II.

Ueber die Theorie der Stabilität statistischer Reihen.

Von

Dr. W. Lexis.

1. Die Massenerscheinungen des Menschenlebens lassen sich durch statistische Zahlen oder Zahlenverhältnisse bis zu einem gewissen Grade äusserlich charakterisiren. Stellt man nun diese numerischen Symptome für eine Reihe von Beobachtungsstrecken zusammen, so gehen ihre Veränderungen denjenigen der betrachteten Massenerscheinung parallel. Diese Zahlenbewegung tritt in verschiedenen Hauptformen auf: in manchen Fällen zeigen die Glieder einer statistischen Reihe trotz aller Unregelmässigkeiten im Einzelnen eine im Ganzen durchdringende Tendenz zur Veränderung in einer bestimmten Richtung; diese Reihen entsprechen einer gewissermaassen historischen Entwicklung und mögen daher „evolutorische“ genannt werden. In anderen Reihen finden wir zwar eine gewisse Gemeinschaftlichkeit der Veränderungsrichtung in benachbarten Gliedern, aber im Ganzen doch nur ein Auf- und Abgehen, dass graphisch durch unregelmässige Wellenlinien darzustellen wäre, weshalb diese Reihen „undulatorische“ genannt werden könnten.

Kehrten diese Bewegungen in Bezug auf Wellenlänge und Amplitude regelmässig wieder, so hätten wir „periodische“ Reihen.

Wenn dagegen die Einzelwerthe einer Reihe gänzlich zusammenhangslos in einem gewissen Spielraum aufwärts und abwärts springen, so dürfte die Bezeichnung „oscillatorisch“ für dieselbe gerechtfertigt sein. Eine scharfe Abgrenzung dieser Klasse von den undulatorischen Reihen ist ebenso wenig möglich, wie eine genaue Trennung der letzteren von den evolutorischen.

Unter diesen allgemeinen Begriff der oscillatorischen Reihen aber würde nun eine Klasse fallen, die man allen übrigen als ganz eigenartig gegenüberstellen könnte, nämlich die „typischen" Reihen, deren Eigenthümlichkeit darin besteht, dass ihre Einzelwerthe ungenaue Darstellungen eines konstanten Grundwerthes sind, der nur mit rein zufälligen Abweichungen zum Ausdruck kommt.

2. In allen angeführten Klassen von Reihen können die Veränderungen der Einzelwerthe in so engen Grenzen bleiben, dass man den letzteren nach subjektiver Schätzung eine gewisse relative Konstanz zuschreiben dürfte. Doch erkennt man sofort, dass auch bei solchen relativ konstanten Reihen die Stabilität oder der Gegensatz derselben, die Dispersion, sehr verschieden ist. Man bedarf daher eines Maasses der Stabilität oder der Dispersion, und zwar eines solchen, dass auch bei Reihen von verschiedenartiger Natur vergleichbar bleibt. Ist die Stabilität dieser Reihe von Prozentzahlen grösser oder geringer als die jener anderen? — Das ist eine Frage, auf die man bei demologischen oder moralstatistischen Untersuchungen sehr häufig geführt wird. So hält A. von Oettingen die Regelmässigkeit der Prozentsätze, mit welchen sich von Jahr zu Jahr die verschiedenen Zivilstandskategorien an den Eheschliessungen betheiligen für sehr gross, W. Stieda[1]) dagegen glaubt sie, wenigstens für Elsass-Lothringen, gar nicht so hoch anschlagen zu dürfen. Wie ist da objektiv zu entscheiden? Schwankt der Prozentsatz der Eheschliessungen zwischen Junggesellen und Jungfrauen in Elsass-Lothringen weniger, als in Frankreich oder in England? Schwankt er mehr oder weniger als irgend welche andere demologische Verhältnisszahl, wie z. B. die allgemeine Heirathsziffer?

Man hat längst versucht, solche Fragen zahlenmässig zu beantworten. Es lag nahe, die durchschnittliche Abweichung der Einzelglieder von ihrem Mittelwerthe als Kriterium und Maassgrösse der Schwankung zu betrachten. So verfuhren namentlich Ad. Wagner (in seiner Selbstmordstatistik), G. Mayr[2]) und A. v. Oettingen. Aber diese Methode ist nur eine empirische, und erst eine allgemeine theoretische Erörterung der Frage wird ergeben, in welchen Grenzen sie berechtigt ist.

3. Zuerst muss ein Unterschied gemacht werden zwischen den statistischen Reihen von absoluten Zahlen und den Reihen von solchen Verhältnisszahlen, welche die Form von mathematischen Wahrscheinlichkeiten oder auch von Funktionen solcher Wahrscheinlichkeiten

1) Die Eheschliessungen in Elsass-Lothringen, Dorpat 1878.

2) Vgl. namentlich auch dessen neueste Schrift über „die Gesetzmässigkeit im Gesellschaftsleben" S. 57.

haben. Verhältnisszahlen ohne diesen Charakter sind den absoluten gleichzustellen.

Bei Reihen absoluter Zahlen ist nun allerdings die durchschnittliche Abweichung im obigen Sinne [1]) ein brauchbares Schwankungsmaass. Sind diese Reihen evolutorisch oder undulatorisch, so kann man überhaupt nur eine empirische Charakteristik ihrer Veränderlichkeit aufstellen und als solche bietet sich uns die durchschnittliche Abweichung in erster Linie dar. Ist aber die Reihe eine typische, so dass Wahrscheinlichkeitsbeziehungen zwischen den Einzelgliedern und dem Mittelwerthe bestehen, indem jene als zufällige Modifikationen und letzterer als wahrscheinlichster Werth einer typischen Grundgrösse anzusehen sind, so wäre nach der Theorie die beste Charakteristik der Dispersion in der wahrscheinlichen Abweichung gegeben. Es ist dies diejenige Abweichung vom richtigen Werthe, die bei einer sehr grossen Zahl von Einzelbestimmungen ebenso oft nicht erreicht wie überschritten werden würde. Man kann aber auch schon aus einer verhältnissmässig kleinen Anzahl von Einzelwerthen diese wahrscheinliche Abweichung, zwar nicht streng, aber doch nach ihrem wahrscheinlichsten Werthe bestimmen, und eine, allerdings nicht die genaueste, Näherung dieser Art wird mit Hülfe der durchschnittlichen Abweichung ausgedrückt. Es ist nämlich näherungsweise die wahrscheinliche Abweichung $R = 0.8453\,D$, wenn D die durchschnittliche Abweichung bezeichnet. Wegen dieser angenäherten Proportionalität von R und D kann also die letztere Grösse auch bei typischen Reihen von absoluten Zahlen als Schwankungsmaass verwendet werden. Wie R ist dann auch D umgekehrt proportional der Präcision, mit welcher die einzelnen Werthe der Reihe unter den gegebenen Umständen zu Stande kommen, und diese ist ihrerseits als Maass der Stabilität zu betrachten.

4. Mag man aber auch statt der theoretisch mehr zu empfehlenden wahrscheinlichen die durchschnittliche Abweichung zur Charakterisirung der Stabilität oder Dispersion einer Reihe benutzen, so folgt daraus noch keineswegs, dass diese Abweichung D in Prozenten des Mittelwerthes auszudrücken sei. Bei evolutorischen oder undulatorischen Reihen mag man allenfalls diese Reduktion anwenden, da in diesen Fällen D überhaupt nur ein empirisches und ungenügendes Kriterium der Veränderlichkeit der untersuchten absoluten Grösse darbietet. Sind dagegen die Einzelwerthe zufällige

1) Die Abweichungen vom Mittel sind ohne Rücksicht auf das Vorzeichen sämmtlich positiv zu nehmen.

Modifikationen eines Grundwerthes, so liegt im Allgemeinen gar kein Grund zu der Annahme vor, dass die durchschnittliche (oder auch die wahrscheinliche) Abweichung irgendwie von der absosluten Grösse des Grundwerthes abhange. Wenn man wiederholte Messungen eines Winkels anstellt, die mit zufälligen Fehlern behaftet sind, so hängt der Grad der Uebereinstimmung der Einzelwerthe und somit der durchschnittliche oder wahrscheinliche Fehler nicht von der Grösse des zu bestimmenden Winkels, sondern nur von der Beschaffenheit des Instrumentes, der Geschicklichkeit des Beobachters und den äusseren Umständen ab, und zwei Versuchsreihen werden daher, wenn diese Grundlagen der Präcision dieselben bleiben, dasselbe Schwankungsmaass ergeben, wenn auch der zu messende Winkel in dem einen Falle z. B. 30 und in dem anderen 60 Grad beträgt. Das vergleichbare Schwankungsmaass ist also in diesem Beispiele der absolute und nicht der in Prozenten der Mittelwerthe ausgedrückte Werth von D oder R. Dasselbe wird aber, wenn nicht besondere Gründe für einen bestimmten Zusammenhang zwischen der Präcision und der Grundgrösse sprechen, bei den typischen Reihen absoluter Zahlen gelten. Man habe z. B. eine Anzahl zehnjähriger Knaben und eine gleiche Anzahl vollständig erwachsener Männer nach Grösse oder Brustweite gemessen. Vermuthlich wird die erstere Reihe eine grössere durchschnittliche Abweichung vom Mittel ergeben, wie die letztere, und diese Differenz ist es, welche dem physischen Unterschied in der Stabilität der beiden anthropometrischen Grössen entspricht. Bezieht man die beiden Abweichungen auf die zugehörigen sehr verschiedenen Grundgrössen, so wird die Divergenz dieser prozentmässigen Schwankungsmaasse bedeutend grösser, als die der absoluten; aber die ersteren sind nicht vergleichbar unter sich, während die letzteren der Präcision umgekehrt proportional sind und demnach als direkte und gleichartige Darstellung der Dispersion betrachtet werden können.

In Kürze gilt also für die Reihen **absoluter** Grössen Folgendes: das beste Schwankungsmaass der typischen Reihen ist die wahrscheinliche Abweichung, jedoch ist auch die durchschnittliche Abweichung für diesen Zweck brauchbar; die eine wie die andere Maassgrösse aber ist absolut, und nicht in Prozenten der Grundgrösse auszudrücken.

Bei nichttypischen Reihen aber lässt sich ein ähnliches Schwankungsmaass überhaupt nicht theoretisch begründen; empirisch mag man immerhin die Schwankungsintensität durch die durchschnittliche Abweichung kennzeichnen und die letztere auch, wo man es für zweckmässig hält, prozentmässig auf den Durchschnittswerth beziehen.

5. Wir gehen nun zu der Untersuchung der Schwankungen von Verhältnisszahlen über, und zwar solcher, die als empirische Näherungswerthe einer mathematischen Wahrscheinlichkeit oder auch einer Funktion einer solchen Wahrscheinlichkeit angesehen werden können. Das Erstere trifft zu, wenn man eine grosse Anzahl $(a+b)$ Einzelbeobachtungen hat, von denen jede ein gewisses besonderes Resultat hätte ergeben können und von denen eine gewisse Anzahl (a) dieses Resultat auch wirklich ergeben hat. Wenn dieses Resultat als ein Ereigniss von der Wahrscheinlichkeit v angesehen werden darf, so wird der Bruch $\frac{a}{a+b}$ mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit dem Werthe v um so näher kommen, je grösser die gesammte Beobachtungszahl $a+b$ ist, die wir die Grundzahl nennen wollen. Ob aber eine Reihe gegebener Verhältnisszahlen wirklich den Gesetzen folgt, die für Näherungswerthe einer konstanten Wahrscheinlichkeit gelten, kann nur nachträglich durch die Erfahrung erprobt werden.

Bei der Aufstellung statistischer Verhältnisszahlen ist vorzugsweise die Form des einfachen Wahrscheinlichkeitsbruches zu empfehlen, der allenfalls noch mit 100 oder 1000 multiplizirt werden mag. Man wählt indess auch wohl Verhältnisse, die nicht die Form einer Wahrscheinlichkeit, sondern einer Funktion einer Wahrscheinlichkeit besitzen, weil diese manchmal für den praktischen Gebrauch bequemer sind. Es gilt dies besonders von der Form $\frac{a}{b}$, dem Verhältniss der Zahl der Fälle, in denen das besondere Resultat beobachtet worden, zu der Zahl derjenigen, in denen es nicht eingetreten ist. Liegt dem Ereigniss eine konstante Wahrscheinlichkeit v zu Grunde, so ist dieser Bruch ein Näherungswerth des Ausdrucks $\frac{v}{1-v}$.

6. Die Reihen von Verhältnisszahlen können zunächst ebenfalls eingetheilt werden in evolutorische, undulatorische, periodische und typische. Die letzteren aber, die wir hier vorzugsweise betrachten, können als Grundlagen haben entweder eine konstante Wahrscheinlichkeit, die in den Partialmassen, welche einer Beobachtungsstrecke entsprechen, mehr oder weniger genau zum Ausdruck kommt; oder eine nicht konstante Wahrscheinlichkeit, deren Aenderungen aber, weil die Reihe typisch sein soll, den Charakter zufälliger Oscillationen um den Mittelwerth besitzen müssen. Im ersten Falle entsprechen die Einzelwerthe den Ergebnissen von Versuchen an einer Urne mit schwarzen und weissen Kugeln in konstant bleibendem Ver-

hältnisse, wenn jedesmal so viele Versuche angestellt werden, als die Beobachtungszahl in einer Beobachtungsstrecke, also die Grundzahl der Einzelverhältnisse beträgt [1]). Die Stabilität der untersuchten Reihe ist dann a priori eben durch die Thatsache bestimmt, dass die volle Analogie mit einem korrekten Zufallsspiel mit konstanten Chancen vorliegt. Der wahrscheinliche Fehler berechnet sich nämlich direkt aus dieser Voraussetzung nach der Wahrscheinlichkeitstheorie zu

$$r = \varrho \sqrt{\frac{2v(1-v)}{g}}$$

wo ϱ die Konstante 0.4769, v einen möglichst genauen Näherungswerth der zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeit (in Ermangelung des wahren Werthes) und g die Grundzahl bedeutet. Ist die letztere nicht für alle Einzelverhältnisse gleich, so kann in die obige Formel, falls die Unterschiede nicht sehr gross sind, ein mittlerer Werth derselben eingesetzt werden.

Nun kann aber der wahrscheinliche Fehler auch direkt aus den gegebenen Einzelwerthen des Verhältnisses bestimmt werden, und zwar wenn die letzteren hinlänglich zahlreich sind, durch unmittelbares Abzählen vom Mittelwerthe aus. Aber auch schon bei einer verhältnissmässig kleinen Anzahl von Einzelwerthen erhält man den jeweilig wahrscheinlichsten Werth der wahrscheinlichen Abweichung durch die Formel:

$$R = \varrho \sqrt{\frac{2[\delta^2]}{n-1}}$$

wenn $[\delta^2]$ die Summe der Quadrate der Abweichungen der gegebenen Einzelwerthe vom Mittelwerthe und n die Anzahl der Einzelwerthe bezeichnet [2]).

Wenn nun wirklich die aus den Beobachtungen abgeleiteten Einzelverhältnisse nur zufällig ungenaue Darstellungen einer konstanten Wahrscheinlichkeit v sind, so muss wenigstens annähernd die Gleichung zutreffen: $R = r$.

Je kleiner die Grundzahl g ist, um so grösser wird die wahrscheinliche Abweichung. Bei einem relativ kleinen, z. B. unter 1000 bleibenden g können vereinzelt sehr grosse Abweichungen vom Mittel-

1) Ueber das Folgende vgl. meine Schrift „Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft" (Freib. 1877) und die in dieser Zeitschrift erschienene Abhandlung über das Geschlechtsverhältniss der Geborenen (Bd. XXVII, S. 209).

2) Eine weniger sichere Darstellung der wahrscheinlichen Abweichung ist der oben bereits angeführte Ausdruck $0.8453\,D$, wenn D die durchschnittliche Abweichung bezeichnet.

werthe vorkommen, und doch darf man, wenn die eben aufgestellte Gleichung erfüllt ist, die zu Grunde liegende Wahrscheinlichkeit und somit den allgemeinen Bedingungskomplex der untersuchten Erscheinung als konstant betrachten. Wie gross also auch die Schwankungen der beobachteten Verhältnisszahlen sein mögen, sie sind, falls sie den Schwankungen der Resultate von Versuchen an einer Urne mit konstanter Füllung entsprechen, gewissermaassen nur unwesentlich, da sie eine wesentliche Aenderung der Grundlage der Erscheinung nicht voraussetzen.

7. Anders aber in dem zweiten der oben unterschiedenen Fälle. Derselbe entspricht der Annahme, dass das Füllungsverhältniss der Urne zwar in jeder Serie von g Versuchen, aus der ein Einzelwerth von v berechnet wird, konstant bleibe, aber von Serie zu Serie zufälligen Aenderungen unterworfen sei, jedoch so, dass immer eine Tendenz zur Erzielung eines gewissen festen Füllungsverhältnisses vorhanden ist. Jede einzelne Serie ergiebt also einen Näherungswerth der ihr entsprechenden Wahrscheinlichkeit v; aber dieser letztere Spezialwerth von v ist selbst wieder nur die ungenaue Darstellung des allgemeinen Mittelwerthes, um welchen die den einzelnen Beobachtungsgruppen zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeiten oscilliren.

Die Totalschwankungen der beobachteten Verhältnisszahlen setzen sich also aus zwei Komponenten zusammen: die eine kann man als die unwesentliche bezeichnen, weil sie einem Schwankungssystem angehört, das auch bei konstant bleibender Grundwahrscheinlichkeit auftritt; die andere dagegen beruht auf der physischen Aenderung der Grundwahrscheinlichkeit von Serie zu Serie und mag daher die physische Schwankungskomponente heissen.

Das Maass der Totalschwankung ist die unmittelbar aus den beobachteten Abweichungen nach der Formel R dargestellte wahrscheinliche Abweichung; die unwesentliche wird durch die Formel r gemessen, indem man für v den allgemeinen Mittelwerth einsetzt, und wenn man die wahrscheinliche Abweichung der n Spezialwerthe v von dem allgemeinen Mittelwerthe mit p bezeichnet, so hat man nach der Wahrscheinlichkeitstheorie die Beziehung:

$$R = \sqrt{r^2 + p^2}.$$

Die „unwesentliche" und die „physische" Schwankungskomponente setzen sich also zu der beobachteten Totalschwankung zusammen, wie zwei rechtwinkelig gegen einander gerichtete Kräfte zu einer Resultirenden.

8. Ist die physische Schwankungskomponente $p = 0$, d. h. bleibt

die Grundwahrscheinlichkeit in der ganzen Reihe konstant, so verwandelt sich die obige Gleichung wieder in $R = r$. Ist eine reelle Komponente p vorhanden, so ist immer $R > r$.

Dagegen kann unter den hier gemachten Voraussetzungen niemals die Ungleichheit auftreten $R < r$, denn in diesem Falle würde p imaginär, was auf eine Unmöglichkeit hinweist.

Hieraus folgt, dass die Stabilität der typischen Reihen ein Maximum hat, dessen Ueberschreitung nur möglich wäre, wenn in der Massenerscheinung noch ganz besondere Verbindungen und Beziehungen beständen. Wenn bei einer statistischen Untersuchung sich mit Bestimmtheit $R < r$ herausstellte, also wenn das aus den Beobachtungen abgeleitete Schwankungsmaass kleiner wäre, als das nach der Analogie eines Glücksspieles mit konstanten Chancen berechnete, so läge eben eine ähnliche Erscheinung vor, wie wenn bei einem Spiele ein bestimmtes Resultat mit einer nach der Wahrscheinlichkeitstheorie durchaus unwahrscheinlichen Konstanz und Regelmässigkeit aufträte[1]). Man müsste dann annehmen, dass die anscheinend iso-

---

1) In einer Dissertation von F. Stark „Ueber das Geschlechtsverhältniss der Todtgeburten und der unehelichen Geburten" (Freiburg 1877) wird S. 47 eine erstaunliche Stabilität des Verhältnisses der männlichen zu den weiblichen Todtgeburten in Frankreich während der Jahre 1831 bis 40 erwähnt, die der Verfasser für eine ganz aussergewöhnliche Anomalie des Zufalles hält. Jenes Verhältniss schwankt nämlich nur zwischen 1.4480 und 1.4481! Die absoluten Zahlen sind der Tabelle entnommen, die Legoyt officiell zu der von Quételet und Heuschling herausgegebenen „Statistique internationale" (p. 225) beigetragen hat. Da nun die französische amtliche Statistik erst seit dem Jahre 1836 fragmentarische und erst seit 1841 regelmässige (wenn auch anfangs noch sehr unzuverlässige) Angaben über die Todtgeborenen liefert, so musste man zunächst vermuthen, dass die Daten der Legoyt'schen Tabelle nachträglich aus dem Urmaterial der Zivilstandsregister gewonnen seien. Ich habe nun aber jenes Geschlechtsverhältniss nach den Zahlen der Tabelle auch von 1830 an rückwärts bis zum Anfang des Jahrhunderts berechnet und immer wieder denselben Werth 1.448 gefunden. Ferner aber ergiebt sich das Verhältniss der Todtgeburten überhaupt zur Gesammtzahl der Geburten von 1840 an in allen vorhergehenden Jahren nach den Zahlen dieser Tabelle konstant gleich 0.03276. Eben diese Zahl ist aber auch der Durchschnittswerth des letzteren Verhältnisses in den ersten fünf Jahren mit allgemeiner Erhebung der Todtgeburten, 1841—45, und andererseits findet man 1.448 als Durchschnittswerth des Sexualverhältnisses der Todtgeborenen in diesem Jahrfünft. Unter diesen Umständen kann man mit einer der Gewissheit unendlich nahe kommenden Wahrscheinlichkeit behaupten, dass die betreffenden Zahlen jener Tabelle aus der Zeit vor 1841 nicht auf wirklichen Beobachtungen beruhen, sondern nachträglich berechnet worden sind, indem man das Durchschnittsverhältniss 0.03276 zur Bestimmung der Todtgeburten aus der Gesammtzahl der Geburten benutzte und die gewonnene Zahl nach dem Durchschnittsverhältniss 1.448 in Knaben und Mädchen zerlegte! Aber wenn man in dieser

lirten Einzelereignisse nicht diejenige Unabhängigkeit von einander und von dem numerischen Endresultat besässen, welche den einzelnen Versuchen an einer Urne oder an der Roulette zukommt. Mit anderen Worten, eine jene obere Grenze überschreitende Stabilität einer Verhältnisszahl würde darauf hinweisen, dass die untersuchte Massenerscheinung eine innerlich verbundene oder dass sie gewissen regulirenden Eingriffen oder Normen unterworfen sei. Sie würde mehr oder weniger dem Bereiche der planmässigen Ordnung oder der gebietenden Gesetze angehören. Die Reihen dieser Art, die man „gebundene" nennen kann, bilden eine besondere Klasse, die nicht blos rein statistisch behandelt werden kann, da es vielmehr hauptsächlich darauf ankommt, die Beziehungen solcher Reihen zu der regelnden Kraft oder dem zwingenden Gesetze zu ermitteln und namentlich festzustellen, wie weit das letztere erfüllt wird. Also nicht die statistischen Zahlen für sich, sondern das Gesetz und dessen Erfüllung sind in diesen Fällen der Gegenstand der Untersuchung. Je intensiver das Gesetz wirkt, um so weiter kann die für unverbundene Reihen geltende Stabilitätsgrenze überschritten werden, was nicht ausschliesst, dass zugleich noch eine evolutorische Bewegung zur Erreichung des Punktes vorhanden, an welchem das Gesetz absolut erfüllt sein würde. So kann man z. B. das Verhältniss der Zahl der die Schule besuchenden Kinder zur Zahl der überhaupt unterrichtsfähigen formell als einen empirischen Ausdruck der Wahrscheinlichkeit des Schulbesuches betrachten. Besteht kein Schulzwang oder nur ein lax gehandhabter, so dass jenes Verhältniss noch ziemlich weit von der Einheit entfernt bleibt, so werden die Einzelwerthe desselben in einer Reihe von Jahren vielleicht Schwankungen zeigen die mit der Annahme einer konstanten Grundwahrscheinlichkeit vereinbar sind, vielleicht aber auch eine noch geringere Stabilität besitzen. Denkt man sich aber, dass die Ausführung des Gesetzes von Jahr zu Jahr immer strenger wird, so werden die beobachteten Verhältnisse sich immer mehr der Einheit nähern. Diese letztere aber spielt nicht etwa die Rolle eines typischen Mittelwerthes, da Abweichungen über 1 hinaus gar nicht möglich sind; sie ist nur ein oberer Grenzwerth, der gewissermaassen eine einseitige Anziehungskraft ausübt. Bei genügender Intensität der gesetzlichen Zwangskraft werden dann auch die Schwankungen des der Einheit nahe gerückten Verhältnisses weit geringer sein können, als die einer unverbundenen Reihe mit konstanter Grundwahr-

Weise eine Tabelle von Beobachtungen „vervollständigt", so sollte man es doch mindestens ausdrücklich sagen.

scheinlichkeit, zumal jetzt geradezu kompensatorische Beziehungen zwischen den aufeinanderfolgenden Einzelwerthen auftreten können; denn bei energischer Tendenz zur Durchführung des Gesetzes wird der Umstand, dass das Verhältniss in einem Jahre etwas kleiner geworden ist, die Veranlassung zu grösserer Strenge in der Folgezeit bilden.

Ganz ähnlich verhält sich z. B. die empirische Bestrafungswahrscheinlichkeit für Verbrechen, d. h. das Verhältniss der Zahl der Verbrechen, die eine Bestrafung der Thäter nach sich gezogen, zu der Zahl der überhaupt vorgekommenen. Auch die Reihen dieses Verhältnisses können eine ähnliche Dispersion, wie unverbundene zeigen, so lange jenes Verhältniss wegen Mängel der Polizei und Justiz einigermaassen weit von der Einheit entfernt bleibt. Steht es dagegen dieser seiner oberen Grenze in Folge der energischen Einwirkung der Staatsgewalt sehr nahe, so kommt für seine Stabilität die durch das Kriterium $R = r$ gesetzte Grenze nicht mehr in Betracht.

Weniger intensiv regelnd, als die Staatsgesetze werden z. B. kirchliche Vorschriften wirken, obwohl immerhin in manchen Gegenden auch ohne staatlichen Taufzwang das Verhältniss der Zahl der getauften Kinder zu derjenigen der in der betreffenden christlichen Konfession geborenen ebenfalls seiner absoluten Grenze 1 so nahe kommen kann, dass die Stabilitätsgrenze der unverbundenen Reihen überschritten wird.

Es ist hier noch zu bemerken, dass der Ausdruck r, wenn v der Einheit sehr nahe kommt, ungenügend wird. Aber auch ohne Formel begreift man leicht, dass das Maximum der Stabilität, das aus der Analogie eines Glücksspiels mit konstanten Chancen abgeleitet wird, nicht maassgebend sein kann für die Genauigkeit, mit welcher ein alle Einzelfälle normativ beherrschendes Gesetz in der Masse zum Ausdruck gebracht wird. Die obere Grenze der Genauigkeit ist unter diesen Umständen offenbar die dauernde Ausführung des Gesetzes in allen Fällen.

9. Unbegreiflich würde uns aber die Ueberschreitung des durch die Bedingung $R = r$ gegebenen Maximums der Stabilität dann sein, wenn sie bei einer unverbundenen Massenerscheinung von konkreten Einzelfällen vorkäme, also in einer solchen, in der wir weder kompensatorische innere Beziehungen noch die Wirkung eines normativen Gesetzes auf alle Einzelfälle entdecken könnten. Es gilt dies z. B. von den einzelnen Knaben- und Mädchengeburten in einem Lande; und eben deshalb gibt die Gleichung $R = r$ das mögliche Maximum

der Stabilität des Verhältnisses der Knabengeburten zur Gesammtzahl der Geburten an, eine Grenze, die auch wirklich erreicht wird.

Zu den „gebundenen" Reihen sind auch diejenigen zu rechnen, deren Glieder nach einem bekannten oder erkennbaren Normativgesetze grössere Veränderungen, z. B. regelmässig periodische Bewegungen aufweisen. Solche Veränderungen können nicht mehr als „Schwankungen" in dem bisherigen Sinne angesehen werden, da sie eben einer vorgeschriebenen Norm entsprechen. Wohl aber sind die in der Regel vorhandenen Abweichungen von der streng gesetzlichen Bahn als Schwankungen zu behandeln und wo möglich zu messen. Diese letzteren können wieder in allen Grössengraden vorkommen, je nach der Kraft der herrschenden Gesetze. Wenn z. B. in einem Lande gesetzlich bestimmt ist, dass 2 $^0/_0$ der männlichen Bevölkerung im stehenden Heere dienen sollen, dass jedoch in einer gewissen Jahreszeit ein Viertel der Armee zeitweise beurlaubt, in einer anderen Jahreszeit aber ein Viertel ihrer Normalstärke an Reserven eingezogen werden sollte, so wird die Reihe der Zahlen, welche von Monat zu Monat das Verhältniss der Präsenzstärke der Armee zu der männlichen Bevölkerung des Landes angeben, eine deutliche Periodicität mit regelmässiger Wiederkehr von Maximum und Minimum erkennen lassen. Nach dem Gesetze steht auch fest, wie gross diese Verhältnisszahl im Maximum, im Minimum und im Normalstande sein soll, aber in der Wirklichkeit werden immer Abweichungen vorkommen, die je nach dem Grade der Strenge und Genauigkeit, mit der das Gesetz durchgeführt wird, grösser oder kleiner sein werden. Jedenfalls aber muss man auch hier wieder die vollständige Ausführung des Gesetzes als die obere Grenze der Genauigkeit betrachten. Die nach den Kalendermonaten geregelte Periodicität der Heirathsfrequenz dagegen tritt mit weit geringerer Sicherheit auf. Sie hängt ab von der Sitte, von gewissen ökonomischen Verhältnissen und in katholischen Ländern von den kirchlichen Vorschriften über die geschlossene Zeit. Die letzteren wirken am intensivsten, da sie unmittelbar eine regelnde Einwirkung auf die Einzelfälle ausüben. Jedoch hat diese Vorschrift nicht die Zwangsgewalt eines Staatsgesetzes und sie wird thatsächlich nur von einem gewissen Theile der Bevölkerung berücksichtigt.

Noch mehr verwischt sich die Periodicität der Sterblichkeitsverhältnisse nach den Jahreszeiten. Reihen dieser Art gehören schon gar nicht mehr zu den gebundenen, da die nur sehr unklar auftretende Periodicität nicht auf einer herrschenden Regel, sondern nur auf der periodischen Veränderlichkeit eines äusseren Einflusses beruht, dessen Wirkung nicht streng fixirt, sondern im Zusammenhang mit den sonstigen Umständen sehr wechselvoll ist. Jedenfalls aber ist die Periodicität éiner solchen Reihe insofern zu beachten, als man bei Untersuchung ihrer Schwankungen jede Phase für sich behandeln muss.

10. Den Gegenstand der selbständigen statistischen Untersuchung bilden wesentlich die unverbundenen konkreten Massenerscheinungen. In diesen herrschen weder normative Gesetze noch kompensatorische innere Beziehungen; jeder Einzelfall kommt natürlich nur in einer strengen Kausalitätsreihe zu Stande, die aus äusseren Ursachen oder inneren Motiven bestehen mag, aber das Zusammentreffen der Einzelfälle und die dadurch bedingten numerischen Verhältnisse der Massenerscheinung beruhen nur auf Wahrscheinlichkeitsgesetzen, die keine Zwangskraft haben, sondern nur die allgemeinen Möglichkeitsbedingungen abspiegeln, unter denen jedes individuelle Ereigniss auftritt. Diese Gattung ist also durchaus verschieden von derjenigen der verbundenen Massenerscheinungen, in denen ein das Ganze beherrschendes Gesetz unmittelbar bestimmte Zahlenverhältnisse als Endresultat verlangt. Als Beispiel der letzteren Art haben wir bereits erwähnt die wirkliche Präsenzstärke eines Heeres in Prozenten der Bevölkerung, wenn ein bestimmter Prozentsatz gesetzlich vorgeschrieben ist; als Gegenstück der ersteren Gattung würde dem entsprechen das thatsächliche Verhältniss zwischen Heeresziffer und Bevölkerung, wenn die Soldaten durchaus freiwillig zu feststehenden Bedingungen angeworben würden. Ohne Zweifel würde das letztere Verhältniss in einer Reihe von Jahren weit grössere Schwankungen zeigen, als das erstere, und die Untersuchung dieser Schwankungen wäre jedenfalls statistisch interessanter, als die der anderen.

11. Gehen wir nun zu einer näheren Betrachtung der nichtgebundenen typischen Reihen über, deren Glieder die Form von Wahrscheinlichkeiten (oder von einfachen Funktionen von Wahrscheinlichkeiten) besitzen. Für diese Gattung besteht unzweifelhaft das Maximum der Stabilität oder das Minimum der Dispersion, das durch die Bedingung $R = r$ bestimmt wird. Nimmt man als Beobachtungsgrösse nicht den empirischen Werth von v, sondern das Verhältniss $\frac{a}{b} = \frac{v}{1-v}$, so bleibt die Formel R unverändert[1]) in Geltung, wäh-

1) Selbstverständlich ist sie mit den Einzelwerthen und dem Mittelwerthe der jetzt angenommenen Beobachtungsgrösse zu berechnen.

rend statt r der Ausdruck $\frac{r}{(1-v)^2}$ zu nehmen ist, den wir mit (r) bezeichnen wollen. Allerdings giebt dieser Ausdruck nur eine Näherung, die um so ungenauer wird, je grösser r ist.

Bezeichnen wir den Quotienten $\frac{R}{r}$ mit Q, so wird die Bedingung des Maximums der Stabilität $Q = 1$. Die dieser Bedingung entsprechende, minimale Dispersion habe ich in der oben angeführten Schrift die normale genannt, deutlicher wäre sie vielleicht noch als „normalzufällige" zu bezeichnen. Sie entsteht lediglich dadurch, dass eine konstante Grundwahrscheinlichkeit nur mit derjenigen Unsicherheit in den beobachteten Verhältnisszahlen zum Ausdruck kommt, welche nach der Analogie eines korrekten Glückspiels zulässig ist.

Die Bedingung $Q > 1$ entspricht der „übernormalen Dispersion, die dadurch entsteht, dass die „unwesentlichen" oder „normal-zufälligen" sich mit den physischen Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeit kombiniren.

Die unternormale Dispersion, entsprechend dem Kriterium $Q < 1$ kommt hier nicht in Betracht, weil sie nur bei gebundenen Reihen möglich ist.

Wenn man nun verschiedene Reihen hinsichtlich ihrer Stabilität oder ihrer Dispersion vergleichen will, so kommt es wesentlich nur auf die physische Schwankungskomponente an. Gilt für alle verglichenen Reihen das Kriterium $Q = 1$, so ist ihnen in diesem Sinne gleiche Stabilität und Dispersion zuzuschreiben, wie verschieden auch die unmittelbar bestimmten Schwankungsmaasse R sein mögen. Denn in allen diesen Fällen ist die physische Schwankungskomponente Null und die Verschiedenheit der Grösse R nur durch die verschiedenen Werthe von g und v bedingt, und zwar nach einer festen theoretischen Formel. Allen verglichenen Reihen liegt eine konstante Wahrscheinlichkeit zu Grunde, das ist das sachlich entscheidende Moment.

Demnach wird man auch bei der Vergleichung von Reihen mit übernormaler Dispersion, für welche das Kriterium $Q > 1$ gilt, die normal-zufälligen Schwankungskomponenten aus den Werthen von R, welche die Totalschwankungen darstellen, eliminiren und nur die von den Grundzahlen g unabhängigen physischen Schwankungskomponenten p berücksichtigen. Aus der oben aufgestellten Beziehung zwischen R, r und p ergiebt sich $p = r\sqrt{Q^2 - 1}$, und dies wäre also die zur Charakterisirung und Vergleichung der Dispersion verschiedener Reihen theoretisch zu empfehlende Grösse.

12. Bei der Anwendung der obigen Formeln auf wirkliche statistische Daten muss man indess einige Ungenauigkeiten hinnehmen. Eine mathematisch genaue Erfüllung der Bedingung $Q = 1$ darf man nie erwarten, und wenn sie einträfe, so wäre dies nur auf Rechnung des Zufalls zu schreiben. Denn das den Zähler von Q bildende R ist nur der wahrscheinlichste Werth der wahrscheinlichen Abweichung, und sein eigener wahrscheinlicher Fehler ist bei der gewöhnlich verwendeten mässigen Anzahl von Einzelwerthen nicht unerheblich. Derselbe beträgt z. B. bei einem Werthe n von 16—25 47 zwischen 0.1192 und 0.0954 des wahrscheinlichsten Werthes R, und der wirkliche Fehler kann in einzelnen Fällen noch viel bedeutender sein. Nehmen wir nun den jedesmaligen Werth von r als genau an, was in der Praxis keineswegs immer der Fall ist, so wird man, wenn auch der wahre Werth von Q gleich 1 wäre, doch bei der gewöhnlich vorkommenden Grösse von n für das empirische Q eine wahrscheinliche Unsicherheit etwa zwischen den Grenzen 0.9 und 1.1 und vereinzelt sogar noch beträchtlich grössere Abweichungen erwarten müssen. Es wird also insbesondere doch auch manchmal das aus den Beobachtungen berechnete R kleiner sein, als r, demnach $Q < 1$ werden. Da aber eine wirkliche unternormale Dispersion unter unseren Voraussetzungen nicht vorkommen kann, so sieht man aus solchen Fällen, wie gross der negative Fehler von Q in Folge der Unsicherheit von R unter Umständen werden kann, und man wird daher in anderen Fällen einer gleichartigen Untersuchung auch positive Abweichungen von der Einheit in ähnlicher Grösse als zufällige Ungenauigkeiten ansehen dürfen, welche die normale Dispersion noch nicht ausschliessen. In meiner Abhandlung über das Geschlechtsverhältniss der Geborenen (l. c. S. 219) findet man z. B. einen Vergleich der Präcisionen für 34 Reihen von je 24 Einzelwerthen des Sexualverhältnisses, und es ergiebt sich daraus, dass die Q entsprechende Grösse in einem einzigen extremen Falle bis 0.723 sinkt. Da der richtige Werth derselben aber mindestens 1 sein muss, so liegt hier ein ausnahmsweise grosser negativer Fehler im Betrage von mindestens 0.277 vor. Andererseits aber kommt bei jenen 34 Reihen auch in $Q = 1.324$ ein vereinzeltes Extrem in positiver Richtung vor, und man darf nun mit Rücksicht auf den eben angeführten negativen Fehler schliessen, dass diese starke positive Abweichung wenigstens grösstentheils nur einen zufälligen Fehler darstelle und dass der wahre Werth von Q der Einheit noch sehr nahe komme.

13. Aus einer einzigen Reihe wird man daher die Normalität

der Dispersion eines Verhältnisses, wie z. B. der empirischen Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, im Allgemeinen nicht mit genügender Sicherheit erkennen können. Man muss eine grössere Anzahl von Reihen gleicher Art zur Verfügung haben und aus derselben nachweisen, dass die einzelnen Werthe von Q im Ganzen in engen Grenzen um die Einheit oscilliren, wenn auch einzelne grössere Abweichungen vorkommen. Die Gleichartigkeit der Reihen schliesst übrigens die Verschiedenheit der zugehörigen äusseren Bedingungen nicht aus; man darf annehmen, dass die maximale Stabilität, d. h. die Konstanz der allgemeinen Möglichkeitsbedingungen des Ereignisses eine physische Bedeutung hat, die sich unter sehr verschiedenen äusseren Umständen behaupten kann.

Man wird sich nach dem eben Gesagten in der Praxis also damit begnügen müssen, zu zeigen, dass es Reihen von Verhältnissen giebt, die wenigstens nahezu dem Kriterium $Q = 1$ entsprechen. Dieser Nachweis genügt zunächst, um mit grösserer oder geringerer Sicherheit (je nach dem Werthe von n) behaupten zu können, dass das betreffende Verhältniss v im Wesentlichen den Charakter einer mathematischen Wahrscheinlichkeit besitzt und dass die empirischen Werthe desselben sich nahezu so gruppiren, wie es theoretisch aus der Analogie mit einem korrekten Glücksspiel abgeleitet werden kann. Der Nachweis einer auch nur annähernden Regelmässigkeit dieser Art ist jedenfalls schon von wissenschaftlichem Interesse. Es ist eine positive Vermehrung unseres Wissens, wenn wir erfahren, dass eine Reihe zusammenhangsloser Zahlen von verschiedener Grösse nicht etwa einer empirischen Formel, sondern einem a priori aus der Kombinationstheorie abgeleiteten Wahrscheinlichkeitsgesetze sich anpassen. Ferner lassen sich manchmal aus der Thatsache, dass den verschiedenen empirischen Einzelverhältnissen eine wenigstens näherungsweise konstante Wahrscheinlichkeit zu Grunde liegt, Schlüsse auf die innere Beschaffenheit der untersuchten Erscheinung ziehen. Man erfährt ferner, wie grosse Abweichungen einzelner Verhältnisszahlen vom wahrscheinlichsten Werthe vorkommen dürfen, ohne dass man genöthigt ist, eine wesentliche Aenderung der allgemeinen Möglichkeitsbedingungen des Ereignisses anzunehmen. Man wird sich daher auch, falls nicht ein augenfälliger äusserer Störungsgrund vorliegt, nicht weiter zu bemühen brauchen, einzelne Abweichungen von ungewöhnlicher Grösse durch gewagte Vermuthungen mit irgend welchen besonderen Umständen in Zusammenhang zu bringen. So finden sich z. B. unter den 36 monatlichen Werthen des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen im Regierungsbezirk Stralsund aus den

Jahren 1870—72 nicht weniger als 7, die einen Ueberschuss von Mädchengeburten konstatiren, und zwar kommen in einem extremen Falle nur 930 Knaben auf 1000 Mädchen. Diesem steht ein anderes Extrem von 1292 Knaben auf 1000 Mädchen gegenüber. Aber diese enormen Schwankungen bedürfen weiter keiner Erklärung; sie sind mit der Konstanz der Möglichkeitsbedingungen einer Knabengeburt vereinbar, die Dispersion der 36 Einzelwerthe ist normal-zufällig und der kleinen Grundzahl 630 (der durchschnittlichen monatlichen Geburtenzahl) entsprechend, denn man findet (für die Verhältnissform $\frac{1000\,a}{b}$) $R = 56.4$ und $(r) = 57.1$, also fast vollständige Uebereinstimmung der direkt aus den Beobachtungen und der aus der kombinatorischen Theorie abgeleiteten wahrscheinlichen Abweichung.

Hieraus folgt ferner, dass man aus der Vergleichung einzelner Verhältnisse, selbst wenn deren Grundzahlen nicht sehr verschieden von einander sind, keine irgendwie verlässlichen Schlüsse ziehen kann. Nur typische Mittelwerthe können mit einiger Sicherheit verglichen werden, und wenn sich zeigen lässt, dass normale Dispersion um einen Mittelwerth stattfindet, so erlangt dieser auch bei mässiger Grundzahl eine genügende Sicherheit.

14. Es nehmen also auch diejenigen Reihen, bei denen nur näherungsweise das Kriterium $Q = 1$ zutrifft, eine ausgezeichnete Stellung ein. Es ist möglich, dass der Ueberschuss über die Einheit, den Q in solchen Fällen aufweist, nur durch die Ungenauigkeit von R entstanden ist, also in Wirklichkeit das Maximum der Stabilität erreicht ist. Eine mathematisch strenge Konstanz der Grundwahrscheinlichkeit ist indess nicht wohl vorauszusetzen, sondern es dürfte immer auch eine physische Schwankungskomponente vorhanden sein, die aber in den höchst stabilen Reihen im Vergleich mit der unwesentlichen oder normal-zufälligen Komponente sehr klein ist. Hier ist nun aber zu bemerken, dass das Kriterium $Q = 1$ in den praktisch annehmbaren Grenzen auch erfüllt sein kann, ohne dass die physische Komponente p gerade sehr klein zu sein braucht, also ohne dass das Maximum der Stabilität sehr nahe erreicht ist. Es ist dies aus der Gleichung $p = r\sqrt{Q^2 - 1}$ ersichtlich, für die man näherungsweise auch nehmen kann: $p = r\sqrt{2\varphi}$, wenn φ ein kleiner Bruch bis etwa 0.2 ist und man $Q = 1 + \varphi$ setzt.

Hat man also z. B. $Q = 1.1$, so würde, wenn dieser Werth streng richtig wäre, p noch immer $0.4447\,r$, also nur wenig kleiner als die Hälfte der zufälligen Schwankungskomponente sein. In Wirklichkeit wird nun allerdings der Werth von Q ungenau sein und der Ueberschuss φ daher vielleicht grösstentheils nur auf dieser Ungenauigkeit beruhen, aber Gewissheit hat man darüber im einzelnen Falle nicht.

Betrachten wir nun eine Reihe, in welcher die physische Schwankungskomponente irgend einen Werth p hat. Diese Komponente wird unverändert bleiben, welches auch der Werth der normal-zufälligen Komponente r sein mag, der sich seinerseits umgekehrt proportional der Wurzel aus der Grundzahl ändert. Man kann folglich die Grundzahl immer so gross nehmen, dass r gegen p gar nicht mehr in Betracht kommt und demnach der Ausdruck der Total-Schwankung $R = \sqrt{r^2 + p^2}$ sich nahezu verwandelt in $R = p$.

Umgekehrt wird man, wenn der konstante Werth p an sich nur mässig gross ist, durch die Wahl kleiner Grundzahlen es dahin bringen können, dass die normal-zufällige Komponente die physische stark überwiegt, wodurch man sich der Gleichung $R = r$ nähert; übrigens muss die Grundzahl, d. h. die Beobachtungszahl in jeder Serie, doch immer noch einige Hundert betragen, weil sonst die Formel r zu unsicher wird.

15. Aus dem Obigen lässt sich nun folgern: ist die Bedingung $R = r$ nahezu erfüllt bei einer sehr grossen Grundzahl, z. B. 100000 oder mehr, so ist die physische Schwankungskomponente p jedenfalls sehr klein und man kann die Grundwahrscheinlichkeit praktisch als konstant betrachten. Ist aber bei einer sehr grossen Grundzahl die Total-Schwankung R nicht sehr klein, so stellt dieses letztere Schwankungsmaass unmittelbar näherungsweise die physische Komponente dar, und zwar mit um so grösserer Annäherung, je grösser es ist.

Ist p von mässiger Grösse, so wird bei einer relativ kleinen Grundzahl (von einigen Hundert aufwärts) der Quotient Q der Einheit ziemlich nahe kommen; daher auch umgekehrt, wenn Q nur wenig grösser als 1 ist, die Möglichkeit vorliegt, dass eine gegen r nicht unerhebliche Komponente p vorhanden ist. Ob dies der Fall ist, würde sich entscheiden lassen, wenn man dasselbe Verhältniss in einer Reihe mit sehr grosser Grundzahl untersuchen könnte, da sich in dieser die physische Schwankung mit genügender Sicherheit unmittelbar herausstellen würde.

Je grösser also die Grundzahl ist, um so grösser ist die Annäherung an das Maximum der Stabilität, welche für eine Reihe durch das approximative Zutreffen des Kriteriums $Q = 1$ angedeutet wird.

Bei den mässigen Grundzahlen aber, die bei praktischen Untersuchungen gewöhnlich zur Anwendung kommen, bleibt ein ziemlich grosser Spielraum für die mögliche Annäherung an das Maximum.

16. Da nun **absolut** konstante Wahrscheinlichkeiten in den menschlichen Massenerscheinungen wohl nicht vorhanden sein werden, so wird im Allgemeinen das Kriterium der normalen Dispersion oder maximalen Stabilität bei sehr grossen Grundzahlen besten Falls nur unvollkommen zutreffen, auch wenn es in Reihen desselben Verhältnisses mit mässigen Grundzahlen durchaus befriedigend erfüllt wird. In der Abhandlung über das Geschlechtsverhältniss der Geborenen habe ich z. B. gezeigt, dass in den sämmtlichen 45 Registrirungsgrafschaften Englands nach den Beobachtungen aus den Jahren 1859—71 der Bedingung $R = (r)$ annähernd genügt wird. Untersucht man aber die Werthe dieses Verhältnisses für England im Ganzen, so bewegen sich dieselben in jenen 13 Jahren zwar nur zwischen den engen Grenzen von 1035 bis 1047, bei einem Mittel von 1042 Knaben auf 1000 Mädchen, aber man findet $R = 2.6$ und $(r) = 1.6$, den Quotienten $R : (r)$ also gleich 1.625, und demnach eine, wenn auch nur mässig übernormale Dispersion. Aber die Grundzahl ist hier die durchschnittliche jährliche Geburtenzahl in ganz England, über 730,000, und dadurch wird (r) so klein, dass die physische Schwankung p, die sich nach der Formel $(r)\sqrt{Q^2 - 1}$ zu 2.0 berechnet, die Oberhand erhält. 1,1 . 4479 / 1/4 Diese letztere ist aber absolut betrachtet wieder so klein, dass sie gegen die grossen normal-zufälligen Schwankungen (r), die in den Grafschaften wegen der relativ kleinen Grundzahlen gestattet sind, gar nicht in Betracht kommt und demnach auch die Quotienten Q in den letzteren nicht merklich von der Einheit entfernen kann.

17. Will man die statistischen Verhältnisse suchen, für welche die Gleichung $\cancel{Q} = r$ näherungsweise erfüllt ist, so wird man die R. Probe vorzugsweise mit solchen anstellen müssen, deren Grundzahlen nur mässig gross sind. Es wird dann möglicherweise eine gewisse physische Schwankungskomponente verdeckt bleiben, und in Betreff der Stabilität der Reihen wird man auch bei kleinem Werthe des Ueberschusses φ nur sagen können, dass sie sich dem Maximum einigermaassen nähere. Aber trotz dieser Unsicherheit bleibt es ein Gewinn, wenn man zeigen kann, dass die unmittelbar beobachtete wahrscheinliche Abweichung bei relativ kleinem g sich annähernd so gestaltet, wie es die a priori aufgestellte Theorie verlangt. Es ist ja gerade eine neue Bestätigung der Theorie, wenn eine Verhältnissreihe bei mässiger Grundzahl annähernd $Q = 1$ aufweist, während bei sehr

grossem g der entsprechende Quotient gleich 2 oder noch grösser ist. Auch ist die Erfüllung jenes Kriteriums der annähernd normalen Dispersion ein praktisch genügender Beweis dafür, dass die untersuchte Reihe im Wesentlichen den Charakter einer typischen trägt, und das früher Gesagte in Betreff der vereinzelten starken Abweichungen und der Vergleichbarkeit von Verhältnissen gilt auch mit Rücksicht auf Reihen dieser Art.

Um die bei kleiner Grundzahl verdeckte Komponente p zu bestimmen, hat man, wie gesagt, ein Mittel in der Untersuchung einer Reihe von Einzelwerthen desselben Verhältnisses mit sehr grossen Grundzahlen. Wenn das betreffende Verhältniss nachweislich nicht von der Jahreszeit beeinflusst wird, so kann man z. B. die erste Reihe mit Hülfe von Monatsbeobachtungen bilden, etwa so, dass man die Ergebnisse je eines Monats aus 15—20 Jahren zu Grunde legt. Trifft nun annähernd das Kriterium $Q = 1$ zu, so berechne man auch für die Verhältnissreihe, die sich aus den Beobachtungen der ganzen Jahre ergibt [1]), sowohl R wie r und den entsprechenden Quotienten Q. Geht dieser letztere ebenfalls nur wenig über die Einheit hinaus, so kann die physische Schwankung als unbedeutend angesehen werden; ist er dagegen beträchtlich grösser als 1, so lässt sich die Komponente p mit genügender Genauigkeit nach der Formel $r\sqrt{Q^2 - 1}$ berechnen.

In anderen Fällen wird es vielleicht zweckmässiger sein, die Verhältnissreihen mit grosser und mit kleiner Grundzahl durch geographische Gruppirung zu bilden. Man berechne das betreffende Verhältniss für eine Reihe von Jahren einmal aus den Beobachtungen im ganzen Staatsgebiet und andererseits nach den Ergebnissen in einem Komplexe von kleinen Distrikten, die durch das ganze Land vertheilt sind, indem man etwa in Preussen aus jedem Regierungsbezirke einen Kreis nähme. Grosse Städte mit individuellen Verhältnissen könnten nöthigenfalls ausgeschlossen werden. Im Uebrigen würden das Verfahren und die Schlussfolgerungen dieselben bleiben wie oben [2]).

18. Kommen wir nun auf den praktischen Gebrauch des Ausdrucks $r\sqrt{Q^2 - 1}$ als Dispersionsmaass zurück, so kann man, wenn

1) Sollte diese Jahresstrecke noch nicht genügen, um eine sehr grosse Grundzahl zu liefern, so kann man die Einzelverhältnisse aus zwei- oder dreijährigen Beobachtungsstrecken ableiten.

2) Bildet man auf diese Art durch zeitliche oder geographische Gruppirung mehrere Reihen desselben Verhältnisses mit wesentlich verschiedenen Grundzahlen und übernormaler Dispersion, so wird man, wenn die Theorie zutrifft, aus den verschiedenen R und r immer ungefähr das gleiche p finden.

$Q > 4$, in der Praxis schon ohne Bedenken statt desselben die unmittelbar hervortretende wahrscheinliche Abweichung R nehmen, denn der Fehler, der durch die Vernachlässigung der 1 unter dem Wurzelzeichen entsteht, ist dann geringer, als die in der Regel vorhandene Unsicherheit von Q. Liegt Q zwischen 4 und etwa 1.5, so stellt die obige Formel die physische Schwankungskomponente, die wir eben als das rationelle Maass der Dispersion annehmen, natürlich immer mit der durch die Ungenauigkeit von Q bedingten Unsicherheit dar, aber ihre praktische Anwendbarkeit wird dadurch nicht wesentlich beeinträchtigt. Dagegen wird diese Unsicherheit störend, wenn Q kleiner ist als 1.5, also das Kriterium der grössten Stabilität beinahe erfüllt ist. Die Wurzelgrösse ist dann möglicherweise ungefähr von der Ordnung des Fehlers, mit dem Q behaftet ist, und es könnte daher fast der ganze Ueberschuss φ lediglich durch diesen Fehler entstanden sein. Man kann also dann aus der Formel für p nur schliessen, dass die Reihe dem Maximum der Stabilität n a h e kommt; ob aber die physische Komponente wirklich so klein ist, dass man sie vernachlässigen darf, lässt sich nur durch Vergleichung mehrerer gleichartiger Reihen oder von Reihen desselben Verhältnisses mit sehr verschiedenen Grundzahlen einigermaassen entscheiden. Es wird zweckmässig sein, mit Berücksichtigung der Natur der untersuchten Verhältnisse eine untere Grenze für p anzunehmen, über welche hinaus man die physische Dispersion als Null ansieht.

19. Wir haben bisher angenommen, dass die physischen Schwankungen der Grundwahrscheinlichkeit den Charakter zufälliger Abweichungen von einem Mittelwerthe trügen. In der Wirklichkeit wird dies nur bei solchen Verhältnissen zutreffen, deren zeitlich aufeinander folgende Einzelwerthe keinerlei Zusammenhang oder Solidarität unter sich besitzen. Streng genommen wird eine absolute Selbständigkeit der successiven Werthe wohl nie vorhanden sein. Wenn auch z. B. kein Grund vorhanden ist zu der Annahme, dass ein starker Ueberschuss von Knabengeburten in dem einen Jahre an sich irgend eine Reaktion auf die relative Häufigkeit dieser Geburten im folgenden Jahre ausübe, wenn also keine innere Wechselwirkung zwischen den successiven Wahrscheinlichkeitswerthen besteht, so können die letzteren doch unter gemeinsamen äusseren Einwirkungen stehen, die eine langsam kontinuirliche Veränderung der allgemeinen Möglichkeitsbedingungen verursachen. Bei manchen Verhältnissen kann man diese evolutorischen oder undulatorischen Bewegungen der Grundwahrscheinlichkeit wegen ihrer Kleinheit vernachlässigen oder auch ohne Weite-

$Q = \frac{R}{r}$ $R = \sqrt{r^2 + p^2}$

res wie zufällige Schwankungen behandeln. Letzteres gilt namentlich für solche Fälle, in denen die aufeinander folgenden beobachteten Einzelwerthe äusserlich betrachtet keine zusammenhängenden Veränderungen erkennen lassen, sondern im Ganzen unregelmässig um einen Mittelwerth zerstreut scheinen.

In vielen Fällen aber treten solche Zusammenhänge so deutlich und stark hervor, dass sie nicht unbeachtet bleiben können. Wie bereits angedeutet wurde, beruhen dieselben theils auf Wechselwirkungen der sich folgenden Grundwahrscheinlichkeiten, theils auf allmählichen Entwicklungen in dem Komplexe der Möglichkeitsbedingungen eines Ereignisses. Der neue Zustand hat den alten als Ausgangspunkt und so wird auch die neue Grundwahrscheinlichkeit eine Modifikation, sei es eine Vergrösserung oder eine Verkleinerung, der vorhergehenden. Bezeichnen wir die verschiedenen Werthe der Grundwahrscheinlichkeit mit v_1, v_2, ..., und betrachten wir sie als Ordinaten einer Kurve, deren Abscissen die Zeit t bildet, so wird diese Linie auf längere Strecken zusammenhängende Hebungen oder Senkungen darstellen, während in dem Falle der zufälligen Schwankungen von v die Einzelwerthe sprungweise bald oberhalb bald unterhalb einer horizontalen Mittellinie auftreten.

Unter den Einzelwerthen von v aber sind hier nicht die beobachteten Verhältnisszahlen, die durch (v_1), (v_2), u. s. w. bezeichnet werden mögen, sondern eben die Grundwahrscheinlichkeiten zu verstehen, die in den Beobachtungen nur näherungsweise zum Ausdruck kommen. Wären die Ordinaten jener Kurve v_1, v_2, ... bekannt, so müssten die Abweichungen $(v_1) - v_1$, $(v_2) - v_2$, u. s. w. den Charakter normal-zufälliger Schwankungen aufweisen, wenn die Werthe v wirklich die Bedeutung mathematischer Wahrscheinlichkeiten besitzen sollen. Daher wäre es auch verfehlt, wenn man, was sich immer ausführen liesse, eine Kurvengleichung ableitete, welche für die gegebenen Werthe t genau die zugehörigen Beobachtungswerthe (v) wiedergäbe. Die Kurve der Grundwahrscheinlichkeiten lässt sich nur hypothetisch aufstellen; zeigt sich dann, dass die durchschnittliche Abweichung zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen nicht erheblich grösser und auch nicht erheblich kleiner ist, als man es nach der Wahrscheinlichkeitstheorie erwarten darf, so ist die Hypothese gerechtfertigt. Man darf dann annehmen, dass die angenommene Kurve die thatsächlichen Veränderungen der Grundwahrscheinlichkeit in der vergangenen Zeit annähernd veranschaulicht. Aber eine weitere Bedeutung für die Zukunft hat eine solche Kurve ebensowenig, wie sie irgend eine gesetzliche Kraft in der Vergangenheit besass. Sie ist nichts, als ein Bericht über Geschehenes in geometrischer Form.

20. Die wirkliche Ermittlung solcher Kurven wird im Allgemeinen die Mühe nicht lohnen. Höchstens mag zuweilen ein Versuch mit der einfachsten Hypothese über die Veränderung der Grundwahrscheinlichkeit von einigem Interesse sein. Man könnte es vielleicht aus den äusseren Umständen sich noch einigermaassen erklären, wenn gewisse Verhältnisszahlen im Ganzen auf längere Strecken regelmässig mit der Zeit fortschreitende Ab- oder Zunahme zeigten. Eine solche Veränderung würde einer gegen die Abscissenaxe geneigten geraden Linie entsprechen, deren Gleichung $v = a \pm b\,t$ wäre [1]). Man hätte dann aus den n Beobachtungswerthen (v) die wahrscheinlichsten Werthe der beiden Coefficienten a und b zu bestimmen und nur zu untersuchen, ob die Differenzen zwischen den berechneten Werthen v und den beobachteten (v) der Wahrscheinlichkeitstheorie entsprechen. Zur Entscheidung dieser Frage würde die Vergleichung der Ausdrücke R und r in ihrer früheren Gestalt nicht mehr genügen, wenn die Grundwahrscheinlichkeit sich in der ganzen Beobachtungsstrecke um einen sehr bedeutenden Betrag geändert hätte. Denn die Grösse r, der wahrscheinliche Fehler, mit dem die jedesmalige Grundwahrscheinlichkeit v zum Ausdruck kommt, hängt eben auch von v selbst ab, indem sich bei gleicher Grundzahl und verschiedenem v die Präcisionen der zugehörigen Beobachtungswerthe (v) umgekehrt verhalten wie die Wurzel aus dem Produkt $v\,(1 - v)$. Um weitläufigere Rechnungen zu vermeiden, wird es daher für praktische Untersuchungen empfehlenswerth sein, die Reihen so abzugrenzen, dass die auftretenden Differenzen der Grundwahrscheinlichkeiten keine störende Grösse erhalten. Der Einfluss derselben ist namentlich nur sehr gering, wenn v sich nicht sehr weit von 0.5 entfernt. Steigt die Grundwahrscheinlichkeit z. B. von 0.350—0.500, so nimmt der wahrscheinliche Fehler r nur im Verhältniss von $1 : 1.048$ zu, und bei weiterem Anwachsen von v über 0.500 hinaus wird r wieder kleiner bis es bei $v = 0.650$

1) Man könnte in ähnlicher Weise auch untersuchen, ob die Veränderungen von v denjenigen irgend eines anderen Elementes proportional wären, wie z. B. der Bevölkerungszahl, des Brodpreises oder sonstiger Faktoren, zu denen das betreffende v nach seiner besonderen Natur nähere Beziehungen haben könnte. Handelt es sich um eine gebundene Reihe, in welcher die progressive Erhaltung eines streng gehandhabten Gesetzes zum Ausdruck kommt, so werden die übrig bleibenden Abweichungen der Beobachtungswerthe von der geneigten geraden Linie möglicherweise den Charakter der unternormalen Dispersion tragen.

wieder bei der gleich 1 gesetzten Grösse ankommt. Solche und noch grössere Unterschiede in der Präcision der Einzelwerthe aber kann man ohne praktische Bedenken vernachlässigen, zumal wenn man Ungleichheiten der Grundzahl g unberücksichtigt lässt, welche die Präcision der einzelnen (v) noch stärker beeinflussen. Man wird unter diesen Voraussetzungen also den theoretischen wahrscheinlichen Fehler r einfach mit Hülfe eines mittleren Werthes von v berechnen und ihn mit dem aus den Quadraten der Abweichungen $(v_1) - v_1$, $(v_2) - v_2$, u. s. w. bestimmten wahrscheinlichen Fehler R vergleichen. Letzterer unterscheidet sich allerdings von dem früher aufgestellten R dadurch, dass die Abweichungen nicht auf einen festen Mittelwerth, sondern auf die der aufgestellten Gleichung gemäss veränderlichen Grundwahrscheinlichkeiten v_1, v_2, u. s. w. bezogen werden. Auch ist es in diesem Falle korrekter (wegen der zwei Konstanten) die Quadratsumme unter der Wurzel statt durch $n-1$ durch $n-2$ zu dividiren, obwohl praktisch auf diese Verbesserung wenig ankommt. Findet man nun auf diese Weise annähernd $R = r$, so erscheint die Hypothese der proportionalen Veränderung von v und t genügend berechtigt.

21. Durch die Ermittlung einer Gleichung zwischen v und t würde man eine unmittelbare Darstellung der physischen Veränderungen der Grundwahrscheinlichkeit erhalten, und ein Schwankungsmaass in dem früheren Sinne wäre dadurch unnöthig geworden. Das Aufsuchen einer solchen Gleichung ist indess selbst in dem zuletzt betrachteten einfachen Falle eine mühsame Arbeit von zweifelhaftem Nutzen. Für die Praxis ist daher ein anderes Verfahren zweckmässiger. Wenn die evolutorische oder undulatorische Bewegung der Grundwahrscheinlichkeit nicht über die Grenzen hinausgeht, innerhalb deren die mit einem Mittelwerthe von v berechnete Formel r noch praktisch brauchbar ist, so kann man einfach den besonderen Charakter dieser Bewegung unberücksichtigt lassen und dieselbe behandeln wie die zufälligen Oscillationen der Glieder einer typischen Reihe. Man berechne also R und r wie in dem früheren Falle aus dem arithmetischen Mittel der beobachteten Werthe (v). Man wird nicht finden, dass $R < r$, denn in diesem Falle hätte man eine gebundene Reihe, deren Glieder durch besondere Einwirkungen noch weniger veränderlich wären, als bei k o n s t a n t e m v und normal-zufälliger Dispersion. Ergäbe sich näherungsweise $R = r$, so entsprächen die direkt beobachteten Schwankungen nahezu der Voraussetzung einer konstanten Grundwahrscheinlichkeit und die physische Veränderlichkeit derselben, mag sie evolutorischer oder undulatorischer Art sein, wäre jedenfalls so klein, dass

sie vernachlässigt werden könnte. So bleibt also nur die Frage, ob auch, wenn entschieden $R > r$, das für die typischen Reihen geltende Maass p der physischen Dispersion für evolutorische oder undulatorische Reihen in den oben angegebenen Grenzen brauchbar ist und vergleichbare Grössen gibt.

22. Der Ausdruck, um den es sich handelt, ist $p = \sqrt{R^2 - r^2} = r\sqrt{Q^2 - 1}$. Hier haben nun p und R nicht, wie früher, die Bedeutung eines wahrscheinlichen Fehlers, denn die physischen Veränderungen von v sind ja nicht zufälliger Natur, sondern sie stehen in gewissen Verbindungen unter sich oder entsprechen zusammenhängenden Phasen derselben Entwicklung, und was R betrifft, so kombinirt sich diese Schwankungsgrösse aus den physischen Veränderungen und den zufälligen Abweichungen der empirischen Werthe (v) von den zugehörigen unbekannten Grundwahrscheinlichkeiten v. Die letzteren Abweichungen müssen dem Kriterium der normal-zufälligen Dispersion entsprechen, welches annähernd durch die Bedingung gegeben ist: $\varrho\sqrt{\frac{2\,[\tau^2]}{n-1}} = r$, wenn unter $[\tau^2]$ die Summe der Quadrate der Differenzen $(v_1) - v_1$, $(v_2) - v_2$, u. s. w. zu verstehen ist. Nun ist aber R unmittelbar durch seine Form geeignet, die Totalschwankungen um das arithmetische Mittel der Beobachtungswerthe zu charakterisiren, da dieser Ausdruck nahezu der Wurzel aus dem mittleren Quadrate dieser Totalabweichungen proportional ist. So würde sich schon durch die Analogie mit früheren dem Falle der zufälligen physischen Schwankungen die obige Formel für p rechtfertigen lassen, indem man einfach durch Definition den Ueberschuss des Quadrates von R über das Quadrat von r als das Quadrat des Maasses der physischen Schwankungen hinstellte. Aber die Beziehung $R^2 = p^2 + r^2$ lässt sich überdies direkt ableiten, und zwar hat man sich darin p in derselben Form vorzustellen, wie man sich in dem früher betrachteten Falle die physische Schwankungskomponente gebildet denken muss[1]). Zu-

1) Man wird sich immer vorstellen können, dass die Grundwahrscheinlichkeiten v_1, v_2, ... Ordinaten einer Kurve sind, deren Gleichung die Form hat:

$$v = a + bT' + cT'' + dT''' + \ldots, \text{ wo } T', T'', T''' \ldots$$

beliebige Funktionen (Potenzen, trigonometrische Funktionen oder sonst geeignet scheinende) von t sind und a, b, c, d, ... zu bestimmende Coefficienten darstellen, deren Zahl wir jedoch in Vergleich zur Zahl n der Beobachtungswerthe als klein annehmen. Die Gleichung muss man sich so beschaffen denken, dass die Differenzen $(v) - v$ oder τ zwischen den beobachteten und der mit den **wahrscheinlichsten Werthen** der Coefficienten a, b, c, d .... berechneten Ordinatenwerthen annähernd der oben in Begleich ersieht man aus dieser Beziehung, dass das arithmetische Mittel noch eine gewisse ausgezeichnete Stellung behält, auch wenn es nicht mehr den Charakter eines eigentlichen typischen Centralwerthes besitzt.

Wir sind also berechtigt, alle Reihen von Verhältnissen, die die Form empirischer Wahrscheinlichkeiten besitzen, hinsichtlich ihrer Stabilität oder Dispersion durch Vergleichung der Grössen R und r zu beurtheilen und den Ausdruck $p = r\sqrt{Q^2 - 1}$ als Maass der physischen Veränderung der Grundwahrscheinlichkeit zu betrachten, mag diese Veränderung nun in zufälligen Schwankungen, oder in unregelmässigen Undulationen oder in einer fortschreitenden Evolution bestehen. Nur dürfen die äussersten Grenzen des Spielraumes, in dem v sich bewegt, nicht so weit auseinander liegen, dass der Ausdruck r nicht mehr mit praktisch genügender Genauigkeit aus einem einzigen, mittleren Werthe von v berechnet werden kann.

23. Als neues Beispiel einer Anwendung der im Vorstehenden erörterten Theorie der Dispersion statistischer Reihen wollen wir jetzt das Geschlechtsverhältniss der Gestorbenen in verschiedenen Altersstufen behandeln.

Man kann ohne Zweifel nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dass eine in einer gewissen Altersstufe gestorbene Person, die aufs Gerathewohl heraus gegriffen wird, dem männlichen Geschlecht angehöre. Es ist dies eine relative Wahrscheinlichkeit, die abhängt von der ab-

---

zug auf r aufgestellten Bedingung genügen. Man darf immer annehmen, dass die Gleichung ein von t unabhängiges Glied a enthält, weil unsere Untersuchungen überhaupt nur unter der Voraussetzung gelten, dass v nicht sehr klein ist. Wenn aber ein solches Glied a als vorhanden angenommen wird, so lässt sich allgemein der Satz beweisen, dass:

$$\Sigma((v) - V)^2 = \Sigma(v - V)^2 + \Sigma((v) - v)^2$$

wenn durch das Zeichen Σ die Summe der dahinter stehenden Quadrate dargestellt wird, (v) und v die successiven beobachteten resp. aus der Gleichung mit den wahrscheinlichsten Coefficienten berechneten Ordinatenwerthe bedeuten und V das arithmetische Mittel aus sämmtlichen Beobachtungswerthen (v) bezeichnet. Multiplicirt man nun auf beiden Seiten mit $2\rho^2$ und dividirt durch $n - 1$, so erhält der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen genau die Form von R^2, der erste Summand rechts stimmt der Form nach mit dem Quadrat der wahrscheinlichen physischen Abweichung in dem früheren Falle überein, und der zweite Summand rechts wird annähernd gleich r^2. Wir behalten hier den Divisor $n - 1$ aus Rücksicht auf die Form von R bei, obwohl er theoretisch nicht ganz korrekt ist. Der obige Satz gilt auch bei beliebiger Verschiedenheit der Präcisionen der Einzelbestimmungen, nur ist dann statt des einfachen arithmetischen Mittels V das mit Berücksichtigung des Gewichts der Einzelwerthe berechnete Mittel, das „Gewichtsmittel“ wie man es nennen könnte, zu nehmen.

soluten Sterbenswahrscheinlichkeit des einen und des andern Geschlechts in der betreffenden Altersklasse und von der Zahl der dem Sterben ausgesetzten männlichen und weiblichen Lebenden. Jedoch kann sie als ganz selbständig nach unserer Theorie behandelt werden. Sind in einem Kalenderjahre a männliche und b weibliche Individuen der bestimmten Altersstufe gestorben, so ist $\frac{a}{a+b}$ ein empirischer Näherungswerth jener relativen Sterbenswahrscheinlichkeit der Männlichen, und es fragt sich nun, ob in einer grösseren Reihe solcher Verhältnisszahlen mit annähernd gleicher Grundzahl die wahrscheinliche Abweichung vom Mittelwerthe so gross ist, wie bei den Ergebnissen eines analogen Glückspiels mit konstanten Chancen, mit anderen Worten, ob die Reihe annähernd das Maximum der Stabilität aufweist, oder ob eine erhebliche physische Schwankungskomponente vorhanden ist.

Als Zahlenmaterial nehmen wir zunächst die in der „Statistique internationale“ (p. 117) zusammengestellten Daten über die Sterbefälle in Belgien in den Jahren 1841—60[1]). Anstatt des Verhältnisses $v = \frac{a}{a+b}$ aber legen wir wieder die Relativzahl $z = \frac{1000\,a}{b}$ zu Grunde, weshalb statt r, wie früher bereits bemerkt wurde, $\frac{1000}{(1-v)^2}\,r$ oder (r) in dem Kriterium der Stabilität auftritt. Es ist also z die Zahl der gestorbenen männlichen Individuen auf 1000 weibliche. Die Schwankungen dieser Zahl sind nun in jener 20jährigen Periode sehr verschiedener Natur, je nachdem sich dieselbe auf die Altersklassen der Kindheit, auf die des jugendlichen, mittleren und vorgerückten Alters und auf das äusserste Greisenalter beziehen. So findet man beispielsweise als Werthe von z in den drei ersten Altersmonaten und in den drei Jahrfünften von 45—60 Jahren:

Jahr	0—1 M.	1—2 M.	2—3 M.	45—50 J.	50—55 J.	55—60 J.
1841	1384	1250	1232	853	837	1004
1842	1337	1296	1214	973	898	961
1843	1342	1317	1236	992	869	937
1844	1383	1403	1239	998	888	860
1845	1376	1375	1278	1083	934	960
1846	1353	1280	1318	1253	1078	1054
1847	1357	1315	1221	1468	1353	1138

1) Mit einigen Korrektionen nach den Originaltabellen.

Jahr	0—1 M.	1—2 M.	2—3 M.	45—50 J.	50—55 J.	55—60 J.
1848	1330	1439	1310	1116	1077	860
1849	1340	1341	1245	1107	1138	873
1850	1316	1335	1183	1100	1110	850
1851	1410	1247	1264	1070	1172	1028
1852	1364	1237	1255	1113	1165	1035
1853	1385	1445	1253	1188	1206	1067
1854	1417	1308	1158	1176	1170	1171
1855	1360	1316	1182	1206	1245	1278
1856	1341	1278	1244	1174	1252	1197
1857	1356	1344	1256	1106	1124	1081
1858	1355	1408	1318	1212	1238	1211
1859	1319	1250	1282	1218	1290	1116
1860	1375	1348	1390	1291	1276	1305.

In den drei zuerst angeführten Altersklassen sind die Oscillationen von z ohne irgendwie merkbaren Zusammenhang und ohne alle Tendenz in einer bestimmten Richtung. Weder die Nothjahre noch die Cholerajahre sind besonders ausgezeichnet, und es zeigt sich auch keinerlei Parallelismus in den Veränderungen der drei Reihen. Kurz, die Schwankungen stellen sich hier von vorn herein so dar, dass man in ihnen zufällige Störungen eines typischen Mittelwerthes vermuthen darf, und wir werden in der That unten sehen, dass trotz einiger sehr beträchtlicher Ausschläge die Stabilität dieser Reihen als maximale angesehen werden darf, also die Annahme nahezu konstanter Grundwahrscheinlichkeiten gerechtfertigt ist.

Ganz anders aber bewegen sich die Einzelwerthe in den drei letzten Kolonnen. Die Veränderungen gehen hier, zumal bei den Altersklassen von 45—50 und von 50—55 Jahren, mit einem gewissen Parallelismus und zugleich in jeder einzelnen Reihe mit ziemlich deutlich auftretenden Entwicklungstendenzen von statten. Anfangs ist das Verhältniss z kleiner als 1000, also dem männlichen Geschlecht relativ günstig. In dem Nothjahre 1846 aber steigt es stark an und in dem folgenden sehr ungünstigen Jahre erreicht es in allen drei Kolonnen ein Maximum. Dann aber tritt — wohl in Folge der Wegräumung vieler schwächlicher Männer — auf kurze Zeit ein Rückschlag zu Gunsten des männlichen Geschlechtes ein, dem jedoch bald wieder und bis zum Ende des Zeitraums eine im Ganzen vorwiegende Entwicklung von z nach aufwärts folgt. Jedenfalls trägt das erste Jahrzehnt, abgesehen von dem ganz abnormen Jahre 1847, einen anderen Charakter als das zweite: die relative Sterblichkeit der Männer ist grösser geworden, und es scheinen sich also in Belgien mehr Ursachen angehäuft zu haben, welche auf die Lebensfähigkeit des männlichen Geschlechtes in seinem reiferen Alter spezifisch ungünstig einwirken. Hängt dies vielleicht mit der Entwicklung der Industrie in jenem Zeitraume zusammen?

24. Doch betrachten wir jetzt die theoretischen Kriterien der Dispersion in den verschiedenen Altersstufen. Die Rubriken z, R und (r) in der folgenden Tabelle bedürfen keiner Erklärung; jedoch sei erwähnt, dass die Werthe von z und die in R und (r) vorkommenden Werthe von v, welche die wahrscheinlichsten sein sollen, für jede Altersklasse aus den Gesammtzahlen der männlichen und weiblichen Gestorbenen des ganzen Zeitraumes abgeleitet sind [1]. Als Grundzahl g ist bei der Berechnung des (r) die jährliche Durchschnittszahl der Gestorbenen jeder Klasse angenommen [2]. Unter Q sind die Quotienten $R:(r)$ aufgeführt. Die mit O bezeichnete Kolonne enthält die äussersten Werthe von z, die in den einzelnen Klassen während der 20jährigen Periode vorgekommen sind. Man sieht daraus wieder, wie bedeutend bei relativ kleiner Grundzahl die Ausschläge werden können, die noch mit der normalen Dispersion, also der angenäherten Konstanz der allgemeinen Möglichkeitsbedingungen vereinbar sind.

Unter L ist für eine Reihe von Altersklassen angegeben, wie viele Knaben auf 1000 Mädchen die untere Grenze derselben überschreiten, damit man sich überzeuge, dass dieses Moment zu der Entstehung des grossen Uebergewichts der relativen Knabensterblichkeit nichts Merkliches beiträgt. Bei den späteren Altersklassen ist diese Rubrik ersetzt durch αD, wo $\alpha = 0{,}8453$ und D die durchschnittliche absolute Abweichung vom Mittelwerthe bedeutet. Es ist dies also die Formel, die oben als ein im Vergleich mit R etwas weniger sicherer Ausdruck des wahrscheinlichen Fehlers angegeben wurde, und unsere Zusammenstellung soll zeigen, wie fern dieselbe sich als Maass der Dispersion eignet.

---

1) Man kann übrigens, wenn die Grundzahlen nicht sehr verschieden sind, ohne erheblichen Fehler auch einfach das arithmetische Mittel der Einzelwerthe von v oder z als wahrscheinlichsten Werth nehmen. Das oben angewandte Mittel ist das „Gewichtsmittel".

2) Den dadurch begangenen Fehler kann man beurtheilen, wenn man r einmal mit der grössten und einmal mit der kleinsten Grundzahl berechnet.

Alter	z	O	L	R	(r)	Q
Todtgeb.	1348	(1281—1410)	1064	23.4	23.6	0.99
0— 1 M.	1359	(1316—1417)	1052	18.5	22.1	0.84
1— 2 M.	1323	(1237—1445)	1038	42.4	37.1	1.15
2— 3 M.	1253	(1158—1390)	1033	36.2	40.8	0.91
3— 4 M.	1224	(1099—1394)	1030	49.1	42.9	1.14
4— 5 M.	1284	(1174—1429)	1028	52.7	50.6	1.04
5— 6 M.	1257	(1117—1422)	1026	56.2	52.9	1.06
6— 9 M.	1179	(1109—1257)	1024	34.3	30.4	1.13
9—12 M.	1085	(1014—1182)	1020	31.1	27.8	1.12
1— 2 J.	1028	(966—1087)	1019	23.9	15.6	1.53
2— 3 J.	990	(926—1065)	1018	23.5	22.1	1.06
3— 5 J.	947	(879—1019)	1019	23.7	20.1	1.16
5—10 J.	878	(821— 945)	1022	28.7	17.4	1.66
			αD			
10—15 J.	713	(620— 847)	46.0	45.5	18.4	2.5
15—20 J.	770	(685— 919)	36.4	37.9	18.3	2.1
20—25 J.	1095	(965—1234)	38.0	40.2	23.9	1.7
25—30 J.	905	(804—1027)	30.2	32.8	21.3	1.5
30—40 J.	826	(766— 909)	33.2	29.7	13.9	2.1
40—45 J.	943	(812—1115)	48.3	50.3	21.6	2.3
45—50 J.	1143	(853—1468)	83.0	88.9	25.8	3.4
50—55 J.	1124	(837—1353)	103.2	104.4	24.2	4.3
55—60 J.	1055	(850—1305)	95.2	93.9	21.8	4.3
60—65 J.	962	(848—1140)	63.4	64.8	18.5	3.5
65—70 J.	913	(789—1151)	71.8	71.7	16.6	4.3
70—75 J.	906	(766—1150)	60.3	65.9	15.9	4.1
75—80 J.	903	(811—1019)	31.1	36.0	16.8	2.1
80—85 J.	866	(781— 940)	21.7	24.5	19.5	1.26
85—90 J.	800	(721— 904)	34.5	33.9	26.3	1.29
über 90 J.	693	(638— 831)	25.0	28.7	38.1	0.75

25. In den verschiedenen Stufen der ersten fünf Altersjahre kommt also Q durchweg (mit der wohl zufälligen Ausnahme für das zweite Jahr) der Einheit nahe, was darauf hindeutet, dass die angegebenen Werthe z nahezu typisch sind und dass die Stabilität dieser Reihen nahezu das Maximum erreicht. Für die späteren Jugendjahre und für die Periode der Vollkraft bewegt sich der Werth von Q zwischen 1.5 und 2.5; das reifere und höhere Alter von 45—75 Jahren erhöht diesen Quotienten noch um ein Bedeutendes, so dass er 4.3 erreicht; dann aber sinkt er rasch und weist in der äussersten Le-

bensphase wieder auf maximale Stabilität hin. Der Quotient Q ist allerdings kein eigentliches Maass der Dispersion, sondern nur wenn (r) gleich bleibt oder kleiner wird, entspricht der Vergrösserung von Q mit Gewissheit auch eine Vergrösserung der Dispersion. Zur wirklichen Messung der letzteren dient nach den früheren Erörterungen nur die physische Dispersion, die nach Ausscheidung der normal-zufälligen Komponente übrig bleibt. Die Formel $p = (r)\sqrt{Q^2 - 1}$ giebt aber für die Kindheitsperiode theils imaginäre, theils verhältnissmässig kleine reelle Werthe. Da nun die ersteren (entsprechend den Werthen $Q < 1$) jedenfalls nur durch die Unsicherheit von Q entstanden sind und da die betreffenden Reihen ihrer Natur nach als gleichartig angesehen werden dürfen, so ist es statthaft, auch die kleinen Ueberschüsse von Q über die Einheit, welche reelle Werthe von p erzeugen, auf jene Ungenauigkeit zurückzuführen. So kommt bei den ersten 9 Werthen von Q als grösste negative Abweichung von der Einheit -0.16 und andererseits als grösste positive eine solche von $+0.15$ vor, und man wird der letzteren denselben Charakter beilegen dürfen, wie der ersteren. Das Mittel dieser 9 Werthe aber ist 1.04. Man ist also wohl berechtigt zu der Annahme, dass die w a h r e n Werthe dieser Q der Einheit s e h r nahe kommen, dass also ihre Einführung in die Formel für p diesen Ausdruck zu einer sehr kleinen Grösse machen würde, die man vernachlässigen kann. Ueberhaupt kann das empirische Q, wie früher bereits erörtert wurde, bis zu einer gewissen Grenze über die Einheit hinausgehen, während die wirkliche physische Schwankung gleichwohl ganz unbedeutend ist. Wo diese Grenze liegt, lässt sich natürlich nicht angeben; doch dürfte es nicht unpassend sein, eine Unterscheidung einzuführen zwischen der physischen Dispersion die k l e i n e r ist, als die mit ihr verbundene normal-zufällige Komponente, und derjenigen die dieser letzteren gleich oder grösser ist. Die Grenze würde also dem Werthe $Q = \sqrt{2} = 1.41$ entsprechen. Liegt Q unterhalb dieser Grenze, so ist es möglich, dass die Stabilität der betreffenden Reihe dem Maximum nahe kommt, ja dasselbe vielleicht so nahe erreicht, als dies in der Wirklichkeit überhaupt zu erwarten ist. Doch kann auch andererseits bei relativ kleiner Grundzahl g der Werth von p, wenn er auch kleiner ist als (r), an sich noch ziemlich gross sein.

26. Berechnen wir eine nach der Formel $p = (r)\sqrt{Q^2 - 1}$ die physische Dispersion für die Altersklassen, in denen sie grösser ist als (r), so ergeben sich folgende Zahlen:

Alter	p	Alter	p	Alter	p
1— 2 J.	18.8	25—30 J.	23.8	55—60 J.	91.2
5—10 J.	23.1	30—40 J.	25.7	60—65 J.	62.0
10—15 J.	42.2	40—45 J.	44.7	65—70 J.	69.4
15—20 J.	33.8	45—50 J.	83.8	70—75 J.	63.2
20—25 J.	32.8	50—55 J.	101.2	75—80 J.	31.0

Auch diese Zahlen sind mit einer Unsicherheit betrachtet, aber dieselbe ist jetzt im Verhältniss zur Grösse der Zahlen selbst als mässig oder klein anzusehen. Im Wesentlichen sind dieselben als vergleichbar zu betrachten; man kann also z. B. sagen, die physische Dispersion des Verhältnisses z ist in der Altersklasse 50—55 J. ungefähr dreimal so gross als in der Klasse 15—20 J. und mehr als viermal so gross als in der Klasse 25—30 J. In der noch der ersten Kindheit angehörigen Klasse 1—2 J. ist p am kleinsten; wahrscheinlich aber ist es in unserem Beispiel durch eine zufällige Anomalie noch aussergewöhnlich gross geworden, da die Analogie mit anderen Beobachtungen über diese Altersklasse und mit den kleinen Werthen von Q in den beiden folgenden Klassen dafür spricht, dass auch in dieser Stufe das Maximum der Stabilität nahezu erreicht wird.

Die Werthe von p kommen, wie es die Formel bedingt, denen von R sehr nahe, sobald Q einigermaassen gross geworden ist. Andererseits aber stimmt R auch leidlich mit αD überein, so dass also für grössere Werthe von Q die physische Dispersion ungefähr der durchschnittlichen Abweichung in dem früher angegebenen Sinne proportional wird.

In der frühesten Jugend ist also die Dispersion von z normalzufällig, die physische Komponente kann vernachlässigt und die zu Grunde liegende relative Wahrscheinlichkeit kann als konstant angesehen werden. Das heisst also, es giebt für die ersten Stufen der Kindheit einen konstanten Bedingungskomplex, vermöge dessen mehr Knaben als Mädchen sterben. Die relative Anzahl der lebenden Knaben und Mädchen kann in diesem Komplexe keine merkliche Rolle spielen; denn die Zahl L weicht selbst in ihrem Maximum nur wenig von 1000 ab, und ihre Veränderungen zeigen nicht den mindesten Zusammenhang mit denjenigen von z. Die letztere Grösse steigt z. B. von 1224 auf 1284 während L von 1030 auf 1028 sinkt, und andererseits sinkt z von 947 auf 878, während L von 1019 auf 1022 steigt. Die einfachste Hypothese ist jedenfalls die, dass in der physiologischen Konstitution des männlichen und weiblichen Organismus in seiner ersten Lebensphase jener Unterschied der Sterblichkeit begründet sei. Jedenfalls beweist die nahezu maximale Stabilität von z in diesen Altersstufen, dass erhebliche äussere Störungsursachen, welche zeitweise spezifisch die Sterblichkeit des einen oder des anderen Geschlechtes modifiziren könnten, nicht vorhanden sind. Denn wenn solche Einwirkungen zeitweilig oder in irgend einer selbständigen Entwicklung aufträten, so würde die Grundwahrscheinlichkeit nicht konstant bleiben. Wir können uns nicht wohl eine andere Vorstellung machen, als dass das Durchschnittsmaass der Widerstandsfähigkeit der Knaben gegen den Tod aus organischen Gründen in einem festen Verhältniss geringer sei, als das der Mädchen [1]).

27. Ganz anders verhält sich die Dispersion des Verhältnisses z in den späteren Lebensperioden. Die normal-zufällige Komponente tritt gegenüber der physischen immer mehr zurück; wir müssen also jetzt energisch wirkende und stark wechselnde äussere Ursachen annehmen, welche spezifisch auf die Sterblichkeit des einen oder des anderen Geschlechtes einwirken. In der That sind die Bedingungen und Gefahren des selbständigen Lebensganges bei beiden Geschlechtern so verschieden, dass auch die Veränderungen derselben unabhängig nebeneinander hergehen können.

Im höchsten Greisenalter jedoch tritt wieder eine mehr gleichmässige Stellung der Geschlechter gegenüber den Todesursachen ein. Die Grundwahrscheinlichkeit nähert sich wieder der Konstanz; jedoch scheint in dieser Phase nicht, wie in der kindlichen, ein erheblicher organischer Unterschied in der durchschnittlichen Lebensfähigkeit der männlichen und weiblichen Individuen vorhanden zu sein. Es scheint vielmehr beiden Geschlechtern eine ziemlich gleiche absolute Sterblichkeit zuzukommen, und die Werthe von z werden hauptsächlich durch das Geschlechtsverhältniss der gleichzeitig Lebenden dieser Altersklassen beeinflusst. So kamen nach der belgischen Volkszählung vom 15. Oktober 1846 auf 1000 Frauen im Alter von 80—85 Jahren 850, im Alter von 85—90 J. 801, im Alter über 90 J. 720 Männer, und nach der Zählung vom 31. Dezember 1856 betrugen die

1) Es ist bemerkenswerth, dass die relative Knabensterblichkeit der beiden ersten Monate ungefähr ebenso gross ist, wie das ebenfalls auf konstanter Grundwahrscheinlichkeit beruhende Geschlechtsverhältniss der Todtgeborenen. Es ist also nicht etwa die grössere Schwierigkeit der Knabengeburt, welche den Knabenüberschuss unter den letzteren wesentlich bedingt. Auch das Geschlechtsverhältniss der abortirten Embryonen bewegt sich nach den Pariser Beobachtungen ungefähr in denselben Zahlen. Auf die Schlüsse, die sich aus diesen Thatsachen in Betreff der Ursache der Geschlechtsbestimmung ziehen lassen, gedenke ich bei einer anderen Gelegenheit zurückzukommen.

entsprechenden Zahlen 766, 777 und 729. Die Zahlen von 1846 aber stimmen sehr nahe und die beiden letzten von 1856 wenigstens noch leidlich mit den Werthen von z für jene Altersstufen zusammen.

28. Es mögen noch einige andere Beispiele folgen, welche bestätigen, dass die relative Sterblichkeit der beiden Geschlechter im Kindesalter eine typische Stabilität besitzt. Wir untersuchen zunächst die unmittelbar nach der Form $\frac{a}{a+b}$ ausgedrückte relative Sterbenswahrscheinlichkeit v der Knaben von 0—5 Jahren (excl. Todtgeb.) in einigen österreichischen Kronländern nach den Beobachtungen der 13 Jahre 1862—74. Mit denselben Bezeichnungen, wie oben, erhält man hier [1]):

	$10000\,v$	O	R	r	Q
Niederösterreich	5374	(5335—5410)	15.8	18.7	0.84
Oberösterreich	5447	(5327—5555)	42.8	37.0	1.16
Salzburg	5511	(5374—5825)	78.4	82.2	0.95
Steiermark	5461	(5359—5536)	32.2	30.1	1.07

Die entsprechenden 4 Werthe von z sind 1162, 1196, 1228, 1203.

Die negativen Abweichungen der Grösse Q von der Einheit sind von derselben Bedeutung wie die positiven, man kann also ohne Bedenken schliessen, dass die untersuchten Reihen nahezu das Maximum der Stabilität besitzen und die Grundwahrscheinlichkeiten v in der 13jährigen Periode trotz der Schwankungen ihrer empirischen Werthe nahezu konstant geblieben sind.

Einige weitere Beispiele entnehmen wir der bayerischen Statistik,

1) Bei diesen Beispielen ist eine etwas vereinfachte Rechnung angewandt worden, die indess für den praktischen Zweck genügt. Statt des Gewichtsmittels ist das arithmetische Mittel der Einzelwerthe von v in jeder Reihe genommen, und als jedesmalige Grundzahl nicht der Durchschnitt aus allen einzelnen Grundzahlen einer Reihe, sondern das Mittel aus der grössten und der kleinsten verwendet. Dieses letztere Verfahren ist im Grunde ebenso berechtigt, wie das erstere, das an sich auch nicht korrekt ist. Ist die Dispersion annähernd normal-zufällig — aber auch nur dann — so verhalten sich die Präzisionen der Einzelwerthe einer Reihe annähernd wie die Quadratwurzeln aus ihren Grundzahlen, und das strenge Verfahren besteht dann darin, dass man nach diesem Prinzip alle Einzelwerthe auf eine gleiche Präzision reduzirt. So findet man z. B. für Niederösterreich: wahrscheinlichster Werth von $1000\,v$ aus dem Gewichtsmittel: 5373 (statt 5374); Werth von R, wenn die Grundzahl (die Zahl aller Sterbefälle von 0—5 J.) in allen 13 Jahren gleich der kleinsten (26633 für 1868) gewesen wäre: 17.4; dieser Grundzahl entsprechendes $r = 20.6$. Bei Reduktion auf die grösste Grundzahl (37912 für 1873) dagegen wird $R = 14.6$, $r = 17.3$. Die im Texte gegebenen Werthe von R und r liegen zwischen diesen Extremen und lassen die maximale Stabilität ebenso gut erkennen, wie diese letzteren.

indem wir die Unterscheidung der Gestorbenen nach ihrer Legitimität berücksichtigen. Als Beobachtungsgrösse nehmen wir wieder z, wie bei den belgischen Beispielen. Das Beobachtungsmaterial ist ebenfalls der „Stat. internationale" entnommen und bezieht sich auf die 25 Jahre von 1835/36—1859/60.

Todtgeborene	z	O	R	(r)	Q
eheliche	1438	(1367—1544)	34.1	32.5	1.05
uneheliche	1158	(956—1273)	49.2	47.1	1.04
Gest. von 0—1 J.[1]					
eheliche	1276	(1245—1310)	9.5	8.9	1.07
uneheliche	1169	(1121—1234)	18.9	14.3	1.32
Gest. von 1—2 J.					
eheliche	1046	(965—1105)	24.2	20.9	1.16
uneheliche	970	(888—1039)	29.0	38.8	0.75

Mit Rücksicht auf den beträchtlichen negativen Fehler von Q bei den Unehelichen von 1—2 J. kann man auch die positive Abweichung bei den Unehelichen von 0—1 wieder hauptsächlich durch die Ungenauigkeit von R erklären und demnach die Stabilität der 6 untersuchten Reihen von je 25 Einzelwerthen durchweg als nahezu maximal betrachten. Besonders bemerkenswerth ist die geringe Abweichung von der Einheit, welche das den ehelichen Gestorbenen von 0—1 entsprechende Q aufweist, da hier die Grundzahl (über 38000) schon so gross ist, dass auch eine an sich kleine physische Schwankung schon merkbar hervortreten kann.

29. Da nun also die obigen Werthe von z eine typische Konsistenz besitzen, so deutet die Verschiedenheit dieser Zahlen bei den Ehelichen und Unehelichen auf eine spezifische und konstante Verschiedenheit der Bedingungskomplexe hin, auf welchen die relative Sterblichkeit der Geschlechter in beiden Kategorien beruht. Dieser Schluss ist erst jetzt gerechtfertigt, nachdem die Werthe z nicht nur aus der Gesammtzahl der Beobachtungen des ganzen Zeitraumes abgeleitet sind, sondern auch der Nachweis geliefert ist, dass jedes z das Zentrum einer normal-zufälligen Dispersion bildet. Wie wenig man aus vereinzelten Beobachtungswerthen dieses Geschlechtsverhältnisses Folgerungen ziehen könnte, zeigt sich in der Klasse von 1—2 J., wo der Maximalwerth für die Unehelichen (1039) weit über den Minimalwerth für die Ehelichen (965) hinaus fällt.

Der relative Knabenüberschuss ist also für die Todtgeburten wie

1) Die Todtgeborenen sind wieder miteingerechnet.

für die Sterbefälle des ersten Kindesalters kleiner bei den Unehelichen als bei den Ehelichen, und ein konstantes Bedingungssystem wirkt auf die Erhaltung dieser Differenz hin. Es folgt daraus aber keineswegs, dass das männliche Geschlecht durch die Unehelichkeit irgendwie positiv begünstigt werde, sondern die Ursache jenes Unterschiedes liegt vielmehr darin, dass die weiblichen Kinder durch die Unehelichkeit relativ mehr geschädigt werden. Beim Uebergange von den ehelichen Geburten zu den unehelichen steigt die Wahrscheinlichkeit einer Todtgeburt für beide Geschlechter, aber die Steigerung ist relativ stärker bei dem weiblichen, das seine normale Begünstigung unter den schlimmen Einwirkungen der Unehelichkeit nicht vollständig behaupten kann. So findet man in Bayern in dem oben angegebenen 25jährigen Zeitraume auf:

10000	eheliche Knabengeburten	341	Todtgeburten	= 1
„	uneheliche „	353	„	= 1.035
„	eheliche Mädchengeburten	254	„	= 1
„	uneheliche „	317	„	= 1.25

Dasselbe gilt für die relative Sterblichkeit des ersten Jahres. Die Unehelichkeit erzeugt vergrösserte Sterblichkeit für beide Geschlechter, das weibliche aber verliert einen Theil seines Vorsprunges und wird relativ schwerer getroffen als das männliche. So beträgt nach dem erwähnten bayerischen Material die Zahl der Gestorbenen von 0—1 J. (incl. Todtgeb.) auf

10000	eheliche Knabengeburten	3375	= 1
„	uneheliche „	3919	= 1.16
„	eheliche Mädchengeburten	2828	= 1
„	uneheliche „	3485	= 1.23

Die vorstehenden Beispiele dürften zugleich den Nutzen klar machen, den die Stabilitätsbestimmung für massenphysiologische Untersuchungen gewähren kann. Eine Verhältnisszahl, welche sich als Zentralwerth einer normal-zufälligen Dispersion nachweisen lässt, erhält eine gewisse selbständige Konsistenz; sie deutet auf relativ feste Ursachensysteme hin, und die Unterschiede von Zahlen dieser Art gewinnen ebenfalls einen typischen Charakter. Ueberhaupt sind Vergleichungen statistischer Verhältnisszahlen und Versuche, die gegenseitigen Beziehungen derselben zu ermitteln, immer unsicher, wenn man nicht die Dispersion derselben festgestellt hat.

30. Verhältnisse von näherungsweise normal-zufälliger Dispersion scheinen auf den ersten Blick im Gebiete der Demologie und Moralstatistik selten vorzukommen. Indess dürfte man sie in zahl-

reichen Fällen auffinden, wenn man sie nach dem früher besprochenen Prinzip aufsucht, nämlich Reihen mit mässigen Grundzahlen untersucht.

Man kann noch eine zweite Regel aufstellen für die Aufsuchung solcher Verhältnisse: je mehr ein Verhältniss den Charakter einer relativen Wahrscheinlichkeit trägt, um so eher darf man erwarten, dass ihm jene Eigenthümlichkeit zukommen werde. Bei Wahrscheinlichkeiten dieser Art haben wir nämlich im Allgemeinen am wenigsten erfahrungsmässigen Grund, Veränderungen derselben durch äussere Einflüsse, also eine physische Dispersion anzunehmen. Unser Nichtwissen ist allerdings keineswegs ein Beweis für das Fehlen solcher Einwirkungen, aber es macht doch diese Annahme zunächst subjektiv wahrscheinlicher und die subjektive Wahrscheinlichkeit findet sich erfahrungsmässig häufig auch objektiv bestätigt. So sind z. B. die Verhältnisse der Zahl der im Alter 0—1 Jahr gestorbenen Knaben und Mädchen zu den lebend Geborenen desselben Geschlechtes Näherungswerthe von absoluten Sterbenswahrscheinlichkeiten. Untersucht man aber diese empirischen Werthe in einer Reihe von Jahren, so wird man bei beiden Geschlechtern eine übernormale Dispersion finden. Dieses Resultat lässt sich voraussehen, da wir im Stande sind, eine Anzahl konkreter äusserer Ursachen nachzuweisen, wie Cholera, wirthschaftlichen Nothstand u. s. w., die tiefgehende Störungen der normalen Sterblichkeitsverhältnisse hervorrufen. Dagegen sehen wir nicht ein, weshalb diese äusseren Einwirkungen spezifisch verschieden auf das männliche und das weibliche Geschlecht einwirken sollten, so lange die Lebensart der beiden Geschlechter, wie es in der Kindheit der Fall ist, ganz dieselbe ist. Daher darf man vermuthen, dass die relative Sterbenswahrscheinlichkeit der beiden Geschlechter in der Kindheit trotz der Veränderungen der absoluten konstant bleibe, und dies haben wir oben bestätigt gefunden, indem sich normal-zufällige Dispersion der empirischen Werthe jener Sterbenswahrscheinlichkeit herausstellte.

31. Bei relativ kleinen Grundzahlen zeigt, um noch einige Beispiele anzuführen, das Verhältniss der jährlichen Zahl der Geburten zu der Bevölkerung eines Gebietes manchmal eine dem Maximum nahe kommende Stabilität. Dieses Verhältniss kann als eine zusammengesetzte Totalwahrscheinlichkeit betrachtet werden, die durch ein System von Urnen versinnlicht werden kann, von welchen eine Anzahl nur die dem negativen Falle entsprechende Farbe enthält. Der aus der Ungenauigkeit der Bevölkerungszahl entspringende Fehler kann

vernachlässigt werden. Untersucht man dieses Verhältniss für ganze Länder, deren Bevölkerung nach Millionen zählt, so ist der sehr grossen Grundzahl wegen die normal-zufällige Schwankungskomponente fast verschwindend klein, so dass Q einen ziemlich grossen Werth erhält, auch wenn die physische Schwankung an sich nur gering ist. Dagegen tritt in kleinern Gebieten die erstere Komponente überwiegend hervor, und Q nähert sich in Uebereinstimmung mit der Theorie der Einheit. So finden wir in der englischen Grafschaft Rutland nach den Ergebnissen der 11 Jahre 1865—75 $R = 10.1$ und $r = 7.5$, bei einem Mittelwerthe jenes Verhältnisses von 299 auf 10,000. In Westmoreland ist in derselben Periode der Mittelwerth 303, $R = 6.6$ und $r = 4.6$. Ebenso finden wir in Rutland in jenem Zeitraume die allgemeine Heirathswahrscheinlichkeit des einen oder des anderen Geschlechtes (wobei die Grundzahl also nur ungefähr der Hälfte der Bevölkerung gleich ist) sehr nahe konstant, da bei einem Mittelwerth v von 130 auf 10,000 der Werth von $R = 7.2$, der von r aber gleich 7.1 gefunden wird. In Westmoreland dagegen ist die Dispersion übernormal: der Mittelwerth ist 135, $R = 8.4$, $r = 4.4$.

Untersuchen wir nun auch die oft bewunderte Stabilität der relativen Betheiligung der verschiedenen Civilstandsklassen an den Eheschliessungen. Da hier eine relative Wahrscheinlichkeit zu Grunde liegt, so dürfte man um so eher erwarten, dass die Stabilität solcher Reihen dem Maximum nahekomme. Es ist dies jedoch nicht der Fall. Wenn wir in den verdienstlichen vergleichend-statistischen Tabellen von Bodio[1]) die Zusammenstellung dieser Verhältnisse für mehrere Länder und meistens 11 Jahre überblicken, so ergibt schon eine vorläufige Schätzung, dass bei der Mehrzahl der Staaten eine stark übernormale Dispersion vorhanden ist, während nur bei zweien, nämlich bei England und Schweden, die Dispersion sich wenigstens nicht allzu weit von der normalen entfernt. In England kamen in den 11 Jahren 1865—75 im Mittel auf 10,000 Trauungen überhaupt 8168 Eheschliessungen zwischen Junggesellen und Jungfrauen, mit Schwankungen zwischen den Grenzen 8125 und 8194. Die Schwankungen sind an sich klein, aber dennoch grösser als diejenigen, welche bei den Versuchsresultaten an einer Urne zu erwarten wären, wenn jede Serie eine der durchschnittlichen jährlichen Zahl der Eheschliessungen (die 190,000 übersteigt) gleiche Anzahl von Versuchen enthielte. Denn nach dem letztern Schema ist die wahrscheinliche Abweichung $r = 6.0$,

1) Movimento dello stato civile. Anno 1875. Introduzione, p. XVIII—XXIV.

während man direkt aus den Quadraten der beobachteten Abweichungen findet $R = 13.5$. Hieraus ergibt sich $p = 12.1$, was vergleichsweise allerdings eine geringe physische Dispersion anzeigt[1]). Wenn diese physische Schwankung gleich bleibt und nur die normal-zufällige Komponente durch Verminderung der Grundzahl (der Eheschliessungen) sich vergrössert, so wird bei einer Grundzahl von 16,000 schon $R = 23.9$ und $r = 20.6$ sein, also Q der Einheit schon ziemlich nahe kommen. Wären die betreffenden Verhältnisszahlen also monatsweise gegeben, wodurch die Grundzahl ungefähr auf den angegebenen Betrag herabgebracht würde, so könnte man prüfen, ob Q wirklich sich ungefähr auf die theoretisch vorausgesehene Grösse reduzirt.

Was Schweden betrifft, so beträgt der entsprechende Mittelwerth in denselben 11 Jahren 8497, mit extremen Ausschlägen bis 8418 und 8555. Man findet $R = 33.8$, $r = 14.6$, also $Q = 2.315$ und demnach die physische Dispersion $= 30.5$. Diese Zahl, die unmittelbar mit der für England gefundenen vergleichbar ist, beweist also, dass im letztern Lande die Stabilität des untersuchten Verhältnisses bedeutend grösser ist, als in Schweden.

32. Auf weitere Anwendungen der Theorie müssen wir hier verzichten. Die angeführten Beispiele aber dürften hinreichen, um den Nutzen dieser Untersuchungsmethode klar zu machen. Dieselbe führt zur Kenntniss derjenigen Zahlenverhältnisse, die gewissermaassen als massenphysiologische Konstanten zu betrachten sind. Ganz unverändert werden dieselben allerdings im Laufe der Zeit nicht bleiben, aber um so wichtiger ist es, die sekularen Veränderungen dieser stabilsten demologischen Elemente genau zu verfolgen. Auch wenn eine physische Dispersionskomponente verdeckt bleibt, liefert das Auftreten der normal-zufälligen Dispersion eines Verhältnisses immer den Beweis, dass das theoretische Gesetz der Schwankungen, das nicht auf Zwang, sondern auf den Kombinationen der Chancen beruht, in den untersuchten Zahlenverhältnissen die überwiegende Rolle spielt. Andererseits finden wir, dass die gewöhnlich bewunderte Regelmässigkeit demologischer und moralstatistischer Zahlenreihen niemals den Grad der Stabilität überschreitet, der bei entsprechend eingerichteten Versuchen eines Glückspiels mit festen Chancen zu erwarten ist; ja, man darf behaupten, dass dieser Grad bei den bisher untersuchten Verhältnissen niemals in aller Strenge auch nur erreicht wird. Als die

1) Bei verschiedenen Reihen müssen natürlich die Schwankungskomponenten der Wahrscheinlichkeit v selbst (im obigen Falle also 0.00121) oder gleicher Funktionen dieser Wahrscheinlichkeit verglichen werden.

zu bestimmende und zu vergleichende Dispersion der statistischen Reihen betrachten wir nur die physische Komponente, die nach Eliminirung der mit der Grundzahl wechselnden normal-zufälligen Komponente übrig bleibt. Diese physische Dispersion nehmen wir einfach gleich Null an, wenn das Kriterium der normal-zufälligen Dispersion mit hinreichender Genauigkeit erfüllt ist, andernfalls aber gibt die Formel für p einen allgemeinen und vergleichbaren Ausdruck für dieselben. Bis zu welchem Grade die durchschnittliche Abweichung für denselben Zweck dienlich ist, hat sich im Laufe dieser Untersuchung ebenfalls herausgestellt.