Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1966

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?356556735_0002|log20

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

A 20900 F

Inventiones mathematicae

Vol 2 · Fasc 3 · 1967

James, I., and E. Thomas	Submersions and Immersions of Manifolds	171
Gerritzen, L.	Erweiterungsendliche Ringe in der nichtarchimedischen Funktionentheorie	178
Kiehl, R.	Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie	191
Rankin, R. A.	Lattice Subgroups of Free Congruence Groups	215
Bröcker, Th.	Homologie symmetrischer und alternierender Gruppen	222
Armitage, J. V.	On a Theorem of Hecke in Number Fields and Function Fields	238

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York

Inventiones math. 13. Januar 1967

Inventiones mathematicae

Editors / Editeurs / Herausgeber:

W. I. Arnold, Moskwa; H. Bauer, Erlangen; P. J. Birch, Manchester
P. Cartier, Strasbourg; P. Gabriel, Strasbourg; A. Haefliger, Genf
N. H. Kuiper, Amsterdam; B. Malgrange, Paris; Y. Manin, Moskwa
R. Remmert, Göttingen; J. Tits, Bonn; E. Vesentini, Pisa

This journal will be published at frequent, irregular intervals to bring out new contributions in this field. It is a policy of the journal to publish papers within four months of acceptance. The price is DM 96,— or $ 24.00 per Volume. Every year a number of about five issues will be published.

It is a fundamental condition that no manuscript submitted shall have been, or will be, published elsewhere.

Unless special permission has been granted by the publishers, no photographic reproductions, microfilms, microphotos or other reproductions of a similar nature may be made of the journal, of individual contributions contained therein, or of extracts therefrom.

En vue d'une publication rapide, les fascicules des Inventiones Mathematicae paraissent à intervalles variables, selon les manuscrits reçus. La politique du journal est de publier les articles endéans quatre mois après qu'ils ont été acceptés. Le prix du volume s'élève à DM 96.—. Cinq fascicules environ sont publiés chaque année.

Ne peuvent être présentés, en principe, que des travaux n'ayant fait l'objet d'aucune autre publication. L'auteur s'engage également à ne les faire paraître par la suite nulle part ailleurs. Par l'acceptation du manuscrit et sa publication, la maison d'édition acquiert les droits de reproduction photomécanique ou de polycopie, de quelque nature qu'elle soit.

Die Zeitschrift erscheint im Interesse rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Es ist das Ziel der Zeitschrift, Arbeiten innerhalb von vier Monaten nach Annahme zu publizieren. Der Preis des Bandes beträgt DM 96,-. Jährlich erscheinen etwa fünf Hefte.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht auch das Recht der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer photomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.

Inventiones math. 2, 171–177 (1967)

Submersions and Immersions of Manifolds

IOAN JAMES and EMERY THOMAS*

1. Introduction

This note is supplementary to our main paper [5] on the problem of enumerating the homotopy classes of cross-sections of a fibration. Using the general theory of [5] we solve special cases of the problem which have two interesting applications. One, based on the work of HIRSCH [2], enumerates the immersion classes of low-dimensional manifolds in euclidean space with codimension two. The other, based on the work of PHILLIPS[1] [9], enumerates the submersion classes of certain open manifolds in the euclidean plane.

2. Results

Let ξ be a euclidean bundle over a complex[2] A. Our basic problem is to determine the number

$$\operatorname{cross}(n, \xi) \qquad (1 \leqq n \leqq \dim \xi)$$

of homotopy classes of cross-sections of the associated k-frame bundle, where $k = \dim \xi - n$. We do not, as in [5], require ξ to be in the stable range.

Our first result concerns the case $k=2$. Thus ξ is an $(n+2)$-plane bundle, and we suppose that ξ is orientable when n is even. When $\dim A \leqq n+1$ the condition for the associated 2-frame bundle to have a cross-section is that

$$\begin{aligned} &w_{n+1}\,\xi = 0 \qquad (n \text{ odd}), \\ &\delta^* w_n\,\xi = 0 \qquad (n \text{ even}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

by classical obstruction theory (see [1, 11]). Here $w_i\,\xi$ denotes the i^{th} Stiefel-Whitney class of ξ and δ^* denotes the Bockstein coboundary operator associated with the mod 2 reduction of the integers. We compute cross (n, ξ) in terms of certain homomorphisms given as follows:

a) for n odd, define

$$\Gamma_n^i\colon\ H^i(A; Z_2) \to H^{i+2}(A; Z_2)$$

by $\alpha \to Sq^2\,\alpha + \alpha \cup w_2\,\xi$;

* Research supported in part by a grant from the National Science Foundation.

[1] We are most grateful to Dr. PHILLIPS for sending us a copy of his thesis.

[2] By a complex we always mean a pathwise connected CW-complex.

b) for n even, define

$$\Gamma_n^i\colon\ H^i(A;Z)\oplus H^{i+1}(A;Z)\to H^{i+2}(A;Z_2)$$

by $(\alpha,\beta)\to Sq^2\alpha+\alpha\cup w_2\,\xi$.

Theorem (2.2). *Let ξ be a euclidean $(n+2)$-plane bundle over a complex A where $n>2$ and $\dim A\leqq n+1$. Let ξ be orientable when n is even. Let* (2.1) *be satisfied, since otherwise* $\operatorname{cross}(n,\xi)=0$. *Then* $\operatorname{cross}(n,\xi)$ *is equal to the order of*

$$\ker\Gamma_n^n\oplus\operatorname{coker}\Gamma_n^{n-1}.$$

When n is odd the proof of (2.2) is virtually the same as the proof of (1.1) of [5] in the case $n\equiv 1 \bmod 4$, because the homotopy groups and cohomology operations correspond precisely. The only difference worth mentioning is that the Wu formula for $Sq^2 w_{n+1}$, quoted in (7.2) of [5], contains no w_{n+3} term in the present case whatever the parity of $\frac{1}{2}n(n-1)$ because w_{n+3} itself vanishes.

When n is even the proof of (2.2) is similar to the proof of (1.1) of [5] in the case $n\equiv 0 \bmod 4$, although the homotopy groups involved do not correspond precisely. We omit the details since there is a proof, on slightly different lines, in (5.1) of [3].

By a submersion in R^k of a smooth manifold M, with $k\leqq m=\dim M$, we mean a $C^\infty-\operatorname{map} M\to R^k$ whose Jacobian has the maximum rank k at every point. A regular homotopy between two submersions is a continuous deformation within the class of submersions. Thus an equivalence relation between submersions is obtained and the number of equivalence classes is denoted by $\operatorname{sub}(M,R^k)$. When M is open and connected PHILLIPS [9] has shown that

$$\operatorname{sub}(M,R^k)=\operatorname{cross}(m-k,\tau)$$

where τ denotes the tangent bundle of M. The triangulation theorem for smooth manifolds makes M into an m-complex of cohomological dimension $m-1$. We can therefore take $m=n+2$ in (2.2) with $A=M$, and obtain an expression for $\operatorname{sub}(M,R^2)$ when M is open and $m>4$, provided that M is orientable for m even. To illustrate this we deduce

Corollary (2.3). *Let M' be a compact orientable manifold with boundary $\partial M'$, and let M denote the open manifold*[3] $M'-\partial M'$. *Suppose that $m>4$ $(m=\dim M)$ and that $w_{m-1}M=0$* when $m\equiv 1 \bmod 4$. *Then* $\operatorname{sub}(M,R^2)$ *is equal to the order of*

$$H^{m-1}(M;Z_2)\oplus H^{m-2}(M;Z_2)\qquad (m\ odd),$$

$$H^{m-1}(M;Z_2)\oplus H^{m-1}(M;Z)\oplus H^{m-2}(M;Z)\qquad (m\ even).$$

[3] By a result of BROWDER, LEVINE and LIVESAY [Amer. J. Math. **87**, 1017–1028 (1965)] an extensive class of open manifolds can be constructed in this way.

A convenient reference for standard results on manifolds with boundary is [*10*, Chapter 6, § 2]. First of all we remark that $\delta^* w_{m-2} M' = 0$ when m is even and that $w_{m-1} M' = 0$ when $m \equiv 3 \bmod 4$. This is proved by MASSEY [*7*, *8*] when $\partial M'$ is empty, but essentially the same proof goes through in our case[4]. Thus the tangent bundle τ of M satisfies condition (2.1) in any case, with $m = n+2$. Now Γ_n^n is trivial since $H^m(M; Z_2) = 0$. When $\partial M'$ is empty MASSEY [*6*] applies a result of WU [*12*] to show that Γ_n^{n-1} is trivial for the tangent bundle τ' of M'. Again the same result applies in our case (using [*10*, (6.10.7)]) and so Γ_n^{n-1} is trivial for $\tau = \tau' | M$, since the inclusion $M \subset M'$ induces an isomorphism in cohomology ([*10*, (6.2.20)]). Thus $\mathrm{sub}(M, R^2)$ is equal to the order of the domain of Γ_n^n multiplied by the order of the range of Γ_n^{n-1}, and so we obtain (2.3). Of course if m is odd and M is non-orientable we still can apply (2.2).

For the remainder of this note we use only cohomology over the integers and so we will leave out the coefficient group from the notation.

Let ξ be an oriented euclidean n-plane bundle over the complex A. A cross-section s of the associated $(n-2)$-frame bundle determines a reduction of the group from $SO(n)$ to $SO(2)$. Let $\chi(s) \in H^2(A)$ denote the Euler class of the circle bundle thus obtained. Homotopic cross-sections have the same Euler class. Let $T^2(A)$ denote the set of elements $\alpha \in H^2(A)$ such that $2\alpha = 0$. In § 3 below we shall prove

Theorem (2.4). *Let ξ be an oriented euclidean n-plane bundle over a complex A, where $n \geqq 5$ and $\dim A \leqq \min(6, n-2)$. Suppose that the associated $(n-2)$-frame bundle admits a cross-section with Euler class $\chi \in H^2(A)$. Then the number of classes of cross-sections of the associated bundle with Euler class χ is equal to the product of the order of $T^2(A)$ and the order of the factor group of $H^3(A)$ by the subgroup $2\chi \cup H^1(A)$.*

Thus cross $(2, \xi)$ is determined once it is known which elements of $H^2(A)$ can occur as the Euler class of a cross-section of the associated bundle.

Let M be a closed connected smooth m-manifold which can be immersed in R^{m+2}. The normal Euler class of such an immersion is the Euler class of the normal 2-plane bundle ν_0. The Whitney sum of ν_0 and the trivial m-plane bundle can be regarded as the stable normal $(m+2)$-plane bundle ν of M. Thus ν_0 determines a cross-section of the $(n-2)$-frame bundle associated with ν. It can be checked that the equivalence between regular homotopy classes of immersions and homotopy classes of cross-sections of the associated bundle, established in (1.2) of [*4*], is given by this correspondence. In particular, immersions with normal

[4] The main difference is that one needs LEFSCHETZ, rather than POINCARÉ, duality to prove the generalization of Lemma 1 of [*8*] to the case of a manifold with boundary.

Euler class χ correspond to cross-sections with Euler class χ. Thus we obtain

Corollary (2.5). *Let M be a closed connected smooth orientable m-manifold, where $2 \leqq m \leqq 6$. Suppose that M can be immersed in R^{m+2} with normal Euler class $\chi \in H^2(M)$. Then the number of regular homotopy classes of immersions of M in R^{m+2} with normal Euler class χ is equal to the product of the order of $T^2(M)$ and the order of the factor group of $H^3(M)$ by the subgroup $2\chi \cup H^1(M)$.*

In general it is not known for which values of χ there exists an immersion of normal Euler class χ. However, suppose that $H^4(M)$ has no 2-torsion, as will certainly be the case if $m=2$, 3 or 4. Then the argument used by HIRSCH to prove (6.10) of [2] also shows that the necessary and sufficient condition for χ to be a normal Euler class is that $\chi^2 = \overline{p_1}(M)$, the Pontrjagin class, and $\chi(\mathrm{mod}\ 2) = w_2(M)$. When $m=3$, in particular, we have $w_2(M)=0$ and so M can be immersed in R^5 with normal Euler class χ for every $\chi \in 2\, H^2(M)$. However, M is parallelizable in this case and (2.5) can easily be proved directly, as shown by WU [5] in [13].

3. Proof of (2.4)

We carry over various notations from [4, 5]. Thus $[A, B]$ denotes the set of homotopy classes of maps $A \to B$. If $r: Q \to B$ is a fibration and $u: A \to B$ is a map then a map $f: A \to Q$ is called a u-map if $rf = u$ and a homotopy $f_t: A \to E$ is called a u-homotopy if $rf_t = u$ for all t. The set of u-homotopy classes of u-maps is denoted by $[A, Q; u]$ or by $[A, Q; \xi]$ where $\xi \in [A, B]$ is the homotopy class of u. For the elementary theory of these sets we refer to [4].

In what follows BG denotes the classifying space associated with the topological group G. The cohomology groups are all with integral coefficients.

Consider the standard fibration $p': E' \to B$, where $E' = BSO(2)$ and $B = BSO$. The fibre $F' = SO/SO(2)$ is simply-connected and

$$\pi_2(F') \approx \pi_3(F') \approx \pi_7(F') \approx Z,$$

with all the intermediate homotopy groups zero. The generator of $H^2(F')$ transgresses to $\delta^* w_2 \in H^3(B)$. Choose a map $B \to K(Z, 3)$ representing $\delta^* w_2$ and let $p: E \to B$ be the principal fibration [5, § 2] it determines, with fibre $F = K(Z, 2)$. By standard changes within the homotopy type we arrange that $E' \subset E$ and $p' = p \mid E'$. Choose a representative $E \to K(Z, 4)$ of the Postnikov class $\vartheta \in H^4(E)$ and let $q: T \to E$ be the

[5] At first glance it appears that WU's result does not agree with ours but this is merely due to the way in which it is expressed.

principal fibration it determines, with fibre $K(Z, 3)$. By the approximation theorem [5, (6.4)] there exists a map $g\colon E' \to T$ such that $qg\colon E' \subset E$ and such that

$$g_*\colon [A, E'; \xi] \to [A, T; \xi]$$

is an equivalence for all complexes A such that $\dim A \leqq 6$. By the enumeration theorem [5, (4.3)] the set $[A, T; \xi]$ is equivalent to the disjoint union of the cokernels of certain homomorphisms

$$\Delta(\vartheta, \eta)\colon H^1(A) \to H^3(A)$$

where η runs through the elements of the kernel of

$$\vartheta_*\colon [A, E; \xi] \to H^4(A).$$

Let us therefore begin by obtaining some information about $\Delta(\vartheta, \eta)$ in this particular case.

The spaces F, E', E are simply-connected and their second homotopy groups are cyclic infinite. Hence their 2-dimensional cohomology groups are cyclic infinite. From exact sequence considerations it follows that generators $\lambda \in H^2(E)$ and $\iota \in H^2(F)$ can be chosen such that $i^* \lambda \in H^2(E')$ is the universal Euler class and $j^* \lambda = 2\iota$, where $i\colon E' \subset E$ and $j\colon F \subset E$.

Write $\varphi = j^* \vartheta \in H^4(F)$. Then φ is the Postnikov class for the pair (F, F') and a brief calculation, using the Gysin sequence for the quotient of SO by $SO(2)$, leads to the relation $\varphi = 2\iota^2$.

Consider the commutative diagram shown below, where m is the action map for the principal fibration, n is the loop multiplication on F and $\imath$ is the inclusion.

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \xrightarrow{n} & F \\ {\scriptstyle 1 \times \imath}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \imath} \\ F \times E & \xrightarrow{m} & E. \end{array}$$

For any spaces X, Y let $\rho\colon X \times Y \to Y$ denote the right projection. Set

$$\vartheta_1 = m^* \vartheta - \rho^* \vartheta \in H^4(F \times E, e \times E),$$
$$\varphi_1 = n^* \varphi - \rho^* \varphi \in H^4(F \times F, e \times F),$$

where e denotes the (generic) basepoint. Since $\varphi = 2\iota^2$ it follows that

$$\varphi_1 = 2\iota^2 \otimes 1 + 4\iota \otimes \iota.$$

Now $(1 \times \imath)^*$ maps $H^4(F \times E, e \times E)$ monomorphically into $H^4(F \times F, e \times F)$ and $(1 \times \imath)^* \vartheta_1 = \varphi_1$, by naturality, since $\imath^* \vartheta = \varphi$. Thus we conclude that

$$\vartheta_1 = 2\iota^2 \otimes 1 + 2\iota \otimes \lambda. \tag{3.1}$$

The fibration $q\colon T\to E$ is determined by a map $f\colon E\to C$ of class ϑ, where $C=K(Z,4)$. Let

$$f_1\colon (F\times E, e\times E)\to (C,e),$$
$$f_2\colon (\Omega F\times E, e\times E)\to (\Omega C, e)$$

be the maps derived from f as in § 4 of [5]. Thus f_1 is of class ϑ_1, as above, and f_2 is of class $\vartheta_2\in H^3(\Omega F\times E, e\times E)$, say. Since ΩF is a homotopy circle it follows from (3.1), as in § 6 of [5], that

$$\vartheta_2=2\iota'\otimes\lambda \tag{3.2}$$

where ι' denotes the (loop) suspension of ι, i.e. the fundamental class of ΩF. Hence the induced function

$$\vartheta_2^*\colon H^1(A)\times[A,E;\xi]\to H^3(A)$$

is given by $\vartheta_2^*(\beta,\eta)=2\,\beta\cup\eta^*\lambda$, where $\beta\in H^1(A)$ and $\eta\in[A,E;\xi]$. Thus the morphism

$$\Delta(\vartheta,\eta)\colon H^1(A)\to H^3(A)$$

studied in § 4 of [5] consists of taking cup products with $2\eta^*\lambda$.

Now suppose that $\chi\in H^2(A)$ is given and that $\eta_0\in[A,E;\xi]$ is such that $\eta_0^*\lambda=\chi$ and such that $\eta_0^*\vartheta=0$ in $H^4(A)$. Since $p\colon E\to B$ is principal the set $[A,E;\xi]$ is freely generated by the action of $[A,F]=H^2(A)$ on η_0. If $\eta=\alpha\cdot\eta_0$, where $\alpha\in H^2(A)$, then

$$\eta^*\lambda=\eta_0^*\lambda+2\alpha,$$

since $m^*\lambda=2\iota\otimes 1+1\otimes\lambda$. Therefore $\eta^*\lambda=\chi$ if and only if $2\alpha=0$. But it follows from (3.1) that

$$\eta^*\vartheta=2\alpha^2+2\alpha\cdot\eta_0^*\lambda$$

and so $\eta^*\vartheta=0$ when $2\alpha=0$. Thus we conclude that the set of elements $\eta\in[A,E;\xi]$ such that both $\eta^*\lambda=\chi$ and $\eta^*\vartheta=0$ is equivalent to the set $T^2(A)$ of elements $\alpha\in H^2(A)$ such that $2\alpha=0$.

It only remains to reinterpret this conclusion in terms of bundles. In the hypothesis of (2.4) we have that $\dim A\leqq n-2$, as well as $\dim A\leqq 6$. Hence our conclusion remains valid with $B=BSO(n)$ instead of $B=BSO$. We regard the oriented n-plane bundle ξ as that induced from the universal bundle by a map $u\colon A\to BSO(n)$, whose class will also be denoted by ξ. The associated $(n-2)$-frame bundle in the universal case is our fibration p' of $E'=BSO(2)$ over $B=BSO(n)$. By [4, (2.2)] the set of classes of cross-sections of the $(n-2)$-frame bundle associated with ξ is equivalent to $[A,E';\xi]$ which, by the approximation theorem, is

equivalent to the set $[A, T; \xi]$ which we have determined. In detail, a cross-section s of the associated bundle over A corresponds to a u-map $v: A \to E'$ and hence to a u-map $gv: A \to T$. The Euler class of s, as defined in § 2, is the Euler class of the 2-plane bundle over A induced by v. But $i^* \lambda \in H^2(E')$ is the universal Euler class and so

$$\chi(s) = v^* i^* \lambda = \eta^* \lambda,$$

where η is the class of $iv = qgv$. Thus the cross-sections with Euler class χ contribute to the enumeration the factor $T^2(A)$, which is independent of χ, times the quotient of $H^3(A)$ by $2\chi \cup H^1(A)$. This completes the proof of (2.4).

References

[1] Barcus, W.D.: Note on cross-sections over CW-complexes. Quart. J. Math. Oxford (2), 150–160 (1954).

[2] Hirsch, M.: Immersions of manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. **53**, 242–276 (1959).

[3] James, I.M.: A relation between Postnikov classes. Quart. J. Math. Oxford (2), 269–280 (1966).

[4] James, I.M., and E. Thomas: Note on the classification of cross-sections. Topology **4**, 351–359 (1965).

[5] — — On the enumeration of cross-sections. Topology **5**, 95–114 (1966).

[6] Massey, W.: Normal vector fields on manifolds. Proc. A.M.S. **12**, 33–40 (1961).

[7] — On the Stiefel-Whitney classes of a manifold, Amer. J. Math. **82**, 92–102 (1960).

[8] — On the Stiefel-Whitney classes of a manifold. II. Proc. A.M.S. **13**, 938–942 (1962).

[9] Phillips, A.: Submersions of open manifolds. Thesis. Princeton University 1966.

[10] Spanier, E.: Algebraic Topology. New York: McGraw-Hill 1966.

[11] Steenrod, N.: The topology of fiber bundles. Princeton University Press 1957.

[12] Wu, W.T.: Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété. C.R. Acad. Sci. (Paris) **230**, 918–920 (1950).

[13] — On the immersion of C^∞-3-manifolds in a Euclidean space. Sci. Sinica **13**, 335–336 (1964).

Oxford University Mathematical Institute
University of California at Berkeley

(Received August 8, 1966)

Inventiones math. 2, 178—190 (1967)

Erweiterungsendliche Ringe in der nichtarchimedischen Funktionentheorie

LOTHAR GERRITZEN (Göttingen)

In der kommutativen Algebra heißt ein Integritätsring I *erweiterungsendlich*, wenn der ganze Abschluß I' von I in jeder endlich-algebraischen Körpererweiterung Q' des Quotientenkörpers Q von I ein endlicher I-Modul ist[1]. E. NOETHER ([7], p. 36) hat gezeigt: *Ist I ein normaler, noetherscher Integritätsring und Q' eine endlich-algebraische, separable Erweiterung von Q, so ist I' ein endlicher I-Modul.* Dies hat zur Konsequenz ([2], Chap. 0, 23.1.2): *Ein normaler, noetherscher Integritätsring I ist erweiterungsendlich, wenn der ganze Abschluß I' von I in jeder endlich-algebraischen und rein inseparablen Erweiterung Q' von Q ein endlicher I-Modul ist.* Diese Bedingung ist – selbst für diskrete Bewertungsringe – nicht immer erfüllt, was zuerst F.K. SCHMIDT bemerkte ([8], p. 444, vgl. auch [5], p. 206).

In der nichtarchimedischen Funktionentheorie benutzt man seit den Arbeiten von TATE [9] und GRAUERT-REMMERT [1] neben den Ringen K_n der *konvergenten* Potenzreihen auch die Ringe T_n der *strikt konvergenten* Potenzreihen. Es ist bekannt, daß für bewertete (bzw. vollständig bewertete) Grundkörper die Ringe K_n (bzw. T_n) stets noethersch und faktoriell sind. Hat der Grundkörper Primzahlcharakteristik, so folgt aber nicht ohne weiteres, daß K_n und T_n auch erweiterungsendlich sind. Während nun jüngst von GROTHENDIECK ([2], p. 217), ein Beweis dafür angekündigt wurde, daß K_n für vollständige Grundkörper erweiterungsendlich ist, war die entsprechende Frage für T_n bislang nur für Grundkörper k mit $[k^{p^{-1}}:k]<\infty$, beantwortet, $p:=\mathrm{char}\ k$ ([1, 6]).

In dieser Note wird ein Beweis für die Erweiterungsendlichkeit von K_n und T_n über vollständig bewertetem Grundkörper angegeben, der für beide Ringe weitgehend simultan verläuft. Ist der Grundkörper k nicht vollständig, so wird eine notwendige und hinreichende Bedingung an k abgeleitet, unter der K_n erweiterungsendlich ist. Ist k vollständig, so folgt aus diesen Ergebnissen auf Grund des noetherschen Normalisierungssatzes, daß jede nullteilerfreie k-analytische Stellenalgebra und jede nullteilerfreie k-affinoide Algebra erweiterungsendlich ist; speziell ist also die Normalisierung einer jeden reduzierten k-affinoiden Algebra A wieder k-affinoid.

[1] Diese Ringe wurden von GROTHENDIECK in [2] «anneaux japonais» genannt.

In den ersten drei Paragraphen werden die Begriffe des *auffüllungsendlichen* und *linear separierten* Moduls eingeführt und mit deren Hilfe ein allgemeines Kriterium für Erweiterungsendlichkeit bewiesen (Satz 3.1 und Satz 3.2). Als erste Anwendung wird dann der bekannte Satz hergeleitet, daß über jedem Körper der Ring der formalen Potenzreihen in endlich vielen Unbestimmten erweiterungsendlich ist. Der Beweis gibt bereits das Schema an, wie bei den Ringen K_n und T_n vorgegangen wird (§§ 5, 6). Es kommt im Fall dieser Ringe noch darauf an, „genügend viele" stetige Linearformen zu konstruieren. Dies geschieht mit Hilfe eines in § 4 bewiesenen Satzes für normierte Vektorräume.

Ein „Ring" ist stets ein „kommutativer Integritätsring mit Einselement". Der Quotientenkörper eines Ringes I wird mit $Q(I)$ bezeichnet. – Alle vorkommenden Bewertungen $|\ |$ sind nichtarchimedisch und reell.

Es sei mit gestattet, Herrn Professor R. REMMERT für anregende Gespräche und dem Referenten für nützliche Vorschläge zu danken.

§ 1. Auffüllungsendliche Moduln über noetherschen Ringen

Es sei I ein Ring, M ein I-Modul.

1. Zu jedem Untermodul N von M ist

$$\tilde{N} := \{x \in M : \exists\, r \in I - \{0\} \text{ mit } r \cdot x \in N\}$$

ein N umfassender Untermodul von M. $\tilde{N}$ heißt die *Auffüllung von N in M*; N heiße *aufgefüllt*, wenn $N = \tilde{N}$. Offenbar ist $\widetilde{(0)}$ der Torsionsuntermodul von M.

Es gelten folgende Rechenregeln (N, N_1, N_2 seien Untermoduln von M):

Aus $N_1 \subset N_2$ folgt $\tilde{N}_1 \subset \tilde{N}_2$,

$\widetilde{N_1 \cap N_2} = \tilde{N}_1 \cap \tilde{N}_2$,

$\tilde{\tilde{N}} = \tilde{N}$.

Ist $\varphi: M \to M'$ ein I-Modulhomomorphismus, so gilt $\widetilde{\varphi^{-1}(N')} = \varphi^{-1}(\tilde{N}')$ für jeden Untermodul N' des I-Moduls M'. Speziell ist der Kern jeder Linearform $\varphi: M \to I$ aufgefüllt in M.

Ein Modul M heißt auffüllungsendlich, wenn die Auffüllung $\tilde{N}$ jedes endlich erzeugbaren Untermoduls N von M wieder endlich erzeugbar ist.

Ist I noethersch, so ist jeder endliche Modul auffüllungsendlich. Ferner ist alsdann jeder Untermodul eines auffüllungsendlichen Moduls auffüllungsendlich, und jeder Restklassenmodul eines auffüllungsendlichen Moduls nach einem endlichen Untermodul auffüllungsendlich.

Zwei Aussagen werden als Satz hervorgehoben; die Beweise sind kanonisch.

Satz 1. *I sei noethersch.*

i) *$\{M_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ sei ein gerichtetes System von aufgefüllten Untermoduln M_λ von M (d.h. zu M_ν, M_μ, $\nu, \mu\in\Lambda$, existiert ein M_λ, $\lambda\in\Lambda$, mit $M_\nu + M_\mu \subset M_\lambda$); alle M_λ seien auffüllungsendlich. Dann ist*

$$N = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$$

auffüllungsendlich.

ii) *Die direkte Summe einer beliebigen Familie von Moduln ist auffüllungsendlich genau dann, wenn alle Summanden auffüllungsendlich und fast alle torsionsfrei sind.*

2. Der $Q(I)$-Vektorraum $Q(M) := M \otimes_I Q(I)$ enthält M auf natürliche Weise als I-Untermodul, falls M torsionsfrei ist. Für die Auffüllung $\tilde{N}$ eines Untermoduls N von M gilt dann: $\tilde{N} = M \cap Q(N) \subset Q(M)$. Man setzt $rg_I M := \dim_{Q(I)} Q(M)$ und nennt $rg_I M (= rg\, M)$ den Rang von M.

Satz 2. *I sei noethersch.*

i) *M ist genau dann auffüllungsendlich, wenn jeder Untermodul N von M mit $rg_I N < \infty$ endlich erzeugbar ist.*

ii) *Sind N, N' aufgefüllte Untermoduln von M und ist N echt in N' enthalten, so gilt $rg_I N < rg_I N'$, falls $rg_I N' < \infty$ ist.*

Beweis. Da M genau dann auffüllungsendlich ist, wenn der Torsionsuntermodul $\widetilde{(0)}$ von M endlich erzeugbar und $M/\widetilde{(0)}$ auffüllungsendlich ist, genügt es ersichtlich, den Satz für torsionsfreie Moduln M zu beweisen.

Ad i): M sei auffüllungsendlich, N ein Untermodul mit $rg_I N < \infty$ und $\{e_1, \ldots, e_t\}$ eine $Q(I)$-Basis von $Q(N)$ mit $e_i \in N$. Mit

$$F = \sum_{i=1}^{t} I\, e_i$$

gilt $Q(F) = Q(N)$ und also $\tilde{F} = M \cap Q(F) = M \cap Q(N) = \tilde{N}$. Mit F ist $\tilde{F}$ endlich erzeugbar, da M auffüllungsendlich ist, und mit $\tilde{F}$ auch $N \subset \tilde{F}$, da I noethersch ist.

Die andere Richtung von i) ist trivial.

Ad ii): Aus $rg_I N = rg_I N'$ folgt $Q(N) = Q(N')$ und somit $N = \tilde{N} = M \cap Q(N) = M \cap Q(N') = \tilde{N}' = N'$, w.z.b.w.

3. Es sei I' ein Erweiterungsring von I. Jeder I'-Modul ist auf natürliche Weise ein I-Modul. Es gilt eine Transitivitätseigenschaft.

Satz 3. *I, I' seien noethersch; I' sei ein auffüllungsendlicher I-Modul und M' ein auffüllungsendlicher, torsionsfreier I'-Modul. Dann ist M' ein auffüllungsendlicher I-Modul.*

Beweis. Es sei N ein I-Untermodul von M' mit $rg_I N<\infty$ und N' der von N erzeugte I'-Untermodul von M'. Dann gilt ersichtlich $rg_{I'} N' \leqq rg_I N<\infty$. Nach Satz 2 ist daher N' ein endlich erzeugbarer I'-Modul. N' ist aus diesem Grunde in einem endlichen, freien I'-Modul F enthalten. F ist als I-Modul eine endliche direkte Summe des auffüllungsendlichen I-Moduls I' und also auch auffüllungsendlich. Daher ist $N\subset N'\subset F$ endlich erzeugbar über I, w.z.b.w.

§ 2. Linear separierte Moduln

Es sei I ein Ring, M ein I-Modul.

1. Ein I-Modul M heißt *linear separiert*, wenn es zu jedem $m\in M$, $m\neq 0$, ein $\varphi\in M^*$ (d.h. eine Linearform $\varphi\colon M\to I$) gibt mit $\varphi(m)\neq 0$.

Jeder Untermodul eines linear separierten Moduls ist linear separiert; jedes direkte Produkt und jede direkte Summe von linear separierten Moduln ist linear separiert. Beispiele für linear separierte Moduln sind alle freien Moduln. Jeder linear separierte Modul M ist torsionsfrei. Ferner ist jeder endliche torsionsfreie Modul M linear separiert, da es stets ein Monomorphismus von M in einen freien Modul F gibt.

Ist I kein Körper, so ist der Quotientenkörper Q von I kein linear separierter I-Modul, da $\mathrm{Hom}_I(Q, I)=0$.

Satz 1. *Es sei I noethersch und M linear separiert. Dann ist M auffüllungsendlich.*

Beweis. Es sei $N\subset M$ ein Untermodul mit $rg N=t$. Wir zeigen mit Hilfe von Induktion nach t, daß $\tilde{N}$ endlich erzeugbar ist.

Für $t=0$ gilt $\tilde{N}=\widetilde{(0)}$. Da M torsionsfrei ist, folgt $\tilde{N}=(0)$.

Sei nun $t>0$. φ sei eine Linearform auf M mit $\varphi(\tilde{N})\neq 0$. Für $\psi:=\varphi|\tilde{N}$ gilt dann $\psi\neq 0$ und $\mathrm{Ker}\,\psi\subset\tilde{N}$ ist aufgefüllt in $\tilde{N}$ und also auch aufgefüllt in M. Wegen $\mathrm{Ker}\,\psi\neq\tilde{N}$ gilt $rg\,\mathrm{Ker}\,\psi<t$. Daher ist $\mathrm{Ker}\,\psi$ nach Induktionsannahme endlich erzeugbar. $\psi(\tilde{N})$ ist als Ideal im noetherschen Ring I ein endlicher I-Modul. Aus der Endlichkeit von $\mathrm{Ker}\,\psi$, Bild ψ folgt, daß $\tilde{N}$ endlich ist, w.z.b.w.

2. Wir bringen ein Beispiel.

$I[\![X]\!]=I[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ sei der Ring der formalen Potenzreihen in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$. Für $f\in I[\![X]\!]$ schreiben wir

$$f=\sum_{\nu\geqq 0} f_\nu X^\nu;$$

dabei ist X das Unbestimmtentupel $(X_1, \ldots, X_n)$, ν durchläuft alle Indextupel $(\nu_1, \ldots, \nu_n)\in\mathbb{N}^n$ und es ist $X^\nu=X_1^{\nu_1}\ldots X_n^{\nu_n}$.

Weiter sei $M[\![X]\!]:=\{m=\sum m_\nu X^\nu\colon \nu\in\mathbb{N}^n\}$ der $I[\![X]\!]$-Modul der formalen Reihen in M.

Satz 2. *Ist M ein linear separierter I-Modul, so ist $M[\![X]\!]$ ein linear separierter $I[\![X]\!]$-Modul.*

Beweis. Es sei $m^0=\sum m_\nu^0 X^\nu \in M[\![X]\!]$, $m^0 \neq 0$. Dann gibt es ein Indextupel $\nu_0 \in \mathbb{N}^n$ mit $m_{\nu_0}^0 \neq 0$. Da M linear separiert gibt es eine Linearform $\varphi: M \to I$ mit $\varphi(m_{\nu_0}^0) \neq 0$. Durch die Setzung

$$\psi(m) := \sum_{\nu \geqq 0} \varphi(m_\nu) X^\nu \quad \text{für} \quad m=\sum m_\nu X^\nu \in M[\![X]\!]$$

wird φ zu einer Abbildung $\psi: M[\![X]\!] \to I[\![X]\!]$ fortgesetzt. Man verifiziert direkt, daß ψ linear ist. Da $\psi(m^0) \neq 0$, ist die Behauptung bewiesen.

Da jeder Vektorraum linear separiert über seinem Skalarkörper ist, folgt ein

Korollar. *Ist k ein Körper, V ein k-Vektorraum (z. B. ein Erweiterungskörper k' von k), so ist $V[\![X]\!]$ ein linear separierter $k[\![X]\!]$-Modul.*

Für eine Anwendung in §§ 5, 6 notieren wir noch

Hilfssatz 3. *Es sei I ein Integritätsring, M ein I-Modul, $N \subset M$ ein I-Untermodul. Ist N aufgefüllt in M, so ist $N[\![X]\!]$ aufgefüllt in $M[\![X]\!]$.*

§ 3. Ein Kriterium für erweiterungsendliche Ringe

Es sei I ein Ring.

1. Wir bezeichnen mit I_a den ganzen Abschluß von I in einem algebraischen Abschluß Q_a von $Q(I)$. I_a ist ein Oberring von I; es gilt $Q(I_a)=Q_a$. Es heiße I_a ein *universell-ganzer Abschluß von I*. Zwei universell-ganze Abschlüsse von I sind als I-Algebren isomorph. Ist Q' ein algebraischer Erweiterungskörper von Q, so kann angenommen werden, daß $Q \subset Q' \subset Q_a$. Alsdann ist $I_a \cap Q'$ der ganze Abschluß von I in Q'. Weiterhin ist $I_a \cap Q'$ stets ein aufgefüllter Untermodul des I-Moduls I_a.

Satz 1. *Es sei I noethersch und I_a ein universell-ganzer Abschluß von I. Dann ist I genau dann erweiterungsendlich, wenn I_a ein auffüllungsendlicher I-Modul ist.*

Beweis. 1) Es sei I_a auffüllungsendlich. $Q' \subset Q_a = Q(I_a)$ sei eine endlich-algebraische Erweiterung von Q. Es ist zu zeigen, daß der ganze Abschluß von I in Q', d. h. $I_a \cap Q'$ ein endlicher I-Modul ist. $I_a \cap Q'$ ist ein I-Untermodul von I_a mit $rg(I_a \cap Q') = [Q' : Q] < \infty$. Nach Satz 1.2 (mit $M := I_a$) ist daher $I_a \cap Q'$ ein endlicher I-Modul.

2) Es sei I erweiterungsendlich. $N \subset I_a$ sei ein endlicher I-Modul und N' die von N und I erzeugte I-Unteralgebra $\subset I_a$. Dann ist N' ebenfalls ein endlicher I-Modul. $Q' := Q(N') \subset Q_a$ ist ein endlich-algebraischer Erweiterungskörper von Q. Da I erweiterungsendlich und $I_a \cap Q'$ der ganze Abschluß von I in Q' ist, ist $I_a \cap Q'$ ein endlicher I-Mo-

dul. Es gilt $\tilde{N} \subset \tilde{N}' = I_a \cap Q'$. Da I noethersch ist, so ist $\tilde{N}$ ein endlicher I-Modul, w.z.b.w.

2. Die Bedingung für Erweiterungsendlichkeit von Satz 1 kann abgeschwächt werden, wenn I zusätzlich als normal, d.h. ganz abgeschlossen in $Q(I)$ vorausgesetzt wird.

Ist $p = \text{char } I$ die Charakteristik von I, so ist für $p = 0$ I erweiterungsendlich nach dem in der Einleitung angegebenen Ergebnis von NOETHER ([7]). Für $p \neq 0$ sei q stets eine Potenz von p und $I^{q^{-1}}$ der Ring der q-ten Wurzeln von I. $I^{q^{-1}} \subset I_a$ ist eine I-Unteralgebra von I_a und als Ring isomorph zu I. Mit $I^{p^{-\infty}} \subset I_a$ sei die Vereinigung aller $I^{q^{-1}}$ bezeichnet.

Satz 2. *Es sei I noethersch und normal mit* char $I = p \neq 0$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

i) *I ist erweiterungsendlich.*

ii) *I_a ist ein auffüllungsendicher I-Modul.*

iii) *$I^{p^{-\infty}}$ ist ein auffüllungsendlicher I-Modul.*

iv) *$I^{q^{-1}}$ ist für alle Potenzen q von p ein auffüllungsendlicher I-Modul.*

v) *$I^{p^{-1}}$ ist ein auffüllungsendlicher I-Modul.*

Beweis. Die Äquivalenz von i) und ii) ist der Inhalt von Satz 1. Da $I^{p^{-1}} \subset I^{q^{-1}} \subset I^{p^{-\infty}} \subset I_a$, sind die Implikationen ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ v) trivial. Wir zeigen nun als erstes die Implikation iv $\Rightarrow$ i): Da I normal ist, brauchen wir nach [2], Chap. 0, 23.1.2., nur zu zeigen, daß der ganze Abschluß $I_a \cap Q'$ von I in jeder endlichen radiziellen (=rein inseparablen) Erweiterung Q' von Q ein endlicher I-Modul ist (vgl. auch Einleitung). Da Q' endlich ist, gibt es eine Potenz q von p, so daß $Q' \subset Q^{q^{-1}} \subset Q_a$. Es gilt:

$$I_a \cap Q' \subset I_a \cap Q^{q^{-1}} = I^{q^{-1}},$$

denn jedes über I ganze $g \in Q^{q^{-1}}$ ist ganz über $I^{q^{-1}}$ und liegt also wegen $Q(I^{q^{-1}}) = Q^{q^{-1}}$ in $I^{q^{-1}}$, da $I^{q^{-1}}$ normal ist.

Da $I_a \cap Q' \subset I^{q^{-1}}$ von endlichem Rang und $I^{q^{-1}}$ auffüllungsendlich ist, ist $I_a \cap Q'$ ein endlicher I-Modul nach Satz 1.2, weil I noethersch ist.

Wir zeigen als letzten Schritt die Implikation v) $\Rightarrow$ iv): Es sei $q = p^n$. Mit Induktion über $n \geqq 1$ zeigen wir, daß $I^{q^{-1}}$ ein auffüllungsendlicher I-Modul ist. Der Induktionsbeginn $n = 1$ ist trivial. Sei nun $n > 1$. Es ist $I' := I^{p^{-(n-1)}}$ ein auffüllungsendlicher I-Modul nach Induktionsannahme und es ist $I'^{p^{-1}} = I^{p^{-n}}$. Es ist I' als Ring isomorph zu I und also ist $I'^{p^{-1}}$ ein auffüllungsendlicher I'-Modul. Daher ist $I'^{p^{-1}} = I^{p^{-n}}$ auch ein auffüllungsendlicher I-Modul nach Satz 1.3 (mit $M' := I'^{p^{-1}}$), w.z.b.w.

3. Wir bemerken als Anwendung folgenden Satz von MORI [3] und NAGATA [4].

Satz 3. *Der Ring $k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ der formalen Potenzreihen in endlich vielen Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$ über einem Körper k ist erweiterungsendlich*[2].

Den Beweis stützen wir auf folgende einfache

Bemerkung. Es sei p eine natürliche Zahl $\geqq 1$. $I[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ ist ein endlicher freier $I[\![X_1^p, \ldots, X_n^p]\!]$-Modul mit den Monomen $X_1^{\nu_1} \ldots X_n^{\nu_n}$, $0 \leqq \nu_i < p$, als Basis.

Nun zum Beweis von Satz 3: $I := k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ ist nach bekannten Sätzen ein normaler, noetherscher Integritätsring. Es gilt

$$I^{p^{-1}} = k^{p^{-1}}[\![X_1^{p^{-1}}, \ldots, X_n^{p^{-1}}]\!],$$

wobei $p = \operatorname{char} I = \operatorname{char} k \neq 0$ ist. $I' := k^{p^{-1}}[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ ist nach dem Korollar zu Satz 2.2 linear separiert. Da $I^{p^{-1}}$ nach der Bemerkung ein freier I'-Modul ist, so ist auch $I^{p^{-1}}$ als direkte Summe von linear separierten Moduln linear separiert. Mit Satz 2.1 ist daher I erweiterungsendlich, w.z.b.w.

§ 4. Stetig linear separierte Vektorräume

k sei ein nichttrivial bewerteter Körper (nicht notwendig vollständig!); alle vorkommenden Vektorräume seien k-Vektorräume.

1. *Ein topologischer Vektorraum V heißt stetig linear separiert, wenn es zu jedem $x \in V$, $x \neq 0$, eine stetige Linearform $\varphi: V \to k$ gibt mit $\varphi(x) \neq 0$.*

Jeder topologische Untervektorraum eines stetig linear separierten Vektorraumes ist stetig linear separiert; jede topologische direkte Summe und jedes topologische direkte Produkt von stetig linear separierten Vektorräumen ist stetig linear separiert. Jeder stetig linear separierte Vektorraum ist hausdorffsch.

Da eine Linearform $\varphi: V \to k$ eines topologischen Vektorraums V genau dann stetig ist, wenn Ker φ abgeschlossen in V ist und ein endlich-dimensionaler Vektorraum genau dann stetig linear separiert, wenn jede Linearform $\varphi \in V^*$ stetig ist, ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum V genau dann stetig linear separiert, wenn alle Hyperebenen von V abgeschlossen sind.

Daraus ergibt sich für beliebige, stetig linear separierte Vektorräume eine Konsequenz.

Satz 1. *Ist V ein stetig linear separierter Vektorraum, so ist jeder endlich-dimensionale Untervektorraum von V abgeschlossen.*

Beweis. Es sei U ein endlich-dimensionaler Untervektorraum von V und $\overline{U}$ die abgeschlossene Hülle von U in V. Angenommen, U ist nicht

[2] Von TATE stammt folgende Verallgemeinerung (vgl. [2], Chap. 0, § 23): $I[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ ist erweiterungsendlich, wenn I noethersch und erweiterungsendlich ist.

abgeschlossen in V. Sei $x\in\overline{U}$, $x\notin U$, und $U':=U+kx$. Da U' endlichdimensional und stetig linear separiert ist, ist U abgeschlossen in V. Da $U\subset U'\subset\overline{U}$, ist aber U dicht in U' und somit nicht abgeschlossen in U'. Dies ist ein Widerspruch; Satz 1 ist bewiesen.

2. Die in Satz 1 angegebene, notwendige Bedingung ist in einem wichtigen Spezialfall auch hinreichend (Satz 3).

Von nun an sei V ein ultrametrisch normierter k-Vektorraum, d.h. für die Norm $|\ |$ von V gilt die strenge Dreiecksungleichung

$$|x+y|\leqq\max(|x|,|y|) \qquad \text{für alle } x, y\in V.$$

Dann gilt stets $|x+y|=\max(|x|, |y|)$, wenn $|x|\neq|y|$.

Hilfssatz 2. *Es sei U ein Unterraum von V und $x\in V$ sei nicht adherent zu U. Es sei $\varphi\colon U\to k$ stetig und linear. Zu jeder reellen Zahl $\alpha>1$ gibt es eine Erweiterung φ' von φ auf $U':=U+kx$ derart, daß $|\varphi'|\leqq\alpha|\varphi|$.*

Beweis. Es ist

$$|x, U|:=\inf_{u\in U}|x+u|>0,$$

weil x nicht adherent zu U ist. Daher können wir ein $u_0\in U$ wählen, so daß $|x+u_0|\leqq\alpha|x, U|$ gilt. Mit $y:=x+u_0$ ist dann $U'=U+ky$ und

$$(*) \qquad |y|\leqq\alpha|u+y| \qquad \text{für } u\in U.$$

Durch die Definition $\varphi'(u+cy):=\varphi(u)$, $u\in U$, $c\in k$, wird eine φ fortsetzende Linearform auf U' erklärt, für die gilt:

$$|\varphi'(u+y)|=|\varphi(u)|\leqq|\varphi|\cdot|u|\leqq\alpha|\varphi|\cdot|u+y|, \quad u\in U.$$

Die letzte Ungleichung ist für $|u|\neq|y|$ trivial und folgt für $|u|=|y|$ aus $(*)$. – Es folgt $|\varphi'|\leqq\alpha|\varphi|$, w.z.b.w.

Satz 3. *Es sei V höchstens abzählbar-dimensional; jeder endlichdimensionale Unterraum von V sei abgeschlossen (dies ist stets erfüllt, wenn k vollständig ist). Dann ist V stetig linear separiert.*

Beweis. Es wird der nichttriviale Fall $\dim V=\infty$ behandelt. Es sei $0\neq x\in V$, $\{e_1=x, e_2, \ldots\}$ eine Basis von V und $U_{n+1}=U_n+ke_{n+1}$ mit $U_0=(0)$. Sei $1=\alpha_1<\alpha_2<\cdots$ eine streng monoton wachsende Folge mit $\lim\alpha_n=\alpha<\infty$ und φ_1 eine Linearform auf U_1, etwa $\varphi_1(cx)=c$, $c\in k$.

Mit Hilfssatz 2 und Induktion über n zeigt man die Existenz einer Folge $(\varphi_{n+1})_{n\geqq1}$ von Linearformen, wo φ_{n+1} auf U_{n+1} erklärt ist, so daß gilt: φ_{n+1} ist eine Fortsetzung von φ_n und es ist

$$|\varphi_{n+1}|\leqq\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}|\varphi_n|.$$

Faßt man die Linearformen φ_n zu einer Linearform φ auf

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = V$$

zusammen, so gilt wegen $|\varphi_n| \leqq \alpha_n |\varphi_1|$: $|\varphi| \leqq \alpha |\varphi_1|$, da $\alpha \geqq \alpha_n$. Satz 3 ist bewiesen[3].

§ 5. Der Ring der strikt konvergenten Potenzreihen

k sei ein nichttrivial, vollständig bewerteter Körper.

1. Die k-Banachalgebra

$$T_n := k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle := \left\{ f = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu X^\nu \in k[\![X]\!] : |f_\nu| \to 0 \right\},$$

$$\|f\| := \max_{\nu \in \mathbb{N}^n} |f_\nu| \text{ ist die Norm von } f \in T_n,$$

der strikt konvergenten Potenzreihen in n Unbestimmten über k ist noethersch und faktoriell, also normal ([1], p. 408, p. 413).

Der Beweisgang für die Erweiterungsendlichkeit von T_n unterscheidet sich nur in einem Punkt von dem entsprechenden Beweis für den Ring der formalen Potenzreihen (Satz 3.3). Da der Struktursatz für normierte Vektorräume nur für abzählbar unendlich-dimensionale Vektorräume zur Verfügung steht, läßt sich nicht stets zeigen, daß $T_n^{p^{-1}}$ ein linear separierter T_n-Modul ist. Wir können allerdings $T_n^{p^{-1}}$ durch aufgefüllte linear separierte T_n-Untermoduln so ausschöpfen, daß eine Anwendung von Satz 1.1, i möglich ist (Hilfssatz 2). Dies führt hier ebenso wie in § 6 zum Ziel.

Ist $p = \operatorname{char} k \neq 0$, so ist $k^{p^{-1}}$ auf natürliche Weise ein bewerteter Erweiterungskörper von k. Alsdann ist die Banachalgebra $T_n(k^{p^{-1}}) := k^{p^{-1}}\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ eine normierte T_n-Algebra.

2. Im folgenden sei $n \geqq 0$ beliebig, aber fest; wir schreiben T statt T_n.

Für jeden k-Vektorraum $V \subset k^{p^{-1}}$, $p \neq 0$, ist

$$M_V := \{f = \textstyle\sum f_\nu X^\nu \in T(k^{p^{-1}}) : f_\nu \in V\}$$

ein normierter T-Modul.

Hilfssatz 1. *Ist V höchstens abzählbar unendlich-dimensional, so ist M_V ein stetig linear separierter T-Modul, d.h. zu jedem $f \in M_V$, $f \neq 0$, gibt es eine stetige Linearform ψ: $M_V \to T$ mit $\psi(f) \neq 0$.*

Beweis. Es sei $f = \sum f_\nu X^\nu \in M_V$, $f \neq 0$, etwa $f_{\nu_0} \neq 0$. Nach Satz 4.3 existiert eine stetige Linearform φ: $V \to k$ mit $\varphi(f_{\nu_0}) \neq 0$. φ ist beschränkt; sei $L \in \mathbb{R}$, $L > 0$, eine Schranke:

$$|\varphi(v)| \leqq L|v| \qquad \text{für alle } v \in V.$$

[3] Die Ergebnisse dieses Abschnitts wurden auch von VAN DER PUT, Utrecht, erhalten in „Algèbres de fonctions continus p-adiques" (erscheint demnächst).

Durch

$$M_V \ni g = \sum g_\nu X^\nu \to \sum \varphi(g_\nu) X^\nu$$

wird eine Linearform ψ: $M_V \to T$ gegeben, denn wegen $|\varphi(g_\nu)| \leqq L|g_\nu|$ strebt $|\varphi(g_\nu)|$ mit $|g_\nu|$ gegen Null; d.h. $\psi(g) \in T$. Da ψ T-linear ist,

$$\|\psi(g)\| = \max_{\nu=0}^{\infty} |\varphi(g_\nu)| \leqq L \max_{\nu=0}^{\infty} |g_\nu| = L \cdot \|g\|$$

und $\psi(f) \neq 0$ gilt, ist der Hilfssatz bewiesen.

Nunmehr folgt

Hilfssatz 2. *$T(k^{p^{-1}})$ ist ein auffüllungsendlicher T-Modul, $p \neq 0$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{V}$ die Menge der höchstens abzählbar-unendlichdimensionalen Untervektorräume von $k^{p^{-1}}$. Das System $\{M_V : V \in \mathfrak{V}\}$ ist „gerichtet" im Sinne von Satz 1.1, denn wählt man zu $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$ ein $W \in \mathfrak{V}$ mit $V_1 + V_2 \subset W$, so gilt: $M_{V_1} + M_{V_2} \subset M_W$. Jedes M_V, $V \in \mathfrak{V}$, ist linear separiert und daher auffüllungsendlich, weil T noethersch ist. Ferner ist M_V, $V \in \mathfrak{V}$ aufgefüllt in $T(k^{p^{-1}})$. Ist nämlich $f \in T(k^{p^{-1}})$, $t \in T$, $t \neq 0$, mit $tf \in M_V$, so ist nach Hilfssatz 2.3 $f \in V[\![X]\!]$ und da f eine strikt konvergente Reihe ist, folgt $f \in M_V$.

Nach Satz 1.1, i ist mithin

$$\bigcup_{V \in \mathfrak{V}} M_V$$

auffüllungsendlich. Es gilt aber

$$T(k^{p^{-1}}) = \bigcup_{V \in \mathfrak{V}} M_V,$$

da zu $f = \sum f_\nu X^\nu \in T(k^{p^{-1}})$ stets ein $V \in \mathfrak{V}$ existiert, das alle Koeffizienten f_ν enthält.

Satz 3. *Der Ring $T = k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ der strikt konvergenten Potenzreihen in n Unbestimmten, $n \geqq 0$, über einem nichttrivial, nichtarchimedisch, vollständig bewerteten Körper k ist erweiterungsendlich.*

Beweis. Es sei $p := \mathrm{char}\, T (= \mathrm{char}\, k)$. Da T noethersch und normal ist, genügt es wegen Satz 3.2 zu zeigen, daß für $p \neq 0$ der Ring $T^{p^{-1}}$ ein auffüllungsendlicher T-Modul ist. Nun ist $T^{p^{-1}} = k^{p^{-1}}\langle\langle X_1^{p^{-1}}, \ldots, X_n^{p^{-1}}\rangle\rangle$ ein freier Modul über $T(k^{p^{-1}}) = k^{p^{-1}}\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ mit $(X_1^{p^{-1}})^{\nu_1} \ldots (X_n^{p^{-1}})^{\nu_n}$, $0 \leqq \nu_i < p$, als Basis, vgl. Bemerkung zu Satz 3.3. Da $T(k^{p^{-1}})$ nach Hilfssatz 2 ein auffüllungsendlicher T-Modul ist, ist auch $T^{p^{-1}}$ als endliche direkte Summe solcher Moduln auffüllungsendlich, w.z.b.w.

Bemerkung. Ist k nicht vollständig, so liefert der angegebene Beweis die Erweiterungsendlichkeit von $T = k\langle\langle X\rangle\rangle$, wenn nur bekannt ist, daß T noethersch und normal und k „quasi-vollkommen" ist, vgl. § 6.1. Es gilt hier auch ein Analogon zu dem Zusatz zu Satz 6, 3.

§ 6. Der Ring der konvergenten Potenzreihen

k sei ein nichttrivial bewerteter Körper, nicht notwendig vollständig.

1. Die k-Stellenalgebra

$$K_n := k\langle X_1, \ldots, X_n\rangle := \{f=\sum f_\nu X^\nu \in k[\![X]\!] : |f_\nu| \leqq \rho^\nu := \rho^{\nu_1+\cdots+\nu_n},$$
$$\text{wenn } \nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)\neq(0, \ldots, 0), \text{ für ein } \rho\in \mathbb{R}_+\}$$

der konvergenten Potenzreihen in n Unbestimmten über k ist noethersch und faktoriell, also normal ([5], p. 193).

Ist $p=\operatorname{char} k\neq 0$, so ist $k^{p^{-1}}$ auf natürliche Weise ein bewerteter Erweiterungskörper von k. k heiße *quasi-vollkommen* (bezüglich der Bewertung von k), wenn im Fall, daß $p\neq 0$ gilt, jeder endlich-dimensionale k-Untervektorraum $\subset k^{p^{-1}}$ abgeschlossen in $k^{p^{-1}}$ ist.

Beispiel eines bewerteten Körpers Q, der nicht quasi-vollkommen ist: Es sei $T=k\langle\langle X\rangle\rangle$, $I=T[k^{p^{-1}}]$, $T' := k^{p^{-1}}\langle\langle X\rangle\rangle$, $p=\operatorname{char} k\neq 0$, und Q (bzw. Q') der bewertete Quotientenkörper von I (bzw. T'). Ist k nichttrivial bewertet und gilt $[k^{p^{-1}}:k]=\infty$, so ist $Q\neq Q'$. Da jedoch $Q'\subset Q^{p^{-1}}$ und Q dicht in Q' ist, kann Q nicht quasi-vollkommen sein. (I ist noethersch und faktoriell, i.a. aber nicht erweiterungsendlich).

2. Im folgenden sei $n\geqq 0$ beliebig, aber fest; wir schreiben K statt K_n.

Für jeden k-Vektorraum $V\subset k^{p^{-1}}$, $p\neq 0$, ist

$$M_V := \{f=\sum f_\nu X^\nu \in K(k^{p^{-1}}) := k^{p^{-1}}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle : f_\nu \in V\}$$

ein K-Modul.

Hilfssatz 1. *Ist k quasi-vollkommen und $V\subset k^{p^{-1}}$ höchstens abzählbar unendlich-dimensional, so ist M_V ein linear separierter K-Modul.*

Beweis. Es sei $f=\sum f_\nu X^\nu \in M_V$, $f\neq 0$, etwa $f_{\nu_0}\neq 0$. Nach Satz 4.3 existiert eine stetige Linearform $\varphi: V\to k$ mit $\varphi(f_{\nu_0})\neq 0$. φ ist beschränkt; sei $L\in\mathbb{R}$, $L>1$, eine Schranke:

$$|\varphi(v)|\leqq L|v| \qquad \text{für alle } v\in V.$$

Durch

$$M_V \ni g=\sum g_\nu X^\nu \to \sum \varphi(g_\nu) X^\nu$$

wird eine Linearform $\psi: M_V\to K$ gegeben: Ist $\rho\in\mathbb{R}_+$ mit $|g_\nu|\leqq\rho^\nu$ für $\nu\neq(0, \ldots, 0)$, so ist $|\varphi(g_\nu)|\leqq L\rho^\nu\leqq(L\rho)^\nu$ für $\nu\neq(0, \ldots, 0)$, also $\sum\varphi(g_\nu)X^\nu\in K$. Da ψ K-linear ist und $\psi(f)\neq 0$ gilt, ist der Hilfssatz bewiesen.

Nunmehr folgt

Hilfssatz 2. *Ist k quasi-vollkommen, so ist $K(k^{p^{-1}})$ ein auffüllungsendlicher K-Modul.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{V}$ die Menge der höchstens abzählbar unendlich-dimensionalen k-Untervektorräume $\subset k^{p^{-1}}$. Das System $\{M_V: V\in\mathfrak{V}\}$ ist ein gerichtetes System von aufgefüllten K-Untermodul von $K(k^{p^{-1}})$ mit

$$K(k^{p^{-1}})=\bigcup_{V\in\mathfrak{V}} M_V,$$

was man wie in Hilfssatz 5.2 beweist. Aus Satz 1.1, i folgt wieder die Behauptung.

Satz 3. *Der Ring $K=k\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ der konvergenten Potenzreihen in n Unbestimmten, $n\geqq 0$, über einen nichttrivial, nichtarchimedisch bewerteten, quasi-vollkommenen Körper ist erweiterungsendlich.*

Beweis. Es sei $p=\mathrm{char}\, K=\mathrm{char}\, k$. Da K noethersch und normal ist, genügt es wieder zu zeigen, daß für $p\neq 0$ der Ring $K^{p^{-1}}$ ein auffüllungsendlicher K-Modul ist. Nun ist $K^{p^{-1}}=k^{p^{-1}}\langle X_1^{p^{-1}}, \ldots, X_n^{p^{-1}}\rangle$ ein freier Modul über $K(k^{p^{-1}})=k^{p^{-1}}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ mit $(X_1^{p^{-1}})^{\nu_1}\ldots(X_n^{p^{-1}})^{\nu_n}, 0\leqq \nu_i<p$, als Basis. Da $K(k^{p^{-1}})$ nach Hilfssatz 6.2 ein auffüllungsendlicher K-Modul ist, ist auch $K^{p^{-1}}$ als endliche direkte Summe solcher Moduln auffüllungsendlich, w.z.b.w.

Bemerkung. Ist k archimedisch bewertet, so ist K stets erweiterungsendlich, da dann $\mathrm{char}\, k=0$ gilt. Ist die Bewertung von k trivial, so ist K der Ring der formalen Potenzreihen und die Erweiterungsendlichkeit von K folgt aus Satz 3.3.

3. **Zusatz zu Satz 3.** *Die Voraussetzung, daß jeder endliche Untervektorraum von $k^{p^{-1}}$ abgeschlossen ist, ist für die Erweiterungsendlichkeit von K auch notwendig.*

Beweis. Wir zeigen, daß $K_1=k\langle X\rangle$ sonst nicht erweiterungsendlich ist. Besitzt $k^{p^{-1}}$ nichtabgeschlossene endliche Unterräume, so gibt es auch einen endlich-dimensionalen Vektorraum $V=[v_1, \ldots, v_t]\subset k^{p^{-1}}$, $\dim V=t$, der nicht Produkttopologie trägt. Dann gibt es zu jeder reellen Konstanten $C>0$ ein

$$u=c_1 v_1+\cdots+c_t v_t\in V,\quad c_i\in k,\quad \text{mit}\quad |u|\leqq 1\quad \text{und}\quad \max_{i=1}^{t}|c_i|\geqq C.$$

Insbesondere gibt es zur Folge $C_\nu:=\nu^\nu$, $\nu\geqq 1$, eine Folge

$$u_\nu=c_{\nu 1}v_1+\cdots+c_{\nu t}v_t\in V,\quad c_{\nu i}\in k,\quad \nu\geqq 1,\quad \text{mit}\quad |u_\nu|\leqq 1,$$
$$\max_{i=1}^{t}|c_{\nu i}|\geqq \nu^\nu.$$

Nun gilt

$$f:=\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu X^\nu\in k^{p^{-1}}\langle X\rangle=:K'.$$

Es ist

$$f=\sum_{i=1}^{t} f_i v_i, \quad \text{wo} \quad f_i := \sum_{\nu=1}^{\infty} c_{\nu i} X^{\nu} \in k[\![X]\!].$$

Wenigstens ein f_i liegt nicht in $k\langle X\rangle$, da es jedenfalls ein i gibt, für welches $|c_{\nu i}| \geqq \nu^{\nu}$ unendlich oft gilt.

Die Auffüllung $\tilde{M}$ des von $f, v_1, \ldots, v_t$ erzeugten K-Untermoduls $M \subset K'$ kann nun nicht endlich erzeugbar sein. Es ist $rg_K M = t+1$. In der X-adischen Topologie auf K' ist f adherent zu

$$\sum_{i=1}^{t} K v_i .$$

Daher folgt die Behauptung aus nachstehendem Hilfssatz.

Hilfssatz 4. *Es sei I noethersch, $0 \neq a \in I$, M ein I-Modul und N ein Untermodul von M. Ist die Auffüllung $\tilde{N}$ von N in M endlich erzeugbar, dann stimmt die Relativtopologie auf N der a-adischen Topologie auf M überein mit der a-adischen Topologie auf N.*

Beweis. Es gilt $a^n M \cap \tilde{N} = a^n \tilde{N}$, da aus $a^n m \in a^n M \cap N$, $m \in M$, folgt: $m \in \tilde{N}$, also $a^n m \in a^n \tilde{N}$. Daher ist die Aussage des Satzes für aufgefüllte Untermoduln bereits bewiesen. Da $\tilde{N}$ endlich und I noethersch, wird auch die a-adische Topologie von $N \subset \tilde{N}$ nach dem Lemma von ARTIN-REES induziert von der a-adischen Topologie auf $\tilde{N}$, w.z.b.w.

Literatur

[1] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Nichtarchimedische Funktionentheorie. Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westf., Wissenschaftl. Abhandlung, Bd. 33. Opladen: Westdeutscher Verlag 1966.

[2] GROTHENDIECK, A.: Elements de la geometrie algébrique. I. Publ. Math. IHES 20 (1964); II. Publ. Math. IHES 24 (1965).

[3] MORI, Y.: On the integral closure of an integral domain II. Bull. Kyoto Gakugei Univ. B **7**, 19—30 (1955).

[4] NAGATA, M.: Some remarks on local rings II. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto **28**, 109—120 (1953/54).

[5] — Local rings. New York: Interscience 1962.

[6] NASTOLD, H.-J.: Zur nichtarchimedischen Funktionentheorie (erscheint demnächst).

[7] NOETHER, E.: Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. Math. Ann. **96**, 26—61 (1926).

[8] SCHMIDT, F.K.: Über die Erhaltung der Kettensätze der Idealtheorie bei beliebigen endlichen Körpererweiterungen. Math. Z. **41**, 443—450 (1936).

[9] TATE, J.: Rigid analytic spaces. IHES 1962.

Mathematisches Institut
der Universität Göttingen

(Eingegangen am 26. September 1966)

Inventiones math. 2, 191—214 (1967)

Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie

REINHARDT KIEHL (Münster/Westf.)

Einleitung

Nichtarchimedische Funktionentheorie ist die Theorie der holomorphen Funktionen über einem nichtarchimedisch vollständig bewerteten Körper. Da der n-dimensionale affine Raum über einem solchen Körper total unzusammenhängend ist, bekommt man zu viele holomorphe Funktionen, wenn man alle diejenigen Funktionen zuläßt, die sich lokal in eine Potenzreihe entwickeln lassen. Nur die Funktionen sind „gute" holomorphe Funktionen, die sich in jedem Polyzylinder *global* durch eine Potenzreihe darstellen lassen. Erst durch eine zusätzliche Struktur, nämlich die Prägarbe, die jedem Polyzylinder die dort konvergenten Potenzreihen zuordnet, wird der n-dimensionale affine Raum zu einem globalen analytischen Raum.

Globale analytische Räume mit einer solchen zusätzlichen globalen Struktur wurden erstmals von TATE in [*13*] eingeführt. In Arbeiten von GRAUERT und REMMERT und NASTOLD wurden diese Räume untersucht und verschiedene Sätze aus der komplexen Funktionentheorie auf die nichtarchimedische Funktionentheorie übertragen. Beispielsweise konnten GRAUERT und REMMERT mit Hilfe des Satzes von L. SCHWARTZ zeigen, daß auch in der nichtarchimedischen Funktionentheorie der Endlichkeitssatz von CARTAN und SERRE gilt (unveröffentlicht):

Auf einem geschlossenen analytischen Raum sind die Kohomologiegruppen kohärenter Garben endliche Vektorräume über dem Grundkörper.

Anschließend an den Grauert-Remmertschen Begriff eines geschlossenen Raumes wird in dieser Arbeit versucht, eine passende Definition eigentlicher Abbildungen nichtarchimedisch analytischer Räume zu finden, und für diese eigentlichen Abbildungen der in der algebraischen Geometrie von GROTHENDIECK, in der komplexen Funktionentheorie von GRAUERT bewiesene Endlichkeitssatz gezeigt:

Die Lerayschen Bildgarben einer kohärenten Garbe bei einer eigentlichen Abbildung sind wieder kohärent.

In einem einleitenden Paragraphen werden in Anlehnung an [*11*] und [*13*] die wichtigsten Begriffe und Bezeichnungen aus der Theorie der

affinoiden Algebren kurz zusammengestellt und im Anschluß daran eine für die Zwecke dieser Arbeit geeignete Definition global analytischer Räume gegeben. Um zu einer guten Kohomologietheorie zu gelangen, erweist es sich als notwendig, die Theorie der Grothendieck-Topologien heranzuziehen, die in [1] bzw. [2] ausführlich dargestellt wird.

In Paragraph 1 führen wir vollständig stetige Homomorphismen topologischer Moduln über affinoiden Ringen ein und beweisen insbesondere den Satz von SCHWARTZ (Satz 1.2). Einen hier benötigten Satz über $V\langle\langle X\rangle\rangle$-Moduln findet man im Anhang (§5).

In den folgenden Paragraphen 2 und 3 werden dann eigentliche Abbildungen definiert, und gezeigt, daß die aus der algebraischen Geometrie und der komplexen Funktionentheorie bekannte Definition einer eigentlichen Abbildung als universell abgeschlossene Abbildung hier unbrauchbar ist, und dann in mehreren Schritten der Hauptsatz über die Kohärenz der Bildgarben (Satz 3.3) bewiesen.

In einem abschließenden Abschnitt (§4) bringen wir einige Anwendungsbeispiele, etwa den im Komplexen von REMMERT bewiesenen Satz:

Das Bild einer abgeschlossenen analytischen Teilmenge bei einer eigentlichen Abbildung ist abgeschlossene analytische Teilmenge.

Zum Schluß möchten wir noch darauf hinweisen, daß die „Beinahe Noetherschen" Moduln aus § 5 nichts mit den von GRAUERT und REMMERT in [8] eigeführten Quasi-noetherschen Ringen zu tun haben.

Inhalt

§ 0. Analytische Räume über nichtarchimedisch bewerteten Körpern 192
§ 1. Vollständig stetige Abbildungen 197
§ 2. Eigentliche Abbildungen analytischer Räume 202
§ 3. Der Kohärenzsatz für eigentliche Morphismen 206
§ 4. Anwendungen 211
§ 5. Anhang. Beinahe Noethersche $V\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$-Moduln 211

§ 0. Analytische Räume über nichtarchimedisch bewerteten Körpern

Im folgenden sei k ein nichtarchimedisch vollständig bewerteter Körper mit der nichttrivialen Bewertung $|\ |: k \to R$, V sein Bewertungsring, $\tilde{k}$ der zugehörige Restklassenkörper und t ein von Null verschiedenes Element aus dem maximalen Ideal m von V, das m im Falle einer diskreten Bewertung erzeugen soll.

Die freie affinoide Algebra $T_n = k\langle\langle X\rangle\rangle = k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ ist der Ring derjenigen Potenzreihen

$$f = \sum_{i_1,\ldots,i_n \geqq 0} a_{i_1\ldots i_n} X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n} = \sum_i a_i X^i$$

in den Variablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Koeffizienten a_i aus k, für die die Folge a_i gegen Null konvergiert. Weiter werden wir über k topologische Vektorräume E betrachten, deren Topologie durch ein Gitter E_0, d.h. einen V-Untermodul E_0 mit $E_0 \cdot k = E$, definiert wird: Nullumgebungsbasis bilden die V-Moduln $t^n E_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Wenn nicht anders gesagt, ist E komplett und separiert.

Wir betrachten die Kategorie C^* der vollständigen topologischen k-Algebren, deren Topologie als k-Vektorraum von der betrachteten Art ist. Die Topologie wird in diesen Algebren B durch eine V-Unteralgebra B_0 definiert. $\mathfrak{A}$ sei die volle Unterkategorie der topologisch endlich erzeugten Algebren aus C^*. Die Algebren aus $\mathfrak{A}$ sind dann gerade die Faktorringe von Algebren T_n, d.h. die *affinoiden* k-Algebren. Die Eigenschaften dieser Algebren wurden in [*13*] eingehend untersucht.

Wir werden jetzt, ein wenig abweichend von TATE, analytische Räume über k einführen. Dazu benötigen wir eine Verallgemeinerung des bekannten Begriffs des geringten Raumes.

Sei X ein topologischer Raum, $\mathfrak{S}$ ein System von offenen Teilmengen, den *zulässigen* offenen Teilmengen.

$$\emptyset, X \in \mathfrak{S}$$

$$U, V \in \mathfrak{S} \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{S}.$$

In der Kategorie $\mathfrak{S}$ der zulässigen offenen Teilmengen sei eine *Grothendieck-Topologie* $\mathfrak{T}$ gegeben ([*1*, *2*]) etwa durch eine Prätopologie, d.h. Auszeichnung gewisser Überdeckungen $\{U_i\}$ jeder zulässigen offenen Teilmenge U durch zulässige offene Teilmengen U_i ([*1*, *2*])

$$\bigcup U_i = U.$$

Eine beliebige Überdeckung $\{U_i\}$ einer zulässigen offenen Menge U durch zulässige Mengen U_i heißt *zulässig*, wenn sie durch eine ausgezeichnete Überdeckung verfeinert werden kann. Wir verlangen folgende Vollständigkeitseigenschaft für $\mathfrak{S}$:

Eine offene Teilmenge V einer zulässigen offenen Teilmenge U gehört genau dann selber zu $\mathfrak{S}$, wenn es eine zulässige Überdeckung $\{U_i\}$ von U gibt, so daß alle Durchschnitte $V \cap U_i$ zu $\mathfrak{S}$ gehören.

Auf einem so mit einer Grothendieck-Topologie $\mathfrak{T}$ versehenen Raum X können nach [*1*] bzw. [*2*] Prägarben und Garben definiert werden: Eine *Prägarbe* $\mathscr{F}$ von Mengen, abelschen Gruppen bzw. Ringen, ist ein kontravarianter Funktor auf der Kategorie der zulässigen offenen Mengen mit Werten in der Kategorie der Mengen, abelschen Gruppen bzw. der Ringe; ein *Garbe* ist eine Prägarbe, die der bekannten Garbeneigenschaft für zulässige Überdeckungen genügt. Zu jeder Prägarbe $\mathscr{F}$ gehört eine Garbe $\mathscr{F}^*$.

Ist x ein Punkt aus X, $\mathscr{F}$ eine Garbe, etwa von abelschen Gruppen, so definiert man wie üblich die Gruppe:

$$\mathscr{F}_x = \varinjlim_{x \in U,\, U \in \mathfrak{S}} \mathscr{F}(U).$$

Definition 0.1. *Ein Grothendieck-geringter Raum, kurz ein G-geringter Raum, $(X, \mathfrak{T}, \mathcal{O}_X)$ ist ein topologischer Raum X, zusammen mit einer Grothendieck-Topologie $\mathfrak{T}$ der beschriebenen Art auf einer Klasse von zulässigen offenen Mengen und einer Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ von Ringen in bezug auf $\mathfrak{T}$.*

Ein G-geringter Raum $(X, \mathfrak{T}, \mathcal{O}_X)$ – in abgekürzter Schreibweise $(X, \mathcal{O}_X)$ oder einfach X – heißt *lokal G-geringt*, wenn für alle Punkte x aus X der Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ lokal ist.

Zu den Räumen die passenden Morphismen:

Definition 0.2. *Ein Morphismus $f=(\varphi, \psi)\colon X \to Y$ von G-geringten Räumen X und Y ist ein Paar von Abbildungen φ und ψ: φ ist eine stetige Abbildung der unterliegenden topologischen Räume, so daß das Urbild einer zulässigen offenen Menge zulässig, das Urbild einer zulässigen Überdeckung (einer zulässigen offenen Menge) wieder zulässige Überdeckung ist.*

$\psi\colon \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ ist ein Homomorphismus von Garben, d.h. ein System von Homomorphismen für alle zulässigen $U \in Y$

$$\mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X\big(\varphi^{-1}(U)\big),$$

verträglich mit den Restriktionsabbildungen.

Für jeden Punkt x aus X mit dem Bildpunkt y induziert ψ einen Homomorphismus

$$\psi_x\colon \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}.$$

Der Morphismus f ist ein Morphismus lokal G-geringter Räume, wenn X und Y lokal G-geringt und alle Homomorphismen ψ_x lokal sind.

Jede zulässige offene Teilmenge eines (lokal) G-geringten Raumes X ist zusammen mit der induzierten Struktur wieder ein (lokal) G-geringter Raum, ein *offener Unterraum* von X.

Sei A eine affinoide k-Algebra, $\mathrm{Sp}(A)$ ihr maximales Spektrum, d.h. die Menge der maximalen Ideale von A. Diese Menge kann topologisiert werden: Eine Basis $\mathfrak{B}$ dieser Topologie bilden die *affinoiden Teilbereiche* (s. [*11*] oder [*13*] bzw. [*10*]). Jeder Homomorphismus $h\colon A \to B$ aus $\mathfrak{A}$ induziert eine stetige Abbildung $\mathrm{Sp}(h)\colon \mathrm{Sp}(B) \to \mathrm{Sp}(A)$.

Von TATE ([*13*]) wurden gewisse Überdeckungen durch affinoide Teilbereiche ausgezeichnet, die *speziellen Überdeckungen* (s. [*10*] oder [*13*]). Auf dem Spektrum $\mathrm{Sp}(A)$ einer affinoiden Algebra A erklärt man ein System $\mathfrak{S}$ zulässiger offener Teilmengen: die offene Teilmenge U gehört

genau dann zu $\mathfrak{S}$, wenn sie Vereinigung einer Familie $(U_i)_{i\in I}$ von affinoiden Teilbereichen ist, so daß für jeden Homomorphismus $h\colon A\to B$, für den $\mathrm{Sp}(h)(\mathrm{Sp}(B))$ in U enthalten ist, die Überdeckung $(\mathrm{Sp}(h)^{-1}(U_i))_{i\in I}$ zu einer speziellen Überdeckung von $\mathrm{Sp}(B)$ verfeinert werden kann. Die speziellen Überdeckungen definieren eine Grothendieck-Topologie $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{S}$. Der auf $\mathfrak{B}$, der Menge der affinoiden Teilbereiche $\mathrm{Sp}(B)$ von $X=\mathrm{Sp}(A)$, erklärte Funktor

$$\mathrm{Sp}(B)\rightsquigarrow B$$

ist auf $\mathfrak{B}$ Garbe ([*13*], Th. 8.2, p. 25) und kann daher zu einer Garbe $\mathcal{O}_X$ von Ringen auf ganz $\mathfrak{S}$ fortgesetzt werden ([*1*]).

Definition 0.3. *Der lokal G-geringte Raum* $(\mathrm{Sp}(A)=X, \mathfrak{T}, \mathcal{O}_X)$ *heißt der zu A assoziierte affinoide Raum; kurze Bezeichnung:* $\mathrm{Sp}(A)$. *Jeder Homomorphismus* $h\colon A\to B$ *induziert einen Morphismus lokal G-geringter Räume* $\mathrm{Sp}(h)\colon \mathrm{Sp}(B)\to\mathrm{Sp}(A)$, *und man erhält so eine eineindeutige Korrespondenz zwischen der Menge der Homomorphismen* $A\to B$ *und der Menge der Morphismen lokal G-geringter Räume* $\mathrm{Sp}(B)\to\mathrm{Sp}(A)$ (über $\mathrm{Sp}(k)$).

Definition 0.4. *Ein lokal G-geringter Raum heißt analytisch, wenn er eine zulässige Überdeckung durch offene affinoide Unterräume besitzt.*

Wir nennen die Kategorie der analytischen Räume An, genauer $\mathrm{An}(k)$.

Jedem endlichen Modul M über einer affinoiden Algebra A kann man eine Garbe von $\mathcal{O}_{\mathrm{Sp}(A)}$*-Moduln* $\tilde{M}$ *zuordnen:*

$$\tilde{M}(\mathrm{Sp}(B))=M\otimes_A B$$

für jeden affinoiden Teilbereich $\mathrm{Sp}(B)$ von $X=\mathrm{Sp}(A)$.

$\tilde{M}$ heißt die zu *M asoziierte* Garbe. Ebenso ordnet man jedem Homomorphismus $h\colon M\to N$ endlicher A-Moduln einen Garbenhomomorphismus $\tilde{h}\colon \tilde{M}\to\tilde{N}$ zu. *Man erhält so eine Äquivalenz der Kategorie aller endlichen A-Moduln mit einer vollen Unterkategorie der Kategorie der* $\mathcal{O}_{\mathrm{Sp}(A)}$*-Moduln* ([*13, 11*]).

Auf *G*-geringte Räume kann man den bekannten Begriff der kohärenten Garbe übertragen.

Für analytische Räume erhält man:

Definition 0.5. *Ein* $\mathcal{O}_X$*-Modul* $\mathcal{G}$ *auf einem analytischen Raum X heißt kohärent, wenn es eine zulässige Überdeckung* $\mathfrak{U}=(U_i)_{i\in J}$ *von X durch offene affinoide Unterräume* $U_i=\mathrm{Sp}(A_i)$ *gibt, so daß für die Einschränkungen* $\mathcal{G}\mid U_i$ *von* $\mathcal{G}$ *auf* U_i *eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist:*

0.5.1. $\mathcal{G}\mid U_i$ *ist Kokern eines Homomorphismus endlicher freier* $\mathcal{O}_{U_i}$*-Moduln.*

*0.5.2. Es gibt einen endlichen A_i-*Modul M_i, *so daß $\mathcal{G}$ von der Gestalt $\mathcal{G}=\tilde{M}_i$ ist.*

In [*10*] werden wir folgenden wichtigen Satz zeigen (Cartansches Verheftungslemma [*10*], §1):

Jede kohärente Garbe auf einem affinoiden Raum $\mathrm{Sp}(A)$ *ist von der Form $\tilde{M}$, wobei M ein endlicher A-Modul ist.*

Äquivalent dazu sind auch Theorem A und Theorem B für kohärente Garben auf affinoiden Räumen.

Die Kategorie der Garben von $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ eines analytischen Raumes X besitzt genügend viele injektive Objekte, so daß mit Hilfe injektiver oder welker Auflösungen auf übliche Weise die abgeleiteten Funktoren $H^i(X, \mathcal{F})$ des *Schnittfunktors* $\Gamma(X, \mathcal{F})=\mathcal{F}(X)$ und die abgeleiteten Funktoren $R^i f_*(\mathcal{F})$ des *direkten Bildes* $f_*(\mathcal{F})$ bei einem Morphismus $f\colon X \to Y$ erklärt werden können. $R^i f_*(\mathcal{F})$ ist die zur Prägarbe $U \rightsquigarrow H^i(f^{-1}(U), \mathcal{F})$ assoziierte Garbe. Zur Berechnung der Kohomologiegruppen $H^i(X, \mathcal{F})$ benötigt man die *Čechschen Kohomologiegruppen* $H^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, d.h. die Kohomologiegruppen des zu einer zulässigen Überdeckung $\mathfrak{U}=(U_i)_{i\in I}$ gehörenden *Čechkomplexes* $C(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ (s. [*1*]). TATE hat gezeigt, daß auf einem affinoiden Raum $X=\mathrm{Sp}(A)$ die *Cechschen Kohomologiegruppen $H^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ einer zu einem endlichen A-Modul M assoziierten Garbe $\mathcal{F}=\tilde{M}$ zu einer zulässigen affinoiden Überdeckung $\mathfrak{U}$ verschwinden, wenn $i\geqq 1$ ist.* Aus [*1*] folgt dann, daß auch die *Kohomologiegruppen $H^i(X, \mathcal{F})=0$ sind für $i\geqq 1$.* Im folgenden betrachten wir Räume X, in denen der Durchschnitt affinoider offener Teilräume wieder affinoid ist. Ist dann $\mathfrak{U}$ eine zulässige affinoide Überdeckung von X, $\mathcal{F}$ kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, so folgt aus der Azyklizität von $\mathcal{F}$ auf allen affinoiden Teilräumen mit LERAY

$$H^i(X, \mathcal{F})=H^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Insbesondere gilt für eine zulässige affinoide Verfeinerung $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{U}$:

$$H^i(\mathfrak{U}, \mathcal{F})=H^i(\mathfrak{V}, \mathcal{F}).$$

Außerdem folgt: *Die i-te Kohomologiegruppe einer kohärenten Garbe verschwindet, wenn $i\geqq n+1$ ist und X eine zulässige Überdeckung durch n affinoide offene Teilräume besitzt.*

Vermerken wir noch, daß das *kartesische Produkt* $X \underset{Z}{\times} Y$ zweier analytischer Räume X, Y über einem dritten Z konstruiert werden kann. Speziell: $\mathrm{Sp}(A) \underset{\mathrm{Sp}(C)}{\times} \mathrm{Sp}(B)=\mathrm{Sp}(A \hat{\otimes}_C B)$. Ist $Z=\mathrm{Sp}(A)$, $Y=\mathrm{Sp}(B)$, so schreibt man auch: $X \hat{\otimes}_A B$ für $X \underset{\mathrm{Sp}(A)}{\times} \mathrm{Sp}(B)$.

Zumindest für endliche Grundkörpererweiterungen K/k kann der Funktor *Grundkörpererweiterung*

$$\mathrm{An}(k) \rightsquigarrow \mathrm{An}(K)$$

auf natürliche Weise definiert werden, der dem Raum X über k den Raum $X \otimes_k K$ über K zuordnet.

$$\mathrm{Sp}(A) \otimes_k K = \mathrm{Sp}(A \otimes_k K).$$

Für eine kohärente Garbe $\mathscr{F}$ auf X konstruiert man auf natürliche Weise den kohärenten $O_{X \otimes K}$-Modul $\mathscr{F} \otimes_k K$. Man sieht sofort, daß für eine affinoide zulässige Überdeckung $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ von X $\mathfrak{U} \otimes K = (U_i \otimes K)_{i \in I}$ affinoide zulässige Überdeckung von $X \otimes K$ ist und daß $H^i(\mathfrak{U} \otimes K, \mathscr{F} \otimes K) = H^i(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \otimes K$ ist.

Zum Schluß möchte ich noch kurz erwähnen, was unter einer *analytischen Teilmenge* M bzw. einem *abgeschlossenen analytischen Teilraum* eines analytischen Raumes X zu verstehen ist. M heißt analytische Teilmenge von X, wenn es ein kohärentes $\mathcal{O}_X$-Ideal $\mathscr{I}$ gibt, so daß M gerade der Träger der Garbe $\mathcal{O}_X/\mathscr{I}$ ist.

Dabei wollen wir in dieser Arbeit unter dem Träger einer Garbe $\mathscr{G}$ immer den Träger im Sinne der gewöhnlichen Topologie verstehen, d.h. die Menge der Punkte x aus X, für die $\mathscr{G}_x$ nicht verschwindet. Wir schreiben:

$M = V(\mathscr{I})$. M wird kanonisch mit einer analytischen Struktur versehen, so daß die Injektion $i\colon M \hookrightarrow X$ Morphismus und das direkte Bild $i_*(\mathcal{O}_M) = \mathcal{O}_X/\mathscr{I}$ ist. Wir nennen i eine Einbettung. Wir werden in einer späteren Arbeit genauer auf alle diese Dinge eingehen.

§ 1. Vollständig stetige Abbildungen

B sei im folgenden eine fest gewählte affinoide Algebra, deren Topologie durch die V-Unteralgebra B_0 definiert wird. In diesem Paragraphen sollen stetige Homomorphismen von solchen vollständigen topologischen B-Moduln M untersucht werden, deren Topologie durch einen B_0-Untermodul M_0 definiert werden kann. Sowohl auf B, wie auf M erklärt man auf natürliche Weise eine Norm: z. B. ist für ein Element m aus M

$$|m| = \inf_{a \in k,\, m \in a M_0} |a|.$$

Der Raum der stetigen B-Homomorphismen eines solchen B-Moduls in einen anderen läßt sich in bekannter Weise wieder als topologischer B-Modul der angegebenen Art auffassen.

Definition 1.1. *Ein B-Homomorphismus f: $M \to N$ vollständiger B-Moduln M und N heißt vollständig stetig, wenn es eine gegen f konvergierende Folge f_i von endlichwertigen stetigen B-Homomorphismen f_i: $M \to N$ gibt, d.h. von Homomorphismen, deren Bild endlicher B-Modul ist.*

f heißt streng vollständig stetig, wenn es ein von Null verschiedenes Element a in V gibt, so daß für alle i $a \cdot f_i(M_0)$ in einem — von i abhängigen — endlichen B_0-Untermodul von N_0 enthalten ist.

Beispielsweise ist f: $M \to N$ streng vollständig stetig, wenn es eine gleichmäßig beschränkte Folge von Elementen n_i aus N und eine gleichmäßig beschränkte Folge von stetigen B-linearen Abbildungen v_i: $M \to B$ gibt, so daß sich f in eine Reihe $f = \sum v_i \otimes n_i$ entwickeln läßt; dabei ist die Abbildung $v_i \otimes n_i$: $M \to N$ erklärt durch: $(v_i \otimes n_i)(m) = v_i(m) \cdot n_i$.

Wir beweisen jetzt den Satz von SCHWARTZ:

Satz 1.2. *Gegeben seien ein surjektiver, stetiger Homomorphismus f: $M \to N$ und ein vollständig stetiger Homomorphismus g: $M \to N$. Dann ist das Bild von $f+g$ abgeschlossen und der Kokern $N/(f+g)(M)$ endlicher B-Modul. Kurz:* $\mathrm{Im}(f+g)$ *ist von endlichem Index.*

Zum Beweis benötige ich ein Lemma:

Lemma 1.3. *f: $M \to N$ sei stetig und surjektiv. Dann gibt es eine reelle Zahl $c > 0$, so daß für jeden Homomorphismus ε: $M \to N$ mit $|\varepsilon| < c$ die Abbildung $f - \varepsilon$ surjektiv ist.*

Beweis. Nach dem Satz von BANACH ist f offen; infolgedessen gibt es zu f eine — nicht unbedingt lineare — aber beschränkte Gegenabbildung b: $N \to M$

$$|b| < \infty \qquad f \circ b = id$$

Ist

$$|\varepsilon| < \frac{1}{|b|} = c,$$

so konvergiert die Reihe

$$g = \sum_{i=0}^{\infty} (b\varepsilon)^i b,$$

die geometrische Reihe, und es ist $(f-\varepsilon) \circ g = \mathrm{id}$.

Wir kommen jetzt zum Beweis des Satzes 1.2. Es gibt eine Folge von endlichwertigen Abbildungen g_i, die gegen g konvergiert. Für genügend großes i ist also auch die Abbildung $h = f - (g_i - g)$ surjektiv.

$f+g = h+g_i$ hat die gewünschten Eigenschaften:

Der Kern von h sei H, der Kern von g_i K. K hat endlichen Index und ist abgeschlossen. Da jeder Untermodul eines endlichen B-Moduls abgeschlossen ist, muß $K+H$ als Urbild eines Untermoduls von M/K eben-

falls abgeschlossen sein und endlichen Index haben. Deshalb ist auch $(h+g_i)(K)=h(K)=h(K+H)$ abgeschlossen und von endlichem Index, daher auch der zwischen N und $(h+g_i)(K)$ liegende Modul $(h+g_i)(M)=(f+g)(M)$.

Fertig!

In den Anwendungen steht man häufig vor folgender Frage: N sei ein abgeschlossener Untermodul von G, $j\colon N\hookrightarrow G$ die zugehörige Injektion und $f\colon M\to N$ ein Homomorphismus, so daß $j\cdot f$ vollständig stetig ist. Ist dann auch die Abbildung f vollständig stetig?

Offenbar ist die Behauptung richtig, wenn N in G topologisch als direkter Summand abspaltet, wenn es also eine stetige Projektion $p\colon G\to N$ gibt, die auf N die Identität induziert. Dieser Fall tritt immer ein, wenn $B=k$ ein diskret oder maximal vollständig bewerteter Körper ist ([*12*]).

Im allgemeinen Fall muß man stärkere Voraussetzungen über f und M machen.

Satz 1.4. *Sei $f\colon M\to N$ ein Homomorphismus eines vollständigen B-Moduls in einen abgeschlossenen Untermodul N eines vollständigen B-Moduls G, $j\colon N\hookrightarrow G$ die Injektion von N in G und sei die zusammengesetzte Abbildung $j\circ f\colon M\to G$ streng vollständig stetig. Wenn M topologisch freier B-Modul ist, d.h. vollständige direkte Summe einer Familie $(B\cdot e_s)_{s\in J}$ von Untermoduln $B\cdot e_s\cong B$ bezüglich der Familie $(B_0\, e_s)_{s\in J}$, so ist auch f streng vollständig stetig. Dabei verstehen wir unter der vollständigen (oder topologischen) direkten Summe*

$$\hat{\bigoplus_{i\in J}} M^{(i)}$$

einer Familie $(M^{(i)})_{i\in J}$ von topologischen B-Moduln bezüglich der Familie $(M_0^{(i)})_{i\in J}$ von B_0-Untermoduln die Komplettierung der algebraischen direkten Summe

$$\bigoplus_{i\in J} M^{(i)}$$

nach der Topologie definiert durch den B_0 Untermodul

$$\bigoplus_{i\in J} M_0^{(i)}.$$

Ist M nicht topologisch frei, so gibt es immer einen surjektiven stetigen B-Homomorphismus $p\colon F\to M$ eines topologisch freien B-Moduls F auf M, so daß dann wenigstens $f\circ p$ streng vollständig stetig ist.

Der Beweis der letzten Aussage ist trivial: Es gibt nämlich immer einen surjektiven B_0-Homomorphismus p_0' eines algebraisch freien B_0-Moduls F_0' auf M_0;

$$p_0'\colon F_0'=\bigoplus_{s\in J} B_0\cdot e_s\to M_0\,.$$

Die Untermoduln $t^i F_0'$ bilden einen Nullumgebungsfilter der t-adischen Topologie auf F_0'. Die Abbildung p_0' ist bei dieser Topologie automatisch stetig und läßt sich deshalb eindeutig zu einem stetigen Homomorphismus $p_0: F_0 \to M_0$ der Komplettierung

$$F_0 = \hat{\bigoplus_{s \in J}} B_0 \cdot e_s$$

von F_0' in M_0 forsetzen. Die Abbildung

$$p = p_0 \otimes k: \; F_0 \otimes k = F \to M_0 \otimes k = M$$

hat die gewünschten Eigenschaften

Wir wollen jetzt annehmen, daß M topologisch frei ist.

$$M = \hat{\bigoplus_{s \in J}} B \cdot e_s$$

$$M_0 = \hat{\bigoplus_{s \in J}} B_0 \cdot e_s .$$

Da der Untermodul N von G die induzierte Topologie trägt, können wir die B_0-Untermoduln N_0 von N und G_0 von G so wählen, daß $N_0 = G_0 \cap N$ ist. Da $j \circ f$ streng vollständig stetig ist, können wir nach Multiplikation von f mit einem geeigneten von Null verschiedenen Element aus V annehmen, daß f den B_0-Modul M_0 in N_0 abbildet, und daß $j \circ f$ Limes einer Folge von stetigen Abbildungen $h_i: M \to G$ ist, so daß $h_i(M_0)$ jeweils in einem endlichen B_0-Untermodul von G_0 liegt. Wir zeigen, daß es zu jeder reellen Zahl ε zwischen Null und Eins, $0 < \varepsilon < 1$, einen stetigen B-Homomorphismus $g: M \to N$ gibt und einen endlichen B_0-Untermodul H_0 von N_0, so daß folgendes gilt:

$$|f - g| \leqq \varepsilon$$

$$a \cdot g(M_0) \subseteq H_0 \qquad \textit{für alle } a \textit{ aus } V \textit{ mit } |a| < \tfrac{1}{2}.$$

Es gibt ein $h_i = h$, so daß $|f - h| \leqq \varepsilon/2$ ist. Wir wählen weiter ein Element τ in V folgendermaßen aus: Wenn V nicht diskreter Bewertungsring ist – die Wertegruppe liegt dann dicht in den positiven reellen Zahlen – soll gelten:

$$\tfrac{1}{2} < |\tau| < 1, \qquad \varepsilon/2\,|\tau| \leqq \varepsilon .$$

Sonst setzen wir $\tau = 1$.

Nach Satz 5.1 des Anhanges gibt es Elemente $g_1, \ldots, g_r$ in $h(M_0)$, so daß $\tau\, h(M_0)$ in $B_0\, g_1 + \cdots + B_0\, g_r$ liegt. Es gilt:

$$g_j = h(m_j), \qquad m_j \in M_0 \qquad j = 1, \ldots, r .$$

Wir setzen:

$n_j=f(m_j)$, $H_0=B_0 n_1+\cdots+B_0 n_r$, $|n_j-g_j|=|f(m_j)-h(m_j)|\leqq\varepsilon/2$.
Für die Basiselemente e_s, $s\in J$, ist

$$\tau\cdot h(e_s)=\sum_{j=1}^{r} a_j^s g_j$$

mit Elementen a_j^s aus B_0. Wir konstruieren jetzt die gesuchte Abbildung $g\colon M\to N$ durch Vorgabe der Bildelemente $g(e_s)$.

$$(*)\qquad g(e_s)=(1/\tau)\cdot\sum_{j=1}^{r} a_j^s n_j.$$

Da die Elemente e_s eine topologische Basis des B_0-Moduls

$$M_0=\hat{\bigoplus_{s\in J}} B_0 e_s$$

bilden, und da die Elemente

$$(1/\tau)\cdot\sum_{j=1}^{r} a_j^s n_j$$

gleichmäßig beschränkt sind, wird durch (*) eindeutig eine stetige Abbildung $g\colon M\to N$ definiert. Die Abbildung g hat alle gewünschten Eigenschaften:

$$\begin{aligned}|f(e_s)-g(e_s)|&=|f(e_s)-h(e_s)+h(e_s)-g(e_s)|\\&\leqq\sup\left(|f(e_s)-h(e_s)|,\ \left|(1/\tau)\cdot\sum_{j=1}^{r} a_j^s(g_j-n_j)\right|\right)\\&\leqq\sup\left(\varepsilon/2,|g_1-n_1|/|\tau|,\ldots,|g_r-n_r|/|\tau|\right)\\&\leqq\sup\left(\varepsilon/2,\varepsilon/2|\tau|\right).\end{aligned}$$

Also ist auch für jedes Element x aus M_0 der Betrag $|f(x)-g(x)|\leqq\varepsilon$, also $|f-g|\leqq\varepsilon$. Offenbar liegt $\tau\cdot g(M_0)$ in

$$H_0=\sum_j B_0 n_j.$$

Für a aus V mit $|a|\leqq\frac{1}{2}$ liegt a/τ in V. Deshalb ist auch $a\cdot g(M_0)=(a/\tau)\cdot\tau\, g(M_0)$ in H_0 enthalten.

Korollar 1.5. *Gegeben sei ein surjektiver B-Homomorphismus $f\colon M\to N$ und eine stetige Abbildung $g\colon M\to N$. Der Modul N sei abgeschlossener Untermodul von G, $j\colon N\hookrightarrow G$ die Injektion und $j\circ g$ streng vollständig stetig.*

Dann ist das Bild von $f+g$ abgeschlossen und von endlichem Index in N, d. h. $N/(f+g)(M)$ endlicher B-Modul.

§ 2. Eigentliche Abbildungen analytischer Räume

Wir bezeichnen mit F^n das Spektrum $\mathrm{Sp}(T_n)$ des Ringes $T_n = k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$, mit F_a^n die offene Menge der maximalen Ideale m aus F^n, für die der Betrag von X_i modulo m kleiner oder gleich a ist.

Definition 2.1. *Der affinoide Teilbereich U des affinoiden Raumes V über der affinoiden Alegbra A liegt im Innern von V bezüglich A, wenn es eine positive reelle Zahl e gibt, so daß bei geeigneter abgeschlossener Einbettung von V über A in $F^n \otimes_k A$ der Teilbereich bereits in $F_{1-e}^n \otimes_k A$ liegt. Schreibweise: $U \Subset V$.*

Definition 2.2. *Eine Abbildung $f: X \to Y$ aus* An *heißt separiert, wenn die Diagonalabbildung $\Delta: X \to Y \underset{Y}{\times} X$ eine abgeschlossene Einbettung ist.*

Wir benötigen neben den üblichen Permanenzeigenschaften separierter Abbildungen – z.B. ist das kartesische Produkt separierter Abbildungen wieder separiert – noch folgende einfache Eigenschaften:

Sei $f: X \to Y$ separiert, $Y = \mathrm{Sp}(A)$ affinoid.

(1) *Der Durchschnitt zweier affinoider offener Teilräume von X ist wieder affinoid.*

(2) *Liegt U im Innern bezüglich A des affinoiden Teilraumes V von X, U' im Innern des affinoiden Teilraumes V' bezüglich A, so liegt $U \cap U'$ im Innern von $V \cap V'$ bezüglich A.*

Beweis. Jedenfalls liegt $U \underset{Y}{\times} U'$ im Inneren von $V \underset{Y}{\times} V'$ bezüglich A. Da nach Voraussetzung die Diagonale $\Delta(X)$ abgeschlossener analytischer Unterraum von $X \underset{Y}{\times} X$ ist, ist auch $M = \Delta(X) \cap (V \underset{Y}{\times} V')$ abgeschlossener analytischer Unterraum von $V \underset{Y}{\times} V'$, und $U \underset{Y}{\times} U' \cap M \cong U \cap U'$ liegt im Inneren von $M \cong V \cap V'$ bezüglich A.

Definition 2.3. *Die Abbildung $f: X \to Y$ aus* An *heißt eigentlich, wenn sie separiert ist und wenn es eine zulässige offene affinoide Überdeckung $(\mathrm{Sp}(A_i))_{i \in I}$ von Y gibt und zu jedem $i \in I$ zwei endliche zulässige affinoide Überdeckungen $(U_{ij})_{j=1,\ldots,n_i}$, $(V_{ij})_{j=1,\ldots,n_i}$ von $X_i = f^{-1}(\mathrm{Sp}(A_i))$, so daß U_{ij} im Innern von V_{ij} bezüglich A_i liegt.*

Wir möchten nur folgende trivialen Eigenschaften eigentlicher Abbildungen notieren:

Das kartesische Produkt eigentlicher Abbildungen ist eigentlich; eine eigentliche Abbildung geht bei endlicher Grundkörpererweiterung wieder in eine eigentliche Abbildung über.

Noch ein einfaches Beispiel für eigentliche Abbildungen: *Alle endlichen Abbildungen sind eigentlich:* Sei $A \to B$ ein endlicher Homomorphismus affinoider Algebren, seien $x_1, \ldots, x_n$ ganze Erzeugende von B über A

und sei a ein Element aus dem Bewertungsring V, so daß $|a\,x_1|, \ldots, |a\,x_n| < 1$ ist. Dann ist der A-Homomorphismus

$$A\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle \to B,$$

der der Unbestimmten X_i das Element $a\,x_i$ zuordnet, surjektiv. Das bedeutet aber, daß $\mathrm{Sp}(B)$ abgeschlossen in $F^n \otimes_k A$ ist und bereits in $F_{1-e}^n \otimes_k A$ für geeignetes e liegt.

$$\mathrm{Sp}(B) \Subset \mathrm{Sp}(B) \qquad \text{bezüglich } A.$$

Zur Warnung möchten wir noch auf folgende Tatsache hinwiesen: *Eine eigentliche Abbildung ist im allgemeinen nicht abgeschlossen!* Da $F = \mathrm{Sp}(k\langle\langle X\rangle\rangle)$ nicht lokal kompakt ist (selbst, wenn k lokal kompakt ist!), gilt nämlich folgender Satz:

Satz 2.4. *Ein universell abgeschlossener Morphismus $f\colon X \to Y$ aus* An *besitzt endliche Fasern, wenn alle Fasern zulässige Überdeckungen durch höchstens abzählbar viele offene affinoide Unterräume besitzen. Dabei bedeutet „universell abgeschlossen", daß*

$$f \underset{Y}{\times} \mathrm{Z}\colon \quad X \underset{Y}{\times} \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$$

für alle analytischen Räume Z über Y abgeschlossen ist.

Wir skizzieren den Beweis nur:

Man kann annehmen, daß $Y = \mathrm{Sp}(k)$, und daß X irreduzibel ist. Zuerst zeigt man, daß es eine *endliche* offene affinoide Überdeckung, dann, daß es einen offenen nicht leeren affinoiden Unterraum U von X gibt, dessen unterliegende Menge abgeschlossen in X ist. Wenn $\dim X = \dim U > 0$ ist, gibt es eine Folge x_i von Punkten in U ohne Häufungspunkt, eine Folge y_i von Punkten in $F = \mathrm{Sp}(k\langle\langle X\rangle\rangle)$, die gegen einen von allen y_i verschiedenen Punkt konvergiert und eine Folge z_i von Punkten in $X \times F$ über x_i bzw. y_i. Die Menge der Punkte z_i ist abgeschlossen in $X \times F$. Ihre Bildmenge in F ist die Menge der Punkte y_i, ist also nach Konstruktion nicht abgeschlossen in F.

Wir möchten noch ein Beispiel einer im topologischen Sinne aber nicht nach Definition 2.3 eigentlichen Abbildung angeben. Der affinoide Raum $\mathrm{Sp}(B) = X$ sei spezieller affinoider Teilbereich von $Y = \mathrm{Sp}(A)$. Dann ist X offener und abgeschlossener Teilraum von Y. Die Injektion $X \to Y$ ist deshalb universell abgeschlossen und besitzt endliche Fasern, ist also eigentlich im topologischen Sinne. Aber B ist im allgemeinen nicht endlich über A, wie es nach dem noch zu beweisenden Hauptsatz sein müßte, wenn X über Y eigentlich wäre.

Wenden wir uns der genaueren Untersuchung einer eigentlichen Abbildung $f\colon X \to Y$ zu. Für das Folgende genügt es anzunehmen, daß

$Y=\mathrm{Sp}(A)$ ist und daß es offene, endliche, affinoide zulässige Überdekkungen $\mathfrak{U}=(U_i)$, $\mathfrak{V}=(V_i)$ $i=1, \ldots, s$ von X gibt, so daß V_i im Inneren von U_i liegt bezüglich A. Wegen der Separiertheit von f sind dann auch alle Durchschnitte $V_{i_1} \cap \cdots \cap V_{i_r}$, $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_r}$ affinoid und $V_{i_1} \cap \cdots \cap V_{i_r}$ liegt im Innern von $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_r}$ bezüglich A. Für eine geeignete natürliche Zahl n und geeignetes reelles positives e ist dann für alle i U_i abgeschlossener Teilraum von $F^n \otimes_k A$, so daß V_i bereits in $F_{1-e}^n \otimes_k A$ liegt. Nach geeigneter endlicher Grundkörpererweiterung gibt es ein a aus k, so daß $1-e \leqq |a| < 1$ ist. Man kann dann annehmen, daß $U_i \cap F_{|a|}^n \otimes_k A = V_i$ für alle i ist. $U_i=\mathrm{Sp}(B_i)$, $V_i=\mathrm{Sp}(C_i)$. Es gibt also ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} A\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle & \xrightarrow{h_a} & A\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle \\ {\scriptstyle a_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b_i} \\ B_i & \xrightarrow{h_i} & C_i \end{array}$$

Die Abbildungen a_i und b_i sind surjektiv, h_a ordnet der Unbestimmten X_j das Element aX_j zu, und $\mathrm{Sp}(h_i)$ ist die Injektion $V_i \hookrightarrow U_i$.

Sei nun $\mathscr{G}$ eine kohärente Garbe auf X. $\mathscr{G}|U_i=\tilde{M}_i$, $\mathscr{G}|V_i=\tilde{N}_i$. M_i ist ein endlicher B_i-Modul und $N_i=M_i \otimes_{B_i} C_i$. Die Moduln M_i bzw. N_i tragen eine eindeutig bestimmte Topologie, die sie zu vollständigen B_i- bzw. C_i-Moduln macht.

Die Abbildung h_a ist *streng vollständig stetig:*

$$h_a=\sum_{i=0}^{\infty} f_i$$

$$i=(i_1, \ldots, i_n), \quad X^i=X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}.$$

$$u_i\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k\right)=a^{i_1+\cdots+i_n} c_i$$

$$f_i(_)=u_i(_)\, X^i.$$

Infolgedessen ist auch die zusammengesetzte Abbildung $b_i \circ h_a$ streng vollständig stetig. Da jeder endliche B_i-Modul Faktor eines endlichen freien B_i-Moduls ist, gibt es zu jedem Modul M_i einen surjektiven stetigen A-Homomorphismus eines vollständigen A-Moduls $\overline{M}_i$ auf M_i, so daß die zusammengesetzte Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \overline{M}_i & \to & M_i & \to & N_i \\ & & \| & & \| \\ & & \mathscr{G}(U_i) & & \mathscr{G}(V_i) \end{array}$$

streng vollständig stetig ist. Entsprechendes gilt auch für die Einschränkungsabbildungen:

$$\mathscr{G}(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_r}) \to \mathscr{G}(V_{i_1} \cap \cdots \cap V_{i_r}).$$

Nun ist aber der Čechkomplex $C(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ bzw. $C(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ von folgender Gestalt: z. B.

$$C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) = \bigoplus_{(i_1, \ldots, i_r)} \mathcal{G}(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_r}).$$

C^r ist auf natürliche Art kompletter topologischer A-Modul; die Randoperatoren d^r: $C^r \to C^{r+1}$ sind stetige A-Homomorphismen.

Satz 2.5. *Zu jedem r gibt es einen surjektiven stetigen A-Homomorphismus $F^r \to C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ eines vollständigen A-Moduls F^r auf $C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$, so daß die zusammengesetzte Abbildung*

$$F^r \to C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to C^r(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$$

streng vollständig stetig ist.

Nach §0 induziert die Abbildung g_r: $C^r(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \to C^r(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ einen Isomorphismus

$$H^r(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} H^r(\mathfrak{V}, \mathcal{G}).$$

Das bedeutet, daß die Abbildung

$$Z^r(\mathfrak{U}, \mathcal{G}) \oplus C^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathcal{G}) \to Z^r(\mathfrak{V}, \mathcal{G}) \xhookrightarrow{j} C^r(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$$
$$(a, b) \to g_r(a) + d^{r-1}(b)$$

surjektiv ist. Ich bezeichne mit G^r das Urbild von $Z^r(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$ in F^r und mit f_r die induzierte Abbildung $G^r \to Z^r(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$. Dann ist die Abbildung

$$G^r \oplus C^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathcal{G}) \to Z^r(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$$
$$(a, b) \to d^{r-1}(b)$$

Summe der surjektiven Abbildung

$$G^r \oplus C^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathcal{G}) \to Z^r(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$$
$$(a, b) \to -f_r(a) + d^{r-1}(b)$$

und der Abbildung

$$G^r \oplus C^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathcal{G}) \to Z^r(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$$
$$(a, b) \to f_r(a)$$

die mit j: $Z^r(\mathfrak{V}, \mathcal{G}) \hookrightarrow C^r(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ zusammengesetzt streng vollständig stetig ist. Mit dieser Cartan-Serreschen Schlußweise erhalten wir also wegen 1.5 folgendes erste Hauptresultat:

Das Bild $d^{r-1}(C^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathcal{G}))$ ist in $Z^r(\mathfrak{V}, \mathcal{G})$ abgeschlossen und von endlichem Index, d. h. $Z^r(\mathfrak{V}, \mathcal{G})/d^{r-1}(C^{r-1}(\mathfrak{V}, \mathcal{G}))$ endlicher A-Modul.

Satz 2.6. *Unter den im Beweis benutzten Voraussetzungen über f: $X \to \mathrm{Sp}(A)$ ist $H^r(X, \mathcal{G})$ endlicher A-Modul.*

§ 3. Der Kohärenzsatz für eigentliche Morphismen

Definition 3.1. *Sei A ein Ring, a ein Ideal von A, M ein A-Modul, $(M_i)_{i=0,1,\ldots}$ eine Filtrierung von M durch Untermoduln M_i. Diese Filtrierung heißt a-gut, wenn für alle i aM_i in M_{i+1} enthalten ist und wenn es eine natürliche Zahl i_0 gibt, so daß $aM_i = M_{i+1}$ ist für $i \geqq i_0$* ([3], Chap. 3; §3, Def. 1).

Definition 3.2. *Ein projektives System von Moduln $(M_i)_{i=1,\ldots}$ genügt der Bedingung von* MITTAG-LEFFLER, *wenn für jeden Index i die absteigende Kette der Bilder von M_{i+s} in M_i stationär ist.*

Ein projektives System $(M_i)_{i=1,\ldots}$ heißt Nullsystem, wenn es natürliche Zahlen i_0 und m gibt, so daß das Bild von M_{i+m} in M_i Null ist für alle $i \geqq i_0$.

Wir kommen jetzt zu den Hauptsätzen der ganzen Arbeit:

Theorem 3.3. *Die analytische Abbildung $f\colon X \to Y$ sei eigentlich. Dann sind für einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{G}$ die $\mathcal{O}_Y$-Moduln*

$$R^i f_*(\mathcal{G})$$

kohärent.

Theorem 3.4. *Der analytische Morphismus $f\colon X \to Y = \mathrm{Sp}(A)$ sei eigentlich, $\mathcal{G}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, a ein Element aus A. Dann ist die a-adische Komplettierung*

$$H^r(X,\mathcal{G}) = \varprojlim_i H^r(X,\mathcal{G})/a^i H^r(X,\mathcal{G})$$

von $H^r(X,\mathcal{G})$ kanonisch isomorph zu

$$\varprojlim_i H^r(X,\mathcal{G}/a^i\mathcal{G}).$$

Genauer gilt für die Systeme:

$$R_k = \mathrm{Ker}\big(H^r(X,\mathcal{G}) \to H^r(X,G/a^k\mathcal{G})\big)$$
$$K_k = \mathrm{Ker}\big(H^r(X,\mathcal{G})/a^k H^r(X,\mathcal{G}) \to H^r(X,\mathcal{G}/a^k\mathcal{G})\big)$$
$$Q_k = \mathrm{Kok}\big(H^r(X,\mathcal{G}) \to H^r\big(X,\mathcal{G}/a^k\mathcal{G}\big)\big):$$

Die Filtrierung (R_k) von $H^r(X,\mathcal{G})$ ist a-gut. Die projektiven Systeme (K_k) und (Q_k) sind Nullsysteme.

Wir werden zuerst Theorem 3.4 und mit dessen Hilfe Theorem 3.3 beweisen.

$$H = H^r(X,\mathcal{G}), \qquad H_k = H^r(X,\mathcal{G}/a^k\mathcal{G}).$$

Betrachte die exakte Folge von projektiven Systemen:

$$0 \to K_k \to H/a^k H \to H_k \to Q_k \to 0.$$

Es genügt zu zeigen, daß die Filtrierung (R_k) a-gut, damit, daß das projektive System (K_k) ein Nullsystem ist, und daß (Q_k) ein Nullsystem ist.

Denn dann ist

$$\varprojlim K_k = 0, \quad \varprojlim Q_k = 0.$$

Alle in der exakten Folge auftretenden projektiven Systeme genügen der Bedingung von MITTAG-LEFFLER und nach [9] Kp 0_{III}, 13.2.2 ist deshalb die Folge der Limiten exakt:

$$\varprojlim K_k = 0 \to \varprojlim H/a^k H \to \varprojlim H_k \to \varprojlim Q_k = 0.$$

Das heißt:

$$\varprojlim H/a^k H \cong \varprojlim H_k.$$

Zum Beweise betrachten wir die absteigende Folge $I_k = a^k A$ von Idealen von A und den dazu gehörigen graduierten Ring.

$$S = \bigoplus_{k \geqq 0} S_k = \bigoplus_{k \geqq 0} I_k.$$

Zum Unterschied von a aus A bezeichnen wir das erzeugende Element „a" aus S_1 von S mit a'. Es wird bei der natürlichen Injektion $S_1 \hookrightarrow A$ auf a abgebildet.

Der Ring S ist Faktorring des Polynomringes einer Unbestimmten über A, also Noethersch.

Für jedes r ist auch die direkte Summe

$$M^r(\mathcal{G}) = M^r = \bigoplus_k M_k^r = \bigoplus_k H^r(X, a^k \mathcal{G})$$

auf natürliche Weise graduierter S-Modul. Die Multiplikation mit a': $H^r(X, a^k \mathcal{G}) \to H^r(X, a^{k+1}\mathcal{G})$ wird durch die Abbildung $a^k \mathcal{G} \xrightarrow{a} a^{k+1}\mathcal{G}$ induziert.

Ich behaupte, daß $M^r(\mathcal{G})$ ein endlicher S-Modul ist.

Zum Beweise mehme ich zunächst an, daß $\mathcal{G}$ a-torsionsfrei ist. Die Abbildung $\mathcal{G} \xrightarrow{a^k} a^k \mathcal{G}$ ist dann ein Isomorphismus. Infolgedessen ist auch die Multiplikation mit a'^k:

$$H^r(X, \mathcal{G}) \to H^r(X, a^k \mathcal{G})$$

Isomorphismus. $M^r(\mathcal{G})$ wird also durch den endlichen A-Modul $M_0^r = H^r(X, \mathcal{G})$ über S erzeugt.

Kommen wir zum allgemeinen Fall: Die aufsteigende Kette der Untergarben $\mathrm{Ker}(\mathcal{G} \xrightarrow{a^k} \mathcal{G})$ von $\mathcal{G}$ bricht, sagen wir mit $\mathcal{L} = \mathrm{Ker}(\mathcal{G} \xrightarrow{a^n} \mathcal{G})$ ab. $\mathcal{L}$ wird durch a^n annuliert, die Garbe $\mathcal{F} = \mathcal{G}/\mathcal{L}$ ist a-torsionsfrei. Die Filtrierung von $\mathcal{L}$ durch die Garben $a^k \mathcal{G} \cap \mathcal{L} = \mathcal{L}_k$ ist nach dem Satz von ARTIN-REES ([3]) *a-gut*. Deshalb ist $\mathcal{L}_k$, damit auch der Modul $H^r(X,$

$\mathscr{L}_k$) Null, wenn $k \geqq k_0$ ist. Der graduierte S-Modul

$$N^r = \bigoplus_k H^r(X, \mathscr{L}_k)$$

ist also endlicher A-Modul, also erst recht endlicher S-Modul.

Aus den kurzen exakten Folgen

$$0 \to \mathscr{L}_k \to a^k \mathscr{G} \to a^k \mathscr{F} \to 0$$

erhält man die exakte Folge

$$N^r \to M^r(\mathscr{G}) \to M^r(\mathscr{F}).$$

Da die S-Moduln N^r und $M^r(\mathscr{F})$ endlich sind, ist es auch der S-Modul $M^r(\mathscr{G})$.

Von nun an läuft der Beweis genau wie der Beweis von Th. 4.1.5, Kap. 3 in [9].

Zu

$$0 \to a^k \mathscr{G} \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}_k = \mathscr{G}/a^k \mathscr{G} \to 0$$

gehört die lange Sequenz:

$$\begin{aligned} \ldots H^r(X, a^k \mathscr{G}) &\to H^r(X, \mathscr{G}) \to H^r(X, \mathscr{G}_k) \\ &\to H^{r+1}(X, a^k \mathscr{G}) \to H^{r+1}(X, \mathscr{G}) \to \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_k &= \operatorname{Im}\big(H^r(X, a^k \mathscr{G}) \to H^r(X, \mathscr{G})\big) \\ Q_k &= \operatorname{Ker}\big(H^{r+1}(X, a^k \mathscr{G}) \to H^{r+1}(X, \mathscr{G})\big) \\ &= \operatorname{Im}\big(H^r(X, \mathscr{G}_k) \to H^{r+1}(X, a^k \mathscr{G})\big). \end{aligned}$$

Der graduierte S-Modul

$$R = \bigoplus_{k \geqq 0} R_k$$

ist Faktor des endlichen S-Moduls M^r, also selber endlich. Nach CARTIER ([3]) folgt daraus aber, daß die Filtrierung (R_k) von H a-gut ist. Der S-Modul

$$Q = \bigoplus_{k \geqq 0} Q_k$$

ist Untermodul des Noetherschen S-Moduls $M^{r+1}(\mathscr{G})$, also ebenfalls Noethersch. Der A-Modul Q_k ist Bild von $H^r(X, \mathscr{G}_k)$ in $H^{r+1}(X, a^k \mathscr{G})$, wird also durch a^k annulliert. Da Q endlich erzeugt wird über S, gibt es ein $s \geqq 1$, so daß a^s sogar den ganzen S-Modul Q annulliert.

Außerdem folgt aus der endlichen Erzeugbarkeit von Q, daß es ein k_0 gibt und ein $m \geqq s$, so daß $a'^m Q_k = Q_{k+m}$ für $k \geqq k_0$ ist. Sei t_m die Abbildung $Q_{k+m} \to Q_k$, die durch $H_{k+m} \to H_k$ induziert wird.

Wie man leicht nachrechnet, ist $t_m(a'^m Q)=a^m Q$. Daraus folgt:

$$t_m(Q_{k+m})=t_m(a'^m Q_k)=a^m Q_k=0 \qquad \text{für } k\geqq k_0 .$$

(Q_k) ist Nullsystem, was zu beweisen war.

Der Beweis von Theorem 3.3:

Wegen Satz 2.6 haben wir noch folgendes zu zeigen:

Satz 3.5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.6 sei* $\mathrm{Sp}(B)=U$ *ein affinoider Teilbereich von* $Y=\mathrm{Sp}(A)$. *Dann ist der A-Modul* $H^r(f^{-1}(U),\mathscr{G})$ *kanonisch isomorph zu* $H^r(X,\mathscr{G})\otimes_A B$.

Ich führe den Beweis dieses Satzes durch Induktion nach der Dimension von A.

Ist A lokal und Artinsch, so fallen alle affinoiden Teilbereiche mit $\mathrm{Sp}(A)$ zusammen; es ist nichts zu beweisen. Ist A das direkte Produkt der affinoiden Ringe A_1 und A_2, so ist

$$\mathrm{Sp}(A)=\coprod_i \mathrm{Sp}(A_i),$$

und es genügt, den Satz für $X\otimes_A A_1/A_1$ und $X\otimes_A A_2/A_2$ zu beweisen. Da jeder Artinsche Ring direktes Produkt lokaler Artinscher Ringe ist, wäre damit der Fall der Dimension Null erledigt.

Lemma 3.6. *Sei die Krullsche Dimension des affinoiden Ringes A größer oder gleich Eins, m ein maximales Ideal von A. Dann gibt es ein Element a in m, so daß die Dimension von* A/aA *echt kleiner als die von A ist.*

Nach dem Noetherschen Normalisierungssatz ([*13*]) gibt es einen eingeschränkten Potenzreihenring T_s in A, über dem A endlich ist. Aus dem Satz von COHEN-SEIDENBERG folgt, daß $s=\dim T_s=\dim A$ ist. Das Ideal $n=T_s\cap m$ ist maximal in T_s, also von Null verschieden. Es existiert deshalb ein von Null verschiedenes Element a in n. Die Dimension von T_s/aT_s ist echt kleiner als die von T_s. Da A/aA endlicher T_s/aT_s-Modul ist, muß auch die Dimension von A/aA echt kleiner als $s=\dim A$ sein.

Sei $\dim A\geqq 1$, $M=H^r(X,\mathscr{G})$, $N=H^r(f^{-1}(U),\mathscr{G})$. Da N und $M\otimes_A B$ endliche B-Moduln sind, genügt es zu zeigen, daß für alle maximalen Ideale n von B die n-adischen Komplettierungen $\overline{N}$ und $\overline{M\otimes_A B}$ kanonisch isomorph sind. Da $\mathrm{Sp}(B)$ affinoider Teilbereich von $\mathrm{Sp}(A)$ ist, ist jedes maximale Ideal $n=mB$ für ein geeignetes maximales Ideal m von A. Wir wählen in m ein Element a mit den Eigenschaften aus Lemme 3.6. Da die Dimension von A/a^kA echt kleiner als die von A ist für alle natürlichen k, ist nach Induktionsvoraussetzung

$$H^r(f^{-1}(U),\mathscr{G}/a^k\mathscr{G})=H^r(X,\mathscr{G}/a^k\mathscr{G})\otimes_A B .$$

Ich wende Theorem 3.4 an

$$\hat{N}=\varprojlim_k N/a^k N=\varprojlim_k H^r(f^{-1}(U),\ \mathscr{G}/a^k\mathscr{G})=\varprojlim_k(H^r(X,\mathscr{G}/a^k\mathscr{G})\otimes_A B).$$

Da B über A flach ist, sind nicht nur die projektiven Systeme (K_k) und (Q_k) aus Theorem 3.4, sondern auch die tensorierten Systeme $(K_k\otimes_A B)$ und $(Q_k\otimes_A B)$ Nullsysteme; außerdem ist die Folge von projektiven Systemen

$$0\to K_k\otimes_A B\to H^r(X,\mathscr{G})/a^k H^r(X,\mathscr{G})\otimes_A B$$
$$\to H^r(X,\mathscr{G}/a^k\mathscr{G})\otimes_A B\to Q_k\otimes_A B\to 0$$

exakt. Daraus schließt man wieder wie im Beweis von Theorem 3.4, daß

$$\varprojlim_k(H^r(X,\mathscr{G})/a^k H^r(X,\mathscr{G})\otimes_A B)$$

isomorph zu

$$\varprojlim_k(H^r(X,\mathscr{G}/a^k\mathscr{G})\otimes_A B)\text{ ist.}$$

$$\varprojlim_k(H^r(X,\mathscr{G}/a^k\mathscr{G})\otimes_A B)=\lim_k(M/a^k M\otimes_A B)$$

$$=\varprojlim_k(M\otimes_A B)/a^k(M\otimes_A B)=\widehat{M\otimes_A B}.$$

Insgesamt: $\hat{N}=\widehat{M\otimes_A B}$.

Da a in n enthalten ist, kann man die identische Abbildung $B\to B$ zu einer stetigen Abbildung der a-adischen Komplettierung $\hat{B}$ in die n-adische Komplettierung $\overline{B}$ fortsetzten: $\hat{B}\to\overline{B}$.

$$\overline{N}=N\otimes_B\overline{B}=(N\otimes_B\hat{B})\otimes_{\hat{B}}\overline{B}=\hat{N}\otimes_{\hat{B}}\overline{B}=\widehat{M\otimes_A B}\otimes_{\hat{B}}\overline{B}=\overline{M\otimes_A B}.$$

Fertig!

Zum Schluß dieses Paragraphen sei noch eine für die Anwendungen wichtige Folgerung aus Theorem 3.4 angegeben (s. [9], Kap. 3, Th. 4.1.5).

Theorem 3.7. Unter den Voraussetzungen von 3.4 sei $a=(a_1,\ldots,a_s)$ ein Ideal der Algebra A. Dann ist die a-adische Komplettierung

$$\hat{H}^r(X,\mathscr{G})=\varprojlim_k H^r(X,\mathscr{G})/a^k H^r(X,\mathscr{G})$$

von $H^r(X,\mathscr{G})$ kanonisch isomorph zu dem projektiven Limes

$$\varprojlim_k H^r(X,\mathscr{G}/a^k\mathscr{G}).$$

Der Beweis geschieht durch Induktion nach der Anzahl s der Erzeugenden von a.

§ 4. Anwendungen

Aus der Vielzahl möglicher Folgerungen aus den beiden Hauptsätzen möchten wir nur zwei herausgreifen: den *Faktorisierungssatz von* STEIN und den Satz, daß das Bild einer zulässigen analytischen Teilmenge bei einer eigentlichen Abbildung wieder zulässige analytische Teilmenge ist. Da eine eigentliche Abbildung nicht abgeschlossen zu sein braucht, muß man den Beweis z. B. der letzten Behauptung etwas anders führen als im komplexen Fall.

Satz 4.1. *Der Morphismus $f\colon X \to Y$ sei eigentlich, M eine zulässige analytische Teilmenge von (X siehe §0). Dann ist $f(M)$ zulässige analytische Teilmenge von Y.*

Man kann annehmen, daß $X=M$ und $Y=\mathrm{Sp}(A)$ ist. Ich behaupte, daß der Träger der Garbe $\mathfrak{f}_*(\mathcal{O}_x)$ gerade gleich $f(X)$ ist. Dazu ist noch zu zeigen, daß $f(X)$ abgeschlossen ist.

Sei m ein Punkt von Y, d. h. ein maximales Ideal von A, über dem die Faser von f leer ist. Da der Träger der Garbe $\mathcal{O}_X/m^k\,\mathcal{O}_X$ in dieser Faser enthalten ist, müssen alle Garben $\mathcal{O}_X/m^k\,\mathcal{O}_X$ verschwinden. Daraus folgt wegen Theorem 3.7, daß die m-adische Komplettierung von $H^0(X, \mathcal{O}_X)$, damit auch der Modul $f_*(\mathcal{O}_X)_m$ verschwindet. Diese Garbe $f_*(\mathcal{O}_X)$ ist aber kohärent; sie verschwindet daher auch in einer Umgebung von m in Y. Über dieser Umgebung sind alle Fasern leer.

Ähnlich beweist man den Steinschen Faktorisierungssatz. Man kann einer algebraischen, beispielsweise projektiven Mannigfaltigkeit über k auf natürliche Weise eine analytische zuordnen, algebraischen Morphismen analytische. Algebraisch eigentliche, z. B. projektive Morphismen gehen bei dieser Zuordnung dann in analytisch eigentliche über. Über den Zusammenhang zwischen algebraischen und analytischen Mannigfaltigkeiten können dann wieder mit Hilfe von Theorem 3.3 alle *Sätze vom GAGA-Typ* bewiesen werden, z. B. der *Satz von* CHOW, daß alle analytischen Untermannigfaltigkeiten des projektiven Raumes algebraisch sind.

Wir werden in einer späteren Arbeit auf diesen Zusammenhang zwischen algebraischen, analytischen und auch formellen Mannigfaltigkeiten über affinoiden Algebren eingehen. Bleibt zu hoffen, daß der hier eingeführte Begriff einer eigentlichen Abbildung durch einen invarianteren ersetzt werden kann.

§ 5. Anhang. Beinahe Noethersche $V\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$-Moduln

Sei wieder k wie in § 0 ein vollständig bewerteter Körper mit reeller Wertegruppe, V sein Bewertungsring mit dem maximalen Ideal m und $V\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle = T_{n0}$ der Unterring derjenigen Potenzreihen

$$f = \sum_{j=(j_1,\ldots,j_n),\, j_i \geqq 0} a_j X^j \qquad \text{aus } T_n = k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle,$$

mit Koeffizienten a_j aus V, anders ausgedrückt mit

$$|f| = \sup_j |a_j| \leqq 1 .$$

Wenn k diskret bewertet ist, ist V Noethersch und $V\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ *die m-adische Komplettierung des Polynomringes* $V[X_1, \ldots, X_n]$, *also ebenfalls Noethersch* ([3]). Ist b ein Ideal von T_n, so wird die Topologie der affinoiden Algebra $B = T_n/b$ durch die V-Unteralgebra

$$B_0 = V\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle / b \cap V\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$$

definiert, und B_0 ist ebenfalls Noethersch. Wenn die Bewertung nicht diskret ist, so ist V nicht Noethersch. Es gilt aber folgende schwächere Aussage: Sei b ein Ideal in V, ε eine reelle Zahl zwischen Null und Eins, $0 < \varepsilon < 1$, *dann gibt es ein Element* x *in* b, *so daß für alle Elemente* a *aus* V *mit* $|a| \leqq 1 - \varepsilon$ $a \cdot b$ *in* $V \cdot x$ *liegt.* Denn wähle für x ein Element aus b, das hinreichend nahe an

$$\sup_{y \in b} |y|$$

liegt.

Wir wollen dieses Resultat sinngemäß ausdehenen auf die Ringe $V\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$.

Satz 5.1. *Sei* B *eine affinoide Algebra,* B_0 *eine* V*-Unteralgebra, die die Topologie von* B *definiert,* M *ein endlicher* B_0*-Modul und* N *ein* B_0*-Untermodul von* M.

Dann gibt es zu jedem e *zwischen Null und Eins,* $0 < e < 1$, *einen endlichen* B_0*-Untermodul* N' *von* N, *so daß für alle* a *aus* V *mit* $|a| \leqq e$ *der Modul* $a \cdot N$ *in* N' *liegt. Wenn* k *diskret bewertet ist, ist* N *selber endlicher* B_0*-Modul* (Siehe auch den verwandten Satz von TATE ([13]), wonach alle affinoiden Algebren B Noethersch sind.)

Für die Anwendungen in dieser Arbeit genügt es, anzunehmen, daß B_0 Faktorring eines Ringes $T_{n0} = V\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ ist. Der allgemeine Fall läßt sich aber leicht auf diesen speziellen zurückführen. Wir gehen nicht darauf ein. Unter dieser Voraussetzung genügt es, den Satz für die Ringe $B_0 = V\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ zu beweisen. Wenn V diskret ist, ist B_0 Noethersch, also auch M Noethersch, damit jeder B_0-Untermodul N endlich. Wir setzen jetzt voraus, daß die gegebene Bewertung nicht diskret ist, also eine in den positiven reellen Zahlen dichte Wertegruppe besitzt, und beweisen den Satz für die Ringe $B_0 = T_{n0} = V\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$ durch Induktion nach n. Mit der gleichen Schlußweise, mit der man beweist, daß die Untermoduln eines endlichen Moduls über einem Noetherschen Ring endlich sind, führt man den allgemeinen Fall auf den speziellen: $M = B_0$, $N = b$ ist ein Ideal von B_0, zurück.

Der Fall $n=0$ ist bereits erledigt; wir können also annehmen, daß $n>0$ ist. Sei

$$|b|=\sup_{f\in b}|f|.$$

Nach Multiplikation mit einem geeigneten Element aus k kann man voraussetzen: $e<|b|<1$.

Es gibt dann ein Element f' in b mit $|f'|>e$ und ein Element τ in V mit $|f'|=|\tau|$. Wir setzen $f=f'/\tau$.

Wir betrachten jetzt die Restklasse $\dot{f}$ von f im Restklassenring

$$V\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle/m\cdot V\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle.$$

Dieser Ring R ist ein Polynomring über dem Restklassenkörper $\bar{k}=V/m$ von V in den Restklassen $\dot{X}_1,\ldots,\dot{X}_n$ von $X_1,\ldots,X_n$.

$$R=\bar{k}[\dot{X}_1,\ldots,\dot{X}_n].$$

Wenn $\dot{f}$ in $\bar{k}$ enthalten ist, ist f eine Einheit und es gilt für $|a|\leqq e$:

$$a\cdot b\subseteq\tau\cdot B_0=\tau\cdot f\cdot B_0=B_0\cdot f'.$$

Wenn $\dot{f}$ nicht in $\bar{k}$ enthalten ist, kann man nach einer geeigneten Variablensubstitution

$$\begin{aligned}X_1&=X_1'+X_n'^{r_1}\\&\vdots\\X_{n-1}&=X_{n-1}'+X_n'^{r_{n-1}}\\X_n&=X_n'\qquad r_1,\ldots,r_{n-1}\geqq 1\end{aligned}$$

annehmen, daß $\dot{f}$ folgende Gestalt hat:

$$\dot{f}=p_0+p_1\dot{X}_n+\cdots+p_s\dot{X}_n^s.$$

wobei $s>0$ ist, die Elemente $\mathfrak{p}_0,\ldots,\mathfrak{p}_s$ in $\bar{k}[\dot{X}_1,\ldots,\dot{X}_{n-1}]$ liegen und p_s ein von Null verschiedenes Element aus $\bar{k}$ ist. Nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz ([7, 11]) ist dann

$$V\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle/f\cdot V\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle=B_0/(f)$$

ein endlicher $V\langle\langle X_1,\ldots,X_{n-1}\rangle\rangle$-Modul, der erzeugt wird durch die Restklassen von $1, X_n,\ldots,X_n^{s-1}$ in $B_0/(f)$. Das Bild von b in $B_0/(f)$ ist ein $V\langle\langle X_1,\ldots,X_{n-1}\rangle\rangle$-Untermodul von $B_0/(f)$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also Elemente $f_1,\ldots,f_r$ in b, so daß für jedes Element a aus V mit $|a|\leqq e$, also $|a/\tau|\leqq e/|\tau|<1$, $(a/\tau)\cdot b$ in $B_0f_1+\cdots+B_0f_r+B_0f$ enthalten ist. Daraus folgt:

$$a\cdot b\subseteq\tau\cdot B_0f_1+\cdots+\tau\cdot B_0f_r+B_0\tau\cdot f\subseteq B_0f_1+\cdots+B_0f_r+B_0f'.$$

Der Satz ist bewiesen!

Literatur

[1] ARTIN, M.: Grothendieck topologies. Notes on a seminair by M. ARTIN, Havard University 1962.
[2] —, et A. GROTHENDIECK: Séminaire de Géométrie Algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques 1963/64, Fasc. 1.
[3] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique Algèbre commutative, chap 1, 2; chap 3, 4; chap 5, 6. Paris: Hermann 1961.
[4] CARTAN, H.: Séminaire E.N.S. 1951/1952; 1953/1954 Paris.
[5] —, and S. EILENBERG: Homological algebra. Princeton, New Jersey: Princeton University Press 1956.
[6] FENDRICH, H.J.: Kohomologietheorie affinoider Räume. In Vorbereitung.
[7] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Nichtarchimedische Funktionentheorie. Weierstraßfestband. Opladen: Westdeutscher Verlag 1966.
[8] — — Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Invent. Math. 2, 87—133 (1966).
[9] GROTHENDIECK, A.: Eléments de Géométrie Algébrique III. Publ. Math. N° 20. I Publ. Math. N° 4.
[10] KIEHL, R.: Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie. Erscheint demnächst.
[11] NASTOLD, H.J.: Zur nichtarchimedischen Funktionentheorie. Erscheint demnächst in Math. Z.
[12] SERRE, J.P.: Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. Publ. Math. N° 12.
[13] TATE, J.: Rigid analytic spaces. Private notes of J. TATE, reproduced with (out) his permission by I. H. E. S.

III Mathematisches Institut
der Universität Münster

(Eingegangen am 6. September 1966)

Inventiones math. 2, 215—221 (1967)

Lattice Subgroups of Free Congruence Groups

R.A. RANKIN (Glasgow)

1. Let F_n be a free group of rank n on n free generators $x_1, x_2, \ldots, x_n$. For $v=1, 2, \ldots, n$ we write $\sigma_v(w)$ for the exponent sum of any element $w \in F_n$ with respect to the generator x_v; thus $\sigma_v(w)$ is the sum of the exponents of x_v in any word representing w. The mapping σ: $F_n \to Z^n$ defined by

$$\sigma(w)=\{\sigma_1(w), \sigma_2(w), \ldots, \sigma_n(w)\} \qquad (w \in F_n)$$

is a homomorphism of F_n onto the additive group Z^n of n-dimensional vectors with integral components. The kernel of this mapping is the commutator group F_n', so that

$$F_n/F_n' \cong Z^n.$$

We follow here the notations used in [3].

The free abelian group Z^n is a lattice, in the number-theoretical sense, and so is any subgroup Λ of Z^n. (At this stage we do not demand that Λ should have finite index in Z^n.) We call the inverse image $\sigma^{-1}(\Lambda)$ a *lattice subgroup* of F_n. We have

$$F_n' \subseteq \sigma^{-1}(\Lambda) \subseteq F_n.$$

Conversely, if G is any group between F_n' and F_n, then $\sigma(G)$ is a sublattice of Z^n. We note that in the above work n can be infinite.

In the present paper we take F_n to be a free congruence subgroup of the modular group and investigate conditions under which its lattice subgroups are also congruence groups.

2. We denote by $\Gamma(1)$ the inhomogeneous modular group of 2×2 matrices T with integral entries and determinant 1, where T is identified with its negative $-T$, and write

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad W=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

We suppose that Γ is any subgroup of $\Gamma(1)$. For each $L \in \Gamma(1)$ let

$$\mathscr{C}_L(\Gamma)=\{m: m \in Z^+, \pm U^m \in L^{-1}\Gamma L\},$$

where Z^+ is the set of positive integers. If $\mathscr{C}_L(\Gamma)$ is empty we put $N_L=\infty$; if $\mathscr{C}_L(\Gamma)\neq\emptyset$ we put $N_L=\min\mathscr{C}_L(\Gamma)$. When the set of all $N_L(L\in\Gamma(1))$ is bounded above, the least common multiple of the integers in this set is denoted by N; in all other cases we put $N=\infty$. We now define the *level* of Γ, as done by WOHLFAHRT [*13*], to be N and write

$$N=\operatorname{lev}\Gamma.$$

As usual, we write $\Gamma(N)$ for the principal congruence group consisting of all $T\in\Gamma(1)$ for which $T\equiv\pm I(\bmod N)$. We also write $\Delta(N)$ for the normal closure of the cyclic group generated by $\pm U^N$. Then $\Delta(N)\subseteq\Gamma(N)$ and

$$\operatorname{lev}\Delta(N)=\operatorname{lev}\Gamma(N)=N.$$

Further, if $\operatorname{lev}\Gamma=N$, then $\Delta(N)\subseteq\Gamma$ and N is the smallest positive integer for which this holds.

If, for some $N\in Z^+$, $\Gamma(N)\subseteq\Gamma$, then Γ is called a congruence subgroup of $\Gamma(1)$ and $\operatorname{lev}\Gamma$ divides N. WOHLFAHRT [*13*] has shown that, if Γ is a congruence subgroup of $\Gamma(1)$ and $\operatorname{lev}\Gamma=N$, then $\Gamma(N)\subseteq\Gamma$.

3. We assume from now on that Γ is a free subgroup of $\Gamma(1)$ of finite rank n and level N, so that

$$\Delta(N)\subseteq\Gamma\subseteq\Gamma(1). \tag{3.1}$$

Further, let Λ be any subgroup of index μ_Λ in Z^n and write $\Gamma_\Lambda=\sigma^{-1}(\Lambda)$, in the notation of §1, so that

$$\Gamma'\subseteq\Gamma_\Lambda\subseteq\Gamma \tag{3.2}$$

and

$$\Gamma_\Lambda/\Gamma'\cong\Lambda. \tag{3.3}$$

When μ_Λ is finite,

$$[Z^n:\Lambda]=\mu_\Lambda=[\Gamma:\Gamma_\Lambda], \tag{3.4}$$

but we allow μ_Λ to be infinite in what follows. It is clear that $\operatorname{lev}\Gamma_\Lambda$, when finite, is a multiple of N.

Proposition 1. *Suppose that Γ is a free normal subgroup of finite index in $\Gamma(1)$. Suppose also that $U^\lambda\in\Gamma'$ for some $\lambda\in Z^+$. Then every lattice subgroup Γ_Λ of Γ has finite level N_Λ and N_Λ divides λ.*

For $LU^\lambda L^{-1}\in\Gamma'\subseteq\Gamma_\Lambda$ for every $L\in\Gamma(1)$, and so $\lambda\in\mathscr{C}_L(\Gamma_\Lambda)$. Hence N_Λ divides λ.

4. As an application of Proposition 1 we take Γ to be the commutator subgroup $\Gamma'(1)$. It is known [8] that

$$\Gamma'(1)=\Gamma^2\cap\Gamma^3=(\Gamma^2)'(\Gamma^3)',$$

where, for any integer m, Γ^m is the fully invariant subgroup generated by m-th powers of elements of $\Gamma(1)$. In particular, Γ^2 and Γ^3 are the unique normal subgroups of $\Gamma(1)$ of indices 2 and 3, respectively. $\Gamma'(1)$ has index 6 in $\Gamma(1)$ and is a congruence group of level 6. It is a free group of rank 2 generated by

$$A_1=UW \quad \text{and} \quad A_2=WU$$

and, as is well-known [4, (18)],

$$U^6=-A_1A_2^{-1}A_1^{-1}A_2\in\Gamma'=\Gamma''(1).$$

Further [4, Theorem 7, Corollary 1], [5],

$$\Gamma''(1)=\Delta(6)\subseteq\Gamma^6\subseteq\Gamma(6)\subseteq\Gamma'(1).$$

There are ten groups between $\Gamma'(1)$ and $\Gamma(6)$, namely $\Gamma'(1)$, $(\Gamma^2)'$, $(\Gamma^3)'$ and $\Gamma(6)$, which are normal in $\Gamma(1)$, and the two families of conjugate groups

$$\Gamma_{10},\Gamma_{01},\Gamma_{11} \quad \text{and} \quad \Gamma_{10}^{(3)},\Gamma_{01}^{(3)},\Gamma_{11}^{(3)}.$$

These are all lattice subgroups of $\Gamma'(1)$ and it can be shown that, for

$$(m,n)=(1,0),(0,1),(1,1),$$

$$\Gamma_{mn}=\{T:T\in\Gamma'(1),\, m\,\alpha_1(T)+n\,\alpha_2(T)\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\}$$

and

$$\Gamma_{mn}^{(3)}=\{T:T\in\Gamma_{mn},\,\alpha_1(T)\equiv\alpha_2(T)(\mathrm{mod}\,3)\},$$

where $\alpha_\nu(T)$ denotes the exponent sum of T with respect to the generator A_ν ($\nu=1,2$). We have

$$(\Gamma^3)'\subseteq\Gamma_{mn}\subseteq\Gamma'(1), \qquad \Gamma(6)\subseteq\Gamma_{mn}^{(3)}\subseteq(\Gamma^2)'.$$

It follows from Proposition 1 that, if Γ_Λ is a lattice subgroup of $\Gamma'(1)$, then lev $\Gamma_\Lambda=6$. Moreover, the ten groups listed above are the only lattice subgroups of $\Gamma'(1)$ that are congruence groups. The accompanying table defines the associated lattice Λ in each case; for brevity α_ν is written for $\alpha_\nu(T)$ in the fourth column ($\nu=1,2$).

We note that NEWMAN [4, Theorem 6] has shown that

$$\Gamma^6=\{T:T\in\Gamma'(1),\,\alpha_1(T)\equiv\alpha_2(T)\equiv 0(\mathrm{mod}\,6)\}.$$

Other special lattice subgroups of $\Gamma'(1)$ occur in [6, 7] and in [12].

Table

Γ_Λ	$[\Gamma'(1):\Gamma_\Lambda]$	$[\Gamma_\Lambda:\Gamma(6)]$	Λ	Generators of $\Gamma_\Lambda/\Gamma(6)$ (mod 6)
$\Gamma'(1)$	1	12	$\alpha_1\in Z, \alpha_2\in Z$	A_1, A_2
Γ_{10}	2	6	$\alpha_1\equiv 0 \pmod 2$	A_2
Γ_{01}	2	6	$\alpha_2\equiv 0 \pmod 2$	A_1
Γ_{11}	2	6	$\alpha_1\equiv\alpha_2 \pmod 2$	$A_1A_2^{-1}$
$(\Gamma^3)'$	4	3	$\alpha_1\equiv\alpha_2\equiv 0 \pmod 2$	A_1^2
$(\Gamma^2)'$	3	4	$\alpha_1\equiv\alpha_2 \pmod 3$	A_1^3, A_2^3
$\Gamma_{10}^{(3)}$	6	2	$\alpha_1\equiv 0 \pmod 2, \alpha_1\equiv\alpha_2 \pmod 3$	A_2^3
$\Gamma_{01}^{(3)}$	6	2	$\alpha_2\equiv 0 \pmod 2, \alpha_1\equiv\alpha_2 \pmod 3$	A_1^3
$\Gamma_{11}^{(3)}$	6	2	$\alpha_1\equiv\alpha_2 \pmod 6$	A_1A_2
$\Gamma(6)$	12	1	$\alpha_1\equiv\alpha_2\equiv 0 \pmod 2, \alpha_1\equiv\alpha_2 \pmod 3$	I

5. We prove the following theorem.

Theorem 2. *Suppose that Γ is a free congruence group of level N, that Γ_Λ is a lattice subgroup of Γ and that Γ_Λ is a congruence group of level N_Λ. Let $N_\Lambda = qr$, where r is the largest factor of N_Λ that is prime to N. Then N divides q and r divides* 12.

Proof. It is enough to show that r divides 12.

Since lev $\Gamma_\Lambda = N_\Lambda = qr$, it follows that

$$L U^{qr} L^{-1} \in \Gamma_\Lambda \qquad \text{for all } L\in\Gamma(1).$$

For any integers μ and ν, and fixed $L\in\Gamma(1)$, write

$$[\mu,\nu] = L U^{\mu q} W^{\nu q} L^{-1} = L \begin{bmatrix} 1+\mu\nu q^2 & \mu q \\ \nu q & 1 \end{bmatrix} L^{-1}.$$

We identify $[\mu, \nu]$ with the corresponding point of the two-dimensional lattice Z^2 and write

$$\Lambda^* = \{[\mu,\nu] : [\mu,\nu]\in\Gamma_\Lambda\}.$$

Since LU^qL^{-1} and LW^qL^{-1} belong to $\Gamma(N)$ and therefore to Γ, it follows that, if $[\mu_1, \nu_1]$ and $[\mu_2, \nu_2]$ belong to Λ^*, then

$$[\mu_1,\nu_1][\mu_2,\nu_2]^{-1} = [\mu_1-\mu_2, \nu_1-\nu_2] S,$$

where $S\in\Gamma'\subseteq\Gamma_\Lambda$. Hence $[\mu_1-\mu_2, \nu_1-\nu_2]\in\Lambda^*$ and therefore Λ^* can be identified with a sublattice of Z^2. It follows similarly that $[k\mu, k\nu]\in\Lambda^*$ whenever $[\mu, \nu]^k\in\Gamma_\Lambda (k\in Z)$.

Since $LU^{qr}L^{-1}$ and $LW^{qr}L^{-1}$ belong to $\Gamma(N_\Lambda)$ and therefore to Γ_Λ, it follows that $[r, 0]$ and $[0, r]$ belong to Λ^*.

Further, it is easily verified that

$$[\mu, \nu] \equiv I (\mathrm{mod}\ q), \quad [\mu, \nu]^2 \equiv -I (\mathrm{mod}\ r)$$

whenever

$$\mu \nu q^2 + 2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ r),$$

while

$$[\mu, \nu] \equiv I (\mathrm{mod}\ q), \quad [\mu, \nu]^3 \equiv -I (\mathrm{mod}\ r)$$

whenever

$$\mu \nu q^2 + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ r).$$

Applying these results with $\mu = 1$, $\nu = -2s^2$ and $\nu = -s^2$, where $sq \equiv 1 (\mathrm{mod}\ r)$, we deduce that

$$[1, -2s^2]^4 \equiv [1, -s^2]^6 \equiv I (\mathrm{mod}\ qr),$$

and it follows that $[1, -2s^2]^4$ and $[1, -s^2]^6$ belong to Γ_Λ. Hence

$$[4, -8s^2] \in \Lambda^*, \quad [6, -6s^2] \in \Lambda^*.$$

Since Λ^* is a lattice,

$$[12, 0] = L U^{12q} L^{-1} \in \Gamma_\Lambda.$$

This holds for each $L \in \Gamma(1)$ and therefore $\Delta(12q) \subseteq \Gamma_\Lambda$. But Γ_Λ has level qr and so r divides 12.

It would be of interest to find an upper bound for the factor q, if such exists.

Theorem 3. *Let Γ and Γ_Λ satisfy the conditions of Theorem 2, let Γ be normal in $\Gamma(1)$ and write Γ_Λ^* for the intersection of all groups $L^{-1} \Gamma_\Lambda L$ for $L \in \Gamma(1)$. Then Γ_Λ^* is a lattice subgroup and is a normal congruence subgroup of $\Gamma(1)$ of level N_Λ.*

Proof. Since $\Gamma(N_\Lambda) \subseteq \Gamma_\Lambda \subseteq \Gamma$, it follows that

$$\Gamma(N_\Lambda) \subseteq L^{-1} \Gamma_\Lambda L \subseteq \Gamma$$

for each $L \in \Gamma(1)$. Hence $\Gamma(N_\Lambda) \subseteq \Gamma_\Lambda^* \subseteq \Gamma$, and N_Λ is clearly the smallest integer for which this holds. Further, since

$$\Gamma' = L^{-1} \Gamma' L \subseteq L^{-1} \Gamma_\Lambda L,$$

it follows that $\Gamma' \subseteq \Gamma_\Lambda^* \subseteq \Gamma$, so that Γ_Λ^* is a lattice subgroup.

Theorem 4. *Let $N > 1$. If $\Gamma(N^2) \subseteq \Gamma^* \subseteq \Gamma(N)$, then Γ^* is a lattice subgroup of $\Gamma(N)$. Further, if $\Gamma(Nq)$ is a lattice subgroup of $\Gamma(N)$, then q divides N.*

We note that $\Gamma(N)$ is a free group for $N > 1$. For the first part it is enough to note that $\Gamma(N)/\Gamma(N^2)$ is abelian. This follows, since it is

easily verified that, if S and T belong to $\Gamma(N)$, then

$$S\,T \equiv T\,S (\mathrm{mod}\, N^2).$$

The second part follows since

$$U^N W^N \equiv W^N U^N (\mathrm{mod}\, N q)$$

if and only if q divides N.

6. As a first application of § 5 we take $\Gamma = \Gamma(2)$, which is generated by

$$B_1 = U^2, \quad B_2 = W^2,$$

and we write $\beta_\nu(T)$ for the exponent sum function of B_ν ($\nu = 1, 2$). If Γ_A is a lattice subgroup of $\Gamma(2)$ and is a congruence group, we have

$$N_A = 2^s \quad \text{or} \quad 2^s.3 \qquad (s \in Z^+)$$

by Theorem 2.

There are four subgroups of $\Gamma(2)$ of level 4 and, by Theorem 4, each is a lattice subgroup. These are the group $\Gamma(4)$ and the three groups $\Gamma^*_{10}, \Gamma^*_{01}, \Gamma^*_{11}$ defined by

$$\Gamma^*_{mn} = \{T : T \in \Gamma(2),\ m\beta_1(T) + n\beta_2(T) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)\}.$$

These three groups are the three conjugate subgroups listed by PETERSSON [9, § 3(d)].

We now investigate whether there are any lattice subgroups of $\Gamma(2)$ of level $N_A = 6$. The only normal subgroups of $\Gamma(1)$ and $\Gamma(2)$ that are congruence subgroups of level 6 are $(\Gamma^2)'$ and $\Gamma(6)$, and the latter is not a lattice subgroup of $\Gamma(2)$, by Theorem 4. Hence the only possible choice for Γ^*_A in Theorem 3 is $(\Gamma^2)'$, which has index 3 in $\Gamma(2)$. In fact, it is easily shown that

$$(\Gamma^2)' = \{T : T \in \Gamma(2),\ \beta_1(T) \equiv \beta_2(T) (\mathrm{mod}\, 3)\},$$

and this group is therefore the only lattice subgroup of $\Gamma(2)$ that is a congruence group of level 6.

From these results we deduce the theorem proved by LEHNER [2, pp. 252–253], that the subgroup

$$\{T : T \in \Gamma(2),\ \beta_1(T) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, s)\}$$

is not a congruence group for odd $s > 1$. A similar result holds for $\beta_1(T)$ replaced by $\beta_2(T)$ or by $\beta_1(T) + \beta_2(T)$; if we replace $\beta_1(T)$ by $\beta_1(T) - \beta_2(T)$ we must impose the further condition that $s > 3$. See also REINER [11] for more general arguments of the type used by LEHNER.

It can be shown similarly that the only lattice subgroup of $\Gamma(3)$ that is a congruence group of level 6 is $\Gamma^{3\prime}$ and that

$$(\Gamma^3)' = \{T : T \in \Gamma(3), \gamma_1(T)+\gamma_2(T)+\gamma_3(T) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)\}.$$

Here $\gamma_\nu(T)$ is the exponent sum function for the generator

$$C_\nu = (U^{-1}W)^{-\nu} U^3 (U^{-1}W)^\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

In conclusion we note that the subgroups $\Omega(p, s)$ of $\Gamma(p)$ (p a prime) introduced by REINER [11] (and earlier for $p=2$ by FRICKE [1] and PICK [10]) are, of course, lattice subgroups of $\Gamma(p)$.

References

[1] FRICKE, R.: Über die Substitutionsgruppen, welche zu den aus Legendreschen Integralmodul $k^2(\omega)$ gezogenen Wurzeln gehören. Math. Ann. **28**, 99—118 (1887).

[2] LEHNER, J.: Discontinuous groups and automorphic functions. Mathematical Surveys, No. VIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1964.

[3] MAGNUS, W., A. KARRASS, and D. SOLITAR: Combinatorial group theory. New York: Interscience Publishers 1966.

[4] NEWMAN, M.: The structure of some subgroups of the modular group. Illinois J. Math. **6**, 480—487 (1962).

[5] — A note on modular groups. Proc. Amer. Math. Soc. **14**, 124—125 (1963).

[6] — A complete description of the normal subgroups of genus one of the modular group. Amer. J. Math. **86**, 17—24 (1964).

[7] — Normal subgroups of the modular group which are not congruence subgroups. Proc. Amer. Math. Soc. **16**, 831—832 (1965).

[8] —, and SMART, J.R.: Note on a subgroup of the modular group. Proc. Amer. Math. Soc. **14**, 102—104 (1963).

[9] PETERSSON, H.: Über die Kongruenzgruppen der Stufe 4. J. reine angew. Math. 212, 63—72 (1963).

[10] PICK, G.: Über gewisse ganzzahlige lineare Substitutionen, welche sich nicht durch algebraische Congruenzen erklären lassen. Math. Ann. **28**, 119—124 (1887).

[11] REINER, I.: Normal subgroups of the unimodular group. Illinois J. Math. **2**, 142—144 (1958).

[12] SELBERG, A.: On the estimation of Fourier coefficients of modular forms. Proc. Sympos. Pure Math., vol. VIII, p. 1—15, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965.

[13] WOHLFAHRT, K.: An extension of F. Klein's level concept. Illinois J. Math. **8**, 529—535 (1964).

Department of Mathematics
University of Glasgow
Glasgow, W.2.

(Received September 10, 1966)

Inventiones math. 2, 222–237 (1967)

Homologie symmetrischer und alternierender Gruppen

THEODOR BRÖCKER (Heidelberg)

1. Einleitung

Über die Struktur der Homologie symmetrischer Gruppen hat NAKAOKA weitgehende Resultate erhalten (s. [*10*, *11*]). Er erhält die Homologiegruppen symmetrischer Gruppen nach einem Theorem von STEENROD ([*11*], Theorem 6.6, [*13*]) als Kohomologiegruppen symmetrischer Produkte von Sphären; diese Gruppen sind direkter Summand in der Kohomologie eines unendlichen symmetrischen Produkts von Sphären [*13*], was wierum nach einem Theorem von DOLD und THOM Eilenberg-MacLane-Gruppen sind (s. [*8*, *12*]); für deren Berechnung kann er sich auf den Struktursatz von CARTAN [*3*, *4*] berufen.

So gelingt es NAKAOKA auf nicht einfachem Wege, u.a. die Homologiegruppen symmetrischer Gruppen mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_p$ ähnlich zu beschreiben, wie es CARTAN für die Gruppen $H_*(\pi, r; \boldsymbol{Z}_p)$ geleistet hat, und entsprechend der Steenrodzerfällung der Homologie symmetrischer Produkte folgendes zu zeigen:

Theorem (1.1). *Sei G eine abelsche Gruppe, auf der $S(n)$ trivial operiert, dann ist der Homomorphismus der Homologie*

$$l_{k,n*}\colon\ H_*\big(S(k); G\big) \to H_*\big(S(n); G\big),$$

der von der Inklusion $l_{k,n}\colon S(k) \to S(n)$, $k \leqq n$, der symmetrischen Gruppen induziert wird, monomorph, und das Bild ein direkter Summand.

Für diesen Satz (NAKAOKA [*10*]) hat DOLD [*7*] einen einfachen algebraischen Beweis gegeben, und wir setzen ihn daher als bekannt voraus.

Wir werden in dieser Arbeit eine Beschreibung der Struktur von $H_*(S(n); \boldsymbol{Z}_p)$ mit geringeren Ausflügen in die Geometrie erreichen, weiterhin ein entsprechendes Ergebnis bei nicht trivialer Operation von $S(n)$ auf $\boldsymbol{Z}_p$ (Abschnitt 5). Im 7. Abschnitt benutzen wir unsere Kenntnis über die Struktur der Homologie symmetrischer Gruppen, um die Struktur der Homologie alternierender Gruppen mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_p$ für $p \neq 2$ aufzuklären.

Wir bedienen uns der folgenden Methode:

Sei $S(n, p)$ die p-Sylowgruppe von $S(n)$; $\boldsymbol{Z}_p^{(q)} = \boldsymbol{Z}_p$ als abelsche Gruppe, und $S(n)$ operiere trivial auf $\boldsymbol{Z}_p^{(q)}$, wenn q gerade ist und nicht trivial sonst – p ist im folgenden immer eine Primzahl – dann induziert die Injektion

einen Epimorphismus der Homologie

$$i_*\colon H_*(S(n,p);\mathbf{Z}_p)\to H_*(S(n);\mathbf{Z}_p^{(q)}) \tag{1.2}$$

und die Relationen im Kern von i_* sind von inneren Automorphismen von $S(n)$ induziert (s. [5], XII, 8 ff.; oder [14] V, 7). $H_*(S(n,p);\mathbf{Z}_p)$ hat NAKAOKA berechnet, und die Bestimmung der Relationen in $\ker(i_*)$ findet man (bei leichter Verallgemeinerung für Koeffizienten in $\mathbf{Z}_p^{(1)}$) bei ADEM [1]. Daß man so alle Relationen erhält, zeigen wir wie NAKAOKA, indem wir die Homologieklassen von $S(n)$ als Kohomologieoperationen auf Eilenberg-MacLane-Gruppen operieren lassen und deren Berechnung durch CARTAN benutzen.

Die Gruppe

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_*(S(n);\mathbf{Z}_p^{(q)})$$

besitzt die Struktur einer assoziativen bigraduierten Algebra; die Multiplikation ist durch die Inklusion $S(n)\times S(m)\subset S(n+m)$ induziert, also für

$$a\in H_i(S(n);\mathbf{Z}_p^{(q)}),\qquad b\in H_j(S(m);\mathbf{Z}_p^{(q)}) \tag{1.3}$$

ist

$$a\cdot b\in H_{i+j}(S(n+m);\mathbf{Z}_p^{(q)}),$$

und man findet analog NAKAOKA [11]:

$$a\cdot b=(-1)^{ij+qnm}\,b\cdot a. \tag{1.4}$$

Wir bestimmen die Struktur dieser Algebra.

2. Homologie des Kranzproduktes

Sei im folgenden $\mathbf{Z}_p$ stets die zyklische Gruppe der Ordnung p, $\pi\cong\mathbf{Z}_p$ Permutationsgruppe der Zahlen $1,\dots,p$. Die Sylowgruppe $S(p^\alpha,p)$ der symmetrischen Gruppe $S(p^\alpha)$ ist iteriertes Kranzprodukt (Wreath product) von Exemplaren der Gruppe π (s. [9], 5.9). Wir beschreiben die Homologie eines Kranzproduktes.

Seien also $\Lambda\subset S(l)$, $\Gamma\subset S(g)$ Untergruppen; Γ operiere auf $H_*(\Lambda;\mathbf{Z}_p^{(q)})^{(g)}$ folgendermaßen:

Ist

$$h_i\in H_*(\Lambda;\mathbf{Z}_p^{(q)}),\qquad i=1,\dots,g;\ \gamma\in\Gamma;\ \operatorname{sig}(\gamma)=(-1)^\alpha \tag{2.1}$$

dann ist

$$\gamma(h_1\otimes\cdots\otimes h_g)=(-1)^{q\,l\,\alpha+\beta}(h_{\gamma(1)}\otimes\cdots\otimes h_{\gamma(g)}),$$

wobei $(-1)^{\beta}$ *das übliche Vorzeichen der Vertauschungsabbildung graduierter Moduln ist.*

Folgendes ist eine leichte Verallgemeinerung eines Satzes von NAKAOKA ([*11*], Theorem 6.2):

Theorem (2.2).

$$H_*(\Lambda \wr \Gamma; \boldsymbol{Z}_p^{(q)}) \cong H_*\big(\Gamma; H_*(\Lambda; \boldsymbol{Z}_p^{(q)})^{(g)}\big).$$

Der Isomorphismus ist für Inklusionen $\varphi\colon \Lambda \to \Lambda'$, $\psi\colon \Gamma \to \Gamma'$ *und die dadurch induzierte Abbildung* $\varphi \wr \psi\colon \Lambda \wr \Gamma \to \Lambda' \wr \Gamma'$ *natürlich.*

Dieses Theorem gestattet analog zu NAKAOKA [*11*], 6 ein Kranzprodukt der Homologie zu definieren, so daß für

$$a \in H_i(\Lambda; \boldsymbol{Z}_p^{(q)}), \quad b \in H_j(\Gamma; \boldsymbol{Z}_p^{(l\,q+i)}) \tag{2.3}$$

gilt:

$$a \wr b \in H_{i\,g+j}(\Lambda \wr \Gamma; \boldsymbol{Z}_p^{(q)}).$$

Der Assoziativität des Kranzproduktes von Permutationsgruppen entspricht in der Homologie eine Assoziativität bis aufs Vorzeichen. Ebenso entspricht der „Distributivität" für Gruppen:

$$\Lambda_1 \wr (\Lambda_2 \times \Lambda_3) = (\Lambda_1 \wr \Lambda_2) \times (\Lambda_1 \wr \Lambda_3)$$

eine entsprechende Gleichung in der Homologie:

Ist

$$a_1 \in H_i(\Lambda_1; \boldsymbol{Z}_p^{(q)}), \quad a_2 \in H_j(\Lambda_2; \boldsymbol{Z}_p^{(l\,q+i)}), \tag{2.4}$$
$$a_3 \in H_k(\Lambda_3; \boldsymbol{Z}_p^{(l\,q+i)}), \quad \Lambda_1 \subset S(l), \quad \Lambda_3 \subset S(n),$$

dann ist

$$a_1 \wr (a_2 \otimes a_3) = (-1)^{n\,i\,j} (a_1 \wr a_2) \otimes (a_1 \wr a_3).$$

Sei $\delta_{m,k}$ die Inklusion $\delta_{m,k}\colon S(m) \wr S(k) \to S(m \cdot k)$ dann folgt aus (2.4) insbesondere:

Ist

$$\Lambda_1 = S(l), \quad \Lambda_2 = S(m), \quad \Lambda_3 = S(n), \tag{2.5}$$

so gilt:

$$\delta_{l,\,m+n\,*}\big(a_1 \wr (a_2 \cdot a_3)\big) = (-1)^{n\,i\,j}\, \delta_{l,\,m\,*}(a_1 \wr a_2) \cdot \delta_{l,\,n\,*}(a_1 \wr a_3)$$

das Produkt im Sinne von (1.3).

$(S(l) \times S(m)) \wr S(n)$ ist in $S((l+m)n)$ konjugiert zu einer Untergruppe von $(S(l) \wr S(n)) \times (S(m) \wr S(n))$; daher erhält man in der Homologie:

Ist

$$a_1 \in H_i(S(l); \mathbf{Z}_p^{(q)}), \quad a_2 \in H_j(S(m); \mathbf{Z}_p^{(q)}), \quad a_3 \in H_k(S(n); \mathbf{Z}_p^{(nq+i+j)}), \tag{2.6}$$

so ist das Element

$$\delta_{l+m,n*}((a_1 \cdot a_2) \wr a_3) \in H_*(S((l+m)n); \mathbf{Z}_p^{(q)})$$

Linearkombination von Elementen der Form $b \cdot c$, $b \in H_*(S(ln); \mathbf{Z}_p^{(q)})$, $c \in H_*(S(mn); \mathbf{Z}_p^{(q)})$.

Schließlich ist das Kranzprodukt mit dem Einselement, dem Erzeugenden von $H_0(S(1); \mathbf{Z}_p)$, die identische Abbildung.

Das Kranzprodukt ist stets linear im zweiten Faktor, und *ist der zweite Faktor gleich* π, *so ist das Kranzprodukt bilinear und definiert einen Homomorphismus*

$$H_*(\Lambda; \mathbf{Z}_p^{(q)}) \otimes H_*(\pi; \mathbf{Z}_p) \to H_*(\Lambda \wr \pi; \mathbf{Z}_p^{(q)}); \tag{2.7}$$

dies entnimmt man der Definition des Kranzproduktes und der Tatsache, daß für Elemente $a, b \in H_*(\Lambda)$ gilt:

$(a+b)^{(p)} - a^{(p)} - b^{(p)}$ liegt im Bild der Norm τ: $H_*(\Lambda)^{(p)} \to H_*(\Lambda)^{(p)}$ der Gruppe π.

Die Sylowgruppe $S(n, p) \subset S(n)$ ist Kartesisches Produkt von Sylowgruppen $S(p^\alpha, p) \subset S(p^\alpha)$, und $S(p^\alpha, p)$ ist iteriertes Kranzprodukt: $S(p^{\alpha+1}, p) = S(p^\alpha, p) \wr \pi$.

Bezeichnen wir mit $e(i)$ das Erzeugende von $H_i(\pi; \mathbf{Z}_p)$, so erhält man mit dem üblichen Verfahren:

Satz (2.8). *Sei* $\{h_j, j \in \mathscr{J}\}$ *eine Basis des* $\mathbf{Z}_p$*-Moduls* H, *dann ist eine Basis des* $\mathbf{Z}_p$*-Moduls* $H_*(\pi; H^{(p)})$ *durch die Menge der Elemente*

$$h_j \wr e(i); \qquad j \in \mathscr{J},\ i = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$[h_{j_1} \otimes h_{j_2} \otimes \cdots \otimes h_{j_p} \otimes e(0)], \qquad (j_1, \ldots, j_p) \in \mathscr{J}_0^p$$

gegeben; dabei ist $\mathscr{J}_0^p$ *ein Repräsentantensystem von Äquivalenzklassen der Menge der p-tupel* $\{(j_1, \ldots, j_p), j_\nu \in \mathscr{J}, \nu \neq \mu$ *für ein Indexpaar* $(\nu, \mu)\}$ *unter zyklischen Permutationen* (*s.* NAKAOKA [*11*], 4.1).

In unserem Fall ist $H = H_*(S(p^\alpha, p); \mathbf{Z}_p)$. Die Elemente $h_{j_1} \otimes \cdots \otimes h_{j_p} \otimes e(0)$ gehen bei der Abbildung i_*: $H_*(S(p^{\alpha+1}, p)) \to H_*(S(p^{\alpha+1}))$ in Produkte $i_*(h_{j_1}) \cdot \cdots \cdot i_*(h_{j_p})$ über, so daß also wegen (2.6)

$$\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_*(S(n); \mathbf{Z}_p^{(q)})$$

von Bildern iterierter Kranzprodukte $e(i_1)\wr e(i_2)\wr\cdots\wr e(i_k)$ algebraisch erzeugt wird. Wir werden also untersuchen, welche Relationen beim Übergang zur symmetrischen Gruppe zwischen solchen iterierten Kranzprodukten entstehen.

3. Relationen

Die Transformationen des Normalisators von π in $S(p)$ induzieren die folgenden Relationen:

Satz (3.1). *Sei* $i_*\colon H_*(\pi; \mathbf{Z}_p)\to H_*(S(p); \mathbf{Z}_p^{(q)})$ *die von der Inklusion induzierte Abbildung, dann gilt:*

Die Elemente $i_*(e(n))$ *mit*

$$n=\begin{cases}2l(p-1)\ oder\\ 2l(p-1)-1\end{cases}\quad \textit{für } q \textit{ gerade},$$

$$n=\begin{cases}(2l+1)(p-1)\ oder\\ (2l+1)(p-1)-1\end{cases}\quad \textit{für } q \textit{ ungerade},$$

$$l=0,1,2,\ldots$$

bilden eine Basis von $H_*(S(p); \mathbf{Z}_p^{(q)})$, *und* $i_*(e(n))=0$ *für alle anderen* n.

Man findet den Beweis in [*14*], V. 1, oder zuerst bei ADEM [*1*].

Folgerung (3.2). *Sei* Λ *Untergruppe von* $S(p^\alpha)$ *und* $0\neq a\in H_r(\Lambda; \mathbf{Z}_p^{(s)})$; $i\colon \pi\to S(p)$ *sei die Inklusion; dann verschwindet* $(\mathrm{id}\wr i)_*(a\wr e(n))\in H_{pr+n}(\Lambda\wr S(p); \mathbf{Z}_p^{(s)})$ *außer unter den Bedingungen von* (3.1) *für* n, *mit* $q=r+s$.

Beweis. Man hat nur nachzuprüfen, daß $\langle a^{(p)}\rangle\cong \mathbf{Z}_p^{(r+s)}$ als $S(p)$-Modul. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Operation von $S(p)$ auf $H_*(\Lambda; \mathbf{Z}_p^{(s)})^{(p)}$ in (2.1).

Im Kern der Abbildung $i_*\colon H_*(S(p^2, p); \mathbf{Z}_p)\to H_*(S(p^2); \mathbf{Z}_p^{(0)})$ hat ADEM [*1*] die folgenden Relationen festgestellt:

Theorem (3.3). *Es gilt modulo* $\ker(i_*)$:

Für $p=2$

$$e(s)\wr e(t-2s)=\sum_{k=[(t-s)/2]}^{[t/2]}\binom{k-s-1}{2k+s-t}\,e(k)\wr e(t-2k)$$

und für $p\neq 2$

$$\bar{x}_t^s=\sum_{k=[(t-s)/p]}^{[t/p]}(-1)^{k+s+t}\binom{(k-s)(p-1)-1}{kp+s-t}\,\bar{x}_t^k$$

und

$$\bar{y}_t^s=\sum_{k=[(t-s)/p]}^{[t/p]}(-1)^{k+s+t}\binom{(k-s)(p-1)}{kp+s-t}\,\partial_*\bar{x}_t^k - \sum_{k=[(t-s+1)/p]}^{[t/p]}\binom{(k-s)(p-1)-1}{kp+s-t-1}\,\bar{y}_t^k,$$

wobei

$$\bar{x}_t^k = e(2k(p-1)) \wr e((2t-2kp)(p-1))$$

$$\bar{y}_t^k = -m!\, e(2k(p-1)-1) \wr e((2t+1-2kp)(p-1))$$

$$m=(p-1)/2,$$

und

$$\binom{r}{s}=0 \quad \textit{wenn } r<0, \quad \textit{oder } s<0;$$

$$\binom{r}{0}=1 \quad \textit{wenn } r\geqq 0,$$

nach Definition.

∂_* ist der Bocksteinoperator aus der Folge

$$0 \to \boldsymbol{Z}_p \to \boldsymbol{Z}_{p^2} \to \boldsymbol{Z}_p \to 0.$$

Für Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_p^{(1)}$ kann man ganz analog zu ADEMS Verfahren vorgehen, und man findet nach längerer Rechnung, die ich hier nicht mitteile, folgendes:

Man definiere

$$x_t^k = e((2k+1)(p-1)) \wr e((2t-(2k+1)p)(p-1)),$$

$$y_t^k = -m!\, e((2k+1)(p-1)-1) \wr e((2t+1-(2k+1)p)(p-1));$$

dann gilt:

Theorem (3.4). *Sei* i_*: $H_*(S(p^2,p);\boldsymbol{Z}_p) \to H_*(S(p^2);\boldsymbol{Z}_p^{(1)})$ *von der Inklusion induziert, dann gilt modulo* $\ker(i_*)$:

$$x_t^s = \sum_k^{[t/p-\frac{1}{2}]} c_k^s x_t^k$$

mit

$$c_k^s=0 \quad \textit{für } 2k+1<(2t-(2s+1))/p;$$

$$y_t^s = \sum_k^{[(t-m)/p]} d_k^s \partial_* x_t^k - \sum_k^{[(t-m)/p]} e_k^s y_t^k$$

mit

$$d_k^s=0 \quad \textit{für } (2k+1)p<2t-(2s+1),$$

$$e_k^s=0 \quad \textit{für } (2k+1)p<2t-2s+1.$$

Der Bocksteinoperator liefert:

$$\partial_*(e(2n) \wr e(2k)) = e(2n) \wr e(2k-1).$$

Man erhält also durch Anwenden des Bocksteinoperators aus den vier Relationen (3.3) und (3.4) vier weitere, so daß auf der linken Seite der Gleichungen (bis auf einen Faktor $\neq 0$) alle Kranzprodukte $e(k)\wr e(s)$ auftreten, die nicht nach (3.2) in $\ker(i_*)$ liegen. Wir benutzen die Theoreme (3.3) und (3.4) um folgendes zu zeigen:

Lemma (3.5). *Sei* i_*: $H_*(S(p^2,p);\boldsymbol{Z}_p)\to H_*(S(p^2);\boldsymbol{Z}_p^{(q)})$ *von der Inklusion der Gruppen induziert, und sei* $r<s$, *dann ist modulo* $\ker(i_*)$:

$$e(r)\wr e(s)=\sum_{k=c}^{d}\lambda_k\, e(k)\wr e\big(p(r-k)+s\big);\qquad \lambda_k\in\boldsymbol{Z}_p,$$

mit $c>r$, *also* $k>r$ *und* $p(r-k)+s<s$.

Beweis. Sei $p=2$ dann gilt mod $\ker(i_*)$:

$$e(r)\wr e(s)=\sum_{k=c}^{d}a_k\, e(k)\wr e\big(2(r-k)+s\big)$$

mit $c>r$ nach (3.3); für $p\neq 2$ folgt der Satz durch mechanisches Nachprüfen aus den Ademrelationen in Theorem (3.3), (3.4) und denen, die daraus durch Anwenden des Bocksteinoperators hervorgehen.

4. Das Erzeugendensystem

Sei $e[\,]$ Erzeugendes von $H_0(S(1);\boldsymbol{Z}_p^{(q)})$, und

$$e[\alpha_1,\dots,\alpha_r]=\big(e(\alpha_1)\wr e(\alpha_2)\big)\wr\cdots\wr e(\alpha_r)\in H_*\big(S(p^r,p);\ \boldsymbol{Z}_p\big)$$

für $\alpha_\nu\geqq 0$, $r\geqq 0$.

Die Elemente $i_*e[\alpha_1,\dots,\alpha_r]$ erzeugen

$$\bigoplus_n H_*\big(S(n);\ \boldsymbol{Z}_p^{(q)}\big)$$

algebraisch (Abschnitt 2); wegen $i_*(a\wr e(0))=(i_*(a))^p$ und $e[\,]\wr a=a$ können wir mit (2.6) annehmen:

$\boldsymbol{B}_0$: $\alpha_\nu>0$ *für alle* ν.

Entsprechend kann man nach (3.5) und (2.7) verlangen:

$\boldsymbol{B}_1$: $\alpha_1\geqq\alpha_2\geqq\cdots\geqq\alpha_r$,

und nach (3.2):

$$\boldsymbol{B}_2\colon\ \alpha_k=\begin{cases}2n(p-1)\ \ \textit{oder}\ \ 2n(p-1)-1 & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{für}\ q+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k-1}\ \textit{gerade} & \\ (2n+1)(p-1)\ \ \textit{oder}\ \ (2n+1)(p-1)-1 & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{für}\ q+\alpha_1+\cdots+\alpha_{k-1}\ \textit{ungerade.}\end{cases}$$

Sei also $B(p; q)$ die Menge der Folgen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $r \geqq 0$, mit den Eigenschaften $\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$.

Definition (4.1).

$$\dim(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \sum_{\nu=1}^{r} p^{r-\nu}\alpha_\nu; \qquad \dim(\,) = 0,$$

$$\operatorname{rang}(\alpha_1 \ldots, \alpha_r) = p^r.$$

$F(p; q)$ sei die assoziative $\boldsymbol{Z}_p$-Algebra, die von $B(p; q)$ frei erzeugt wird; Dimension und Rang übertragen sich auf $F(p; q)$ durch die Festsetzung:

$$\dim(x \cdot y) = \dim(x) + \dim(y); \qquad \operatorname{rang}(x \cdot y) = \operatorname{rang}(x) + \operatorname{rang}(y).$$

$U(p; q)$ sei die Algebra, die aus $F(p; q)$ durch Faktorisieren nach den Relationen:

$$x \cdot y = (-1)^{f(x,y)}\, y \cdot x,$$

mit $f(x, y) = \dim(x) \cdot \dim(y) + q \cdot \operatorname{rang}(x) \cdot \operatorname{rang}(y)$, entsteht. Dimension und Rang übertragen sich auf $U(p; q)$.

$$\vartheta\colon \quad U(p; q) \to \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_*\big(S(n); \boldsymbol{Z}_p^{(q)}\big)$$

sei der Homomorphismus von bigraduierten Algebren, für den

$$\vartheta(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = i_* e[\alpha_1, \ldots, \alpha_r].$$

ϑ ist nach (1.4) wohldefiniert, und wir haben gezeigt:

Satz (4.2). *ϑ ist ein Epimorphismus bigraduierter Algebren.*

Wir geben eine andere Beschreibung der Menge $B(p; q)$: Einer Folge $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ ordne man die Folge $(j_1, \ldots, j_r)$ zu, so daß

$$\begin{aligned} j_r &= \alpha_1 \\ j_{r-\nu} &= \alpha_{\nu+1} + (p-1)(j_r + j_{r-1} + \cdots + j_{r-\nu+1}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dies definiert eine eineindeutige Abbildung bigraduierter Mengen von $B(p; q)$ auf die Menge $Q(p; q)$ der Folgen $(j_1, \ldots, j_r)$, $r \geqq 0$, für die

$$\boldsymbol{Q}_1\colon j_\nu = \begin{cases} 2n(p-1) \text{ oder } 2n(p-1)-1 \text{ für } q \text{ gerade}, \\ (2n+1)(p-1) \text{ oder } (2n+1)(p-1)-1 \text{ für } q \text{ ungerade}, \end{cases} \tag{4.4}$$

$\nu = 1, \ldots, r$.

$\boldsymbol{Q}_2$: $j_1 \leqq p j_2; \ldots; j_{r-1} \leqq p j_r$;

$\boldsymbol{Q}_3$: $j_1 > (p-1)(j_2 + \cdots + j_r)$.

$$\dim(j_1, \ldots, j_r) = \sum_{\nu=1}^{r} j_\nu, \qquad \operatorname{rang}(j_1, \ldots, j_r) = p^r.$$

Der Folge $(j_1, \ldots, j_r)$ entspricht dann in $H_*(S(p^r, p))$ ein Element

$$e(j_1, \ldots, j_r) = e(j_2, \ldots, j_r) \wr e(k) \tag{4.5}$$

mit

$$k = j_1 - (p-1)(j_2 + \cdots + j_r).$$

Dies ist die Beschreibung bei NAKAOKA [*11*], an die wir uns weiterhin halten wollen.

5. Die Struktur von $H_*(S(n); \boldsymbol{Z}_p^{(q)})$

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß die Abbildung

$$\vartheta: \quad U(p; q) \to \bigoplus_n H_*(S(n); \boldsymbol{Z}_p^{(q)})$$

auch monomorph, somit ein Isomorphismus ist. Wir untersuchen zunächst den Fall mit trivialer Operation: $q = 0$.

$U(p; 0)$ ist die kommutative durch die Dimension graduierte Algebra, die von $Q(p; 0)$ frei erzeugt wird. Um zu zeigen, daß die Elemente $\vartheta(j_1, \ldots, j_r)$ algebraisch unabhängig sind, lassen wir die Homologie der entsprechenden symmetrischen Gruppe als Gruppe von Kohomologieoperationen auf der Kohomologie topologischer Räume operieren. Wir übernehmen von NAKAOKA ([*11*], 6.1, 6.5) die folgenden einfach zu beweisenden Tatsachen:

Satz (5.1) (NAKAOKA). *Sei r gerade und $B = \boldsymbol{Z}$ oder $\boldsymbol{Z}_p$; $a \in H_*(S(l); \boldsymbol{Z}_p)$; $b \in H_*(S(m); \boldsymbol{Z}_p)$, und $u \in H^r(X; B)$; X ein topologischer Raum, dann gilt:*

$$u^{l+m}/b \cdot a = u^l/a \cdot u^m/b \in H^*(X; \boldsymbol{Z}_p),$$

das linke Produkt im Sinne von (1.3), *das rechte als Cupprodukt.*

Betrachte jetzt $(j_1, \ldots, j_l) \in Q(p; 0)$. Setze

$$\nu_k = r\, p^{l-k}(p-1) - j_k, \qquad r \text{ gerade}, \tag{5.2}$$

dann gilt:

Satz (5.3) (NAKAOKA). *Sei r gerade; $B = \boldsymbol{Z}$ oder $\boldsymbol{Z}_p$; $u \in H^r(X; B)$, dann ist*

$$u^{p^l}/i_*(e(j_1, \ldots j_l)) = c \cdot \mathrm{St}^{\nu_1} \mathrm{St}^{\nu_2} \ldots \mathrm{St}^{\nu_l}(u)$$

wobei $c \not\equiv 0$ modulo p; $e(j_1, \ldots, j_l)$ wie in (4.5).

Genügt die Folge $(j_1, \ldots, j_l)$ den Bedingungen $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, \boldsymbol{Q}_3$, so genügt die Folge $(\nu_1, \ldots, \nu_l)$ den folgenden Bedingungen, wie man leicht nach-

rechnet:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Omega}_1\colon \quad v_1, \ldots, v_l \equiv 0 \quad \textit{oder} \quad 1 \bmod 2(p-1) \\ (5.4) \qquad &\boldsymbol{\Omega}_2\colon \quad v_1 \geqq p\, v_2, \ldots, v_{l-1} \geqq p\, v_l \\ &\boldsymbol{\Omega}_3\colon \quad v_1 < (p-1)(r+v_2+\cdots+v_l) \end{aligned}$$

und wenn man zu gegebenem $(j_1, \ldots, j_l)$ die Zahl r genügend groß wählt, gilt:

$$\boldsymbol{\Omega}_4\colon \quad v_l > 1\,.$$

Schließlich berufen wir uns auf das folgende Ergebnis von CARTAN ([3] II, Theorem 6):

Theorem (5.5). *Sei u die fundamentale Klasse von $H^*(\boldsymbol{Z}, r; \boldsymbol{Z}_p)$, dann ist die Menge $St^I(u)$ eine algebraische Basis von $H^*(\boldsymbol{Z}, r; \boldsymbol{Z}_p)$, wobei I die Folgen durchläuft, die $\boldsymbol{\Omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2, \boldsymbol{\Omega}_3, \boldsymbol{\Omega}_4$ erfüllen.*

Das heißt: die Elemente $St^I(u)$ sind unter dem Cupprodukt algebraisch unabhängig und erzeugen $H^*(\boldsymbol{Z}, r; \boldsymbol{Z}_p)$; nur die erste Aussage werden wir benutzen.

Zu einer Folge $I=(v_1, \ldots, v_l)$ ist dabei

$$St^I = St^{v_1} St^{v_2} \ldots St^{v_l}, \qquad \text{und } St^{()} = id\,.$$

Es ist leicht zu sehen, daß aus (5.1), (5.3), (5.4), (5.5) folgt:

Satz (5.6). *Die Abbildung ϑ in* (4.2) *ist monomorph* ($q=0$).

Beweis. Betrachte den Homomorphismus

$$\varphi\colon \quad H_*(S(n); \boldsymbol{Z}_p) \to H^*(\boldsymbol{Z}, r; \boldsymbol{Z}_p)\,,$$

für den $\varphi(a) = u^n/a$. φ ist bis aufs Vorzeichen multiplikativ (5.1) und $\varphi \circ \vartheta$ bildet eine gegebene endliche Menge von Elementen aus $Q(p; 0)$ für genügend großes gerades r (bis auf Faktoren $\neq 0$) injektiv in die algebraische Basis von $H^*(\boldsymbol{Z}, r; \boldsymbol{Z}_p)$ ab.

Um ein entsprechendes Ergebnis für $H_*(S(n); \boldsymbol{Z}_p^{(1)})$ zu erhalten, kann man ähnlich vorgehen, nur daß man jeweils $H^*(\boldsymbol{Z}, r; \boldsymbol{Z}_p)$ mit ungeradem r zu betrachten hat. Wir ziehen es jedoch vor, den Satz auf das bereits Bekannte zurückzuführen, indem wir statt $u \in H^*(\boldsymbol{Z}, r; \boldsymbol{Z}_p)$ die Klasse

$$i_* e\big(2r(p-1)-1\big) = u_r \in H_*\big(S(p); \boldsymbol{Z}_p^{(0)}\big)$$

betrachten, und statt u/a das Kranzprodukt $u_r \wr a$.

Satz (5.7). *Die Abbildung* ϑ *in* (4.2) *ist monomorph* ($q=1$).

Der Beweis läuft ganz ähnlich wie der von (5.6): Man definiert $\varphi\colon H_*(S(n);\mathbf{Z}_p^{(1)})\to H_*(S(pn);\mathbf{Z}_p^{(0)})$ *durch* $\varphi(a)=\delta_{p,n_*}u_r\rfloor a$ für homogenes a. φ ist nach (2.5) bis aufs Vorzeichen multiplikativ, und $\varphi\circ\vartheta$ bildet eine gegebene endliche Menge von Elementen aus $B(p;1)$ bei genügend großem r (bis aufs Vorzeichen) injektiv in die bereits angegebene Basis von

$$\bigoplus_n H_*(S(n);\mathbf{Z}_p^{(0)})$$

ab. Daraus folgt leicht die Behauptung. Wir fassen zusammen:

Theorem (5.8).

$$\vartheta\colon\quad U(p;q)\to\bigoplus_{n=1}^{\infty}H_*(S(n);\mathbf{Z}_p^{(q)})$$

ist ein Isomorphismus von bigraduierten Algebren.

Für $q=0$ findet man dies bei NAKAOKA [*10*].

6. Folgerungen aus dem Struktursatz

Sei $l_{k,n}\colon S(k)\to S(n)$ für $k\leqq n$ die Inklusion und $S(\infty)=\lim(S(n))$ die unendliche symmetrische Gruppe.

Lemma (6.1) (*s.* [*11*], 1.4). *Sei* $e\in H_0(S(1);\mathbf{Z}_p^{(q)})=\mathbf{Z}_p$ *das Einselement;* $a\in H_*(S(m);\mathbf{Z}_p^{(q)})$, *dann gilt:* $l_{m,m+1*}(a)=a\cdot e$.

Beweis. Sei $f\colon S(m)\to S(m)\times S(1)$ die Inklusion des ersten Faktors, dann ist $f_*(a)=a\otimes e$, daher $l_{m,m+1*}(a)=a\cdot e$.

Lemma (6.2). *Die Abbildung*

$$l_{m,m+2*}H_*(S(m);\mathbf{Z}_p^{(1)})\to H_*(S(m+2);\mathbf{Z}_p^{(1)})$$

ist trivial, falls $p\neq 2$.

Beweis. In diesem Fall ist $e\cdot e=-e\cdot e=0$ nach (1.4). Hieraus folgt unmittelbar:

Satz (6.3).

$$H_*(S(\infty);\mathbf{Z}_p^{(1)})=0\qquad \textit{für}\ \ p\neq 2.$$

Satz (6.4).

1) $H_*(S(n);\mathbf{Z}_p^{(1)})=0$ *für* $n\not\equiv 0,1 \bmod p$.

2) $l_{kp,kp+1*}\colon H_*(S(kp);\mathbf{Z}_p^{(1)})\to H_*(S(kp+1);\mathbf{Z}_p^{(1)})$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Dies entnimmt man leicht dem Struktursatz; alle Erzeugenden in $Q(p;1)-\{(\,)\}$ haben einen Rang, der modulo p kongruent 0 ist; ein Monom vom Rang $n \not\equiv 0,1 \bmod p$ enthält daher den Faktor $(\,)$ mindestens zweimal, und ist darum (für $p \neq 2$) gleich 0, daher 1). Ein Monom $\neq 0$ vom Rang $kp+1$ enthält für $p \neq 2$ den Faktor $(\,)$ genau einmal und entsteht daher allgemein aus einem Monom vom Rang kp durch Multiplikation mit $(\,)$, wobei das Monom vom Range kp für $p \neq 2$ keinen Faktor $(\,)$ enthält: daher 2).

Wir werden jedoch in (7.8) einen Beweis angeben, der den Struktursatz nicht benutzt.

Die Algebra $H_*(S(\infty); \boldsymbol{Z}_p^{(0)})$ entsteht aus $U(p;0)$ nach (6.1), indem man die Relationen

$$a \cdot (\,) = a \tag{6.5}$$

einführt. Daraus erhält man leicht:

Theorem (6.6) (NAKAOKA). *$H_*(S(\infty); \boldsymbol{Z}_p^{(0)})$ ist isomorph zu der assoziativen, kommutativen, zusammenhängenden, graduierten Algebra, die von $Q(p;0)-\{(\,)\}$ frei erzeugt wird. Als Graduierung ist dabei die Dimension zu nehmen.*

Satz (6.7). *$H_q(S(kp); \boldsymbol{Z}_p^{(1)}) = 0$ für $q \leqq k(p-2)$, wenn p ungerade ist.*

Beweis. Ein Monom $\neq 0$ vom Rang kp enthält keinen Faktor $(\,)$, wie man dem Beweis von (6.4) entnimmt. Sei also

$$J = (j_1, \ldots, j_r) \in Q(p;q) - \{(\,)\}$$

(s. (4.4)), dann folgt aus $\boldsymbol{Q}_2$, $\boldsymbol{Q}_3$:

$$j_k + \cdots + j_r > p(j_{k+1} + \cdots + j_r),$$

daher

$$\dim(J) = j_1 + \cdots + j_r > p^{r-1} j_r.$$

Nun folgt aus $\boldsymbol{Q}_1$: $j_r \geqq p-2$, daher

$$\dim(J) > \operatorname{rang}(J)(p-2)/p = k(p-2)$$

für ein Monom $\neq 0$ vom Range kp.

7. Homologie alternierender Gruppen

Sei μ_n: $A(n) \to S(n)$ die Inklusion der alternierenden Gruppe; $\kappa_{m,n}$: $A(m) \to A(n)$ für $m \leqq n$ die naheliegende Inklusion und $A(\infty) = \lim(A(n))$ die unendliche alternierende Gruppe; k sei ein Körper auf dem $S(\infty)$

trivial operiert; $H_*(A(\infty);k)$ wird wie $H_*(S(\infty);k)$ zu einer Hopfalgebra (s. [11]), und die Inklusion $\mu_\infty: A(\infty)\to S(\infty)$ induziert einen Homomorphismus von Hopfalgebren:

$$\mu_{\infty *}: H_*(A(\infty);k)\to H_*(S(\infty);k).$$

Theorem (7.1). *Sei G eine abelsche Gruppe, auf der $S(\infty)$ trivial operiert. Dann ist die Abbildung*

$$\mu_{\infty *}: H_*(A(\infty);G)\to H_*(S(\infty);G)$$

ein Monomorphismus und für $p\neq 2$ ein Isomorphismus der p-Komponenten.

Beweis. Sei $\varphi_n: S(n)\to S(2)$ die nicht triviale Abbildung ($n\geqq 2$); definiere $\bar{\lambda}_n$ durch die Zusammensetzung:

$$S(n)\xrightarrow{(\mathrm{id},\varphi_n)} S(n)\times S(2)\to S(n+2),$$

dann ist im $(\bar{\lambda}_n)\subset A(n+2)$, das heißt $\bar{\lambda}_n$ definiert eine Abbildung $\lambda_n: S(n)\to A(n+2)$. Offenbar ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} A(n) & \xrightarrow{\kappa_{n,n+2}} & A(n+2). \\ & {\scriptstyle\mu_n}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\lambda_n} & \\ & S(n) & \end{array}$$

Es induziert auf der Homologie:

$$\begin{array}{ccccc} H_*(A(n);G) & \xrightarrow{\kappa_*} & H_*(A(n+2);G) & \xrightarrow{\kappa_*} & H_*(A(\infty);G) \\ \downarrow{\scriptstyle\mu_*} & \nearrow{\scriptstyle\lambda_*} & & & \downarrow{\scriptstyle\mu_{\infty *}} \\ H_*(S(n);G) & & \xrightarrow{\quad\iota_{n,\infty *}\quad} & & H_*(S(\infty);G). \end{array} \tag{7.2}$$

Nun folgt: $a\in H_*(A(n);G)$ und $\iota_{n,\infty *}\mu_*(a)=0\Rightarrow\mu_*(a)=0$ nach (1.1)$\Rightarrow$ $\lambda_*\mu_*(a)=0\Rightarrow\kappa_*(a)=0$; das zeigt: $\mu_{\infty *}$ ist monomorph. Der zweite Teil folgt, weil $[S(\infty): A(\infty)]=2$, vermöge Transfer.

Damit ist also $H_*(A(\infty);\boldsymbol{Z}_p)$ für $p\neq 2$ vollkommen bestimmt. Eine Analyse des Diagramms (7.2) zeigt genauer:

Satz (7.3).

$$\ker\left(H_*(A(n);G)\xrightarrow{\kappa_{n,\infty *}} H_*(A(\infty);G)\right)$$
$$=\ker\left(H_*(A(n);G)\xrightarrow{\kappa_{n,n+2 *}} H_*(A(n+2);G)\right).$$

Satz (7.4). *Sei G eine abelsche Gruppe, auf der $S(n)$ trivial operiert, $p\neq 2$, $n\not\equiv 0, 1 \bmod p$, dann gilt:*

$$\mu_{n *}: H_*(A(n);G)\to H_*(S(n);G)$$

induziert einen Isomorphismus der p-Komponenten.

Beweis. μ_{n*} ist epimorph und auf im $(\kappa_{n-2,n*})$ monomorph, wie (7.1), (7.3) zeigen; aber $\kappa_{n-2,n*}$ ist epimorph auf p-Komponenten, denn $[A(n)\colon A(n-2)]=n(n-1)$ ist teilerfremd zu p.

Für die noch fraglichen Grade zeigen wir:

Satz (7.5). *Sei G eine abelsche Gruppe, auf der $A(pn+1)$ trivial operiert, dann gilt:*

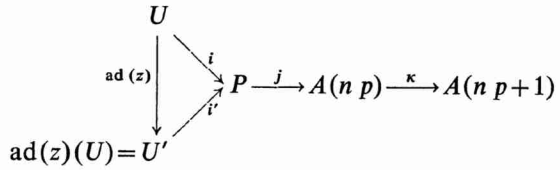
$$\kappa_{n\,p,\,n\,p+1*}\colon H_*(A(n\,p);G)\to H_*(A(n\,p+1);G)$$

induziert einen Isomorphismus der p-Komponenten.

Beweis. $[A(np+1)\colon A(np)]=np+1\equiv 1 \bmod p$, daher folgt Epimorphie vermöge Transfer.

Die Sylowgruppe beider Gruppen ist dieselbe, sie heiße P. Es ist zu zeigen, daß jede Relation beim Übergang $H_*(P)\to H_*(A(np+1))$ schon im Kern der Abbildung $H_*(P)\to H_*(A(np))$ liegt. Nach [5], Kap. XII, 8 ff. genügt es dazu, folgendes zu zeigen:

Betrachte das Diagramm von Gruppen



i, i', j, κ sind Inklusionen, $z\in A(np+1)$.

Lemma (7.6). *Es gibt ein $z'\in A(np)$, so daß* $\mathrm{ad}(z)=\mathrm{ad}(z')\colon U\to U'$, *wobei* $\mathrm{ad}(z)(u)=zuz^{-1}$.

Beweis. Sei also $z\notin A(np)$, also $z(np+1)=i\leqq np$. $np+1$ ist Fixzahl bei U, daher ist i Fixzahl bei U', U' besitzt also mindestens 2 Fixzahlen: $\{np+1, i\}$, also besitzt auch U mindestens 2 Fixzahlen, U ist also in einer Gruppe $A(np-1)$ enthalten, und ist p-Gruppe, liegt also in einer p-Sylowgruppe dieser $A(np-1)$, also liegt U in einer Gruppe $A((n-1)p)$, besitzt also in $\{1, 2, \ldots, np+1\}$ mindestens $p+1$ Fixzahlen. Seien jetzt $\{\nu_1, \ldots, \nu_f, np+1\}$ die sämtlichen Fixzahlen von U, $\{\mu_1, \ldots, \mu_f, np+1\}$ die sämtlichen Fixzahlen von U', dann setze man

$$z'(j)=z(j) \qquad \text{für } j\neq \nu_1, \ldots, \nu_f, n\,p+1;\ 1\leqq j\leqq n\,p+1,$$

$$z'(n\,p+1)=n\,p+1,$$

$$z'\colon \{\nu_1, \ldots, \nu_f\}\to\{\mu_1, \ldots, \mu_f\},$$

so daß z' eine gerade Permutation ist. Dies ist möglich, weil $f\geqq p\geqq 2$, und z' leistet das in (7.6) Behauptete. Damit ist (7.5) vollständig bewiesen.

Sei G eine abelsche Gruppe, $G^{(0)}$, $G^{(1)}=G$ als Gruppen und $S(n)$ operiere trivial auf $G^{(0)}$ und durch Multiplikation mit dem Signum der jeweiligen Permutation auf $G^{(1)}$. Zu einer abelschen Gruppe H bezeichne H_p die p-Komponente.

Durch den folgenden Satz wird die Homologie von $A(n)$ mit Koeffizienten in $\boldsymbol{Z}_p$ für $p\neq 2$ vollständig beschrieben:

Theorem (7.7). *Sei $p\neq 2$, dann existiert ein Isomorphismus*

$$\varphi_*\colon H_*(A(n);G)_p \to H_*(S(n);G^{(0)})_p \oplus H_*(S(n);G^{(1)})_p .$$

Beweis. Sei φ_* definiert durch $\varphi_*=(\mu_*^0\oplus\mu_*^1)\circ d$:

$$H_*(A(n);G)\xrightarrow{d} H_*(A(n);G)\oplus H_*(A(n);G) \xrightarrow{\mu_*^0\oplus\mu_*^1} H_*(S(n);G^{(0)})\oplus H_*(S(n);G^{(1)}),$$

wobei $d(x)=x\oplus x$ ist und μ_*^0, μ_*^1 von der Inklusion $\mu\colon A(n)\to S(n)$ induziert sind. In umgekehrter Richtung sei ψ_* die Zusammensetzung $\psi_*=s\circ(\tau^0\oplus\tau^1)$, wobei $s(x\oplus y)=x+y$ ist, und τ^0, τ^1 die Transferhomomorphismen sind, dann rechnet man unmittelbar nach:

$$\varphi_*\psi_*=2\,\mathrm{id}; \qquad \psi_*\varphi_*=2\,\mathrm{id};$$

daraus folgt die Behauptung.

Man sieht leicht, daß der Isomorphismus in (7.7) mit den Abbildungen vertauschbar ist, die von Inklusionen $S(n)\subset S(n+1)$ oder $A(n)\subset A(n+1)$ auf der Homologie induziert werden. Man kann daher aus (7.4), (7.5) und (7.7) auch Satz (6.4) erschließen. Man erhält allgemeiner:

$$H_*(S(n);G^{(1)})_p=0 \qquad \text{für } n\not\equiv 0,1 \bmod p,$$

und

$$H_*(S(kp);G^{(1)})_p\cong H_*(S(kp+1);G^{(1)})_p .$$

Literatur

[1] ADEM, J.: The relations on Steenrod powers of cohomology classes. Algebr. Geom. and Topol., Princeton 191–238 (1957).

[2] CARDENAS, H., y E. LLUIS: El normalisador del p-grupo de Sylow del grupo simetrico $S(p^n)$. Boletin de la Soc. Mat. Mexic. 1–6 (1965).

[3] CARTAN, H.: Sur les groups d'Eilenberg-MacLane I, II. Proc. Nat. Acad. Sci., USA **40**, 467–471, 704–707 (1954).

[4] — Algèbre d'Eilenberg-MacLane et homotopie. Sem. H. Cartan, 7e ann. (1954/55).

[5] —, and S. EILENBERG: Homological Algebra. Princeton Uni. Press 1956.

[6] DOLD, A.: Homology of symmetric products and other functors of complexes. Ann. of Math. **67**, 239—281 (1958).
[7] — Decomposition theorems for $S(n)$-complexes. Ann. of Math. **75**, 8—16 (1962).
[8] —, u. R. THOM: Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. Ann. of Math. **67**, 239—281 (1958).
[9] HALL, M. jr.: The theory of groups. New York: Macmillan Comp. 1959.
[10] NAKAOKA, M.: Decomposition theorems for homology groups of symmetric groups. Ann. of Math. **71**, 16—42 (1960).
[11] — Homology of the infinite symmetric group. Ann. of Math. **73**, 229—257 (1961).
[12] PUPPE, D.: Homotopie und Homologie in abelschen Gruppen und Monoidkomplexen. Math. Z. **68**, 367—406 (1958).
[13] STEENROD, N.: Cohomology operations and obstructions to extending continuous functions. Colloqu. lect. notes, Princeton Uni. 1957.
[14] —, and D. EPSTEIN: Cohomology operations. Ann. of Math. Studies 50. Princton Uni. Press 1962.

Mathematisches Institut
der Universität Heidelberg

(Eingegangen am 26. Juli/6. September 1966)

Inventiones math. 2, 238—246 (1967)

On a Theorem of Hecke in Number Fields and Function Fields

J. V. ARMITAGE (Durham)

1. Introduction

Let R be a Dedekind ring, F its field of fractions, E a finite separable extension of F and S the integral closure of R in E. Let $\mathfrak{D}$ be the different of S over R and let $\mathfrak{d}=N_{R/S}(\mathfrak{D})$ be the discriminant. Then the ideal class of $\mathfrak{d}$ is a square (cf. FRÖHLICH [4]). If F is a number field, then HECKE ([7], Theorem 176) has proved that the same is true of the ideal class of the different. On the other hand, FRÖHLICH, SERRE and TATE ([5]) have shown that this deeper result is not true in general. Examples exist with F a finite extension of the function field $k_0(z)$, where k_0 is algebraically closed, and R the polynomial ring $k_0[z]$, such that $\mathrm{cl}(\mathfrak{D})$ is odd. Their counter-example is not valid if k_0 is a finite field (the case most closely related to ordinary number theory) and this paper has its origins in an attempt to prove that in this case the analogue of HECKE's theorem is true.

HECKE's proof depends on the reciprocity formula for GAUSS's sums in a number field and the obvious way to attack the function field problem is to try to imitate his argument. Given the analogous sums and a reciprocity formula for them, the remainder of HECKE's argument goes through, with the obvious modifications. By establishing the appropriate reciprocity for a finite analogue of the theta series associated with a number field, I was able to prove a reciprocity law for GAUSS's sums in a function field over a finite constant field, and so the analogue of HECKE's theorem.

Now LAMPRECHT ([8]) has used similar sums in the functional equation of the L-series for a function field and this led Professor SERRE to suggest to me that one should be able to find a unified proof for the two cases using the appropriate L-series and their functional equations, rather than the Gaussian sums.

The proof suggested by SERRE is reproduced in § 2 for both the number field case and the function field case. In § 3, his argument is adapted to give a determination of the strict ideal class, $\mathrm{cl}_0(\mathfrak{D})$, of the different in the number field case. This too has an analogue in the function field case, but we do not pursue the matter; the interested reader will be able to fomulate the analogue from our remarks in § 4. This last section is included for historical reasons and is a very brief outline of the imitation

of HECKE's proof already mentioned. Or rather it is an indication of the way in which SIEGEL's proof ([*10*]) of the reciprocity formula for GAUSS's sums in number fields can be adapted to function fields. Instead of the "theta series", an appeal is made to a method of CARLITZ ([*2, 3*]). The whole of this section is little more than a dictionary which should enable the reader to make his own translation from one case to the other.

I am grateful to Professor SERRE for allowing me to reproduce his proof of HECKE's theorem, and for suggesting the problem to me in the first place.

2. Hecke's Theorem in Number Fields and Function Fields

We begin with the case in which the field E of the Introduction is an algebraic number field, k. We write $[k:\mathbb{Q}]=n=r_1+2r_2$, where r_1 denotes the number of real absolute values and r_2 the number of complex absolute values.

Theorem 1. *Let χ be a character of order 2 of the ideal class group of k. Then the different $\mathfrak{D}$ satisfies*

$$\chi(\mathfrak{D})=1.$$

Proof. Let $L(s,\chi)$ be the classical L-function

$$L(s,\chi)=\prod_{\mathfrak{p}}(1-\chi(\mathfrak{p})(N\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

where the product is taken over all prime ideals $\mathfrak{p}$ of k. Then if

$$\Lambda(s,\chi)=(2^{r_1}(2\pi)^{-n}d_k)^{s/2}\,\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\,L(s,\chi) \tag{1}$$

where d_k denotes the absolute value of the discriminant, $\Lambda(s,\chi)$ satisfies the functional equation

$$W(\chi)\,\Lambda(s,\chi)=\Lambda(1-s,\chi), \tag{2}$$

where $W(\chi)=\chi(\mathfrak{D}^{-1})$. (Cf. LANG [*9*], Chap. 7 or HASSE [*6*] p. 35.) If we replace χ by χ_0, the trivial character, then (2) is the functional equation of the Dedekind ζ-function $\zeta_k(s)$ of k.

Now the Existence Theorem (cf. ARTIN-TATE [*1*], Chap. 8 or HASSE [*6*], Theorem 3) asserts that χ corresponds to a quadratic extension K/k which is unramified everywhere and which satisfies

$$\zeta_k(s)\,L(s,\chi)=\zeta_K(s), \tag{3}$$

where $\zeta_K(s)$ is the Dedekind ζ-function of K. Since $[K:Q]=2n$, with $2r_1$ real absolute values and $2r_2$ complex absolute values, it follows

from (3) and the three functional equations like (2), that

$$W(\chi)=\left(\frac{d_k}{d_K^{\frac{1}{2}}}\right)^{1-2s}$$

where d_K is the absolute value of the discriminant of K. Hence $\chi(\mathfrak{D}^{-1})=1$.

Corollary. (HECKE'S *theorem*). *The ideal class of* $\mathfrak{D}$ *is a square.*

We turn now to the case in which the field E is a finite extension of a function field $k_0(z)$, with $\mathrm{Card}(k_0)=q=p^f$, $p\neq 2$. The ring S is now the integral closure of $k_0[z]$ in E and the different $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_z$ satisfies

$$\mathfrak{D}_z=\mathfrak{u}_z^2\,\mathfrak{w} \tag{4}$$

where $\mathfrak{u}_z$ is the divisor of poles of z and $\mathfrak{w}$ is a divisor of the canonical class of the function field $k=E$. Thus an equivalent, and more intrinsic, form of the analogue of HECKE'S theorem is contained in the following theorem.

Theorem 2. *Let* $\mathfrak{w}$ *be a divisor of the canonical class of a function field* k *over a finite constant field* k_0. *Then* $\mathrm{cl}(\mathfrak{w})$ *is even.*

Proof. Just as in the proof of Theorem 1, Cor., it suffices to prove that $\chi(\mathfrak{w})=1$, where χ is a character of order 2 of the divisor class group of k. Let χ be such a character and let

$$L(s,\chi)=\prod_{\mathfrak{p}}(1-\chi(\mathfrak{p})(N\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

where the product is taken over all prime divisors $\mathfrak{p}$ of k. Then $L(s,\chi)$ satisfies the functional equation

$$L(1-s,\chi)=W(\chi)\,q^{1-g}\,q^{(2g-2)s}\,L(s,\chi) \tag{5}$$

where g is the genus of k and in the present case $W(\chi)=\chi(\mathfrak{w})$. (Cf. LAMPRECHT, op. cit.) The Existence Theorem (ARTIN-TATE, loc. cit.) gives a quadratic extension K/k which is unramified everywhere and such that

$$\zeta_k(s)\,L(s,\chi)=\zeta_K(s) \tag{6}$$

where $\zeta_k(s)$ and $\zeta_K(s)$ are the zeta functions of k and K respectively. Using (5) and (6) and the fact that the genus G of K satisfies

$$G-1=2(g-1)$$

we obtain the desired result.

3. The Strict Ideal Class of the Different in Number Fields

Two ideals $\mathfrak{a}$ and $\mathfrak{b}$ are said to be equivalent in the strict (or narrow) sense if and only if $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}=(\alpha)$ where $\alpha\in k$ is totally positive. We denote the class of $\mathfrak{D}$ in the strict sense by $\mathrm{cl}_0(\mathfrak{D})$. Let I_k be the idèle group of k and let $I_{k,\infty}$ be the subgroup of I_k consisting of those idèles whose finite components are units. Then the group C_0 of strict ideal classes is isomorphic to the group $I_k/k_0^* I_{k,\infty}$, where k_0^* denotes the multiplicative group of strictly positive elements of k. (See LANG, op. cit., Chap. 6.) Now let χ be a character of order 2 of I_k with the following properties:

a) χ is trivial on k^*;

b) the local components χ_v of χ are trivial on the local units U_v for all finite absolute values (that is, χ is unramified at the finite primes);

c) the real infinite local components χ_v are arbitrary.

It follows from the isomorphism

$$C_0\cong I_k/k_0^* I_{k,\infty}$$

that $\mathrm{cl}_0(\mathfrak{D})$ is even if and only if $\chi(\mathfrak{D})=1$. Thus $\mathrm{cl}_0(\mathfrak{D})$ is in principle determined by:

Theorem 3. *Let M be the number of real infinite primes at which χ is ramified, where χ is a character of I_k with the foregoing properties. Then the different $\mathfrak{D}$ of k satisfies*

$$\chi(\mathfrak{D})=(-1)^{M/2}.$$

Proof. Let

$$L(s,\chi)=\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\chi(\mathfrak{p})(N\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$$

where the product is taken over all finite primes $\mathfrak{p}$ of k. Put

$$\Lambda(s,\chi)=\left(2^{r_1}(2\pi)^{-n}d_k\right)^{s/2}\prod_{v\ \text{infinite}}\Gamma(s_v/2)\,L(s,\chi)$$

where $s_v=2s$ if v is complex and if v is real, $s_v=s$ or $s+1$ according as χ is unramified at v or not. Then (cf. LANG, op. cit., p. 113), $\Lambda(s,\chi)$ satisfies

$$W(\chi)\,\Lambda(s,\chi)=\Lambda(1-s,\chi) \tag{7}$$

where in our case

$$W(\chi)=i^{-M}\chi(\mathfrak{D}^{-1}). \tag{8}$$

If χ is replaced by the trivial character, $W(\chi_0)=1$ and (7) is simply the functional equation of the Dedekind ζ-function $\zeta_k(s)$ of k.

It follows from the Existence Theorem that the character χ corresponds to a quadratic extension K/k which may be ramified at infinity, but not

elsewhere. We have

$$\zeta_K(s)=\zeta_k(s)\,L(s,\chi) \tag{9}$$

and $\zeta_K(s)$ satisfies a functional equation like (7) in which r_1 and r_2 are replaced by $2(r_1-M)$ and $2(2r_2+M)$ respectively. (For only the real unramified primes of k split in K.)

Combining the three functional equations by means of (9), we obtain

$$W(\chi)\left[2^M\frac{d_k}{d_K^{\frac{1}{2}}}\right]^s\left[\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(s)}\right]^M$$

$$=\left[2^M\frac{d_k}{d_K^{\frac{1}{2}}}\right]^{1-s}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma(1-s)}\right]^M.$$

Hence, using

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}2^{1-s}\Gamma(s),$$

$$W(\chi)=\left[\frac{d_k}{d_K^{\frac{1}{2}}}\right]^{1-2s}$$

and so

$$W(\chi)=1.$$

The desired result now follows from (8) on noting that M is even since

$$\chi(-1)=1.$$

It is well known that in the case of a real quadratic field k, $\mathrm{cl}_0(\mathfrak{D})$ is even if and only if the norm of the fundamental unit is -1. (See HECKE, loc. cit., p. 179.) The same result can be derived from Theorem 3. A partial generalization is possible; namely one can obtain a sufficient condition for $\mathrm{cl}_0(\mathfrak{D})$ to be even. This condition is most conveniently expressed in terms of the regulatrix of k, whose definition we briefly recall.

Let $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r$, $r+1=r_1+r_2$ be generators of the group of units modulo roots of unity and define $\sigma(\varepsilon_j^{(v)})$ by

$$(-1)^{\sigma(\varepsilon_j^{(v)})}=\operatorname{sgn}\varepsilon_j^{(v)}$$

where v runs through the real absolute values. Set

$$\Sigma=\begin{bmatrix}1 & \sigma(\varepsilon_1^{(1)}) & \ldots & \sigma(\varepsilon_r^{(1)})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \sigma(\varepsilon_1^{(r_1)}) & \ldots & \sigma(\varepsilon_r^{(r_1)})\end{bmatrix}.$$

If k it totally real, $\det\Sigma$ is called the regulatrix.

Corollary. *If Σ has rank r_1, then $\mathrm{cl}_0(\mathfrak{D})$ is even.*

Proof. The r_1 rows of Σ, corresponding to the real conjugates, must be independent and so there exist units with arbitrary signs at the real primes. Hence χ cannot be ramified at any of the real components, for otherwise condition a) above would not be satisfied. So $M=0$.

4. Gauss's Sums in Function Fields

We use the notation already introduced in § 2. We denote by $|r|$, $r\in k_0(z)$ the valuation of $k_0(z)$ defined by

$$|r|=q^{\deg r}$$

and by $k_0\langle z\rangle$ the completion of $k_0(z)$ with respect to the topology defined by this valuation. The valuation extends to k in the usual way, and if $\mathfrak{p}$ is one of the places of k lying above the place of $k_0(z)$ corresponding to z^{-1}, we denote the completion of k at $\mathfrak{p}$ by $\hat{k}_\mathfrak{p}$. Thus the elements of $\hat{k}_\mathfrak{p}$ are Laurent series

$$\sum_{-\infty\ll\mu} c_\mu \pi^\mu \tag{10}$$

where π is a prime element at $\mathfrak{p}$ and the c_μ are in the residue field $k_\mathfrak{p}$ at $\mathfrak{p}$. In particular, for $\deg\mathfrak{p}=1$ and $\alpha\in k$, we have

$$\alpha=\sum_{\mu=-m}^{\infty} a_\mu\pi^\mu, \qquad a_\mu\in k_0, \qquad a_{-m}\neq 0, \tag{11}$$

and we define

$$\mathrm{sgn}_\mathfrak{p}\,\alpha=a_{-m}. \tag{12}$$

Such an α is said to be "totally positive" if and only if

$$\left(\frac{\mathrm{sgn}_\mathfrak{p}\,\alpha}{q}\right)=1$$

for all $\mathfrak{p}$ dividing $\mathfrak{u}_z$ with $\deg\mathfrak{p}=1$, where (x/q) is the Jacobi symbol in k_0.

For $\gamma\in k_0\langle z\rangle$, we define (cf. SIEGEL [*10*], § 1)

$$E\{\gamma\}=\exp\left(\frac{\pi i}{p}\,\mathrm{Tr}_{k_0/F_p}\,\mathrm{res}_\infty\,\gamma\,dz\right) \tag{13}$$

where F_p denotes the finite field of p elements and $\mathrm{res}_\infty\,\gamma\,dz$ is the coefficient of π^{-1} in the expansion of $\gamma(dz/d\pi)$ in terms of $\pi=z^{-1}$ (and the π in (13) is 3.14). Finally, for $\alpha\in k$, we define

$$E(\alpha)=\exp\left(\frac{\pi i}{p}\,\mathrm{Tr}_{k_0/F_p}\Big(\sum_{\mathfrak{p}/\mathfrak{u}_z}\mathrm{Tr}_{k_\mathfrak{p}/k_0}(\mathrm{res}_\mathfrak{p}\,\alpha\,dz)\Big)\right) \tag{14}$$

where $\operatorname{res}_{\mathfrak{p}} \alpha\, dz$ is the coefficient of π^{-1} in the expansion (10) of $\alpha(dz/d\pi)$. Note that $E(\alpha)$ is an additive character on k.

In order to prove the analogue of HECKE's theorem, one needs the following result. Let $\mathfrak{a}$ be an ideal in the ring $0_k = S$ of integers of k and for $\beta \in k$ let the quadratic residue symbol $[\beta/\mathfrak{a}]$ be defined in the obvious way. (Cf. HECKE, op. cit., p. 219.) For $\alpha \in k$, write

$$\mathfrak{D}\alpha = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}^{-1},$$

where $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_z$ is the different of 0_k over $k_0[z]$, and define

$$C(\alpha) = \sum_{\eta \bmod \mathfrak{a}} E(2\eta^2 \alpha). \tag{15}$$

The sum (15) and the symbol $[\beta/\mathfrak{a}]$ possess all the right properties and in particular one can deduce from Theorem 4 Cor. below that for every "singular, primary element ε of k",

$$\left[\frac{\varepsilon}{\mathfrak{a}}\right] = \zeta^{\operatorname{Tr}_{k/k_0(z)}(\operatorname{sgn}_{\mathfrak{p}} \alpha\, \varepsilon - \operatorname{sgn}_{\mathfrak{p}} \alpha)}, \qquad \alpha = \mathfrak{a}\,\mathfrak{D}, \tag{16}$$

where ζ is a complex number of absolute value 1. The desired result now follows immediately from (16) after one has checked that the computations leading up to HECKE's Theorem 170 have their analogues in the present case.

We follow SIEGEL's account of GAUSS's sums. This leads to a definition which is not quite the same as (15), but the two can be reconciled by following SIEGEL's § 8 and translating it into function field language. We hope that the interested reader will not find it too inconvenient to work with a copy of SIEGEL's paper and HECKE's book beside him.

Let $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ be square matrices of order n with elements in $k_0[z]$ such that $\mathfrak{A}'\mathfrak{B} = \mathfrak{S}$ is symmetric and $\det \mathfrak{S} \neq 0$. (A dash $'$ denotes the transpose.) Then the matrix

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}[\mathfrak{A}^{-1}] = (\mathfrak{A}^{-1})'\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{A}^{-1}$$

is symmetric. Let $w(\mathfrak{R})$ denote the signature (defined in terms of equivalence over $k_0\langle z\rangle$) of the quadratic form $\mathfrak{R}[\mathfrak{x}] = \mathfrak{x}'\mathfrak{R}\mathfrak{x}$. Thus in the case $n=1$, $\mathfrak{R}[\mathfrak{x}]$ is rx^2, $r \in k_0(z)$, and $w(\mathfrak{R})$ is $(\operatorname{sgn} r/q)$. Our next theorem is the analogue of SIEGEL's Theorem 2.

Theorem 4. *With the foregoing notation, suppose that*

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{u}] + 2\mathfrak{t}'\mathfrak{B}\mathfrak{u} \in k_0[z]$$

for all $\mathfrak{u}$ *with components in* $k_0[z]$. *Then*

$$\sum_{\mathfrak{u} \bmod \mathfrak{A}} E\{\mathfrak{R}[\mathfrak{u}+\mathfrak{t}]\} = \zeta^{w(\mathfrak{R})} |\det \mathfrak{R}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{v} \bmod \mathfrak{B}} E\{-\mathfrak{R}^{-1}[\mathfrak{v}] + 2\mathfrak{t}'\mathfrak{v}\} \tag{17}$$

where ζ *is a complex number of absolute value* 1.

Proof (Induction on n). We begin with the case $n=1$. In this case (17) reads

$$(18)\qquad \sum_{u \bmod a} E\{r(u+t)^2\} = \zeta^{w(r)} |r|^{-\frac{1}{2}} \sum_{v \bmod b} E\{-r^{-1}v^2 + 2tv\},$$

where $r=b/a$ and $a, b, u, v \in k_0[z]$.

Now (cf. CARLITZ [3], §10) it is easy to verify that

$$\left| \sum_{u \bmod a} E\{r(u+t)^2\} \right| = q^{a/2} \quad \text{and} \quad \left| \sum_{v \bmod b} E\{-r^{-1}v^2 + 2tv\} \right| = q^{b/2}$$

where $|\ |$ denotes the ordinary absolute value.

Choose ζ so that, if

$$\left(\frac{\operatorname{sgn} r}{q}\right) = 1,$$

(18) holds with $w(r)=1$. (In order to evaluate ζ one must undertake some calculations like those on p. 1108 of CARLITZ [2]. Using ordinary Gaussian sums, it can be shown that $\zeta = e^{\pi i/4}$.) By taking complex conjugates, one obtains (18) with $w(r) = -1$ in the case

$$\left(\frac{\operatorname{sgn} r}{q}\right) = -1.$$

This completes the basis for the induction.

The formula (17) can be written in the form

$$(19)\qquad \sum_{\mathfrak{u} \bmod a} E\{\mathfrak{R}[\mathfrak{u}+\mathfrak{t}]\} = \zeta^{w(\mathfrak{R})} |\det \mathfrak{R}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mathfrak{v} \bmod a} E\{-\mathfrak{R}^{-1}[\mathfrak{v}] + 2\mathfrak{t}'\mathfrak{v}\}$$

where $a \in k_0[z]$ is monic and such that

$$a\,\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{G} \quad \text{and} \quad a\,\mathfrak{B}^{-1} = \mathfrak{H}$$

are integral (that is, have elements in $k_0[z]$). Thus (19) is analogous to SIEGEL's formula (6) and the induction step follows SIEGEL's with only minor modifications.

Given Theorem 4, everything follows exactly as in SIEGEL's paper. We state the analogue of his Theorem 4 as:

Corollary. *Let* $\tau \in k$ *be such that*

$$\operatorname{Tr}_{k/k_0(z)}(\alpha\xi^2 + \tau\alpha\xi) \in k_0[z]$$

for all $\xi \in \mathfrak{a}$. *Then*

$$G(\alpha) = \zeta^{w(\alpha)} E(-\tfrac{1}{4}\alpha\tau^2)\, G(\alpha^*)$$

where

$$(20)\qquad G(\alpha) = (N\mathfrak{a})^{-\frac{1}{2}} \sum_{o_k/\eta \bmod \mathfrak{a}} E(\alpha\eta^2 + \tau\alpha\eta), \qquad \alpha\alpha^* = -\delta^2,$$

and $\delta \in \mathfrak{D}^{-1}$ *is such that* $(\delta)\mathfrak{D}$ *is prime to* $2\mathfrak{b}$.

Formula (16) follows from this corollary on relating the sums (20) and (15). This observation concludes our outline of the alternative proof of the analogue of HECKE's theorem.

References

[1] ARTIN, E., and J. TATE: Class field theory. Princeton notes, distributed by Harvard University 1951.
[2] CARLITZ, L.: Duke Math. J. **14**, 1105—1120 (1947).
[3] — Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 187—208 (1952).
[4] FRÖHLICH, A.: Math. Zeitschr. **74**, 18—28 (1960).
[5] — J.-P. SERRE, and J. TATE: J. für die reine u. angew. Math. **209**, 6—7 (1962).
[6] HASSE, H.: Klassenkörpertheorie I and Ia. Jahresbericht D.M.-V. 35(1926) and 36(1927).
[7] HECKE, E.: Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig: Akad. Verlag 1923 and 1954.
[8] LAMPRECHT, E.: Math. Nachr. **9**, 148—196 (1953).
[9] LANG, S.: Algebraic numbers. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1964.
[10] SIEGEL, C.L.: Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, **1**, 1—16 (1960).

Department of Mathematics
University of Durham
South Road
Durham/Great Britain

(Received November 25, 1966)

Notes for Authors

Authors are kindly requested to note the following points:

Manuscripts should be typed with double spacing on one side only. The paper must be in its final form in order to avoid corrections of the proofs. Changes in content and style are to be avoided; expenses accruing from such additional corrections will be charged to the authors.

Formulae should be written so that no uncertainty can arise as to the meaning and position of signs and characters, even if the reader is not an expert. *Formulae should be type written* and special care taken that indices and exponents can be recognized as such even if they show no difference in size; otherwise they are to be written in a smaller size by hand. Special type (Greek, Gothic, Script) must be indicated by underlining in colour. In order to avoid confusions, the *underlining of Greek characters in red, Gothic in blue and Script in green* is recommended. Characters written by hand are apt to be formed differently in different countries and are frequently hard to identify. For this reason it is advisable to employ Roman characters also for Gothic and Script and to distinguish them simply by underlining in colour. If however, hand written characters have been used, *small and capital letters should be clearly distinguished by underlining capital letters twice and small letters once.* This also applies to Roman characters written by hand such as *c, C*; *k, K*; *o, O*; *p, P*; *s, S*; *u, U*; *v, V*; *w, W*; *x, X*; *z, Z*. Special care should be taken to show the difference between *e* and *l* or *u* and *n* or *n* and *r* or *o* and 0, wherever they appear simultaneously as mathematical symbols written by hand. The characters *v* and ν as well as $\in$ and ε are also liable to cause confusion when they appear together. Underlining of formulae and mathematical signs in ink or by means of a typewriter should be avoided as this would inevitably lead to inclusion of the underlining in the composition as part of the mathematical symbol.

The fact that typewriters usually show no difference between the figure 0 (zero) and the letter O, nor, frequently, between 1 (one) and the letter l, leads to considerable confusion. Here it is absolutely essential that each letter and each numeral be individually distinguished. The numeral 1 should be written clearly as such (i.e. with a preceding hook) and not merely as a downward stroke. The latter is particularly disastrous where 1 appears as a superscript. In manuscripts written in English, in which the small (Roman) letter a is employed as a mathematical symbol care must be taken to avoid any confusion with the indefinite article.

All letters contained in formulae, as well as single letters in the text are automatically composed in italics and therefore require no underlining. On the other hand abbreviations in Roman type (the type normally used for the text) that appear in formulae (except in the case of generally familiar abbreviations such as log, or of the trigonometrical functions) must be specially marked (by underlining in yellow, if possible). Bold type should be specially marked (by underlining in brown if possible).

Footnotes which do not belong to the head of the article should be numbered consecutively.

References to the literatur should appear not as footnotes but as a numbered and complete bibliography at the end of the article. Journal articles should be cited by initials and name(s) of the author(s), the internationally recognized abbreviation for the name of the journal, the volume, the numbers of the first and last pages and the year of publication. Citations of books should include the author(s), full title, edition, place of publication, publisher and year of publication. In the text a reference to the bibliography should be indicated by the corresponding number enclosed in square brackets and placed on the same level as the rest of line (e.g. [5]).

Diagrams and illustrations should be submitted on separate sheets, apart from the text. A clear unambiguous sketch is satisfactory, since it will be redrawn by the publisher.

75 reprints of each article will be supplied to the author free-of-charge and additional copies may be obtained at cost price if ordered before the issue goes to press.

Manuscripts should be sent to the journal under the following adress:

REINHOLD REMMERT
Mathematisches Institut der Universität
34 Göttingen, Bunsenstraße 3—5

Manuscripts may also be submitted through the other editors.

Business communications should be directed to:

Springer-Verlag
69 Heidelberg 1, P.O. 1780
Telephone 49101, Telex 04-61 723

Recommandation aux auteurs

Les auteurs sont priés de bien vouloir respecter les points suivants:

Les manuscrits doivent être, dactylographiés seulement d'un côté avec un grand interligne. Il doivent être présentés sous leur forme définitive, afin d'éviter toute modification ultérieure des épreuves. Des corrections supplémentaires (c'est-à-dire divergeant du manuscrit) seront portées au débit des auteurs.

La lecture des formules ne doit soulever chez le profane aucun doute quant à l'emplacement et à la signification des symboles et des lettres. Dans la mesure du possible, *les formules doivent être écrites à la machine.* On veillera à ce que les indices et les exposants soient facilement reconnaissables lorsqu'ils ne sont pas différenciés par leur taille. Sinon, ils doivent être incrits plus petit à la main. Les lettres spéciales, (grecques, gothiques, script) doivent être signalées par un soulignement de couleur. Pour simplifier le travail du typographe, on recommande *un soulignement rouge pour les lettres grecques, bleu pour les gothiques et vert pour le script.* Les étrangers doivent se mettre dans l'esprit que les lettres manuscrites ont, suivant les pays, des allures différentes. C'est pourquoi nous prions les auteurs de ne distinguer les lettres gothiques et le script qu'à l'aide d'un soulignement en couleur; ces lettres seront donc écrites à la machine, avec des caractères latins. Dans la mesure où, néanmoins, des caractères manuscrits sont utilisés, on distinguera les majuscules des minuscules (même pour les caractères latins), *les majuscules, qu'on soulignera deux fois, des minuscules soulignées une fois.* L'indignation est spécialement important pour les caractères manuscrits comme *c, C; k, K; o, O; p, P; s, S; u, U, v, V; w, W; z, Z.*

Toutes les lettres apparaissant dans une formule ou isolées dans le texte sont composées automatiquement en cursive et, pour cette raison, n'ont pas besoin d'être soulignées spécialement. Par contre, toutes les abréviations intervenant dans une formule, et qui sont à composer en caractéres romains normaux (pour autant qu'il ne s'agit pas d'abréviations universellement connues comme log ou comme les fonctions trigonométriques) doivent être signalées spécialement par un soulignement jaune. Les lettres grasses doivent être signalées par un soulignement brun. On évitera, dans les formules et les symboles mathématiques, le soulignement à l'encre ou à la machine à écrire: en effet, il serait automatiquement reproduit comme ayant une signification mathématique.

Des difficultés spéciales naissent du fait que les machines *à* écrire ne font pas, en général, de différence entre 0 (zéro) et O (lettre) ainsi qu'entre 1 (un) et l (lettre). Dans ce cas, des signes distinctifs sont absolument indispensables. Dans les formules manuscrites on accordera un soin particulier *à* l'orthographe, lorsque les lettres *e* et *l*, *u* et *n*, *n* et *r*, ou 0 et *o* interviennent simultanément comme termes mathématiques. De même la juxtaposition de v et *v*, de $\in$ et ε donne lieu à confusion. Pour le chiffre arabe 1, on inscrira distinctement le signe 1 et non pas seulement un trait vertical. Cette dernière négligence est particulièrement catastrophique quand 1 est placé en indice supérieur. Dans les manuscrits en anglais, lorsque la lettre latine a intervient comme terme mathématique, on bannira toute possibilité de confusion avec l'article indéfini.

Les notes en bas de page, qui ne sont pas incorporées dans le titre, doivent être numérotées.

Les textes cités dans la bibliographie ne doivent pas être signalés en bas de page, mais doivent constituer à la fin de l'article une liste groupée et numérotée. Quant aux articles dans les journaux il est indispensable de mettre: les initiales et noms de tous les auteurs, le titre du journal, abrégé selon les règles internationales, le numéro du volume de la page, de l'année. Dans le cas d'un livre il faut indiquer l'auteur, le titre complet, l'édition, le lieu de publication, la maison et l'année d'édition. Dans le texte, les renvois aux articles cités sont à indiquer sur la ligne, au moyen de chiffres entre crochets (p.e. [5]).

Nous demandons que les schémas et illustrations soient séparés du texte et figurent sur des feuilles spéciales. Une esquisse claire, ne prêtant à aucun malentendu, suffit; elle sera retracée par la maison d'édition.

De chaque article, les auteurs reçoivent en tout et gratuitement 75 tirages à part. Les auteurs peuvent en acquérir d'autres au prix coûtant.

Les manuscrits doivent être adressés à la redaction du journal sous l'adresse suivante:

REINHOLD REMMERT
Mathematisches Institut der Universität
34 Göttingen, Bunsenstraße 3—5

Les manuscrits peuvent être acceptés également par les autres éditeurs.

Adresser toute correspondance administrative et commerciale à:

Springer-Verlag
69 Heidelberg 1, Postfach 1780
Téléphone 49101, Telex 04-61723