## Werk

**Titel:** Hilberts geometrisches Werk

**Autor:** Dehn, M.

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1922

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?34557155X_0010|log74

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

sassen, die vorher einander nicht gekannt hatten, verkehren hier freundschaftlich miteinander. Manche von ihnen auch sind enttäuscht; sie hatten sich ihre Zukunft nicht so vorgestellt, manch imponderabler Traum ihrer Jugend war hier nicht erfüllt. Aber es ist ein freies Haus, in dem sie wohnen, keinem ist es benommen, den alten Traum zur Erfüllung zu bringen; und es ist festgefügt, daß niemand es mehr einzureißen vermag.

3.

So steht der Algebraiker *Hilbert* in ausgeprägter Eigenart vor uns, wie nicht ein jeder Mathematiker. Aus allen Problemen greift er die harten Tatsachen heraus, die klar entscheidbaren Fragen, bei denen man von der Überzeugung durchdrungen ist: entweder sind sie lösbar, oder man kann den Beweis der Unlösbarkeit führen. Sein bekannter Pariser Vortrag über die mathematischen Probleme ist ein bewußter, großer Hymnus auf das klar Entscheidbare. Betrachtet man die Mathematik, nicht wie sie sein könnte, sondern wie sie wirklich ist, als Summe allen mathematischen Geschehens, so gewahrt man, daß sie mit dem klar Entscheidbaren nicht erschöpft ist, daß sie von Imponderabilien wimmelt. Es gibt synthetische Geometer, die etwas „rein geometrisch" oder „rein projektiv" machen wollen, Algebraiker, die in der Kunst einer symbolischen Schreibweise, einer Bezeichnungsart, in der „Reinheit" eines Beweises den ästhetisch vollkommenen Ausdruck einer Sache durch die Form suchen; es gibt Funktionentheoretiker, die etwas „elementar", soll heißen ohne den Cauchyschen Integralsatz beweisen wollen, und sie zählen keinen geringeren als *Weierstraß* zu den ihrigen; der angewandte Mathematiker will die Wurzel einer Gleichung „möglichst rasch" auf 3 Dezimalen besitzen, und es gibt keinen exakten quantitativen Maßstab der Raschheit. Es ist nicht die Absicht dieser Zeilen, zu solchen Neigungen Stellung zu nehmen, sie für berechtigt oder unberechtigt zu erklären. Der Zweck war nur, das scharfe Profil sichtbar zu machen, das *Hilbert* von dieser Seite her zeigt.

Die Frage der Grundlagen der Mathematik ist heute von neuem aufgerührt worden. *Brouwer, Weyl* haben das Wort ergriffen und *Hilbert* selbst ist wieder auf die Mauer gestiegen. Es ist unverkennbar, daß *Weyl* und *Brouwer* gegen die axiomatische Denkweise *Hilberts* Stellung nehmen, daß sie die mathematischen Dinge nicht indirekt aus ihren Eigenschaften, sondern direkt durch positive Konstruktionen hergestellt wissen wollen, die werdende Folge usw.; der Ruf der Rückkehr zu *Kronecker,* dem sich *Hilbert* stets entgegengesetzt gefühlt hatte, erklingt. Man hat im Laufe der Geschichte der Mathematik stets nach den Grundlagen gegriffen, wenn der *wirkliche* Betrieb der Wissenschaft irgendeinen Anlaß dazu gab. Es drängt sich die Frage auf, ob das heute der Fall ist. Offen gewiß nicht. Aber im Verborgenen könnte man einen unbewußten Zusammenhang ahnen zwischen den Gegensätzen der Grundlagendebatten und den gegensätzlichen Tendenzen mathematischer Forschung, einer etwaigen Reaktion gegen den Algebraiker *Hilbert,* wie er hier gesehen wurde. Ich möchte die Sachlage so formulieren: nur wenn die Grundlagenkämpfer es verstehen werden, sich zu Interpreten solcher tatsächlich im Forschungsbetriebe bestehenden Gegensätzlichkeiten zu machen, werden sie Boden fassen und etwas Wirksames leisten können.

---

## Hilberts geometrisches Werk.

*Von M. Dehn, Frankfurt a. M.*

Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie haben seit dem Altertum fast alle Mathematiker angezogen. Im Beginn des 19. Jahrhunderts bekommen sie mit Entstehung der sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie den Reiz geheimnisvoller, schwer verständlicher, kühner und fast verbotener Forschung. Die 1899 zuerst veröffentlichten „Grundlagen der Geometrie" von *Hilbert* enthalten Untersuchungen großer Kühnheit, aber restloser, radikaler, manchmal fast primitiver Klarheit. So ist es zu erklären, daß dieses, jetzt erheblich erweiterte Werk, obwohl in ihm eine solche Fülle neuer, tiefer, abstrakter Probleme mit den mannigfachsten mathematischen Methoden behandelt und erledigt werden, heute zum 5. Male aufgelegt wird. Das ist in der Tat bemerkenswert. Als analog ist vielleicht der Erfolg zu betrachten, den der 1822 zuerst erschienene „Traité des propriétés projectives" von *Poncelet* hatte, durch den die projektive Geometrie begründet wurde.

Betrachten wir die Probleme und ihre Geschichte: die Auffindung der mathematischen Methode ist für die Geschichte des menschlichen Geistes von hoher Bedeutung. Dieser Fortschritt ist nicht, wie andere, ebenso wichtige, in dunkler Vorzeit getan, sondern er ist dem in hellem Licht sich entfaltenden griechischen Denken gelungen. In der Zeit der Naturphilosophen begonnen, ist er im 3. Jahrhundert vor Christi, zur Zeit von *Euklid* und *Archimedes,* vollendet. Durch die mathematische Methode ist man befähigt, aus als richtig angenommenen Sätzen mit absoluter Sicherheit neue Sätze abzuleiten. Es ist ja in der Tat erstaunlich, wie man aus den allereinfachsten Erfahrungen (Axiomen und Postu-

laten) die mannigfachsten, komplizierten und doch oft wieder so wunderbar einfachen Eigenschaften der geometrischen Figuren gewinnen kann. Durch alle Zeiten ist die „geometrische Weise" des Schließens bewundert worden, und vergeblich hat man oft versucht, sie auf andere Gebiete zu übertragen. Besonders klar und mit großer Freiheit gehandhabt, tritt sie bei *Archimedes* auf, wenn er z. B. bei der Bestimmung der Kugeloberfläche als Postulat die doch gar nicht ganz selbstverständliche Tatsache aufstellt: liegt die geschlossene konvexe Fläche $F_1$ ganz innerhalb der geschlossenen Fläche $F_2$, dann hat $F_1$ eine kleinere Oberfläche als $F_2$. Ich glaube, daß diese Freiheit in der Handhabung der Methode von manchen späteren Mathematikern bis in unsere Zeiten nicht verstanden worden ist. Ein ganz analoger Fall bei *Euklid* hat wohl den ersten Anstoß zur Beschäftigung mit einer zentralen Frage aus den Grundlagen der Geometrie gegeben, nämlich der Frage nach der *Unabhängigkeit der geometrischen Axiome oder Postulate* voneinander.

*Euklid* hat nämlich nicht gleich zu Beginn seines Werkes alle Axiome aufgestellt, vielmehr entwickelt er erst eine ganze Reihe von Sätzen, ehe er das berühmte Parallelenaxiom einführt. Dies wird von ihm so formuliert:

„Wenn zwei Geraden mit einer dritten auf derselben Seite innere Winkel bilden, deren Summe kleiner als ein flacher Winkel ist, so schneiden sie sich bei hinreichender Verlängerung auf dieser Seite."

Diese Formulierung ist sehr merkwürdig und wohl teilweise deswegen so künstlich, weil *Euklid* vermeiden wollte, daß Teile des Axioms schon aus den früheren Axiomen folgen könnten, wie es z. B. sein würde bei der Formulierung: durch jeden Punkt außerhalb einer Geraden gibt es eine und nur eine Gerade, die die erste nicht schneidet.

Andererseits war die Künstlichkeit des Axioms so in die Augen fallend, daß man schon im Altertum sich Gedanken machte, etwa so: ein so komplizierter Satz könne doch gar nicht wirklich Grundtatsache sein. Habe *Euklid* schon eine Menge von Sätzen ohne dies Axiom beweisen können, so sei es vielleicht möglich, das Parallelenaxiom selbst aus den übrigen Axiomen herzuleiten. So begannen die durch Jahrhunderte fortgesetzten Versuche, das Parallelenaxiom zu „beweisen". Diese Versuche führten ganz methodisch endlich im 19. Jahrhundert zur vollständigen Aufklärung: man hatte natürlich versucht, indirekt vorzugehen: wäre das Parallelenaxiom nicht gültig, so würden sich die und die merkwürdigen Folgerungen ergeben, z. B. die Winkelsumme im Dreieck könnte nicht zwei Rechte sein, es könnte kein Rechteck und kein Paar ähnlicher Dreiecke existieren usw. Endlich gelang es fast gleichzeitig (um 1830) *Lobatschefsky* und *Bolyai*, durch höchst kunstvolle Überlegungen die Trigonometrie (d. i. die analytischen Beziehungen zwischen den Größen der Seiten und Winkel in einem Dreieck) für den Fall der Nicht-Gültigkeit des Parallelenaxioms aufzustellen. Und da zeigte sich die wunderbare Tatsache: diese „Nicht-Euklidische" Trigonometrie ist in einfachster Weise verwandt mit der Trigonometrie auf der Kugel (der sphärischen Trigonometrie). Die Formeln der Nicht-Euklidischen Geometrie entstehen aus den sphärischen, indem man alle in den Formeln vorkommenden Seiten mit $i=\sqrt{-1}$ multipliziert, wobei die Formeln doch alle reell bleiben. (Die gewöhnlichen trigonometrischen Formeln für die Ebene bleiben übrigens bei diesem Prozeß unverändert.) Damit aber war gezeigt: *der indirekte Beweis des Parallelenaxioms ist nicht zu führen.* Man kann zu keinem Widerspruch kommen, denn, wenn die Nicht-Euklidischen Formeln widerspruchsvoll wären, dann müßten auch die gewöhnlichen sphärischen Formeln zu einem Widerspruch führen. Also: *das Parallelenaxiom ist nicht aus den übrigen Axiomen zu beweisen.* Das war ein wirklich großer mathematischer Fortschritt. Der erste Unabhängigkeitsbeweis war geführt, und man kann sich gut vorstellen, daß der junge *Bolyai* in einen wahren Rausch versetzt wurde, als er nach Überwindung außerordentlicher Schwierigkeiten dies ungeahnte Ziel erreichte.

*Lobatschefsky* und *Bolyai* haben jedoch, indem sie den durch die geschichtliche Entwicklung gegebenen Weg gingen, noch viel mehr erreicht als bloß den Unabhängigkeitsbeweis; sie haben gezeigt, daß, wenn das Parallelenaxiom nicht gültig ist, notwendig die oben angedeutete Nicht-Euklidische Geometrie gilt, sie haben *alle* Nicht-Euklidischen Geometrien aufgestellt. Den Unabhängigkeitsbeweis für sich konnte man später viel einfacher führen, indem sich die schönsten Realisationen der Nicht-Euklidischen Geometrie ergaben: zunächst zeigte sich, daß, wie die sphärische Trigonometrie auf der Kugel, so die Nicht-Euklidische (pseudo-sphärische) Trigonometrie auf den Flächen konstanter negativer Krümmung gilt, deren einfachstes Beispiel die durch Rotation der Tractrix um ihre Achse entstehende Fläche (Pseudosphäre) ist. (Die Geraden sind durch die geodätischen Linien zu repräsentieren) (*Beltrami*). Noch eleganter: die ganze dreidimensionale Nicht-Euklidische Geometrie wird so dargestellt: Punkte: alle Punkte im Innern einer Kugel; Geraden: alle Geraden, die die Kugelfläche schneiden; Bewegungen: alle in den Koordinaten lineare Transformationen, die das Innere der Kugel in sich überführen (*Cayley, Klein*). Diesem Resultat ging die bedeutungsvolle Entdeckung von *Laguerre* voraus, daß die Metrik der Euklidischen Geometrie beherrscht wird durch besonders charakterisierte lineare (projektive) Transformationen.

Dieser Unabhängigkeitsbeweis zeigt ganz evident die Stellung der Nicht-Euklidischen Geometrie, aber ganz in Ordnung war der Beweis

doch noch nicht. Zwar das Bedenken von *Bolyai*, ob nicht durch räumliche Betrachtungen sich noch ein Widerspruch ergeben könnte, war durch die Cayley-Kleinsche Darstellung erledigt, aber bedenklich bleibt: sind auch alle Axiome, die *Euklid* außer dem Parallelenaxiom braucht, ausdrücklich in dem Euklidischen Werke oder in späteren Darstellungen aufgeführt, oder brauchen *Euklid* und seine Nachfolger vielleicht stillschweigend Axiome, die zwar in der „wirklichen" Geometrie erfüllt sind, in der Nicht-Euklidischen nicht?

In der Tat waren schon Bedenken über die Vollständigkeit des Axiomsystems aufgetaucht. Die immer wieder verbesserten Ausgaben von *Legendres* Geometrie, Bemerkungen von *Gauß* über die Notwendigkeit von Anordnungspostulaten, die vielen Bemühungen des Vaters *Bolyai* um einen einwandfreien Aufbau der Inhaltslehre sind dafür Beispiele. Dann kam von anderer Seite starke Einwirkung: Die seit dem Wiederaufleben der Mathematik sich immer stärker emporhebende Analysis brauchte nach zwei Jahrhunderten außerordentlicher Entwicklung eine solidere Fundamentierung. Seit der Wende des 19. Jahrhunderts wurde die Grundlage der Zahlen- und Funktionenlehre immer tiefer eindringend untersucht, bis endlich das Wesen der stetig ausgedehnten Größen genügend geklärt war. Ein Teil der Euklidischen Grundsätze bezieht sich aber auf die für Größen geltenden Gesetze und diese werden dadurch zu geometrischen, daß geometrische Dinge, wie Strecken, Winkel, Flächenstücke (meistens stillschweigend) als Größen angesehen werden. So lieferte die arithmetische Untersuchung den ersten wichtigen Beitrag zu dem neuen festen Bau der geometrischen Axiome, der von *Pasch* (1882) durch Ausfüllung zweier erheblicher Lücken in dem Euklidischen System vollendet wurde: Wenn auch *Euklid* durch seine Größengrundsätze die Anordnung der Strecken auf einer Geraden vollständig beherrscht, so ist doch durch jene Grundsätze über die Anordnung der Figuren in der Ebene naturgemäß gar nichts ausgesagt. Hier ergänzt *Pasch* das alte System durch das mit Recht seinen Namen tragende Axiom: „jede Gerade, die mit einer Dreiecksseite einen Punkt gemeinsam hat, hat noch mit einer anderen Dreieckseite einen Punkt gemeinsam." Eine andere wesentliche Lücke bei *Euklid* besteht darin, daß er stillschweigend beim Beweis der Kongruenzsätze die Beweglichkeit der Figuren voraussetzt, d. i. die Möglichkeit, etwa ein Dreieck mit ungeänderten Seiten und Winkeln an eine andere Stelle der Ebene zu verlegen. Diese Voraussetzung ist als Postulat gewiß schon seit *Riemann* empfunden worden, aber erstaunlicherweise in keiner Grundlegung der elementaren Geometrie zu finden. Erst *Pasch* hat die Beweglichkeit der Figuren durch Postulate formuliert und auf diese Weise wohl als erster ein vollständiges Axiomsystem aufgebaut.

Jetzt erst war der Weg zu exakten Unabhängigkeitsbeweisen frei. Da man ein vollständiges Axiomsystem hatte, so konnte man sich bei den Schlüssen ganz loslösen von geometrischer Einkleidung: Punkte, Ebenen, Anordnung, Bewegungen werden von dem spekulierenden Mathematiker allein als System von Dingen und Beziehungen zwischen diesen Dingen aufgefaßt, die eben jenen Gesetzen genügen. *Dies ist die mit vollständiger Klarheit und Konsequenz behauptete Plattform des Hilbertschen Werkes.* Hier sind die mannigfaltigsten Unabhängigkeitsbeweise durchgeführt, jeder eigentümlich durch die Stellung in dem Gesamtgebäude der Geometrie und durch die Besonderheit der angewandten mathematischen Hilfsmittel. Eng verbunden mit diesen Unabhängigkeitsbeweisen sind natürlich Abhängigkeitsbeweise, d. i. Nachweise, daß bestimmte Axiomgruppen für den Aufbau gewisser Teile der Geometrie genügen.

Durch alles dies wird das philosophische Bedürfnis nach Aufdeckung der Wege, die der menschliche Geist bis zur Erkenntnis der einfachen Eigenschaften des Raumes zurücklegen muß, wenig befriedigt. Außer dem Kantischen Motto findet sich in *Hilberts* Buch nichts, was direkt mit philosophischen Dingen zu tun hat. Es ist ausschließlich reinste Mathematik, in gewissem Gegensatz etwa zu *Euklid* und *Pasch*, die daneben der Verwurzelung der geometrischen Axiome in der Außenwelt ein Stück weit nachgehen. — Der Gegensatz von Mathematik und Philosophie tritt auch hier stark hervor: das mathematische Schaffen ist im stärksten Maße aktiv, aufbauend, fast unzerstörbar aufbauend; den Philosophen führt tiefst empfundenes Bedürfnis nach geordnetem Erkennen und Begreifen in lastender Arbeit doch immer nur zu umfassenderer Betrachtung — das Erreichen des Zieles bleibt stets ein trügerischer Traum. Den Mathematiker aber schützt vor jeder Überhebung die Gewißheit, daß alles von ihm Geschaffene von einem höheren Standpunkte, als wir ihn heute haben, selbstverständlich ist. Schon manches Gewirr von Sätzen, die in mühevoller Arbeit aufgedeckt wurden, erscheint vom höheren mathematischen Standpunkt als beinahe selbstverständliche Folge aus wenigen einfachen Tatsachen. (Man vergleiche z. B. die Kegelschnittlehre im Altertum und die moderne mit den Methoden der projektiven Geometrie entwickelte.) Dieses Schicksal des Selbstverständlichwerdens würde auf einer höheren Entwicklungsstufe die ganze Mathematik treffen.

Ich will nun versuchen, die wichtigsten Resultate *Hilberts* darzustellen:

*I. Grundlagen der projektiven Geometrie.* Im Anfang des 19. Jahrhunderts wurde durch *Poncelet* die projektive Geometrie (d. i. die Lehre von den durch Projektion sich nicht verändernden Eigenschaften der geometrischen Gebilde)

systematisch begründet und entwickelt. An diese große Darstellung knüpften sich sehr bald Überlegungen über die axiomatischen Grundlagen. Eine Menge typisch projektiver Sätze, z. B. der Satz über das vollständige Vierseit, der *Desarguessche* Satz über die perspektiven Dreiecke [gehen $AA'$, $BB'$, $CC'$ durch einen Punkt, dann schneiden sich $AB$ und $A'B'$, $BC$ und $B'C'$, $CA$ und $C'A'$ auf einer Geraden, s. Fig. 1] lassen sich auf Grund der elementaren projektiven Axiome der Verknüpfung und Anordnung (in Zukunft mit $L$ bezeichnet) ableiten. Doch gelang es nicht, andere für die weitere Entwicklung sehr wichtige Sätze zu beweisen, z. B. den sogenannten Pascalschen Satz. [Liegen $A_1$, $A_2$, $A_3$ und $B_1$, $B_2$, $B_3$ je auf einer Geraden, dann schneiden sich $A_1B_2$ und $A_2B_1$, $A_2B_3$ und $A_3B_2$, $A_3B_1$ und $A_1B_1$ auf einer Geraden, s. Fig. 2.] Die Ableitung

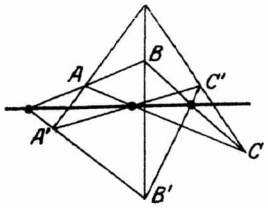


Fig. 1. Desarguesscher Satz.

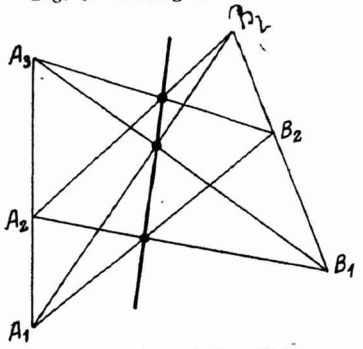


Fig. 2. Pascalscher Satz.

dieses Satzes gelang zunächst nur, wenn man noch irgendein Stetigkeitspostulat hinzunahm (*v. Staudt, Darboux* u. a.). Es entstehen die Fragen:

1. Ist die Ableitung der projektiven Geometrie nur mit Hilfe der $L$-Postulate möglich?

Wenn 1 zu verneinen:

2. Welche projektiven Sätze folgen allein aus den $L$-Postulaten?

3. Ist es möglich, ohne Stetigkeit, aber mit Benutzung der Kongruenzpostulate die projektive Geometrie aufzubauen?

Diese Fragen wurden zunächst durch einen Vortrag von *Wiener* (1891) dadurch vereinfacht, daß er den Satz aufstellte: Alle Sätze der ebenen projektiven Geometrie lassen sich mit Hilfe der elementaren ebenen Axiome der Verknüpfung und Anordnung (in Zukunft mit $L_2$ bezeichnet) beweisen, wenn der Desarguessche und Pascalsche Satz als gültig vorausgesetzt werden. Da der Desarguessche Satz aus der Gesamtheit der $L$-Axiome folgt, so konzentrierte sich das Interesse auf den Beweis des Pascalschen Satzes.

Im Jahre 1898 hat *F. Schur* den Pascalschen Satz mit Hilfe der üblichen Kongruenzaxiome, *ohne* Hilfe eines Stetigkeits- (sowie des Parallelen-) Axioms abgeleitet. Damit war zum erstenmal die elementare Euklidische Geometrie ohne Stetigkeit begründet, denn dazu ist eine von der Stetigkeit unabhängige Proportionslehre nötig, die zu entwickeln schon lange das Ziel nachdenklicher Geometer war, z. B. *G. Saccheris* (ca. 1700), der die Euklidische Proportionslehre genau so wie die Einführung des Parallelaxioms als „schimpflichen Fleck auf dem herrlichen Körper der Euklidischen Geometrie" empfunden hat. Aus den allgemeinen Entwicklungen der projektiven Geometrie ergibt sich nun die Proportionslehre durch einfache Spezialisierung.

Die dritte der Fragen über die Grundlagen der projektiven Geometrie war damit positiv beantwortet. *Hilbert* hat nun die beiden andern vollständig erledigt und das hellste Licht über die vielfachen Beziehungen der Sätze von *Desargues* und *Pascal* (von jetzt an mit *Des* und *Pas* bezeichnet) und den verschiedenen Postulaten verbreitet.

Die Resultate lasen sich etwa so darstellen:

1. *Des*, der eine leichte Folge aus $L$ ist, kann aus $L_2$ (den ebenen $L$-Postulaten) *nicht* bewiesen werden, selbst wenn man Stetigkeitsaxiome mitbenutzt.

2. Unter Benutzung von *Des* kann man mit $L_2$ die Ebene analytisch machen, d. i. den Punkten Paare von Zahlen (Koordinaten) zuordnen. Addition und Multiplikation dieser Zahlen durch geometrische Operationen erklären, wobei die gesamten Rechnungsgesetze mit Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation sich als gültig erweisen. Die Koordinaten der Punkte einer Geraden befriedigen bestimmte lineare Gleichungen. Eine solche zweidimensionale analytische Geometrie kann man leicht zu einer dreidimensionalen erweitern, die Gebilde des Raumes werden dabei dargestellt durch geeignete Gebilde der Ebene, genau so wie es bei der gewöhnlichen „darstellenden Geometrie" der Fall ist. Es erweist sich also *Des* als vollständig äquivalent mit der Tatsache, daß die ebene Geometrie in die räumliche eingebettet werden kann. Man kann etwa symbolisch schreiben:

$$Des = L - L_2$$

Wir nehmen das Resultat von 3 voraus, nach dem in einem solchen, mit Hilfe von *Des* geschaffenen Zahlensystem nicht notwendigerweise die Kommutativität der Multiplikation gilt und kommen dadurch zu der Beantwortung der Frage 2: Was folgt aus $L$ allein? Jeder Satz in unserer Geometrie ist durch die Koordinateneinführung zu einem analytischen Satz, zu einer „Formel" geworden. In der allgemeinen, auf

$L$ gegründeten Geometrie gelten alle diejenigen Sätze, deren analytisches Äquivalent Formeln sind, die ohne Anwendung der Kommutativität der Multiplikation gelten. Z. B die Formel:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$

entspricht einem Satz, der in jeder $L$-Geometrie gilt, dagegen *nicht* die Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

3. Da mit Hilfe der Stetigkeit aus $L$ Pas und damit die ganze projektive Geometrie abgeleitet werden kann, müssen wir uns, um Geometrien zu finden, in denen trotz $L$ die projektive Geometrie nicht gilt, mit unstetigen, sogenannten *Nicht-Archimedischen* Geometrien beschäftigen. [Bei *Archimedes* lautet das Stetigkeitspostulat: Es gibt stets Vielfache von $a$, die größer als eine vorgegebene Größe $b$ sind.] Solche Nicht-Archimedischen Geometrien hat zuerst *Veronese* (1891) untersucht und dabei etwa denselben Weg eingeschlagen wie *Bolyai* und *Lobatschefsky*. Er hat nämlich versucht, ganz allgemeine Geometrien aufzubauen, in denen es „aktual" unendlich große und deswegen auch aktual unendlich kleine Strecken gibt. Hierbei war aber die Widerspruchslosigkeit der auftretenden geometrischen Phänomene nicht klar zu erkennen. *Hilbert* konstruiert nun zunächst eine ganz spezielle Nicht-Archimedische Geometrie, der er Zahlen zugrunde legt, die sich nach Potenzen eines Parameters $t$ entwickeln lassen und deren Anordnung durch den Koeffizienten der niedrigsten Potenz von $t$ entschieden wird. Aus Tripeln solcher Zahlen ist es nicht schwer, eine zweifellos widerspruchsfreie Geometrie aufzubauen, in der von allen Postulaten allein das Archimedische Postulat nicht gilt.

Ein weiterer Schritt ist nun der Aufbau eines Nicht-Archimedischen Zahlensystems, in dem das Gesetz der Kommutativität der Multiplikation nicht gültig ist. Dazu benutzt *Hilbert* Zahlen, die sich nach Potenzen zweier Parameter $s$ und $t$ entwickeln lassen. Bei ihrer Multiplikation ist die Beziehung

$$t\,s = 2\,s\,t$$

anzuwenden. Durch diese Festsetzung ist das Produkt zweier Zahlen stets wieder als Summe von Gliedern der Form $a\,t^m\,s^n$ darstellbar. Die Anordnung wird entschieden durch den Koeffizienten desjenigen Gliedes unter den Gliedern mit kleinstem $n$, für das $m$ den kleinsten Wert hat. Mit Hilfe dieses „nicht kommutativen" Zahlensystems ist es nicht schwer, eine Geometrie aufzubauen, in der Pas nicht gilt, also auch nicht die ganze projektive Geometrie.

Die mannigfachen Beziehungen, die damit zwischen grundlegenden Sätzen der Geometrie aufgedeckt sind, macht vielleicht folgende Übersicht klarer [hierbei sind folgende Bezeichnungen gebraucht: $A$: Archimedisches Postulat; $B$: Postulate der Bewegungen; $P$: Projektive Geometrie; $K.\,M.$: Gesetz der Kommutativität der Multiplikation; $>$: hat zur Folge; $\not>$: hat nicht zur Folge]:

*Desarguesscher Satz und Lageaxiome.*

$L >$ Des (*Desargues, Poncelet*)

$L_2 +$ Des $> L$, $L_2 \not>$ Des (*Hilbert*)

*Projektive Geometrie.*

$L + A > P$ (*v. Staudt*)

$L + B > P$ (*Schur*)

$L \not> P$ (*Hilbert*)

Pas + Des + $L_2 > P$ (*Wiener*)

Pas + $L_2 > P$ (*Hessenberg*)

*Arithmetisierung.*

Die Geometrie ist ein dreifach ausgedehntes System gewöhnl. Zahlen (*Descartes*)

$L + A >$ Die Geometrie ist ein dreifach ausgedehntes System gewöhnl Zahlen. (*v. Staudt*)

$L + B >$ Die Geometrie ist ein dreifach ausgedehntes System gewöhnl. Zahlen (*Schur*)

$L \not>$ Die Geometrie ist ein dreifach ausgedehntes System gewöhnl. Zahlen

$L >$ Die Geometrie ist ein dreifach ausgedehntes System von Zahlen ohne $K.\,M.$ ..... } (*Hilbert*)

*II. Lehre vom Polygoninhalt.* Die Lehre vom Inhalt hat dadurch einen besonderen Reiz, daß sie an der Grenze der elementaren Geometrie steht. Der Inhalt schon so einfacher Figuren wie des Kreises etwa oder von Pyramiden erfordert zu seiner Bestimmung unendliche Prozesse (die auf Integration herauslaufen). Diese Probleme haben die feinsten Infinitesimalbetrachtungen der Antike, hauptsächlich von *Euklid* und *Archimedes* veranlaßt.

Es ist als eine merkwürdige Einzelerscheinung anzusehen, daß die Lehre vom Inhalt ebener Polygone ohne infinitesimale Betrachtungen möglich ist. Das hat schon im wesentlichen *Euklid* durchgeführt. Aber er benutzt hierbei das Postulat, daß der Inhalt Größeneigenschaft hat, was für Polygone aus den übrigen Axiomen (ohne Stetigkeitspostulat) bewiesen werden kann. Die Frage ist von vielen Mathematikern im 19. Jahrhundert behandelt, aber erst *Hilbert* hat sie vollständig zum Abschluß gebracht durch folgende Betrachtungen: 1. Man kann für ein Polygon (durch Zerlegung in Dreiecke) ein Inhaltmaß einführen und zeigen, daß die Summe der Inhaltmaße der Teile unabhängig von der Zerlegung ist. (Zu diesem Nachweis muß man die Proportionalsätze benutzen.) Daraus folgt sofort, daß man ein Polygon $\Pi_1$ nicht so zerlegen kann, daß man aus seinen Teilen ein $\Pi_1$ umschließendes Polygon $\Pi_2$ zusammensetzen kann [„das Ganze ist größer als sein Teil"]. Dieser Satz ist häufig als Postulat aufgestellt worden.

2. Umgekehrt: Haben $\Pi_1$ und $\Pi_2$ gleiches Inhaltmaß, dann kann man zu $\Pi_1$ und $\Pi_2$ beziehungsweise kongruente Dreiecke $\triangle_1'$, $\triangle_2'$ . . . resp. $\triangle_1''$, $\triangle_2''$ . . . hinzufügen, so daß die Gesamtheiten ($\Pi_1$, $\triangle_1'$, $\triangle_2'$ . . .) und ($\Pi_2$, $\triangle_1''$, $\triangle_2''$ . . .)

in paarweise kongruente Stücke zerlegt werden können. (Der Nachweis folgt unmittelbar aus *Euklids* „Verwandlung" des Dreiecks in ein Rechteck.) $\Pi_1$ und $\Pi_2$ sind aber als inhaltsgleich zu bezeichnen, denn sie sind je als Differenz *zweier* aus beziehungsweise kongruenten Teilen zusammengesetzter Polygone darstellbar.

*III. Begründung der Geometrie mit Zugrundelegung der Gruppeneigenschaft der Bewegung*[1]). Gibt man einmal als anschaulich begründet zu, daß die Punkte der Ebene durch eine zweifache Zahlenmannigfaltigkeit dargestellt werden können, wobei unendlich benachbarten Punkten Paare von unendlich wenig verschiedenen Koordinaten entsprechen, dann ist die gruppentheoretische Begründung der Geometrie sehr naheliegend und führt zu außerordentlich einfachen Resultaten. Sie ist besonders von *S. Lie* ausführlich behandelt worden. Während aber *Lie* von der Gruppe der Bewegungen eine Menge Eigenschaften voraussetzt (z. B. Differenzierbarkeit der sie darstellenden Funktionen, Parameteranzahl usw.), die mit der Anschauung wenig Verbindung haben, ist es *Hilbert* durch eine schwierige Untersuchung gelungen, folgende einfachen Eigenschaften als genügend zur Charakterisierung der (Euklidischen und Nichteuklidischen) ebenen Bewegungen nachzuweisen: Die Bewegungen sind stetige, ein-eindeutige Transformationen der Ebene, die den Umlaufssinn der Kurven nicht ändern, sie bilden eine „abgeschlossene" Gruppe, und es gibt unendlich viele Bewegungen, die einen Punkt ungeändert lassen.

[Die Eigenschaft „abgeschlossen" soll bedeuten: Die Grenze einer konvergenten Folge von Bewegungen ist wieder eine Bewegung, oder ausführlich: „Wenn es Bewegungen gibt, durch welche Punktetripel in beliebiger Nähe des Punktetripels $ABC$ in beliebige Nähe des Punktetripels $A'B'C'$ übergeführt werden können, so gibt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Tripel $ABC$ genau in $A'B'C'$ übergeht."]

Es wird also nicht nur nicht etwa die Differenzierbarkeit der die Bewegung darstellenden Funktionen vorausgesetzt, sondern nicht einmal gefordert, daß die Bewegungsgruppe transitiv ist, d. i., daß jeder Punkt in jeden andern durch eine Bewegung übergeführt werden kann, oder daß eine Bewegung, die zwei Punkte ungeändert läßt, alle Punkte ungeändert läßt. Es ist wirklich erstaunlich und, wie mir scheint, ganz abgesehen von der Fragestellung in den Grundlagen der Geometrie, von großem Interesse für die Theorie der stetigen Transformationen, daß diese bescheidenen Voraussetzungen bereits die ebenen Bewegungen unter den allgemeinen ebenen Transformationen charakterisieren. Es ist klar, daß dies Resultat dazu anregt, auch andere Transformationsgruppen durch solche allgemeine, von der Darstellung unabhängige Eigenschaften zu charakterisieren. Hierbei muß man, ebenso wie *Hilbert*, den ausgiebigsten Gebrauch machen von den Methoden der modernen Theorie der stetigen Funktionen.

IV. Eine sehr merkwürdige Untersuchung macht *Hilbert* über die Stellung der Spiegelungen gegenüber den eigentlichen Bewegungen der Ebene in sich. Es zeigt sich:

1. Unter Voraussetzung der Stetigkeit folgt aus der Existenz der eigentlichen ebenen Bewegungen die Euklidische Geometrie, insbesondere also auch die Möglichkeit der Spiegelung.

2. Es gibt aber *unstetige* ebene Geometrien, in denen zwar die eigentlichen Bewegungen der Ebene, aber keine Spiegelungen möglich sind. Diese Geometrie wird wieder durch ein besonderes Nicht-Archimedisches (und Nicht-Pascalsches) Zahlensystem konstruiert.

Es eröffnet sich hier der Blick auf ein sehr weites, noch vollständig unerforschtes Gebiet: systematische Untersuchung der allgemeinen Zahlensysteme, in denen die Multiplikation nicht kommutativ ist. Es hat den Anschein, als wenn dieses Gebiet, das eine höhere Stufe der Gruppentheorie darstellt, reich ist sowohl an allgemeinen Gesetzen, wie an besonderen Einzelerscheinungen.

Im vorstehenden haben wir versucht, die wichtigsten Forschungen, die *Hilbert* in den Grundlagen der Geometrie ausgeführt hat, darzustellen. Aber neben all dem Neuen, was sich uns hier darbietet und leicht noch wesentlich hätte vermehrt werden können, gibt es etwas, wovon man durch eine Übersicht keinen Begriff geben kann, das ist die Form der Hilbertschen Darstellung. Und sicher ist die glänzende Formung wissenschaftlicher Ideen eine Leistung, so wertvoll wie die der ersten Auffindung und von stärkstem Einfluß auf die geschichtliche Entwicklung. Die Werke von *Bolyai* und *Lobatschefsky*, sowie von *Pasch* mit ihrem unschätzbaren mathematischen Inhalt haben auf die breite Masse der Interessenten nur wenig Eindruck gemacht. Aber der *Hilbert* eigentümliche Geist, der gerade in den geometrischen Arbeiten so stark spürbar ist, logische Kraft verbunden mit starkem Temperament, übliche Formen mißachtend, unhistorisch, das Wesentliche mit gleichsam Kantischem Vergnügen an Antithese formend und mit nie trügender Sicherheit höchst wirkend darstellend, die Freiheit des mathematischen Denkens radikal ausnutzend, das hat dem geometrischen Werk von *Hilbert* erst den großen Einfluß auf die Mathematiker unserer Generation gegeben, hat eine Umwälzung in ihrem Denken herbeigeführt, die mit den großen Umwälzungen in der Geschichte der Mathematik wohl verglichen werden kann.

[1]) Eine Menge von verknüpfbaren Operationen heißt eine Gruppe, wenn diese Verknüpfung alle Gesetze etwa der gewöhnlichen Multiplikation befriedigt, außer der Vertauschbarkeit der Faktoren.