Bewertung) mit Restklassen-Körper k, und es sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$. SPRINGER hat in [16] gezeigt, wie man das Klassifikations-Problem der quadratischen Formen über K auf das Klassifikations-Problem über k zurückführen kann. Aus den Ergebnissen SPRINGERS ergibt sich für den Witt-Grothendieck-Ring von K leicht:

Sei T eine Gruppe mit zwei Elementen 1 und t. *Dann gilt*

$$W(K) \cong W(k)[T]/(t\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}).$$

Wir verallgemeinern diesen Satz auf Hensel-Körper bezüglich beliebiger (nicht notwendig diskreter oder einrangiger) Bewertungen, indem wir bekannte Sätze der Verzweigungstheorie benutzen.

Satz 4.1.1. *Es sei $1 \to F \to G \to G/F \to 1$ eine Erweiterung profiniter Gruppen mit*

(i) *F abelsch,*

(ii) *G/F operiert trivial auf $H^1(F)$,*

(iii) Inf: *$H^2(G/F) \to H^2(G)$ ist injektiv,*

(iv) *Es gebe ein Element $\alpha \in \mathrm{Inf}(H^2(G/F))$ mit $a \cup a = a \cup \alpha$ für alle $a \in H^1(G)$.*

Es sei T eine Untergruppe von $H^1(G)$ mit $\mathrm{Res}|_T$: *$T \to H^1(F)$ ist ein Isomorphismus. Dann gilt*

$$W(G) \cong W(G/F)[T]/\mathfrak{a},$$

wobei $\mathfrak{a}$ das von $\{t\langle 1\rangle + t\langle\alpha\rangle - \langle 1\rangle - \langle\alpha\rangle \mid t \in T\}$ erzeugte Ideal ist.

Wir identifizieren im folgenden $H^1(G/F)$ und $H^2(G/F)$ mit ihren Bildern unter Inf in $H^1(G)$ und $H^2(G)$.

Lemma 4.1.2. *Sei $a \in H^1(G/F)$ und $a \cup t \in H^2(G/F)$ mit $t \in T - \{1\}$. Dann gilt $a = 1$.*

Beweis. Die Hochschild-Serre-Spektralsequenz [6] unserer Erweiterung liefert

$$E_\infty^{2,0} = H^2(G/F), \qquad E_\infty^{1,1} \subset H^1(G/F, H^1(F)),$$
$$E_\infty^{0,2} \subset H^2(F)^{G/F}.$$

Da $a(x)$ nur von $x \bmod F$ abhängt, repräsentiert $a \cup t$ ein Element von $H^1(G/F, H^1(F))$, und zwar wird das Bild von $a \cup t$ in $H^1(G/F, H^1(F))$ durch den 1-Cozykel $h\colon G/F \to H^1(F)$ mit $h(x)(y) = f(x, y) = a(x)\, t(y)$ gegeben. Nach Voraussetzung ist $H^1(F)$ ein trivialer G/F-Modul. Sei $\Theta \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die von $\mathrm{Res}(t)$ erzeugte Untergruppe von $H^1(F)$, Θ ist direkter Summand von $H^1(F)$, also ist $H^1(G/F, \Theta) \cong H^1(G/F)$ direkter Summand von $H^1(G/F, H^1(F))$. Dann ist $a \cup t$ gerade das von dem Homomorphismus a gelieferte Element von $H^1(G/F, \Theta) \subset H^1(G/F, H^1(F))$. Das Bild von $a \cup t$ in $E_\infty^{1,1}$ kann also nur verschwinden, falls $a = 1$, q.e.d.

Beweis von 4.1.1. Es seien $t_1, t_2, t_3, t_4 \in T$ und $a, b, c, d \in H^1(G/F)$ und $t_1 \neq t_2, t_3, t_4$; $t_3 \neq t_4$. Dann gilt $a t_1 \cup b t_2 \neq c t_3 \cup d t_4$, denn nach 1.4.2 gilt $\mathrm{Res}(t_1) \cup \mathrm{Res}(t_2) \neq \mathrm{Res}(t_3) \cup \mathrm{Res}(t_4)$. Nach Definition von T besteht

$H^1(G)$ aus den Elementen $a t$ mit $a \in H^1(G/F)$, $t \in T$. Die möglichen Erzeugenden von $\mathrm{Ke}(G)$ haben also die Form

$$1) \qquad \langle a t_1\rangle + \langle b t_1\rangle - \langle c t_2\rangle - \langle a b c t_2\rangle$$

oder

$$2) \qquad \langle a t_1\rangle + \langle b t_2\rangle - \langle c t_1\rangle - \langle a b c t_2\rangle, \qquad t_1 \neq t_2.$$

Im ersten Fall erhalten wir die Bedingung $t_1 \cup a b \alpha = t_2 \cup a b \alpha$, also entweder $t_1 = t_2$ oder $a = b\alpha$. Im zweiten Fall erhalten wir die Bedingung $t_1 t_2 \cup a c = a \cup b + c \cup a b c$, also $a = c$. Nun sieht man leicht, daß $\mathrm{Ke}(G)$ von

$$t(\langle a, b\rangle - \langle c, d\rangle)$$

mit $\langle a, b\rangle - \langle c, d\rangle \in \mathrm{Ke}(G/F)$ und von

$$\langle t\alpha, t\rangle - \langle \alpha, 1\rangle$$

erzeugt wird, q.e.d.

Korollar 4.1.3. *Sei v eine Bewertung des Körpers K, die nur eine Fortsetzung auf eine algebraisch-abgeschlossene Hülle $\bar{K}$ von K zuläßt, d.h. K ist Hensel-Körper. Sei k der Restklassenkörper von K und* $\mathrm{char}(k) = p \neq 2$. *Es sei K_{nr} die maximale unverzweigte Erweiterung von K und $T = K_{nr}^*/K_{nr}^{*2} = \Gamma/2\Gamma$, wobei Γ die Wertgruppe von v ist. Dann gilt*

$$W(K) \cong W(k)[T]/\mathfrak{a},$$

wobei $\mathfrak{a}$ das von $\{t\,\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \mid t \in T\}$ erzeugte Ideal ist.

Beweis. Sei K_{tr} die maximale zahm-verzweigte Erweiterung von K und $G = G(K_{tr}/K)$ und $F = G(K_{tr}/K_{nr})$. Bekanntlich [4] ist $G(\bar{K}/K_{tr})$ p-Gruppe und $G/F \cong G(\bar{k}/k)$. Die Voraussetzungen von 4.1.1 sind erfüllt: F ist abelsch, denn F ist Charaktergruppe von $v(K_{tr}/K_{nr})$. Ferner operiert G/F trivial auf K_{nr}^*/K_{nr}^{*2}, denn

$$x \in K_{nr}^*, \qquad \sigma \in G/F \Rightarrow v\left(\frac{x}{\sigma(x)}\right) = 0,$$

also $x(\sigma x)^{-1} = y^2 u$ mit $v(y) = 0$ und $u \in 1 + \mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal des Bewertungsringes von K_{nr} bezeichnet. Angenommen u ist kein Quadrat. Dann betrachten wir die verzweigte Erweiterung $K_{nr}(\sqrt{u})/K_{nr}$. Es gilt

$$\sqrt{u} = 1 + m, \quad v(m) > 0, \qquad -\sqrt{u} = 1 + m', \quad v(m') > 0.$$

Widerspruch wegen $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Ebenso zeigt man, daß

$$K^*/K^{*2} \to K_{nr}^*/K_{nr}^{*2}$$

surjektiv ist. Zu $y \in K_{nr}^*/K_{nr}^{*2}$ wähle man $x \in K$ mit $v(y x^{-1}) = 0$, $y x^{-1}$ ist Quadrat in K_{nr}. -1 spielt natürlich die Rolle von α.

4.2. Quadratische Formen mit verschwindenden Stiefel-Whitney-Klassen über einem Hensel-Körper

Wir wollen in diesem Abschnitt den Kern der totalen Stiefel-Whitney-Klasse $w\colon W_0(K) \to \tilde{H}(K)$ für einen Hensel-Körper K berechnen. Dazu brauchen wir zwei Vorbemerkungen, deren Beweis wir dem Leser überlassen (vgl. [13]).

4.2.1. *Sei G beliebige Gruppe und $\eta \in W_0(G)$ und $a \in H^1(G)$. Dann gilt*

$$w_k(a\,\eta) = \sum_{i=1}^{k} \binom{2^m - i}{k-i}\, w_i(\eta) \cup \underbrace{a \cup a \cup \cdots \cup a}_{(k-i)\text{-mal}},$$

wobei m eine genügend große, sonst aber beliebige natürliche Zahl ist.

Insbesondere ist also

$$w_1(a\,\eta) = w_1(\eta),$$

$$w_2(a\,\eta) = w_1(\eta) \cup a + w_2(\eta),$$

$$w_3(a\,\eta) = w_1(\eta) \cup a \cup a + w_3(\eta),$$

$$w_4(a\,\eta) = w_1(\eta) \cup a \cup a \cup a + w_2(\eta) \cup a \cup a + w_3(\eta) \cup a + w_4(\eta).$$

4.2.2. *Ist K ein Hensel-Körper und haben G, F, T dieselbe Bedeutung wie in* 4.1, *so gilt*

(i) Inf: *$H^i(G/F) \to H^i(G)$ ist injektiv für alle i.*

(ii) *Ist $a \in H^i(G/F)$ und $t \in T$, so gilt für alle i*

$$(\operatorname{Inf} a) \cup t \in \operatorname{Inf}(H^{i+1}(G/F)) \Leftrightarrow a = 0.$$

Hat man (i) bewiesen, so ergibt sich der Beweis von (ii) wie bei Lemma 4.1.2. Auf Grund von (i) identifizieren wir $H^i(G/F)$ mit seinem Bild in $H^i(G)$.

Wir untersuchen zunächst den Fall eines *lokalen Körpers K* mit uniformisierendem Element t. Jedes Element von $W_0(K)$ kann geschrieben werden in der Form $\eta + t\,\zeta$ mit $\eta, \zeta \in W(k)$ und $\dim \eta = -\dim \zeta$. Aus $w_1(\eta + t\,\zeta) = 1$ folgt $\dim \eta$ gerade. Indem man zu η und ζ eine geeignete Zahl von hyperbolischen Ebenen addiert und $\boldsymbol{H} = t\,\boldsymbol{H}$ benutzt, sieht man, daß man $\dim \eta = \dim \zeta = 0$ annehmen kann. Aus der Bedingung

$$w(\eta + t\,\zeta) = 1$$

folgt nun $w(t\,\zeta) = w(\eta)^{-1}$, also

$$w_k(\zeta) + t \cup x_{k-1} = w_k(-\eta).$$

Dabei ist $x_{k-1} \in H^{k-1}(k)$ und $w_k(\zeta)$, $w_k(\eta) \in H^k(k)$. Nach 4.2.2 (ii) folgt

$$x_{k-1} = 0, \quad w_k(\zeta) = w_k(-\eta).$$

Also $w(\zeta) = w(-\eta)$, d.h. $\zeta + \eta \in \operatorname{Kern} w|_{W_0(k)}$, also $\eta + t\,\zeta - \zeta - \eta \in \operatorname{Kern}(w)$. Wir können uns also darauf beschränken, Elemente der Form

$$t\,\zeta - \zeta = (\langle t \rangle - \langle 1 \rangle)\,\zeta$$

zu untersuchen. Nach 4.2.1 gilt

$$\begin{aligned}
&(t\,\zeta - \zeta) \in \operatorname{Kern}(w) \Leftrightarrow w(t\,\zeta) = w(\zeta)\\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} \binom{2^m - i}{k-i} w_i(\zeta) \cup \underbrace{t \cup t \cup \cdots \cup t}_{(k-i)\text{-mal}} = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots\\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} \binom{2^m - i}{k-i} w_i(\zeta) \cup \underbrace{(-1) \cup \cdots \cup (-1)}_{(k-i-1)\text{-mal}} = 0, \quad k = 2, 3, \ldots . \qquad (*)
\end{aligned}$$

Also gilt insbesondere $w_1(\zeta) = 1$. Falls -1 ein Quadrat ist, ist dies die einzige Bedingung.

Satz 4.2.3. (i) *Sei K ein lokaler Körper mit Restklassenkörper k, und sei* $\operatorname{char}(k) \neq 2$. *Dann wird der Kern von* w: $W_0(K) \to \tilde{H}(K)$ *als Untergruppe erzeugt von dem Kern von* w: $W_0(k) \to \tilde{H}(k)$ *und den Elementen* $t\,\zeta - \zeta$, *wobei t ein uniformisierendes Element ist und* $\zeta \in W_0(k)$ *die Bedingungen* $(*)$ *erfüllt.*

(ii) *Ist insbesondere* -1 *ein Quadrat in k, so wird* $\operatorname{Kern}(w)$ *erzeugt von* $\operatorname{Kern}(w|_{W_0(k)})$ *und* $W_0(K)^3$.

Beweis. (i) ist schon bewiesen. (ii) $w_1(\zeta) = 1 \Rightarrow \zeta \in W_0(K)^2$ (vgl. 6.3), also $(\langle t \rangle - \langle 1 \rangle)\,\zeta \in W_0(K)^3$. Umgekehrt überzeugt man sich sofort davon, daß $W_0(K)^3 \subset \operatorname{Kern}(w)$.

Bemerkung. *Die Aussage* 4.2.3 (ii) *gilt wörtlich auch für Hensel-Körper.*

Die Aussage (i) gilt in ganz ähnlicher Form, ist aber noch nicht ganz befriedigend. Man hätte noch die Elemente ζ mit den Eigenschaften $(*)$ genauer zu untersuchen. Darauf wollen wir aber verzichten.

5. Quadratische Formen über reellen Funktionenkörpern

Ziel dieses Teiles der Arbeit ist die Berechnung der Witt-Grothendieck-Gruppe eines reellen Funktionenkörpers und der Beweis der Injektivität der totalen Stiefel-Whitney-Klasse in diesem Fall. Das Hauptergebnis ist in Satz 5.3.1 formuliert. Die vollständige Berechnung der Witt-Grothendieck-Gruppe gelingt uns nur bis auf ein Lemma über Boolesche Verbände, das wir nicht in allen Fällen beweisen können.

5.1. Boolesche Ringe

Es sei B ein Boolescher Ring, d.h. ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem alle Elemente idempotent sind: $xx=x$. Man zeigt leicht, daß B die Charakteristik 2 hat. Definiert man den Schnitt zweier Elemente x, y als xy, die Verbindung als $x+y+xy$, so wird nach einem Satz von STONE B zu einem Booleschen Verband mit 0 als kleinstem und 1 als größtem Element. Es gilt $x \leqq y \Leftrightarrow xy=x$. (Vgl. [2], Chap. X, No. 3.)

Sei A eine Teilmenge von B. Es sei A^* die kleinste Teilmenge von B, die A umfaßt und die folgende Eigenschaft hat: Gehören drei der Elemente $x, y, xy, x+y+xy$ zu A^*, so auch das vierte.

Lemma 5.1.1. *Es gibt eine Basis $\mathfrak{B}$ von B (betrachtet als Vektorraum über dem Körper von 2 Elementen) mit $(\mathfrak{B} \cup \{0\})^* = B$.*

Beweis. Ist B endlich, so kann man leicht nachprüfen, daß die von 0 verschiedenen Elemente einer maximalen total-geordneten Teilmenge von B eine solche Basis $\mathfrak{B}$ bilden. Man hat auszunutzen, daß B ein Boolescher Verband ist. Die Behauptung gilt auch, wenn B unendlich ist, aber von den Elementen einer maximalen total-geordneten Teilmenge erzeugt werden. Für den allgemeinen Fall habe ich keinen Beweis gefunden.

5.2. Berechnung von $H^*(G)$

Sei $\boldsymbol{R}$ ein reell-abgeschlossener Körper und $\boldsymbol{R}(t)$ eine einfache transzendente Erweiterung von $\boldsymbol{R}$. Es sei K eine endliche oder unendliche algebraische Erweiterung von $\boldsymbol{R}(t)$, und K sei formal reell. Es sei $K_1 = K(\sqrt{-1})$. Dann gilt $K_1(2)=K(2)$, und man weiß aus dem Satz von TSEN, daß die Galois-Gruppe $F=G(K(2)/K_1)$ eine freie 2-Gruppe ist. Es sei $G=G(K(2)/K)$. Man hat also eine Gruppenerweiterung

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow G/F \longrightarrow 1$$

mit F frei und $G/F \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Aus der Existenz einer reell-abgeschlossenen Erweiterung von K folgt ferner, daß diese Erweiterung zerfällt, d.h. es gibt eine Untergruppe H der Ordnung 2, so daß $G=FH$. Wir wissen ferner: Bezeichnet α das durch den Normalteiler F gegebene Element von $H^1(G)$, so gilt für alle $a \in H^1(G)$ $a \cup a = \alpha \cup a$. Dies ist natürlich der für Quaternionen-Algebren bekannte Isomorphismus $(a, a) \cong (a, -1)$.

Es sei nun G eine beliebige profinite 2-Gruppe, die Produkt eines freien Normalteilers F und einer Untergruppe H der Ordnung 2 ist und die die eben genannte Eigenschaft hat.

Dann operiert H auf $H^1(F)$ und zwar derart, daß man eine Basis $\{a_i', a_i''\}_{i \in I}$, $\{b_j\}_{j \in J}$ von $H^1(F)$ finden kann mit $\sigma(a_i')=a_i''$, $\sigma(b_j)=b_j$, wobei σ ein Erzeugendes von H bezeichnet. Sei $a_i=a_i' a_i''$, dann ist $\{a_i\}_{i \in I}$ $\{b_j\}_{j \in J}$ eine Basis von $H^1(F)^G$.

Wir betrachten nun die Hochschild-Serre-Spektralsequenz unserer Erweiterung. Die E_2-Terme lauten bekanntlich [6]:

$$E_2^{p,q} = H^p(G/F, H^q(F)),$$

also

$$E_2^{p,0} = H^p(G/F),$$

$$E_2^{p,1} = H^p(G/F, H^1(F)),$$

$$E_2^{p,q} = 0 \qquad \text{für } q \geqq 2.$$

Da nach Voraussetzung die Erweiterung zerfällt, sind alle Randoperatoren trivial, und man erhält kanonische exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow H^n(G/F) \xrightarrow{\text{Inf}} H^n(G) \xrightarrow{p} H^{n-1}(G/F, H^1(F)) \longrightarrow 0.$$

Nach Wahl eines Zerfällungshomomorphismus $G/F \to G$, d.h. nach Wahl von H, erhält man also direkte-Summen-Darstellungen

$$H^n(G) \cong H^n(G/F) + H^{n-1}(G/F, H^1(F)).$$

Es sei nun A die von $\{a_i', a_i''\}_{i \in I}$ erzeugte Untergruppe von $H^1(F)$, B_j die von b_j erzeugte Untergruppe. Offenbar ist A freier G/F-Modul, d.h. $H^{n-1}(G/F, H^1(F)) = 0$ für $n \geqq 2$, also

$$H^{n-1}(G/F, H^1(F)) = \coprod_{j \in J} H^{n-1}(G/F, B_j).$$

Wegen $H^{n-1}(G/F, B_j) \cong H^{n-1}(G/F) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ haben wir die additive Struktur von $H^*(G)$ bestimmt.

Wichtig für uns ist im folgenden:

5.2.1. *Die kanonische Abbildung* p: $H^n(G) \to H^{n-1}(G/F, H^1(F))$ *induziert einen Isomorphismus*

$$\alpha \cup \cdots \cup \alpha \cup B' \cong H^{n-1}(G/F, H^1(F)) \qquad n \geqq 2.$$

Dabei ist B' die von $\{b_j\}_{j \in J}$ erzeugte Untergruppe von $H^1(F)^{G/F}$, die wir vermöge der obigen direkte-Summen-Darstellung auch als Untergruppe von $H^1(G)$ betrachten. Man überlegt sich nämlich ähnlich wie in 4.1.2, daß $\alpha \cup \cdots \cup \alpha \cup b_j$ auf das Erzeugende des direkten Summanden $H^{n-1}(G/F, B_j)$ von $H^{n-1}(G/F, H^1(F))$ abgebildet wird. Insbesondere gilt also

$$H^2(G) \cong H^2(G/F) + \alpha \cup B' = \alpha \cup B,$$

wobei B die von α und B' erzeugte Untergruppe von $H^1(G)$ ist.

Man macht B zu einem Booleschen Ring, indem man für $x, y \in B$ ein Produkt $x \circ y$ definiert durch

$$x \cup y = \alpha \cup (x \circ y).$$

Wie eben festgestellt, gibt es ein solches $x \circ y$, und es ist eindeutig bestimmt. Unsere Voraussetzung $x \cup x = \alpha \cup x$ liefert gerade die für Boolesche Ringe charakteristische Eigenschaft $x \circ x = x$. Man sieht ferner unmittelbar, daß α die Rolle des Einselementes spielt. Schließlich bemerken wir noch:

5.2.2. *Für alle $a = a_{i_1} \dots a_{i_n}$ und alle $x \in H^1(G)$ gilt $a \cup x = 0$.*

Zunächst gilt $a \cup a = \alpha \cup a = 0$. Das Bild von $\alpha \cup a$ in $H^1(G/F, H^1(F))$ liegt nämlich in $H^1(G/F, A) = 0$, und $a \cup a = \alpha \cup \alpha$ ist unmöglich, wie man durch Beschränkung auf H sieht. Aus $a \cup x = \alpha \cup b$, $b \in B'$ folgt also $0 = a \cup a \cup x = \alpha \cup a \cup x = \alpha \cup \alpha \cup b$, also $b = 1$ nach 5.2.1. Den Fall $a \cup x = \alpha \cup \alpha\, b$ schließt man wieder durch Beschränkung auf H aus.

5.3. Berechnung der Witt-Grothendieck-Gruppe und Beweis der Injektivität der totalen Stiefel-Whitney-Klasse

Satz 5.3.1. *Die profinite 2-Gruppe G sei semidirektes Produkt eines freien Normalteilers F und einer Untergruppe H der Ordnung 2. Für alle $a \in H^1(G)$ gelte $a \cup a = \alpha \cup a$, wobei $\alpha\colon G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der Homomorphismus mit Kern F ist. Dann gilt:*

(i) *Die totale Stiefel-Whitney-Klasse ist injektiv.*

(ii) *$W(G)$ ist direkte Summe einer torsionsfreien Gruppe mit Erzeugenden $\langle 1\rangle$, $\langle b\rangle$ $b \in B$ und einer Gruppe vom Exponenten 2 mit Basis*

$$\{\langle a_i\rangle - \langle 1\rangle\}_{i \in I}.$$

(iii) *Gilt für den Booleschen Ring $B \subset H^1(G)$ die Behauptung von Lemma* 5.1.1, *so ist*

$$W(G) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}^{(I)} + \mathbb{Z}^{(J)}$$

mit Erzeugenden $\langle 1\rangle$, $\langle\alpha\rangle - \langle 1\rangle$, $\langle a_i\rangle - \langle 1\rangle$, $i \in I$, $\langle b_j\rangle - \langle 1\rangle$, $j \in J$, wobei $\{b_j\}_{j \in J}$ die Basis $\mathfrak{B}$ von B mit $\mathfrak{B}^* = B$ ist.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, Lemma 5.1.1 gilt. Sei also $\{b_j\}_{j \in J}$ eine Basis von B mit der in 5.1.1 angegebenen Eigenschaft. Wir zeigen zunächst, daß die in (iii) angegebenen Elemente ganz $W(G)$ erzeugen. Liegen $\langle b\rangle$, $\langle b'\rangle$, $\langle b''\rangle$, $b, b', b'' \in B$ in der von diesen Elementen erzeugten Untergruppe $W(G)^*$ und gilt $b \cup b' = b'' \cup b b' b''$, so liegt nach Definition von $W(G)$ auch $\langle b\, b'\, b''\rangle$ in $W(G)^*$. Die Bedingung $b \cup b' = b'' \cup b\, b'\, b''$ ist gleichbedeutend mit

$$(b \circ b')(b \circ b'')(b' \circ b'') = b''.$$

Nach Lemma 5.1.1 gilt also für jedes $b \in B$, daß $\langle b\rangle \in W(G)$. (Beachte, daß wir die Addition in dem Booleschen Ring B multiplikativ schreiben!) Der Rest der Behauptung folgt auf Grund der sich aus 5.2.2 ergebenden Relationen

$$\langle a\, a', 1\rangle = \langle a, a'\rangle, \qquad a, a' \in A,$$

$$\langle a\, b, 1\rangle = \langle a, b\rangle, \qquad a \in A,\ b \in B.$$

Wir bewiesen nun (i) und daß die von den $\langle b_j\rangle - \langle 1\rangle$ erzeugte Gruppe frei ist. Angenommen, es besteht eine Gleichung

$$\eta = \sum m_j \langle b_j\rangle = \sum n_j \langle b_j\rangle = \zeta, \qquad m_j, n_j \geqq 0.$$

Nachdem wir Summanden, die auf beiden Seiten stehen, gekürzt haben, können wir annehmen $m_j \neq 0 \Rightarrow n_j = 0$, $n_j \neq 0 \Rightarrow m_j = 0$. Aus $w_1(\eta) = w_1(\zeta)$ folgt dann unmittelbar

$$m_j, n_j \equiv 0 \pmod 2 \qquad \text{für alle } j \in J.$$

Also gilt

$$w_2(\eta) = \sum \binom{m_j}{2} b_j \cup b_j = \sum \binom{n_j}{2} b_j \cup b_j = w_2(\zeta),$$

und es folgt

$$m_j, n_j \equiv 0 \pmod 4 \qquad \text{für alle } j \in J.$$

Das so begonnene Verfahren setzt man induktiv fort und erhält $m_j, n_j = 0$ für alle $j \in J$.

Es ist klar, daß alle $\langle a_i\rangle - \langle 1\rangle$ die Ordnung 2 haben. Die Injektivität von w haben wir bei unseren letzten Schlüssen mitbewiesen.

Ohne Verwendung von Lemma 5.1.1 in voller Allgemeinheit kann man folgendes sagen: Sei $\mathfrak{B}$ eine Kette maximaler Länge in B und $B(\mathfrak{B})$ die von $\mathfrak{B}$ erzeugte Untergruppe von B. Dann ist $B(\mathfrak{B})$ gleich dem von $\mathfrak{B}$ erzeugten Unterring von B. Nach 5.1.1 gilt $\mathfrak{B}^* = B(\mathfrak{B})$. Es sei $W(\mathfrak{B})$ die von $\{\langle b\rangle - \langle 1\rangle \mid b \in \mathfrak{B}\}$ erzeugte Untergruppe von $W_0(G)$. Sie ist nach demselben Schluß wie eben gleich der von $\{\langle b\rangle - \langle 1\rangle \mid b \in B(\mathfrak{B})\}$ erzeugten Untergruppe. Genau wie eben sieht man, daß $W(\mathfrak{B})$ frei ist und daß $w|_{W(\mathfrak{B})}$ injektiv ist. Es bleibt zu zeigen

$$\bigcup_{\mathfrak{B}} W(\mathfrak{B}) = W_0(B).$$

Sei $\eta = \sum n_k \langle b_k \rangle$, $b_k \in B$ aus $W_0(G)$. Dann nehmen wir in dem von den b_k erzeugten Unterring eine maximale Kette und verfeinern diese zu einer Kette $\mathfrak{B}$ von B. Damit ist der Beweis des Satzes vollständig.

Wir zeigen nun noch, in welchem Zusammenhang die Ordnung in dem Booleschen Verband B und die Ordnung in dem reell-abgeschlossenen Körper $\boldsymbol{R}$ stehen.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den Fall einer einfachen transzendenten Erweiterung $K = \boldsymbol{R}(t)$. Sei $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}(\sqrt{-1})$ und σ der nicht-triviale $\boldsymbol{R}$-Automorphismus von $\boldsymbol{C}$. Eine Basis von $K^*/K^{*2} \cong H^1(G)$ bilden dann die irreduziblen Polynome

$$\begin{aligned} &t-\rho, && \rho \in R, \\ &(t-\gamma)(t-\sigma\gamma), && \gamma \in (\boldsymbol{C}-\boldsymbol{R})/\sigma. \end{aligned}$$

Die Elemente $\{t-\rho\}_{\rho \in \boldsymbol{R}}$ entsprechen dann den Elementen $\{b_j\}_{j \in J}$. Die Elemente $\{(t-\gamma)(t-\sigma\gamma)\}_{\gamma \in \boldsymbol{C}-\boldsymbol{R}/\sigma}$ entsprechen den Elementen $\{a_i\}_{i \in I}$. Man kann sich nun leicht davon überzeugen, daß $(t-\rho) \leqq (t-\rho')$ im Sinne von B gilt genau dann wenn $\rho \leqq \rho'$ im Sinne der Ordnung von $\boldsymbol{R}$. In diesem Fall ist es also so, daß der Boolesche Verband B eine totalgeordnete Basis besitzt. Unsere Ergebnisse können wir so formulieren:

Satz 5.3.2. *Es gilt*

$$W(\boldsymbol{R}(t)) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}^{(\boldsymbol{R})} + \mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z}^{(I)}$$

mit $I = (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{R})/\sigma$. Die totale Stiefel-Whitney-Klasse ist für $\boldsymbol{R}(t)$ injektiv.

5.4. Anwendung auf weitere Körper

Man kann Satz 5.3.1 nicht nur auf reelle Funktionenkörper anwenden, sondern z.B. auch auf den Körper $K = \mathbb{R} \cap K_0$, wobei K_0 maximale abelsche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist. Aus der Klassenkörpertheorie ist wohlbekannt, daß die Brauer-Gruppe von K_0 verschwindet, d.h. die Galois-Gruppe der maximalen 2-Erweiterung von K_0 ist frei, und wir haben somit genau die Situation von Satz 5.3.1. Insbesondere ist also w injektiv. Allgemeiner können wir anstelle von K_0 einen beliebigen Unterkörper K von $\mathbb{C}$ wählen mit $G(K(2)/K)$ ist frei.

Ferner haben wir

Korollar 5.4.2. *Sei k ein reeller Funktionenkörper und $K = k((t))$. Dann ist w: $W_0(K) \to \tilde{H}(K)$ injektiv.*

Der Beweis folgt aus 4.2.3 (i) und dem Beweis von 5.3.1.

6. Beziehungen zur Theorie von Pfister und Probleme

Zwei Fragen können für die allgemeine Theorie der quadratischen Formen über Körpern als besonders wichtig gelten, nämlich

(i) *Welche allgemeinen Sätze gelten über die Struktur des Witt-Grothendieck-Ringes?*

(ii) *Unter welchen Bedingungen ist die totale Stiefel-Whitney-Klasse w injektiv? Was kann man allgemein über* Kern(w) *aussagen?*

Im Fall von Körpern hat PFISTER zu beiden Fragen in einer Reihe von Arbeiten ([9–12]) wichtige Beiträge geliefert. Wir erwähnen nur die beiden wichtigsten Resultate:

Satz 6.1. *(i) $W(K)$ besitzt keine Elemente ungerader Ordnung. $W(K)$ besitzt keine Nullteiler ungerader Dimension.*

(ii) Sei $\{K_\alpha\}$ die Familie der reell-abgeschlossenen Hüllen von K. Dann ist der Kern der kanonischen Abbildung

$$W(K) \to \prod_\alpha W(K_\alpha)$$

die Torsionsuntergruppe von $W(K)$.

Aus (ii) folgt das schon mehrmals benutzte Korollar

Korollar 6.2. *Im Kern der totalen Stiefel-Whitney-Klasse liegen nur Torsionselemente.*

Beweis. Nach Beispiel 3.1.3 ist w: $W_0(K_\alpha) \to \tilde{H}(K_\alpha)$ injektiv.

Es wäre sehr interessant, wenn man die Sätze von PFISTER auch im Rahmen der in dieser Arbeit entwickelten Theorie herleiten könnte. Über dieses Problem ist aber nichts bekannt. Nur das folgende sehr schwache Resultat läßt sich leicht beweisen.

Proposition 6.3. (i) *Sei $W(G)_{\mathrm{odd}}$ die Untergruppe der Elemente ungerader Ordnung von $W(G)$. Dann gilt*

$$W(G)_{\mathrm{odd}} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} W_0(G)^n \subset \mathrm{Kern}(w).$$

(ii) *Ist K ein Körper der Stufe s, so gilt $W_0(G)^{n+1} \subset$* Kern(w), *falls $2^n-(n+1) \geqq s$.*

Beweis. (i) Aus $\eta \in W_0(G)^n$ folgt $\eta+\eta \in W_0(G)^{n+1}$. Also ist

$$W_0(G)^n / W_0(G)^{n+1}$$

eine Gruppe vom Exponenten 2. Es folgt die erste Inklusion. Für $\eta \in W_0(G)^{n+1}$ zeigt man leicht $w_1(\eta) = \cdots = w_{2^n-1}(\eta) = 0$, indem man das für die Erzeugenden $(\langle a_1\rangle - \langle 1\rangle)\dots(\langle a_{n+1}\rangle - \langle 1\rangle)$ nachrechnet. Damit ist die zweite Inklusion bewiesen.

(ii) Die k-te Stiefel-Whitney-Klasse ist Summe von Produkten von jeweils k Faktoren aus $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$. Mittels der Relation $a_i \cup a_i = a_i \cup (-1)$ bringt man möglichst viele Faktoren -1 in jedes Produkt. Offenbar kann man wenigstens $k-(n+1)$ Faktoren -1 erreichen. Nun gilt aber $(-1) \cup \cdots \cup (-1) = 0$ für s Faktoren. Da die ersten $2^n - 1$ Stiefel-Whitney-Klassen verschwinden, folgt die Behauptung.

Es ist nicht bekannt, ob für Körper immer gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} W(K)^n = 0 .$$

(Für Körper mit K^*/K^{*2} endlich folgt das leicht aus dem Satz von KRULL und 6.1 (i).) Erst recht nicht bekannt ist, ob die entsprechende Behauptung für jede Gruppe G gilt.

Ein nicht-triviales Kriterium, das die Injektivität von w garantiert, ist nicht bekannt. Auf Grund der bekannten Beispiele wäre es naheliegend zu vermuten, daß w injektiv ist, falls $cd_2(G) \leqq 2$. Eine schwächere Vermutung wäre, daß w injektiv ist, falls G semi-direktes Produkt zweier freier Gruppen ist.

Schließlich wollen wir noch bemerken, daß die offenbar vorhandenen Zusammenhänge zwischen der cohomologischen 2-Dimension, der Stufe, der maximalen Dimension definiter Formen, dem minimalen n mit $W_0(K)^n = 0$, dem Exponenten des Torsionsteiles von $W(K)$ und $\dim(H^2(G))$ weitgehend unbekannt sind.

Literatur

1. ARF, C.: Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2. J. reine angew. Math. **183**, 148—167 (1941).
2. BIRKHOFF, G.: Lattice theory, sec. ed., Am. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. XXV. Providence, Rhode Island; 1961.
3. DELZANT, A.: Définition des classes de STIEFEL-WHITNEY d'un module quadratique sur un corps de caractéristique différente de 2. C. R. Acad. Sci. **255**, 1366—1368 (1962).
4. ENDLER, O.: Bewertungstheorie (unter Benutzung einer Vorlesung von W. KRULL), Bd. 2, Bonner Math. Schriften **15**.
5. HIRZEBRUCH, F.: Differentiable Manifolds and Quadratic Forms. Berkeley lecture notes (1962).
6. HOCHSCHILD, G., and J.-P. SERRE: Cohomology of group extensions. Trans. Amer. Math. Soc. **74**, 110—134 (1953).
7. KAPLANSKY, I.: Quadratic forms. J. Math. Soc. Japan **5**, 200—207 (1953).
8. O'MEARA, O. T.: Introduction to quadratic forms. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.
9. PFISTER, A.: Darstellung von -1 als Summe von Quadraten in einem Körper. London J. of Math. **40**, 159—165 (1965).
10. — Multiplikative quadratische Formen. Arch. Math. **16**, 363—370 (1965).
11. — Quadratische Formen in beliebigen Körpern. Inventiones math. **1**, 116—132 (1966).

12. PFISTER, A.:Quadratic forms. Cambridge lecture notes, 1967.
13. SCHARLAU, W.: Galois-Cohomologie von Hensel-Körpern. (Erscheint demnächst.)
14. SERRE, J.-P.: Corps locaux. Paris: Hermann 1962.
15. — Cohomologie galoisienne. Springer lecture notes 1964.
16. SPRINGER, T. A.: Quadratic forms over a field with a discrete valuation. Indagationes Math. **17**, 352—362 (1955).
17. TSEN, T.: Divisionsalgebren über Funktionenkörpern. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1933, p. 335.
18. WITT, E.: Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. J. reine angew. Math. **176**, 31—44 (1937).

Mathematisches Institut der Universität
5300 Bonn
Wegelerstraße 10

(Eingegangen am 25. August 1967)