Werk

Titel: La mesure des ensembles non-normaux.

Autor: Lyons, Russell

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320141322_0013|log16

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux
Année 1983-1984 - exposé n° 13

13-01
17 février 1984

LA MESURE DES ENSEMBLES NON-NORMAUX

par

Russell LYONS

-:-:-:-

Soit $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On dit que $x \in \mathbb{T}$ est <u>normal</u> en base q , où q est un entier ≥ 2 , si le développement de $x = 0 , x_1 x_2 x_3 \ldots$ en base q contient chaque chiffre $0 \leq d < q$ avec la même fréquence :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \#\{ n \leq N ; x_n = d \} = \frac{1}{q} \quad ;$$

et chaque paire de chiffres d_1, d_2 avec la même fréquence :

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \#\{ n \leq N ; x_n = d_1 , x_{n+1} = d_2 \} = \frac{1}{q^2} \quad ;$$

et chaque triplet avec la même fréquence ; et ainsi de suite.
Evidemment, cela équivaut à la condition suivante : pour tout intervalle $I \subset \mathbb{T}$ de la forme $\left[\frac{a}{q^k} , \frac{a+1}{q^k} \right[$ $(a \in \mathbb{Z})$, on a

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_I (q^{n-1} x) = \lambda I , \tag{1}$$

où χ_I est la fonction caractéristique de I et λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$. Dans ce cas, il s'ensuit sans trop de difficulté que (1) a lieu quel que soit l'intervalle $I \subset \mathbb{T}$, c'est-à-dire que x est normal en base q si et seulement si la suite $\{q^{n-1} x\}_{n=1}^{\infty}$ est équidistribuée. (On dit qu'une suite $\{t_n\}_1^{\infty} \subset \mathbb{T}$ est <u>équidistribuée</u> si, pour tout arc $I \subset \mathbb{T}$, on a

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_I (t_n) = \lambda I \ .)$$

Le concept d'un nombre normal s'étend d'une façon évidente en remplaçant $\{q^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ par une suite $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ d'entiers positifs strictement croissante, notée $n_k \uparrow \infty$. En prenant l'ensemble de tels nombres, puis son complémentaire, on arrive à la définition suivante :

DÉFINITION (Kahane [6], Lyons [10, chap. II.2]). - Un borélien $E \subset \mathbb{T}$ est un ensemble non-normal, où de type W^*, s'il existe une suite $n_k \uparrow \infty$ telle que pour tout $\chi \in E$, $\{n_k x\}_{k=1}^{\infty}$ ne soit pas équidistribuée. L'ensemble maximal de type W^* correspondant à $\{n_k\}$ est noté

$$W^*(\{n_k\}) = \{ x ; \{n_k x\} \text{ n'est pas équidistribuée} \} .$$

C'est un exercice de démontrer que $W^*(\{n_k\})$ est un borélien.

N. B. - Ceci n'est pas le même concept que le complémentaire d'un ensemble dit "normal" (Rauzy [11]), où la suite $\{n_k\}$ est formée de réels arbitraires.

Quelle est la largeur des ensembles de type W^* ? Avant de considérer la question au sens de la mesure, regardons quelques faits connus pour d'autres sens de largeur.

Le cardinal de $W^*(\{n_k\})$ est toujours infini, puisque l'ensemble maximal contient toujours $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Si $n_k = k$, alors $W^*(\{n_k\})$ vaut exactement $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (Weyl [12]), et donc est dénombrable. Mais il existe $n_k \uparrow \infty$, même telle que $n_{k+1} - n_k$ soit bornée, telle que $W^*(\{n_k\})$ ne soit pas dénombrable (Erdös et Taylor [5]).

Si l'on considère la catégorie de Baire, $W^*(\{k\})$ est bien sûr maigre (de la première catégorie), tandis que $W^*(\{q^{k-1}\})$ est de complémentaire maigre (voir, par exemple, Lyons [10, chap. IV.6]).

Voici deux résultats mettant en jeu la dimension de Hausdorff. Si $n_{k+1} - n_k$ est bornée, alors $W^*(\{n_k\})$ est de dimension zéro ; si $\{n_k\}$ est lacunaire (c'est-à-dire, $\inf_k n_{k+1}/n_k > 1$), alors $W^*(\{n_k\})$ a la dimension 1 (Erdös et Taylor [5]).

C'est une conséquence facile de la loi des grands nombres que λ-presque tout nombre est normal en base q (Borel [3]), c'est-à-dire, que $\lambda(W^*(\{q^{k-1}\})) = 0$. Ce résultat a été étendu par Weyl [13] : pour tout $n_k \uparrow \infty$, $\lambda(W^*(\{n_k\})) = 0$.

Pour la démonstration, nous avons besoin du critère de Weyl [12] :

CRITÈRE DE WEYL. - Une suite $\{t_k\} \subset \mathbb{T}$ est équidistribuée si et seulement si pour tout entier m non-nul,

$$\lim_{K \to \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} e^{2\pi i m t_k} = 0 \ .$$

Voir aussi Kuipers et Niederreiter [9, pp. 1-3, 7-8] et Zygmund [14, p. 142].

Dans la suite, on note $e(t) = e^{2\pi i t}$.

THÉORÈME 1 (Weyl, [13]). - <u>Si</u> $n_k \uparrow \infty$, <u>alors</u> $\lambda\, W^*(\{n_k\}) = 0$.

<u>Démonstration</u>. - D'après le critère de Weyl, il faut montrer que $\forall\, m \neq 0$

$$\lim_{K \to \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} e(m n_k x) = 0 \quad \lambda\text{-p.p.} \tag{2}$$

Mais si on montre (2) pour $m = 1$ et $\{n_k\}$ quelconque, alors (2) s'ensuit pour tout $m \geq 1$ en considérant $\{m n_k\}$ comme suite et pour $m < 0$ par conjugaison. Donc on se ramène à démontrer que $f_K \to 0$, λ-p.p., où

$$f_K(x) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} e(n_k x) \ . \tag{3}$$

On calcule facilement

$$\int_{\mathbb{T}} |f_K|^2 \, d\lambda = \frac{1}{K} \ .$$

On en déduit que $f_K \to 0$ dans L^2, mais cela n'implique pas que $f_K \to 0$ p.p. Cependant

$$\int_{\mathbb{T}} \sum_{K=1}^{\infty} |f_{K^2}|^2 \, d\lambda = \sum \frac{1}{K^2} < \infty \ ,$$

donc $\sum_{1}^{\infty} |f_{K^2}| < \infty$ p.p., donc $f_{K^2} \to 0$, p.p.

On achève la preuve par un argument d'interpolation pour établir $f_K \to 0$, p.p.

Plus précisément, soit N quelconque et soit K tel que $K^2 \leq N < (K+1)^2$. Alors

$$|f_N(x)| \leq |f_N(x) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{K^2} e(n_k x)| + |\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{K^2} e(n_k x)|$$

$$= \frac{1}{N} \Big| \sum_{K^2 < k \leq N} e(n_k x) \Big| + \frac{K^2}{N} |f_{K^2}(x)|$$

$$\leq \frac{2K+1}{K^2} + |f_{K^2}(x)| \ .$$

Lorsque $N \to \infty$, $K \to \infty$ et le dernier terme tend vers zéro p.p., donc le premier terme aussi. □

Alors, si l'on veut plus d'informations sur la mesure des ensembles de type W^*, il faut considérer les mesures singulières. Soit $M(\mathbb{T})$ l'ensemble des mesures complexes boréliennes sur le tore $\mathbb{T}$. On demande : pour quelles $\mu \in M(\mathbb{T})$ est-ce que $\mu E = 0$ pour tout E de type W^* ?

Remarquons que chaque mesure absolument continue par rapport à λ annule tout ensemble de type W^* et que, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, elle appartient à $M_o(\mathbb{T}) = \{ \mu \in M(\mathbb{T}) \; ; \lim_{|n| \to \infty} \hat{\mu}(n) = 0 \}$, où

$$\hat{\mu}(n) = \int_{\mathbb{T}} e(-nt)\, d\mu(t) \quad .$$

Il n'est pas difficile de voir que c'est une condition nécessaire :

THÉORÈME 2 (Lyons [10, chap. II.4]). - <u>Pour que</u> $\mu \in M(\mathbb{T})$ <u>annule tout ensemble de type</u> W^* , <u>il faut que</u> $\mu \in M_o(\mathbb{T})$.

<u>Démonstration</u>. - On démontre la contraposé. Soit $\mu \notin M_o(\mathbb{T})$. Alors $\exists n_k \uparrow \infty$ ou $-n_k \uparrow \infty$ tels que $\hat{\mu}(n_k)$ converge vers une limite α non nulle. Si $t \notin E = W^*(\{|n_k|\})$, alors

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} e(-n_k t) \to 0 \quad .$$

Donc

$$\begin{aligned} 0 < |\alpha| &= \left| \lim_{K \to \infty} \frac{1}{K} \sum_{1}^{K} \hat{\mu}(n_k) \right| = \left| \lim \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{K} \sum_{1}^{K} e(-n_k t)\, d\mu(t) \right| \\ &\leq \lim \int_{E} 1 \, d|\mu|(t) + \left| \lim \int_{\mathbb{T} \setminus E} \frac{1}{K} \sum_{1}^{K} e(-n_k t)\, d\mu(t) \right| \\ &= |\mu|(E) \, , \end{aligned}$$

d'où $|\mu|$ n'annule pas E . □

Kahane et Salem [6, 7] ont demandé s'il était suffisant que $\mu \in M_o$ pour qu'elle annule tout W^* . R. C. Baker [1, 2] a essayé de démontré que oui. Pourtant, la réponse est "non".

Regardons d'abord les efforts de Baker. On essaie d'imiter la preuve du théorème 1. Pour que μ annule tout W^* , il faut et il suffit que pour tout $n_k \uparrow \infty$, $f_K \to 0$ $|\mu|$ -p.p., où f_K est définie par (3) . Si μ est positive, on considère l'intégrale

$$(4) \qquad I_K \equiv \int_{\mathbb{T}} |f_K(x)|^2 \, d\mu(x)$$

$$= \frac{\hat{\mu}(0)}{K} + \frac{1}{K^2} \sum_{\substack{k,\ell \in [1,K] \\ k \neq \ell}} \hat{\mu}(n_k - n_\ell) \, .$$

On voit que la difficulté pour étendre la méthode se trouve dans les termes non diagonaux. Pour $\mu = \lambda$, on a $I_K = \frac{1}{K}$, qui implique que $f_K \to 0$, λ-p.p. Cet argument peut être amélioré. Le lemme suivant est dû essentiellement à Davenport, Erdös et LeVeque [4] (voir aussi Lyons [10, chap. III.4]) :

LEMME 3.- Soient $\mu \geq 0$, $n_k \uparrow \infty$, f_K comme dans (3), et I_K comme dans (4). Si

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{I_K}{K} < \infty \, ,$$

alors $f_K \to 0$, μ-p.p.

Or, si l'on met certaines conditions sur la décroissance de $\hat{\mu}$, on peut démontrer que l'hypothèse du lemme est satisfaite. Par exemple, une petite extension d'un des résultats de Baker est la suivante :

THÉORÈME 4 (Lyons, [10], chap. III.4).- Supposons que $\Phi(n)$ soit une fonction décroissante sur les entiers non négatifs telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{n} < \infty \, .$$

Alors, chaque mesure positive μ telle que

$$|\hat{\mu}(n)| \leq \Phi(|n|) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

annule tout ensemble de type W^*.

Le cas démontré par Baker était $\Phi(n) = (\log(n+2))^{-1-\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$. Notons que si $\{n_k\}$ est lacunaire, les termes non diagonaux de I_K sont encore plus petits que l'on ne peut supposer en général. Autrement dit, si $\{n_k\}$ est lacunaire, on peut satisfaire le lemme avec une vitesse de décroissance de $\hat{\mu}$ plus faible. Ainsi on a l'extension suivante d'un résultat de Baker (qui a supposé $\Phi(n) = (\log\log(n+3))^{-1-\varepsilon}$) :

THÉORÈME 5 (Lyons, [10], chap. III.4). - Supposons que $\Phi(n)$ est décroissante sur les entiers non négatifs et que

$$(5) \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{n \log n} < \infty .$$

Alors chaque mesure positive μ telle que $|\hat{\mu}(n)| \leq \Phi(|n|)$ annule tout ensemble de type W^* qui correspond à une suite $\{n_k\}$ lacunaire.

Puisque les ensembles de type W^* qui correspondent à une suite lacunaire comprennent les ensembles non normaux par rapport à une base q, ce sont les plus importants des ensembles de type W^*. Je les appelle les ensembles de type W^* lacunaire. Pour eux, le théorème précédent est le meilleur possible :

THÉORÈME 6 (Lyons, [10], chap. III.6). - Si $\Phi(n)$ est décroissante et (5) n'est pas satisfaite, alors il existe $\mu \geq 0$ telle que $|\hat{\mu}(n)| \leq \Phi(|n|)$ et telle que μ soit concentrée sur $W^*(\{2^{k-1}\})$.

Cela résulte des estimations fines sur une certaine mesure μ. Je me restreindrai ici à donner une esquisse de la démonstration qu'il existe $\mu \in M_o(\mathbb{T})$ concentrée sur $W^*(\{2^{k-1}\})$.

On sait qu'on peut regarder la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ comme la probabilité telle que si

$$x = 0 , x_1 x_2 x_3 \dots x_k \dots \quad \text{(base 2)},$$

alors chaque x_k vaut 0 ou 1 avec la même probabilité et les valeurs des x_k constituent des variables aléatoires indépendantes. Si on change la probabilité que $x_k = 0$ de $\frac{1}{2}$ en p_k, $0 \leq p_k \leq 1$, en gardant l'indépendance des x_k, on obtient une autre probabilité μ. Pour que $\mu \in M_o$, il n'est pas trop difficile de montrer qu'il faut et qu'il suffit que p_k tende vers $\frac{1}{2}$. Mais dès que $p_k \to \frac{1}{2}$, on trouve que μ est concentrée sur le complément de $W^*(\{2^{k-1}\})$ comme conséquence de la loi des grands nombres. Ainsi cela ne donne pas l'exemple cherché.

Alors ne gardons plus l'indépendance des x_k. Divisons les chiffres en blocs :

$$x = 0 , \underbrace{x_1 x_2 x_3 \dots x_{K_1}}\ \underbrace{x_{K_1+1} \dots x_{K_2}}\ \underbrace{x_{K_2+1} \dots} \quad \text{(base 2)}.$$

Construisons une probabilité μ telle que les blocs soient indépendants, mais dans le i-ième bloc ($k \in B_i =]K_i, K_{i+1}]$), les chiffres ne soient pas indépendants mais aient la distribution suivante :

Etant donné $a_k = 0,1$ $(k \in B_i)$ pas tous nuls

$$\mu\{x ; x_k = a_k \quad \forall k \in B_i\} = 2^{-|B_i|} \underline{(1-\varepsilon_i)}$$

et

$$\mu\{x ; x_k = 0 \qquad \forall k \in B_i\} = 2^{-|B_i|} \underline{(1-\varepsilon_i)+\varepsilon_i} ,$$

où $0 \leq \varepsilon_i \leq 1$. (Pour comparaison, si l'on ignore les parties soulignées de cette description, on obtient la mesure de Lebesgue.) C'est-à-dire, les chiffres dans B_i sont "indépendants à ε_i-près", mais il y a un excès de probabilité pour que tous les chiffres soient nuls. (Avec la notation de la convolution, on a

$$\mu = \mathop{\ast}_{i=1}^{\infty} \{ \varepsilon_i \delta(0) + (1-\varepsilon_i) \mathop{\ast}_{k \in B_i} [\tfrac{1}{2} \delta(0) + \tfrac{1}{2} \delta(2^{-k})] \},$$

où $\delta(t)$ est la mesure de Dirac en t .) Pour que $\mu \in M_o$, nous prenons $\varepsilon_i \to 0$. Pour que $\mu W^*(\{2^{k-1}\}) = 1$, nous prenons $\sum_1^{\infty} \varepsilon_i = \infty$ et $K_{i+1}/K_i \to \infty$. Pourquoi ?

En effet, la probabilité que $x_k = 0 \quad \forall k \in B_i$ est $\geq \varepsilon_i$. Ces évènements (que le i-ième bloc est entièrement nul) sont indépendants avec $\sum \varepsilon_i = \infty$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, il s'ensuit que presque sûrement les blocs B_i sont nuls une infinité de fois. Puisque $K_{i+1}/K_i \to \infty$, cela entraîne que la limite supérieure de la proportion des 0 dans le développement de x égale 1 p.s., c'est-à-dire, μ est concentrée sur $W^*(\{2^{k-1}\})$.

En conclusion, je pose deux questions ouvertes. Est-ce que les théorèmes 4 et 5 s'étendent aux mesures complexes ? Quelle est la classe des mesures annulant W^* ? On ne peut pas décrire cette classe en termes simples de décroissance, car il existe $\mu \ll \lambda$ dont les coefficients $\hat{\mu}$ décroissent arbitrairement lentement (Katznelson, [8], théorème I.4.1, exercise I.4.1).

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.C. BAKER, A diophantine problem on groups, III, Proc. Camb. Phil. Soc. 70 (1971), 31-47.

[2] R. C. BAKER, A diophantine problem on groups, IV, Illinois J. of Math. 18 (1974), 552-564.

[3] E. BOREL, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rend. Cir. Mat. Palermo 27 (1909), 247-271.

[4] H. DAVENPORT, P. ERDÖS et W. J. LeVEQUE, On Weyl's criterion for uniform distribution, Mich. Math. J. 10 (1963), 311-314.

[5] P. ERDÖS and S.J. TAYLOR, On the set of points of convergence of a lacunary trigonometric series and the equidistribution properties of related sequences, Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957), 598-615.

[6] J.-P. KAHANE, Sur les mauvaises répartitions modulo 1 , Ann. Inst. Fourier 14, 2 (1964), 519-526.

[7] J.-P. KAHANE and R. SALEM, Distribution modulo 1 and sets of uniqueness, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 259-261.

[8] Y. KATZNELSON, An Introduction to Harmonic Analysis, Second corrected edition, New York : Dover, 1976.

[9] L. KUIPERS and H. NIEDERREITER, Uniform Distribution of Sequences, New York : Wiley, 1974.

[10] R. LYONS, A characterization of measures whose Fourier-Stieltjes transforms vanish at infinity, preprint, 1983.

[11] G. RAUZY, Caractérisation des ensembles normaux, Bull. Soc. Math. France 98 (1970), 401-414.

[12] H. WEYL, Über ein Problem aus dem Gebiete der diophantischen Approximationen, Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse (1914), 234-244.

[13] H. WEYL, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. 77 (1916), 313-352.

[14] A. ZYGMUND, Trigonometric Series, Second edition, reprinted, volume I, Cambridge : Cambridge University Press, 1979.

(texte reçu le 16 mars 1984)

-:-:-:-

Russell LYONS
Université de Paris-Sud
Mathématique - bât. 425
F - 91405 ORSAY CEDEX