Werk

Titel: Relèvement galoisien d'invariant de Clifford équivariant.

Autor: Taylor, Martin J.; CASSOU-NOGUÈS, Philipp

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320141322_0013|log13

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux
Année 1983-1984 - exposé n° 9

6 janvier 1984

RELÈVEMENT GALOISIEN D'INVARIANT DE CLIFFORD ÉQUIVARIANT

par

Philippe CASSOU-NOGUÈS et Martin J. TAYLOR

-:-:-:-

1. - Introduction

Il est naturel d'associer à toute forme quadratique, non dégénérée, définie sur un corps K de caractéristique 0, son invariant de Clifford. C'est un élément du groupe de Brauer de K annulé par 2.

Soit Γ un groupe fini. Pour étudier la classification de celles de ces formes qui sont invariantes par l'action de Γ, Fröhlich introduit dans [F 1] une généralisation de cet invariant. Ce nouvel invariant se définit comme suit :

On associe à tout couple (M, h) où M est un $K[\Gamma]$-module de type fini, et h une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée sur M, invariante par Γ son algèbre de Clifford $C(M, h)$. C'est l'algèbre (resp. la seconde algèbre) de Clifford usuelle de h si la dimension de M est paire (resp. impaire), sur laquelle Γ opère comme groupe d'automorphismes d'algèbre. Puisque $C(M, h)$ est une K-Γ algèbre centrale simple au sens de [F 1], § 4, on peut considérer sa classe dans le groupe de Brauer équivariant de K et de Γ défini par Fröhlich et Wall dans [F - W]. On démontre ([F 1], Théorème 4.1) que ce groupe est égal au produit direct du groupe de Brauer de K par $H^2(\Gamma, K^*)$.

On définit l'invariant de Clifford équivariant de (M, h) comme la projection sur $H^2(\Gamma, K^*)$ de la classe de $C(M, h)$. On le note $c_K(M, h)$.

Lorsque K est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes $c_K(M, h)$ ne dépend que du caractère θ de M. On montre en outre que $H^2(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ est canoniquement isomorphe à $H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ qui n'est autre que le multiplicateur de Schur de Γ. On note $c(\theta)$ l'image de $c_{\mathbb{C}}(M, h)$ dans $H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Soit $R^o(\Gamma)$ le groupe additif des caractères orthogonaux virtuels θ de Γ tels que $\theta = \varphi - \psi$, où φ et ψ sont des caractères de $\mathbb{C}[\Gamma]$-modules quadratiques, et soit $\tilde{R}^o(\Gamma)$ le sous-groupe de $R^o(\Gamma)$ des caractères de degré 0 et de déterminant trivial. On vérifie dans [CN-T] que $\theta \longrightarrow c(\theta)$ se prolonge en un homomorphisme de $\tilde{R}^o(\Gamma)$ dans le sous-groupe des éléments de $H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ annulés par 2.

L'étude de l'homomorphisme $\theta \longrightarrow c(\theta)$ est l'essentiel de cet article. Lorsque les 2-sous-groupes de Sylow de Γ sont métacycliques nous obtenons une formule simple qui permet de calculer l'invariant de Clifford équivariant de n'importe quel caractère orthogonal de Γ. Enfin, lorsque Γ est le groupe de Galois d'une extension galoisienne et finie $(N|K)$ de corps locaux, nous donnons une interprétation arithmétique du "signe" de notre invariant. Les démonstrations des résultats des paragraphes 2 et 3 sont données dans [CN-T]. Par contre cet article nous permet de démontrer, paragraphe 5, les résultats du paragraphe 4 qui étaient uniquement énoncés dans [CN-T].

Soit M un $\mathbb{R}[\Gamma]$-module. Pour tout entier $m \geq 0$ on sait définir la m-ième classe de Stiefel-Whitney de M, ([De]). C'est un élément de $H^m(\Gamma, \pm 1)$ qui ne dépend que du caractère θ de M. On note $SW(\theta)$ la seconde classe de Stiefel-Whitney de M. L'application $\theta \longrightarrow SW(\theta)$ se prolonge en un homomorphisme du groupe des $\mathbb{R}$-caractères virtuels de Γ, de degré 0 et de déterminant trivial, dans $H^2(\Gamma, \pm 1)$. On identifie ce groupe de caractères, via l'extension des scalaires de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, au groupe $\tilde{R}^o(\Gamma)$.

En fait l'invariant de Clifford équivariant $c(\theta)$ d'un élément θ de $\tilde{R}^o(\Gamma)$ est la projection de $SW(\theta)$ par l'homomorphisme Φ de $H^2(\Gamma, \pm 1)$ dans $H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ induit par le plongement naturel de $\{\pm 1\}$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, ([CN-T], proposition 1.6). Ainsi nos résultats fournissent une méthode de calcul de la projection via Φ de la seconde classe de Stiefel-Whitney d'un caractère orthogonal de Γ. En outre, dans le cas arithmétique, alors que Deligne dans [De] obtient

une interprétation arithmétique de la projection de $SW(\theta)$ sur le groupe de Brauer de K, nous obtenons une interprétation arithmétique de la projection de $SW(\theta)$ sur le multiplicateur de Schur de Γ.

2. - Calcul de l'invariant de Clifford équivariant

On adopte les notations suivantes :

Si Δ est un groupe fini on note $|\Delta|$ son ordre. Si Δ est un groupe abélien on note Δ_2 (resp. Δ^2) le noyau (resp. l'image) de l'homomorphisme $x \longrightarrow x^2$ de Δ.

Soit ρ une représentation de Γ dans $GL_n(\mathbb{C})$. L'application $\gamma \longrightarrow \det(\rho(\gamma))$ est un caractère abélien de Γ qui ne dépend que du caractère θ de ρ. On le note $\det\theta$. L'application $\theta \longrightarrow \det\theta$ se prolonge en un homomorphisme du groupe additif des caractères virtuels de Γ dans le groupe multiplicatif des caractères abéliens de Γ. Le caractère θ de Γ est dit de déterminant trivial si $\det\theta$ est le caractère trivial 1_Γ de Γ défini par

$$1_\Gamma(\gamma) = 1 \quad , \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad .$$

On suppose que les 2-sous-groupes de Sylow de Γ sont métacycliques. Ceci implique, grâce à un théorème de Beyl et Jones ([B-J]), que la 2-composante du multiplicateur de Schur de Γ est cyclique. Ainsi $H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})_2$ est un sous-groupe du groupe à deux éléments $\{\pm 1\}$.

On rappelle qu'un caractère de Γ est dit diédral (resp. biquadratique) s'il est obtenu par relèvement à Γ d'un caractère irréductible de degré 2 d'un quotient diédral (resp. égal à $\chi + \chi'$ où χ et χ' sont des éléments distincts et non triviaux de $\mathrm{Hom}(\Gamma, \pm 1)$).

La méthode développée dans [CN-T] consiste à se ramener au calcul de l'invariant d'un caractère diédral ou biquadratique d'un 2-groupe métacyclique. On montre alors ([CN-T], théorème 1.10) :

THÉORÈME 2.1. - Soit θ un caractère diédral ou biquadratique d'un 2-groupe métacyclique Γ. Alors on a

$$c(\theta) = (-1)^{|\mathrm{Ker}\,\theta \cap [\Gamma,\Gamma]|} .$$

Si θ est un caractère diédral ou biquadratique, alors $\theta - 1_\Gamma - \det\theta$ appartient à $\tilde{R}^o(\Gamma)$. On note θ' ce caractère.

COROLLAIRE 2.2. - Soit θ un caractère diédral ou biquadratique d'un 2-groupe métacyclique Γ. Alors on a

$$\Phi(SW(\theta')) = (-1)^{|\mathrm{Ker}\,\theta \cap [\Gamma,\Gamma]|} .$$

Remarques. - 1) Le rôle particulier joué par les groupes à 2-sous-groupes de Sylow métacycliques nous conduit à rapprocher ce résultat du théorème 9.1 de [K].

2) Les résultats de ce paragraphe sont en fait vrais, comme on le démontre dans [CN-T], pour des caractères orthogonaux définis sur un corps algébriquement clos quelconque de caractéristique 0.

3. - Le cas arithmétique

Soit p un nombre premier impair. On considère une extension galoisienne finie N d'un corps K, de groupe de Galois Γ, où K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Les 2-sous-groupes de Sylow de Γ sont alors métacycliques. Le signe de $c(\theta)$ donné par le théorème 1.2 possède dans ce cas une interprétation arithmétique. On démontre dans [CN-T], théorème 1.12, le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. - Soit θ un caractère diédral ou biquadratique du groupe de Galois d'une 2-extension galoisienne finie N de K, où K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Alors on a

$$c(\theta) = (-1)^{e(N|N^\theta)}$$

où N^θ est le corps des invariants de N par $\mathrm{Ker}\,\theta$ et $e(N|N^\theta)$ est l'indice de ramification de N sur N^θ.

Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K contenant N et soit Ω_K le groupe de Galois de $\overline{K}$ sur K. On identifie le groupe $H^2(\Omega_K, \pm 1)$ au sous-groupe des éléments du groupe de Brauer de K annulés par 2. Ce groupe s'identifie, via la théorie du corps de classe local, au groupe à deux éléments $\{\pm 1\}$. On note ψ l'homomorphisme d'inflation de $H^2(\Gamma, \pm 1)$ dans $H^2(\Omega_K, \pm 1)$. Dans [De], théorème 1.5, Deligne démontre le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2. - <u>Soit</u> θ' <u>un caractère orthogonal de degré</u> 0 <u>et de déterminant trivial du groupe de Galois d'une extension galoisienne finie de corps locaux. Alors on a</u> :

$$\psi(SW(\theta')) = W(\theta')$$

<u>où</u> $W(\theta')$ <u>est la constante locale de Langlands de</u> θ'.

En conservant les notations du paragraphe 2, on déduit du théorème 3.1 :

COROLLAIRE 3.3. - <u>Soit</u> θ <u>un caractère diédral ou biquadratique du groupe de Galois d'une</u> 2-<u>extension galoisienne finie</u> N <u>de</u> K <u>où</u> K <u>est une extension finie de</u> $\mathbb{Q}_p$. <u>Alors on a</u>

$$\Phi(SW(\theta')) = (-1)^{e(N|N^\theta)}.$$

<u>Remarque</u>. - Fröhlich, dans [F 3], définit l'invariant de Stiefel-Whitney d'un caractère orthogonal non nécessairement réel. Il est clair que le corollaire 3.3 se généralise à cette situation.

4. - Problèmes de plongement

On conserve les notations des paragraphes précédents. On suppose en outre que Γ est un 2-groupe et par souci de simplicité que $K = \mathbb{Q}_p$.

Soit L une extension galoisienne de $\mathbb{Q}_p$, quadratique sur N. Le groupe de Galois de L sur $\mathbb{Q}_p$ est une extension du groupe à deux éléments par Γ. Il définit donc un élément de $H^2(\Gamma, \pm 1)$. On sait, (voir par exemple [Ma] où [F2], tthéorème 3, (i)) que l'ensemble des éléments de $H^2(\Gamma, \pm 1)$ ainsi obtenus auquel on adjoint 1 est un sous-groupe de $H^2(\Gamma, \pm 1)$ égal au noyau de l'homomorphisme naturel ψ de $H^2(\Gamma, \pm 1)$ dans $H^2(\Omega_{\mathbb{Q}_p}, \pm 1)$ défini au paragraphe 3. On note $A(N)$ ce sous-groupe.

Soit θ un caractère orthogonal de Γ, de degré 0 et de déterminant trivial. Le problème de plongement posé par $SW(\theta)$ est résolu par le théorème 3.2. Plus précisément $SW(\theta)$ appartient à $A(N)$ si et seulement si $W(\theta) = 1$.

On s'intéresse dans ce paragraphe au problème de plongement associé à $c(\theta)$. On dit que $c(\theta)$ possède un relèvement galoisien s'il est l'image par Φ d'un élément de $A(N)$.

THÉORÈME 4.1. - Soit θ un caractère orthogonal de degré 0 et de déterminant trivial du groupe de Galois d'une 2-extension galoisienne finie de $\mathbb{Q}_p$. Alors :

a) Si $p \equiv 1$ mod. 2^{r+1} où 2^r est l'exposant de $\Gamma^{(ab)}$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $c(\theta)$ possède un relèvement galoisien

(ii) $c(\theta) = 1$

(iii) $W(\theta) = 1$.

b) Si $p \equiv 3$ mod. 4, $c(\theta)$ possède un relèvement galoisien.

THÉORÈME 4.2. - Soient Γ le groupe de Galois d'une extension diédrale de $\mathbb{Q}_p$ de degré 2^n, $n \geq 3$, et Δ le sous-groupe cyclique d'indice 2 de Γ. Soit θ le caractère de Γ induit du caractère $(\chi - 1_\Delta)$ de Δ où χ est un caractère fidèle de Δ. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $c(\theta)$ possède un relèvement galoisien diédral

(ii) $c(\theta)$ possède un relèvement galoisien quaternionien

(iii) $W(\theta) = 1$

(iv) $p \equiv -1$ mod. 2^n.

Remarque. - Ces résultats mettent en évidence un lien non surprenant compte tenu du théorème 3.2 de Deligne entre ces problèmes de plongement et le problème du signe des constantes de Langlands associées aux caractères orthogonaux.

5. - Démonstration des théorèmes 4.1 et 4.2

A - Préliminaires

On a la suite exacte de Γ-modules galoisiens

$$(5.1) \qquad \{1\} \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow N^* \xrightarrow{(2)} N^{*2} \longrightarrow \{1\}$$

où (2) est l'élévation au carré.

Puisque $H^1(\Gamma, N^*) = \{1\}$ on déduit de (5.1) la suite exacte

$$(5.2) \qquad \{1\} \longrightarrow H^1(\Gamma, N^{*2}) \longrightarrow H^2(\Gamma, \pm 1) \xrightarrow{f} H^2(\Gamma, N^*)_2 \quad .$$

On identifie $H^1(\Gamma, N^{*2})$ et son image dans $H^2(\Gamma, \pm 1)$.

On a l'homomorphisme composé

$$(5.3) \qquad H^2(\Gamma, N^*)_2 \xrightarrow{(i)} H^2(\Omega_{\mathbb{Q}_p}, N^*)_2 \xrightarrow{(ii)} H^2(\Omega_{\mathbb{Q}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_p^*)_2$$

où (i) est l'homomorphisme d'inflation et (ii) se déduit de l'injection canonique $N^* \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^*$.

D'autre part, on déduit de la suite exacte de $\Omega_{\mathbb{Q}_p}$-modules

$$\{1\} \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \mathbb{Q}_p^* \xrightarrow{(2)} \mathbb{Q}_p^* \longrightarrow \{1\}$$

un isomorphisme de groupe

$$(5.4) \qquad H^2(\Omega_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_p^*)_2 \xrightarrow{(iii)} H^2(\Omega_{\mathbb{Q}_p}, \pm 1) \quad .$$

On déduit de (5.3) et (5.4) un isomorphisme de $H^2(\Gamma, N^*)_2$ sur $H^2(\Omega_{\mathbb{Q}_p}, \pm 1)$. Il est immédiat que le composé de cet isomorphisme et de f est l'homomorphisme d'inflation ψ. On déduit alors de (5.2) la nouvelle suite exacte :

$$(5.5) \qquad \{1\} \longrightarrow H^1(\Gamma, N^{*2}) \longrightarrow H^2(\Gamma, \pm 1) \xrightarrow{\psi} H^2(\Omega_{\mathbb{Q}_p}, \pm 1) \quad .$$

On considère la suite exacte de Γ-modules, où Γ opère trivialement,

$$\{1\} \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p^* \xrightarrow{(2)} \overline{\mathbb{Q}}_p^* \longrightarrow \{1\} \quad .$$

On en déduit la nouvelle suite exacte

$$(5.6) \qquad \{1\} \longrightarrow H^1(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}_p^*)/H^1(\Gamma, \overline{\mathbb{Q}}_p^*)^2 \longrightarrow H^2(\Gamma, \pm 1) \xrightarrow{\Phi} H^2(\Gamma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})_2 \longrightarrow \{1\} .$$

B - Démonstration du théorème 4.1.a)

On suppose $p \equiv 1 \mod. 2^m$, $p \not\equiv 1 \mod. 2^{m+1}$. On désigne par ε une racine primitive 2^m-ième de 1 . C'est un élément de $\mathbb{Q}_p^*$.

Cas 1

On suppose que Γ ne possède pas de quotient diédral d'ordre $2n$, avec $n \geq 2$. On sait ([CN-T], corollaire 3.2) que tout élément θ de $\tilde{R}^o(\Gamma)$ est de la forme $\theta = \chi + \bar{\chi}$, où $\bar{\chi}$ désigne le caractère complexe conjugué de χ et $\chi(1) = 0$. On sait ([CN-T]) que $c(\theta)$ est alors égal à 1 . En outre on a l'égalité $W(\theta) = (\det \chi)(-1)$ ([M], proposition 4.1, corollaire). On en déduit l'égalité $W(\theta) = ((\det \chi)(\varepsilon))^{2^{m-1}}$. Puisque $m \geq r+1$, alors $W(\theta) = 1$. Les propriétés (i), (ii) et (iii) sont donc équivalentes dans ce cas.

Cas 2

On suppose que Γ possède un quotient diédral D_4 d'ordre 4 .

LEMME 5.7. - L'homomorphisme d'inflation

$$H^2(D_4, \pm 1) \longrightarrow H^2(\Omega_{\mathbb{Q}_p}, \pm 1)$$

est surjectif.

Démonstration. - On sait que l'unique extension diédrale de degré 4 de $\mathbb{Q}_p$ est le corps $M = \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}, \sqrt{\varepsilon})$. Puisque $H^2(D_4, \pm 1)$ est un groupe d'ordre 8 , il suffit de démontrer, compte tenu de (5.5), que le groupe $H^1(D_4, M^{*2})$ est d'ordre 4 . Le sous-groupe des racines de l'unité d'ordre une puissance de 2 , contenues dans M^* , est engendré par $\sqrt{\varepsilon}$.

Soit E (resp. F) le sous-module de M^{*2} engendré par p et ε (resp. les unités congrues à 1 modulo l'idéal de valuation et les racines de l'unité d'ordre impair). On a la décomposition en somme directe de D_4-modules

$$M^{*2} = E \oplus F \quad . \tag{5.8}$$

Puisque F est uniquement divisible par 2 on déduit de (5.8) un isomorphisme

$$H^1(D_4, M^{*2}) \simeq H^1(D_4, E) \quad . \tag{5.9}$$

Puisque E est contenu dans $\mathbb{Q}_p^*$, alors D_4 opère trivialement sur E . On en déduit l'égalité

$$(5.10) \qquad H^1(D_4, E) = \mathrm{Hom}(D_4, \pm 1) \ .$$

On déduit de (5.9) et (5.10) que $H^1(D_4, M^{*2})$ est un groupe d'ordre 4 . □

LEMME 5.11.- <u>On a l'égalité</u>

$$\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathrm{Ker}\,\psi \ .$$

<u>Démonstration</u>. -

On commence par vérifier l'inclusion

$$(5.12) \qquad \mathrm{Ker}\,\Phi \subset \mathrm{Ker}\,\psi \ .$$

En effet, puisque $\mathbb{Q}_p$ contient les racines 2^{r+1}-ièmes de 1 , tout homomorphisme de Γ dans $\bar{\mathbb{Q}}_p^*$ est à valeurs dans N^{*2} . On en déduit l'inclusion

$$H^1(\Gamma, \bar{\mathbb{Q}}^*) \,/\, H^1(\Gamma, \bar{\mathbb{Q}}_p^*)^2 \subset H^1(\Gamma, N^{*2})$$

dans $H^2(\Gamma, \pm 1)$ ce qui démontre (5.12).

On sait par le lemme 5.7 que ψ est surjective. Compte tenu de (5.5) on a l'égalité

$$(5.13) \qquad |H^2(\Gamma, \pm 1)| = 2\,|\mathrm{Ker}\,\psi| \ .$$

On déduit de (5.6) l'égalité

$$(5.14) \qquad |H^2(\Gamma, \pm 1)| = |\mathrm{Im}\,\Phi|\,|\mathrm{Ker}\,\Phi| \ .$$

Or on sait que $|\mathrm{Im}\,\Phi| \leq 2$ et compte tenu de (5.12) que $|\mathrm{Ker}\,\Phi| \leq |\mathrm{Ker}\,\psi|$. On en déduit que $|\mathrm{Ker}\,\Phi| = |\mathrm{Ker}\,\psi|$ et que $\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathrm{Ker}\,\psi$. □

Nous revenons à la démonstration du théorème 4.1.a). Le lemme 5.11 montre l'équivalence entre (i) et (ii). En outre, puisque $\Phi(SW(\theta)) = c(\theta)$ et $\psi(SW(\theta)) = W(\theta)$ le lemme 5.12 implique que (ii) et (iii) sont équivalents. □

C - Démonstration du théorème 4.1.b)

Il suffit de démontrer le théorème lorsqu'il existe un élément θ de $\widetilde{R}^{o}(\Gamma)$ tel que $c(\theta) = -1$. On déduit de [CN-T], (prop. 2.4 et cor. 5.2) que Γ possède nécessairement dans ce cas un quotient non cyclique d'ordre 4. Il est clair qu'il suffit alors de démontrer qu'il existe un élément de $\mathrm{Ker}\,\Phi$ dont l'image par ψ est égale à -1. En utilisant les propriétés de l'inflation on se ramène au cas où $\Gamma = D_4$. On a alors l'égalité $N = \mathbb{Q}_p(\sqrt{p}\,,\, i)$, où i est une racine primitive $4^{\text{ième}}$ de l'unité.

Soit χ l'élément de $H^1(D_4, \pm 1)$ défini par :

$$\chi(\sigma) = \frac{\sigma(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}\,, \qquad \forall \sigma \in D_4\,.$$

L'identification de $\{\pm 1\}$ avec le sous-groupe d'ordre 2 de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nous permet de considérer χ comme un élément de $H^1(D_4, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

On considère le cup produit

$$\{\pm 1\} \times H^2(D_4, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(D_4, \pm 1)$$

associé à l'application $\mathbb{Z}$ bilinéaire invariante par D_4

$$\{\pm 1\} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \{\pm 1\}$$

$$(\alpha\,, n) \longrightarrow \alpha^n\,.$$

Soit $\widetilde{\chi}$ l'image de χ dans $H^2(D_4, \pm 1)$. On déduit de [S] (chap. XI, annexe, lemme 1), l'égalité

$$\widetilde{\chi} = (-1) \cup \delta(\chi) \tag{5.15}$$

où δ est le cobord de $H^1(D_4, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ dans $H^2(D_4, \mathbb{Z})$ déduit de la suite exacte

$$\{1\} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \{1\}$$

où D_4 opère trivialement.

On déduit de [S] (chap. XIV) et de (5.15) l'égalité :

$$\psi(\widetilde{\chi}) = (-1\,, p)$$

où $(-1\,, p)$ est la classe de la $\mathbb{Q}_p$-algèbre de quaternions $\{i^2 = -1\,,\, j^2 = p\,,\, ij = -ji\}$. Puisque $p \equiv 3 \mod. 4$, alors $(-1\,, p) = -1$. Alors $\widetilde{\chi}$ est un élément de $\mathrm{Ker}\,\Phi$ tel que $\psi(\widetilde{\chi}) = -1$. $\square$

D - Démonstration du théorème 4.2

Puisque tout élément de $H^1(D_{2^n} \pm 1)$ provient par inflation d'un élément de $H^1(D_4, \pm 1)$ on vérifie qu'il n'existe pas de structure de groupe diédral ou quaternionien dans le sous-groupe $\operatorname{Ker} \Phi$ de $H^2(D_{2^n}, \pm 1)$.

On sait ([CN-T], proposition 4.4) que $c(\theta) = -1$. En outre on sait ([D], théorème III.13), que $(N/\mathbb{Q}_p)$ se plonge dans une extension diédrale ou quaternionienne de degré 2^{n+1} si et seulement si $p \equiv -1 \mod. 2^n$. Le groupe de Galois d'une telle extension définit dans $H^2(D_{2^n}, \pm 1)$ un relèvement galoisien de $c(\theta)$. Ceci montre que (i), (ii) et (iv) sont équivalents.

On démontre enfin que (iii) et (iv) sont équivalents.

On déduit de [F - Q] l'égalité

$$W(\theta) = \chi(i) \tag{5.16}$$

où i est une racine primitive $4^{\text{ième}}$ de 1.

On désigne par k le corps résiduel de $\mathbb{Q}_p(i)$ et par Δ le groupe $k^*/\mathbb{F}_p^*$. Ce groupe est cyclique d'ordre $p+1$. On déduit de la théorie du corps de classe locale que χ définit un caractère résiduel d'ordre 2^{n-1} de k^* dont la restriction à $\mathbb{F}_p^*$ est triviale, donc un caractère de Δ. On suppose $p \equiv -1 \mod. 2^m$, $p \not\equiv -1 \mod. 2^{m+1}$. Si φ désigne un générateur du sous-groupe des caractères de Δ d'ordre une puissance de 2, on a l'égalité :

$$\chi = \varphi^{2^{m-(n-1)}} . \tag{5.17}$$

Puisque i définit un élément d'ordre 2 de Δ, $\varphi(i) = -1$. On déduit de (5.16) et (5.17) l'égalité :

$$W(\theta) = (-1)^{2^{m-(n-1)}} . \tag{5.18}$$

Ceci démontre que (iii) et (iv) sont équivalents. □

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[B - J] F. R. BEYL and M. R. JONES, Addendum to "The Schur multiplicator of metacyclic groups", Proc. Amer. Math. Soc., 43 (1974), 251-252.

[CN - T] Ph. CASSOU-NOGUÈS et M. J. TAYLOR, Invariant de Clifford équivariant d'un caractère orthogonal, à paraître.

[D] P. DAMEY, Sur certaines 2-extensions galoisiennes non abéliennes d'un corps de caractéristique différente de 2, Thèse, Grenoble, 1971.

[De] P. DELIGNE, Les constantes locales de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale, Invent. Math., 35 (1976), 299-316.

[F 1] A. FRÖHLICH, Orthogonal and symplectic representations of groups, Proc. London Math. Soc., 24 (1972), 470-506.

[F 2] A. FRÖHLICH, The rational characterization of certain sets of relatively abelian extensions, Phil. Trans. Royal Soc., 251 (1959), 385-425.

[F 3] A. FRÖHLICH, Orthogonal representations of Galois groups, Stiefel-Whitney classes and Hasse-Witt invariants, à paraître.

[F - W] A. FRÖHLICH and C. T. C. WALL, Fondations of equivariant algebraic K-theory, Springer Lecture notes, 108 (1969), 12-28.

[F - Q] A. FRÖHLICH and J. QUEYRUT, On the functional equation of the Artin L-function for characters of real representations, Invent. Math., 20 (1973), 125-138.

[K] B. KAHN, Transfer and invariants for quadratic forms, à paraître.

[M] J. MARTINET, Character theory and Artin L-functions, Algebraic Number Fields, Durham Proceedings, Acad. Press London 1977, 1-87.

[Ma] R. MASSY, Solutions explicites de problèmes de plongement, J. of Number Theory, à paraître.

[S] J.-P. SERRE, Corps locaux, Hermann, Paris, 1968.

(texte reçu le 11 octobre 1984)

-:-:-:-

Philippe CASSOU-NOGUÈS
U.E.R. de Math. et Informatique
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
F - 33405 TALENCE CEDEX

Martin J. TAYLOR
Trinity College
G. B. - CB 2 1TQ CAMBRIDGE