Werk

Titel: Meilleures estimations possibles pour l'ensemble des points algébriques de foncti...

Autor: WAKABAYASHI, Isao

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320141322_0013|log20

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux
Année 1983-1984 - exposé n° 19

19-01
10 avril 1984

MEILLEURES ESTIMATIONS POSSIBLES POUR L'ENSEMBLE DES POINTS ALGÉBRIQUES DE FONCTIONS ANALYTIQUES

par

Isao WAKABAYASHI

-:-:-:-

Pour chaque fonction analytique, transcendante et d'ordre fini, nous considérons l'ensemble des points algébriques où tous les coefficients de Taylor de la fonction ont des valeurs algébriques. Cet ensemble n'est pas grand, et Th. Schneider, S. Lang, M. Waldschmidt, D. Bertrand, G. V. Chudnovsky, E. Bombieri, H. Skoda, J.-P. Demailly et H. Esnault-E. Viehweg ont donné des estimations de la grandeur de cet ensemble.

Nous voulons montrer, en construisant des exemples, que, dans le cas d'une variable, l'estimation de Waldschmidt et Bertrand est la meilleure possible, et, dans le cas de deux variables, celle de Demailly et Esnault-Viehweg est la meilleure possible, et, dans le cas de n variables, où $n > 2$, celle conjecturée par Chudnovsky et Demailly est la meilleure que l'on puisse espérer.

1. - Conjecture de Bombieri

Commençons par des exemples.

Exemple 1. - Considérons la fonction exponentielle e^z. Il est connu que, si w est un nombre algébrique, alors e^w est un nombre transcendant, sauf pour un w, c'est-à-dire sauf pour $w = 0$.

Notons que premièrement, l'ordre de croissance de e^z est 1 , et deuxièmement, e^z vérifie l'équation différentielle $y' = y$.

(Nous disons qu'une fonction entière $f(z)$ est d'ordre ρ si la croissance de $f(z)$ est du même ordre que celle de e^{cz^ρ} .)

Exemple 2. - Considérons la fonction $e^{P(z)}$, où $P(z)$ est un polynôme de degré n à coefficients algébriques. Si w est un nombre algébrique, alors $e^{P(w)}$ est un nombre transcendant, sauf si w est une des solutions de $P(z) = 0$. Ceci est une conséquence immédiate de l'exemple 1 . Donc le nombre des points exceptionnels est $\leq n$.

Notons que premièrement, $e^{P(z)}$ est d'ordre n , et que, deuxième, elle vérifie l'équation différentielle $y' = P'(z)y$.

Alors ces deux exemples nous conduisent à la conjecture suivante. On désignera par $\bar{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$.

CONJECTURE 1 (Bombieri). - Soit $f(z)$ une fonction transcendante et d'ordre $\leq \rho$. Supposons que f vérifie l'équation différentielle

$$y^{(m)} + P_1(z)\, y^{(m-1)} + \ldots + P_m(z)\, y = Q(z) \ , \qquad (1)$$

où $P_i(z)$, $Q(z)$ sont des polynômes à coefficients algébriques. Alors on a :

$$\operatorname{card}\{w \in \bar{\mathbb{Q}} \mid f^{(k)}(w) \in \bar{\mathbb{Q}},\ k \geq 0\} \leq \rho \ .$$

On peut considérer ce problème non seulement comme un problème concernant les nombres transcendants, mais également les propriétés générales des solutions d'équations différentielles. Et comme cette conjecture n'est pas encore résolue, nous n'avons même pas de théorème général qui donnerait le résultat cité dans l'exemple 2. Donc ce que l'on sait actuellement n'est pas encore satisfaisant. D'autre part, nous avons le théorème suivant :

THÉORÈME 1 (Schneider, Lang, Waldschmidt, (cf. [6])). - Soit $f(z)$ une fonction transcendante et d'ordre $\leq \rho$ vérifiant (1), et soit K un corps de nombres sur $\mathbb{Q}$ contenant les coefficients P_i et $\mathbb{Q}$. Alors on a :

$$\operatorname{card}\{w \in K \mid f^{(k)}(w) \in K \ ,\ k \geq 0\} \leq [K : \mathbb{Q}]\, \rho \ .$$

Ce théorème nous dit que si K est fixé, alors le cardinal de l'ensemble des points exceptionnels est fini. Mais l'ensemble des points exceptionnels dépend de K. Donc ce théorème ne prouve pas que le cardinal de l'ensemble des points exceptionnels considéré dans la conjecture est fini.

D'autre part, notons que, dans la démonstration du théorème, on utilise le fait que f vérifie l'équation différentielle (1) pour montrer que la croissance des coefficients de Taylor de f est modérée. En effet, si f vérifie (1), alors on obtient certaines relations algébriques entre les coefficients de Taylor de f, qui permettent d'exprimer algébriquement les coefficients de Taylor en fonction des coefficients des termes de plus bas degré, ce qui permet de contrôler leur croissance. Ce que l'on utilise en fait pour la démonstration du théorème, c'est que la croissance des coefficients de Taylor est modérée. Donc, au lieu de supposer que f vérifie l'équation différentielle, on peut supposer que la croissance des coefficients de Taylor de f est modérée : cette hypothèse donne le théorème ci-dessus. De plus, un résultat plus général est obtenu par Bertrand sous cette hypothèse (voir le théorème 2). Cette observation nous conduit à une question concernant la conjecture.

QUESTION. - Est-il nécessaire, dans la conjecture 1, de supposer que f vérifie l'équation différentielle ?

La réponse à cette question est "oui", c'est-à-dire, il est nécessaire de supposer que f vérifie l'équation différentielle, et on ne peut pas se contenter de conditions sur la croissance des coefficients de Taylor de f. Et notre but, au départ, a été de le montrer. Par suite, si on veut démontrer la conjecture, il faut certainement utiliser quelque part le fait que f vérifie l'équation différentielle.

2. - Cas d'une variable

Nous allons énoncer l'estimation de Bertrand et donner notre résultat dans le cas d'une variable. Donnons d'abord la définition de "well-behaved point" qui se trouve dans Bertrand [1]. (Le terme a été proposé par D. Masser.)

DÉFINITION 1. - Soient $f_1, \ldots, f_m$ des fonctions analytiques en $w \in \mathbb{C}$. Nous dirons que w est un well-behaved point de $\{f_1, \ldots, f_m\}$, s'il existe un corps de nombres K_w (de degré d_w), un réel positif μ_w, un entier positif δ_w et des entiers non-négatifs δ'_w, δ''_w tels que les conditions suivantes (i), (ii) et (iii) sont vérifiées :

(i) $f_i^{(k)}(w) \in K_w$ pour $k \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$;

(ii) $\limsup_{k \to \infty} \dfrac{\log |f_i^{(k)}(w)|}{k \log k} \leq \mu_w$ pour $i = 1, \ldots, m$;

(iii) $\delta_w^{k+1} ((\delta'_w k)!)^{\delta''_w} f_i^{(k)}(w) \in I_{K_w}$ pour $k \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

(Pour un nombre algébrique α, on désigne par $|\overline{\alpha}|$ le maximum des valeurs absolues de ses conjugués, et pour un corps K, on désigne par I_K l'anneau des entiers algébriques de K.)

THÉORÈME 2 (Bertrand, [1]). - Soit $f(z)$ une fonction méromorphe, transcendante et d'ordre $\leq \rho$. Alors

$$\sum_w \frac{1}{d_w \delta'_w \delta''_w + 1 + (d_w - 1)\mu_w} \leq \rho ,$$

où w décrit l'ensemble des well-behaved points de $\{z, f(z)\}$.

Notre résultat [5] est le suivant :

THÉORÈME 3. - Faisons décrire à n, l'ensemble des entiers de 1 à N, ou de 1 à ∞. Soient des nombres $\rho > 0$, $d_n \in \mathbb{N}$, $\mu_n > 0$, δ'_n, $\delta''_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tels que

$$\sum_n \frac{1}{d_n \delta'_n \delta''_n + 1 + (d_n - 1)\mu_n} = \rho$$

et

$$\mu_n \geq 1 - \frac{1}{\rho} \quad \text{pour tous les } n . \tag{2}$$

Soient K_n des corps réels tels que $d_n = [K_n : \mathbb{Q}]$. Alors il existe une fonction f analytique, transcendante et d'ordre $\leq \rho$ telle que les conditions suivantes (i), (ii) et (iii) soient vérifiées pour tous les n :

(i) $f^{(k)}(n) \in K_n$ pour $k \geq 0$;

(ii) $\limsup_{k \to \infty} \dfrac{\log |f^{(k)}(n)|}{k \log k} \leq \mu_n$;

(iii) il existe $\delta_n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\delta_n^{k+1}((\delta'_n k)!)^{\delta''_n} f^{(k)}(n) \in I_{K_n} \quad \text{pour } k \geq 0 .$$

REMARQUE 1. - La condition (2) est une condition nécessaire pour l'existence de f.

REMARQUE 2. - Les points $z = n$ sont des well-behaved points de $\{z, f(z)\}$.

Pour la démonstration du théorème, nous construisons la fonction f sous forme d'une série d'interpolation entre N points ou un nombre dénombrable de points, dont on choisit les coefficients convenablement.

Pour voir ce qui se passe, considérons par exemple la série d'interpolation entre les deux points $z = 0$ et $z = 1$, comme suit :

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z(z-1) + \alpha_3 z^2(z-1) + \alpha_4 z^2(z-1)^2 + \ldots .$$

Alors

$$f(0) = \alpha_0 , \quad f(1) = \alpha_0 + \alpha_1 ,$$

$$f'(0) = \alpha_1 - \alpha_2 , \quad f'(1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 , \quad \text{etc.}$$

Donc pour chaque $k \geq 0$, les dérivées $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ sont calculées avec un nombre fini de α_i. Il suffit donc de choisir les coefficients α_i tels que $f^{(k)}(0)$ et $f^{(k)}(1)$ ne soient pas grandes. Le choix des coefficients sera fait par induction sur i.

3. - Cas de plusieurs variables

Dans ce cas aussi, une estimation analogue à celles des théorèmes 1 et 2 est connue.

Soit f une fonction méromorphe et transcendante à n variables, et soit K un corps de nombres tel que $[K : \mathbb{Q}] = d$. On désignera par S l'ensemble des points $w = (w_1, \ldots, w_n)$ de K^n tels que f est holomorphe en w, et que, pour $k = k_1 + \ldots + k_n$, $k_i \geq 0$, on a :

$$\frac{\partial^k f(w)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} \in I_K$$

et

$$\left| \overline{\frac{\partial^k f(w)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}} \right| \leq c_w^{k+1}\, k^k \quad .$$

Supposons, de plus, que f est d'ordre $\leq \rho$. Alors :

THÉORÈME 4 (Bombieri, Waldschmidt, Skoda). - Il existe une hypersurface algébrique V de $\mathbb{C}^n$, telle que $S \subset V$ et le degré de $V \leq n\rho d$.

On peut trouver étrange que le nombre n des variables apparaisse dans l'estimation, et on peut se demander s'il n'est pas possible d'obtenir une meilleure estimation qui ne fasse plus intervenir n . Demailly a obtenu un meilleur résultat dans le cas où $n = 2$, en améliorant le lemme de Jensen-Schwarz. Esnault-Viehweg ont généralisé le résultat de Demailly pour n quelconque par des méthodes de géométrie algébrique. Le résultat, qui fait toujours intervenir n , est le suivant :

THÉORÈME 5 (Demailly [3], Esnault-Viehweg [4]). - Si $n \geq 2$, alors il existe une hypersurface algébrique V de $\mathbb{C}^n$ telle que $S \subset V$, et le degré de $V \leq n\rho d - 1$.

De plus, on conjecture l'estimation suivante :

CONJECTURE 2 (Chudnovsky [2], Demailly [3]). - Si $n > 2$, alors il existe une hypersurface algébrique V de $\mathbb{C}^n$ telle que $S \subset V$ et le degré de $V \leq n\rho d - (n-1)$.

Nous allons montrer, en construisant un exemple, que dans le cas de deux variables, l'estimation de Demailly et Esnault-Viehweg est la meilleure possible, et dans le cas général l'estimation de la conjecture 2 est la meilleure que l'on puisse espérer.

THÉORÈME 6. - Soit $\rho \in \mathbb{N}$, et soit K un corps réel avec $[K : \mathbb{Q}] = d$. Alors il existe une fonction f à n variables, analytique, transcendante et d'ordre ρ , telle que l'ensemble S de f n'est contenu dans aucune hypersurface de degré $< n\rho d - (n-1)$.

Pour la démonstration, posons $\ell = n\rho d$, et considérons ℓ hyperplans complexes $\{H_i\}$ $(i=1,\dots,\ell)$ en position générale de $\mathbb{C}^n$, définis par

$$H_i = (L_i(z_1,\dots,z_n) = a_{1i}z_1 + \dots + a_{ni}z_n + b_i = 0) .$$

On suppose que tous les coefficients $a_{\lambda i}$, b_i appartiennent à $\mathbb{Z}$, et que toutes les coordonnées de l'intersection de n hyperplans quelconques appartiennent aussi à $\mathbb{Z}$. Nous construisons la fonction f sous la forme

$$f(z_1,\dots,z_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m}{(m!)^n} \prod_{i=1}^{\ell} L_i(z_1,\dots,z_n)^m ,$$

dont on choisit les coefficients α_m, de façon que les conditions $\alpha_m \in I_K$, $\alpha_m \neq 0$, $|\alpha_m| = m^{-n(d-1)m}$ et $|\overline{\alpha_m}| \leq c m^{nm}$ soient vérifiées avec une constante c. Ceci est possible en effet grâce au principe des tiroirs de Dirichlet. Alors la fonction f jouit des propriétés suivantes :

(i) f est analytique, transcendante et d'ordre ρ. En effet, la fonction d'une variable $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m}{(m!)^n} z^m$ est analytique, transcendante et d'ordre $1/nd$, puisque, α_m étant un entier algébrique, nous avons $c^{-(d-1)} m^{-n(d-1)m} \leq |\alpha_m| \leq m^{-n(d-1)m}$. Donc f est d'ordre $\ell/nd = \rho$.

(ii) Désignons par $P_{i_1 \dots i_n}$ l'intersection de n hyperplans $H_{i_1}, \dots, H_{i_n}$, et par S' l'ensemble de tous les $P_{i_1 \dots i_n}$. Alors en chaque point $P = P_{i_1 \dots i_n}$ de S', on a, pour $k = k_1 + \dots + k_n$, $k_i \geq 0$,

$$\gamma = \frac{\partial^k f(P)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} \in I_K .$$

En effet, on a :

$$\gamma = \sum_{m=0}^{k} \frac{\alpha_m}{(m!)^n} \sum_{k_{11}+\dots+k_{1\ell}=k_1} \cdots \sum_{k_{n1}+\dots+k_{n\ell}=k_n} \frac{k_1!}{k_{11}! \dots k_{1\ell}!} \cdots \frac{k_n!}{k_{n1}! \dots k_{n\ell}!} \prod_{i \neq i_1,\dots,i_n} m!\, a_{1i}^{k_{1i}} \dots a_{ni}^{k_{ni}}$$

$$\times \prod_{i \neq i_1,\dots,i_n} \frac{\partial^{k_{i1}+\dots+k_{ni}} L_i(P)^m}{\partial z_1^{k_{1i}} \dots \partial z_n^{k_{ni}}} ,$$

où $k_{1i}+\dots+k_{ni}=m$ pour $i=i_1,\dots,i_n$. Donc $\gamma\in I_K$.

(iii) $|\overline{\gamma}|\le c_1^{k+1}\,k^k$. En effet, on peut vérifier ceci par l'expression ci-dessus.

Donc S' est contenu dans S . Mais S' n'est contenu dans aucune hypersurface de degré $<\ell-(n-1)$. En effet, s'il existait une hypersurface V de degré $\delta<\ell-(n-1)$ contenant S' , alors $S'\cap H_1$ serait contenu dans $V\cap H_1$, qui est une hypersurface de H_1 de degré $\delta'\le\delta$. D'autre part, $H_2\cap H_1$, ... , $H_\ell\cap H_1$ sont $\ell-1$ hyperplans en position générale de H_1 , et $S'\cap H_1$ est un ensemble analogue à S' , avec n remplacé par $n-1$, et ℓ par $\ell-1$. Et $S'\cap H_1$ serait contenu dans une hypersurface de degré $\delta'\le\delta<(\ell-1)-((n-1)-1)$ de H_1 . Donc, par induction sur n , on aurait une contradiction. Donc le théorème 6 est démontré.

-:-:-:-

RÉFÉRENCES

[1] D. BERTRAND, A transcendence criterion for meromorphic functions, Transcendence theory : Advances and applications, Academic Press, London (1977), 187-193.

[2] G. V. CHUDNOVSKY, Singular points on complex hypersurfaces and multidimensional Schwarz lemma, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 21e année (1979-1980), n° 12, 29-69, Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1981.

[3] J.-P. DEMAILLY, Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques, Bull. Soc. Math. France, 110 (1982), 75-102.

[4] H. ESNAULT - E. VIEHWEG, Sur une minoration du degré d'hypersurface s'annulant en certains points, Math. Ann., 263 (1983), 75-86.

[5] I. WAKABAYASHI, On the optimality of certain estimates for algebraic values of analytic functions, preprint.

[6] M. WALDSCHMIDT, Nombres transcendants, Lecture Notes in Math., 402, Springer-Verlag, Berlin, Heiderberg, New York, 1974.

(texte reçu le 15 juillet 1984)

-:-:-:-

Isao WAKABAYASHI
Department of Mathematics
Tokyo University of Agriculture and Technology
Fuchu, TOKYO 183 (Japan)