Werk

Titel: Transcendance et fonctions elliptiques

Autor: REYSSAT, Eric

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320141322_0010|log9

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1980-1981 - exposé n° 4

14 novembre 1980

TRANSCENDANCE ET FONCTIONS ELLIPTIQUES

par

Eric REYSSAT

-:-:-:-

1. - Introduction

Trois grandes méthodes de transcendance sont actuellement en pleine expansion. L'une, initiée par Mahler et reprise récemment par exemple dans les travaux de van der Poorten et Loxton, étudie certaines séries vérifiant des équations fonctionnelles. Une autre consiste à étudier des fonctions vérifiant des systèmes d'équations différentielles et des conditions arithmétiques sur les coefficients de Taylor. Cette méthode a été développée par Siegel et considérablement renforcée par les travaux de Shidlovski ; elle permet de montrer la transcendance (et l'indépendance algébrique) de valeurs de fonctions hypergéométriques comme la fonction exponentielle et les fonctions de Bessel. Enfin la méthode de Gel'fond et Schneider, étendue par Baker, permet de travailler sur des fonctions vérifiant un théorème d'addition algébrique et des équations différentielles - ces deux propriétés n'étant pas toujours simultanément indispensables. Elle permet d'étudier par exemple les propriétés arithmétiques de fonctions exponentielles, elliptiques ou abéliennes.

Nous nous limiterons dans cet exposé à étudier quelques résultats sur les fonctions elliptiques obtenus par cette dernière méthode.

Nous donnons pour commencer un petit aperçu des résultats sur les fonctions elliptiques que la méthode de Gel'fond-Schneider et ses prolongements ont permis de démontrer récemment.

a) Du point de vue strictement de la transcendance, un progrès a été marqué par la découverte par Waldschmidt de nouveaux nombres transcendants, liés à la fonction σ de Weierstrass (cf. théorème 2).

b) Une généralisation de la notion de transcendance est celle d'indépendance linéaire sur le corps $\bar{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques. Cette voie a également connu de grands progrès récents. Citons le résultat de Laurent [L] sur la transcendance des périodes non nulles de formes différentielles elliptiques définies sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et à résidus rationnels ; la démonstration utilise la méthode de Baker. Un autre résultat très important a été démontré par Bertrand et Masser [B-M] : si $u_1, \ldots, u_n$ sont des points algébriques d'une fonction $\wp$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, et si $\wp$ n'a pas de multiplication complexe, alors les nombres $1, u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendants sur $\bar{\mathbb{Q}}$ (le cas où $\wp$ admet une multiplication complexe a été traité par Masser en 1974).

c) Le point de vue quantitatif de la transcendance est celui des mesures de transcendance. L'étude systématique des nombres transcendants fournis par les théorèmes de Schneider (cf. §.3), et celui de Waldschmidt cité plus haut, nous a permis d'obtenir de nombreuses mesures, parfois très précises et proches des meilleures possibles (voir au §.4, les exemples des nombres $\frac{\pi}{\omega}$ et $\wp(1)$).

d) Après la transcendance vient l'indépendance algébrique de plusieurs nombres, domaine qui a également connu des développements récents. Citons par exemple les travaux de Wüstholz [Wü], ceux de Choodnovsky sur un analogue elliptique partiel du théorème de Lindemann-Weierstrass (cf [3]), et les résultats liés à la fonction σ de Weierstrass que nous avons récemment obtenus et que nous discutons au §.5 (cf. [R]).

e) Enfin les mesures d'indépendance algébrique, bien qu'encore rares dans le domaine des fonctions elliptiques, existent maintenant sous des formes très précises grâce aux travaux de Choodnovsky (cf. [C 1] et [C 2]).

Il ne peut être question d'exposer ici tous ces résultats, et nous renvoyons pour cela à la bibliographie. On se limitera ici, après un bref rappel sur les fonctions elliptiques (§ . 2), à exposer les idées de la démonstration des théorèmes de transcendance de Schneider (§ . 3), afin de découvrir les problèmes qui se posent dans les démonstrations de mesures de transcendance (§ . 4) et d'indépendance algébrique (§ . 5).

2. - Rappels sur les fonctions elliptiques

Soit L un réseau de $\mathbb{C}$. Une fonction f est dite elliptique par rapport à L si elle est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet tout élément de L pour période. Une fonction θ est dite fonction thêta par rapport à L si elle est entière et "pas trop loin d'être périodique" :

$$\theta(z+\omega) = e^{L_\omega(z)}\,\theta(z) \qquad \omega \in L ,$$

où L_ω est une fonction affine de z . Remarquons qu'une telle fonction définit une fonction elliptique f par la formule

$$f(z) = \frac{d}{dz}\,\frac{\theta'}{\theta}(z) = \frac{d^2}{dz^2}\log\theta(z) \quad .$$

Weierstrass a construit un exemple fonction thêta non triviale (i. e. définissant une fonction elliptique non constante) ; il s'agit de la fonction σ , canoniquement associé au réseau L , et définie par

$$\sigma(z) = z \prod_{L\setminus\{0\}} (1-\frac{z}{\omega})\exp(\frac{z}{\omega}+\frac{z^2}{2\omega^2}) \quad .$$

On définit les fonctions ζ et $\wp$ de Weierstrass par les formules :

$$\zeta = \sigma'/\sigma \quad \text{et} \quad \wp = -\zeta' .$$

La fonction $\wp$ est alors elliptique, la fonction ζ est quasi-périodique :

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z) + \eta$$

où η est une constante dépendant de ω . La fonction σ vérifie la relation

$$\sigma(z+\omega) = \pm\, e^{\eta(z+\frac{\omega}{2})}\, \sigma(z) \ .$$

Notons enfin dès maintenant une propriété fondamentale de la fonction $\wp$, à savoir son équation différentielle qu'on peut écrire sous la forme :

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3 \ ,$$

où g_2 et g_3 sont des constantes dépendant uniquement du réseau L .

3. - Quelques résultats de transcendance

L'équation différentielle de la fonction $\wp$ servira dans les démonstrations de transcendance à exprimer toutes les dérivées de $\wp$ en fonction de $\wp$ et $\wp'$ uniquement. Pour avoir des formules algébriques, on est amené à supposer que les invariants g_2 et g_3 sont des nombres algébriques ; c'est ce que nous ferons dans toute la suite.

Le travail de transcendance le plus important sur les fonctions elliptiques a été publié par Schneider en 1937. Trois théorèmes sur les fonctions elliptiques y sont démontrés ; voici l'un d'eux :

THÉORÈME 1. - Soient a , b deux nombres algébriques non tous deux nuls, et u un nombre complexe non pôle de $\wp$. Alors l'un des deux nombres $au + b\zeta(u)$ et $\wp(u)$ est transcendant.

Les deux autres théorèmes concernent le cas où la fonction $az + b\,\zeta(z)$ est remplacée par une fonction exponentielle ou une autre fonction elliptique.

On déduit du théorème 1 le fait que si ω est une période non nulle de $\wp$ et η la quasi-période de ζ associée, alors les trois nombres 1 , ω , η sont linéairement indépendants sur $\bar{\mathbb{Q}}$. En particulier ω , η et ω/η sont transcendants.

Schéma de démonstration du théorème 1

On se limitera au cas où $a=1$, $b=0$. On suppose donc par l'absurde que u et $\wp(u)$ sont algébriques. On commence par construire une fonction auxiliaire $F(z)=P(z,\wp(z))$, où P est un polynôme non nul à coefficients $P_{i,j}$ entiers, de sorte que F ait de nombreux zéros : $F^{(k)}(mu)=0$ pour $k<K$, $m<M$. Cette construction est simplement la résolution d'un système linéaire :

$$\sum_{i,j} P_{i,j} S_{i,j,m,k} = 0 \ .$$

Les coefficients $S_{i,j,m,k}$ sont les dérivées $k^{\text{ième}}$ au point mu de monômes $z^i \wp(z)^j$. On utilise alors l'équation différentielle de $\wp$, ainsi que son théorème de multiplication :

$$\wp(mu) = R_m(\wp(u))$$

où R_m est une fraction rationnelle.

Ces propriétés montrent que $S_{i,j,m,k}$ est une fraction rationnelle $S_{i,j,m,k}(u, \wp(u), \wp'(u), g_2, g_3)$. C'est en particulier un nombre algébrique. On se ramène au cas où $S_{i,j,m,k} \in \mathbb{Z}$ par conjugaison et multiplication par un dénominateur (que l'on doit estimer en fonction de K et M). On en déduit l'existence d'une solution $(P_{i,j})$ "pas trop grande".

Une fois cette construction algébrique achevée, on utilise les propriétés analytiques de la fonction F . Elle n'est pas nulle puisque les fonctions z et $\wp(z)$ sont algébriquement indépendantes. On peut donc trouver des entiers k_o et m_o tels que $\gamma = F^{(k_o)}(m_o u) \neq 0$. On choisit ces nombres minimaux en ce sens que $k_o \leq K_o$, $m_o \leq M_o$ et $F^{(k)}(mu)=0$ pour $k<K_o$ et $m<M_o$. Le lemme de Schwarz (essentiellement la formule de Jensen) dit qu'une fonction analytique ayant beaucoup de zéros doit être très petite sur un grand disque, ainsi que ses dérivées. On en déduit que le nombre γ est très petit, par exemple :

$$0 \neq |\gamma| < 2^{-K_o M_o} \ .$$

Pour obtenir la contradiction cherchée, il ne reste plus qu'à utiliser les propriétés algébriques de γ : en le multipliant par ses conjugués puis par un dénominateur (qu'il faut estimer en fonction de K_o et M_o), on obtient un entier rationnel non nul de valeur absolue <1 , ce qui prouve le théorème.

Les propriétés de $\wp$ utilisées dans cette démonstration sont essentiellement les suivantes : le fait que z et $\wp(z)$ sont algébriquement indépendantes, l'équation différentielle et le théorème de multiplication, et la croissance de $\wp$ (utilisée dans l'application de la formule de Jensen). L'étude de ces propriétés a permis à Schneider, puis à Lang d'établir un théorème général de transcendance, contenant en particulier les trois résultats de Schneider sur les fonctions elliptiques. Le problème se pose de savoir si les trois théorèmes de Schneider sont les seules conséquences concernant les fonctions elliptiques du théorème de Schneider-Lang. L'emploi de la fonction σ est par exemple exclu puisque (à cause de la forme de ses dérivées) on ne pourrait que montrer la transcendance de l'un des nombres $\sigma(u)$, $\zeta(u)$, $\wp(u)$, ce qui est inclus dans le théorème 1. Mais Waldschmidt a pu appliquer le théorème de Schneider-Lang à de nouvelles fonctions, exhibées par Serre en lien avec l'étude de la paramétrisation d'extensions de courbes elliptiques. Ces fonctions dépendent de deux paramètres β et u (où $u \notin L$) et sont définies par la formule

$$f_{\beta,u}(z) = \frac{\sigma(z-u)}{\sigma(z)\,\sigma(u)}\, e^{(\zeta(u)+\beta)z}.$$

Cette fonction vérifie l'équation différentielle :

$$f'(z) = f(z)\left\{\beta + \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(z)+\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right\}$$

dans laquelle la fonction ζ n'intervient plus. Elle vérifie également un théorème d'addition (donc de multiplication).

L'application du théorème de Schneider-Lang à cette fonction a ainsi permis à Waldschmidt de montrer le résultat suivant (cf. [Wa]) :

THÉORÈME 2. - Si $\beta, u, v \in \mathbb{C}$ sont tels que $\beta, \wp(u), \wp(v)$ soient algébriques, u sans torsion (i.e. $u \notin \mathbb{Q}.L$) et $v-u$ non pôle de $\wp$, alors le nombre $f_{\beta,u}(v)$ est transcendant. En particulier, $\sigma(u)\,e^{-\frac{1}{2}u\zeta(u)}$ est transcendant.

La fonction $f_{\beta,u}$ est multiplicativement quasi-périodique :

$$f_{\beta,u}(z+\omega) = e^{\omega\zeta(u)-\eta u+\beta\omega}\, f_{\beta,u}(z) \quad \text{pour } \omega \in L.$$

De même que le théorème 1 entraîne la transcendance de η , le théorème 2 permet de montrer la transcendance du nombre $e^{\omega\,\zeta(u)-\eta u+\beta\omega}$.

4. - Mesures de transcendance

Le problème est ici de rendre quantitatifs les résultats de transcendance. Ainsi, si $\wp(u)$ est algébrique et que P est un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X]$, le théorème 1 dit que $P(u)$ n'est pas nul ; on cherche alors à minorer le nombre $|P(u)|$. Les minorations cherchées dépendront soit du degré d et de la hauteur H (= maximum des valeurs absolues des coefficients) du polynôme P , soit simplement de sa taille $t(P) = d + \log H$, ce qui est évidemment moins précis mais souvent suffisant pour les applications. On dira ainsi qu'un nombre complexe θ a un type de transcendance $\leq \tau$ (réel ≥ 1) si pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$, on a $|P(\theta)| > c^{-t(P)^{\tau}}$ où c ne dépend que de θ et τ . On peut enfin remarquer qu'il est équivalent de minorer les nombres $|P(\theta)|$ ou de minorer les nombres $|\theta-\alpha|$ lorsque α est algébrique (la minoration dépendant du degré et de la hauteur -ou de la taille- de α , c'est-à-dire de son polynôme minimal) ; les minorations de $|P(\theta)|$ et de $|\theta-\alpha|$ sont d'ailleurs essentiellement les mêmes.

Quelles minorations peut-on attendre ? On déduit facilement du principe des tiroirs que si θ est transcendant on ne peut espérer mieux que des minorations du type

$$|P(\theta)| > H^{-c\,d} \quad \text{ou} \quad |P(\theta)| > c^{-t(P)^2}$$

où c ne dépend que de θ ; il existe en effet une infinité de polynômes P vérifiant les inégalités inverses. En particulier, un nombre transcendant ne peut avoir un type de transcendance < 2 . On peut montrer réciproquement que presque tout nombre complexe (pour la mesure de Lebesgue) a un type de transcendance ≤ 2 et donc égal à 2 . Mais on ne sait exhiber aucun nombre concret ayant cette propriété !

La meilleure mesure de transcendance connue concerne le nombre π . On peut l'écrire :

$$|\pi-\alpha| > c^{-d\,(\log H + d \log d)\log(d+1)} .$$

En particulier, la minoration est la meilleure possible en H lorsque d est fixé (c'est de la forme H^{-c}), et π a un type de transcendance inférieur à $2+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Les premières mesures de transcendance de nombres liés aux fonctions elliptiques ont été démontrées par Fel'dman en 1951. Elles concernaient les périodes et les points algébriques de $\wp$ (i.e. les nombres u tels que $\wp(u) \in \bar{\mathbb{Q}}$). Par exemple

$$|\omega - \alpha| > c^{-d^4 (d(\log d)^5 + \log H (\log\log H)^4)} \quad \text{pour } H \geq 16 .$$

Contrairement à la mesure précédente, ce n'est pas de la forme H^{-c} lorsque le degré est fixé, et donne $5+\varepsilon$ comme borne pour le type de transcendance.

D'autres mesures de transcendance ont été démontrées encore par Fel'dman (ne donnant pas toujours un type de transcendance fini), puis par Masser. Nous avons ensuite entrepris une étude systématique des nombres dont la transcendance se déduit des théorèmes de Schneider, et plus récemment du théorème 2 de Waldschmidt. Ces nombres ont en particulier un type de transcendance fini (≤ 6). Deux d'entre eux sont particulièrement intéressants : d'abord le nombre π/ω où ω est une période non nulle de $\wp$; il admet pour mesure

$$\left| \frac{\pi}{\omega} - \alpha \right| > c^{-(\log H + d \log d)^2} ;$$

le résultat est assez loin du meilleur possible en H lorsque le degré est fixé. Par contre on en déduit que $\frac{\pi}{\omega}$ a un type de transcendance $\leq 2+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. C'est le seul nombre autre que π pour lequel on connaisse un type de transcendance < 3 . Enfin, le nombre $\wp(1)$ admet pour mesure

$$|\wp(1) - \alpha| > c^{-d^3 (d + \log H)} ;$$

cette minoration est de la forme H^{-c} lorsque d est fixé. Mais elle ne donne que $\tau \leq 4$ comme majoration du type de transcendance.

Méthode de démonstration de mesures de transcendance

Supposons par exemple que $\wp(u)$ est algébrique, et cherchons à montrer une mesure de transcendance pour u. Soit donc α un nombre algébrique, et supposons par l'absurde que

$$|u-\alpha| < \varepsilon = \varepsilon(d,H)$$

où ε est une fonction très petite du degré et de la hauteur de α.
On reprend essentiellement la démonstration de transcendance esquissée au §. 3 : on construit une fonction $F(z) = P(z, \wp(z))$ avec $0 \neq P \in \mathbb{Z}[X,Y]$ de sorte que pour $k<K$, $m<K$, le nombre

$$F^{(k)}(mu) = \Sigma\ P_{i,j}\, S_{i,j,m,k}(u, \wp(u), \wp'(u), g_2, g_3)$$

soit très petit (on ne peut plus demander qu'il soit nul puisque les coefficients du système ne sont plus supposés algébriques). Pour cela, on résout le système

$$\Sigma\ P_{i,j}\, S_{i,j,m,k}(\alpha, \wp(u), \wp'(u), g_2, g_3) = 0 \qquad k<K,\ m<M$$

dont les coefficients sont cette fois algébriques, en procédant comme au §. 3.
Ainsi $|F^{(k)}(mu)| < \varepsilon$ à un terme d'erreur près. Les propriétés analytiques de F permettent de trouver comme au §. 3 des entiers k_o et m_o tels que

$$0 \neq |\Sigma\ P_{i,j}\, S_{i,j,m_o,k_o}(\alpha, \wp(u), \wp'(u), g_2, g_3)| < \sqrt{\varepsilon}$$

à un terme d'erreur près ; on utilise pour cela le fait que ce nombre est proche de $|F^{(k_o)}(m_o u)|$. On a ainsi trouvé un nombre algébrique non nul et très petit. L'argument donné au §. 3. permet bien d'en déduire une contradiction à condition que les conjugués et le dénominateur de ce nombre ne soient pas trops grands devant $1/\sqrt{\varepsilon}$. Or, les majorations que l'on peut obtenir pour ces conjugués dépendent de k_o et m_o, alors que $\varepsilon = \varepsilon(d,H)$ n'en dépend pas (contrairement au cas de la démonstration de transcendance). Il est donc nécessaire de majorer k_o et m_o en fonction des paramètres K et M (qui eux dépendent du ε), ce qui revient à majorer le nombre de zéros d'une fonction de la forme $P(z, \wp(z))$ en fonction du degré du polynôme P. Plusieurs méthodes permettent de donner de telles majorations (appelées "lemmes de zéros").

Des lemmes de zéros adaptés à chaque cas ont été démontrés pour obtenir les mesures de transcendance citées plus haut. Il existe maintenant des lemmes de zéros plus généraux (dus à Brownawell et Masser) permettant de démontrer un analogue quantitatif du théorème de Schneider-Lang. D'autres formes de lemmes de zéros très généraux sont actuellement démontrées par Masser et Wüstholz, et ont une importance capitale en théorie des nombres transcendants.

Nous retrouverons au paragraphe suivant l'utilité des lemmes de zéros.

5. - Indépendance algébrique

Les premiers résultats d'indépendance algébrique en lien avec les fonctions elliptiques sont dus à Choodnovsky, qui a démontré l'indépendance algbérique des deux nombres $\frac{\omega}{\pi}$ et $\frac{\omega}{\eta}$ où ω est une période non nulle de $\wp$, et η la quasi-période de ζ associée. On en déduit dans un cas particulier que les deux nombres π et $\Gamma(1/4)$ sont algébriquement indépendants.

L'idée des démonstrations d'indépendance algébrique est la suivante : on cherche à démontrer l'indépendance de deux nombres a et b (par exemple $\frac{\omega}{\pi}$ et $\frac{\omega}{\eta}$). On utilise des fonctions f_1 et f_2 (éventuellement $f_3, \ldots$) qui prennent en des points x_m ainsi que leurs dérivées des valeurs dans une extension algébrique finie fixe $\mathcal{K}$ de $\mathbb{Q}(a,b)$ (par exemple $f_1(z) = \wp(z)$, $f_2(z) = \zeta(z) - \frac{\eta}{\omega} z$, $x_m = (2m+1)\frac{\omega}{2}$). On suppose par l'absurde que $\mathbb{Q}(a,b)$ (et donc $\mathcal{K}$) a un degré de transcendance < 2, ce qui permet d'écrire $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(x,y)$ où y est algébrique sur $\mathbb{Q}(x)$. Comme au §. 3, on commence par construire une fonction $F(z) = P(f_1(z), f_2(z))$, où P est cette fois un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}[x]$, de sorte que F ait beaucoup de zéros : $F^{(k)}(x_m) = 0$ pour $k < K$ et $m < M$. On en déduit comme au §. 3 des entiers k_o et m_o tels que $|F^{(k_o)}(x_{m_o})|$ soit non nul et très petit. En prenant la norme de cet élément sur $\mathbb{Q}(x)$ puis en multipliant par un dénominateur, on en déduit l'existence d'un polynôme Q dans $\mathbb{Z}[X]$ tel que $Q(x)$ soit non nul et très petit, par exemple

$$(1) \qquad 0 \neq |Q(x)| < e^{-t(Q)\varkappa}$$

où $t(Q)$ est la taille du polynôme Q, et $\varkappa$ un nombre réel (en pratique on a souvent $2 \leq \varkappa \leq 4$). Dans le cas d'une démonstration de transcendance, on a $x = 1$

et donc $Q(x) \in \mathbb{Z}$ ce qui fournit la contradiction. Dans le problème qui nous occupe, si x est algébrique, la norme de $Q(x)$ sur $\mathbb{Q}$ nous fournit encore un entier non nul et de valeur absolue <1, d'où une contradiction. Mais en général, x est un nombre transcendant. Il y a alors deux méthodes permettant parfois d'achever la démonstration :

a) Si on sait que x a un type de transcendance $< \varkappa$ (cf. §.4), l'inégalité (1) nous fournit aussitôt une contradiction. C'est par exemple le cas si $\varkappa = 2,5$ et que $x = \frac{\omega}{\pi}$ d'après le §.4.

b) Si on ne connaît rien sur x, la seule inégalité (1) ne peut fournir de contradiction ; on montre en effet facilement que pour toute fonction φ, on peut construire un nombre transcendant x vérifiant $0 \neq |Q(x)| < e^{-\varphi(t(Q))}$ pour une infinité de polynômes Q.

Cependant, Gel'fond a montré que de tels polynômes Q sont assez rares (i.e. leur taille doit croître vite). De manière précise, on peut montrer que si x est nombre complexe transcendant, il n'existe pas de suite infinie $(Q_N)_{N > N_o}$ de polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ vérifiant

$$(2) \qquad t(Q_N) \leq N \quad \text{et} \quad \log |Q_N(x)| < -4N^2 .$$

Pour obtenir une contradiction, il suffit donc de reprendre, pour chaque entier N assez grand, la construction d'une fonction auxiliaire $F_N(z)$ qui permet de construire comme plus haut un polynôme Q_N vérifiant (1). Pour en déduire que Q_N vérifie (2), il faut savoir majorer sa taille en fonction de N, ce qui revient encore une fois à majorer les entiers k_o et m_o en fonction de M et K : on utilise ici aussi un "lemme de zéros" (cf. §.4).

L'intérêt de ce critère de Gel'fond est qu'il suffit d'obtenir une majoration du type (1) avec n'importe quel $\varkappa > 2$, alors qu'on sait rarement majorer le type de transcendance de x par un nombre proche de 2 (et parfois on ne sait pas si ce type est fini). L'inconvénient est qu'il demande un bon lemme de zéros ; de plus, il ne se généralise pas simplement au cas de plusieurs nombres, contrairement à la méthode a) : ainsi pour prouver que trois nombres sont algébriquement indépendants, on construit par l'absurde un polynôme Q tel que

$0 \neq |Q(x,y)| < e^{-t(Q)^{\varkappa}}$ où cette fois x et y sont deux nombres algébriquement indépendants. Si on sait par ailleurs que le couple (x,y) a un type d'indépendance algébrique (défini comme le type de transcendance) strictement inférieur à $\varkappa$, on obtient ainsi une contradiction.

Nous donnons maintenant deux exemples d'énoncés d'indépendance algébrique que nous avons récemment obtenus par ces méthodes. Les démonstrations utilisent une fonction de la forme $f_{\beta,u}$, où β est choisi de sorte que $f_{\beta,u}$ admette une période ω dans le réseau L. Il est en effet très intéressant dans les démonstrations d'indépendance algébrique de travailler avec des fonctions $f_1, f_2, \ldots$ qui ont une période commune, car les zéros que l'on construit pour la fonction $F = P(f_1, f_2, \ldots)$ en fourniront une quantité d'autres par périodicité. C'est pourquoi, pour $\omega \in L \setminus \{0\}$, on définit la fonction

$$g_{u,\omega}(z) = f_{\beta,u}(z) \quad \text{où} \quad \beta = u\frac{\eta}{\omega} - \zeta(u) .$$

En utilisant les fonctions $\wp(z)$ et $g_{u,\omega}(z)$, et le critère de Gel'fond, on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 3. - Soient u, v deux nombres complexes sans torsion (i.e. $u, v \notin \mathbb{Q}.L$), distincts modulo L, et tels que $\wp(u)$ et $\wp(v)$ soient algébriques. Alors deux des trois nombres

$$\zeta(u) - \frac{\eta}{\omega}u , \quad e^{i\pi u/\omega} , \quad g_{u,\omega}(v)$$

sont algébriquement indépendants.

On déduit en particulier le corollaire suivant d'une variante de ce théorème :

COROLLAIRE. - Soit $\wp$ la fonction de Weierstrass vérifiant l'équation différentielle $\wp'^2(z) = 4(\wp^3(z) - \wp(z))$. Si l'on pose $t = \Gamma(1/4)^2/2\sqrt{\pi}$, alors les deux nombres

$$e^{i\pi\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \wp(t) + i(\zeta(t) - \frac{2\pi}{t})$$

sont algébriquement indépendants.

Les deux fonctions $\wp(z)$ et $g_{u,\omega}(z)$ utilisées plus haut admettent ω pour période. On peut leur adjoindre les deux fonctions $e^{2i\pi z/\omega}$ et $\zeta(z) - \frac{\eta}{\omega}z$ qui ont la même propriété. En utilisant un résultat de Choodnovsky disant que le

couple $(\frac{\omega}{\pi}, \frac{\omega}{\eta})$ a un type d'indépendance algébrique $\leq 3+\varepsilon$, on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 4. - Sous les hypothèses du théorème 3, notons $\tau = \omega'/\omega$ où ω' est une période de $\wp$ linéairement indépendante de ω. Alors trois au moins des six nombres

$$\frac{\omega}{\pi}\ ,\ \frac{\omega}{\eta}\ ,\ e^{i\pi\tau}\ ,\ e^{i\pi u/\omega}\ ,\ \zeta(u) - \frac{\eta}{\omega}\,u\ ,\ g_{u,\omega}(v)$$

sont algébriquement indépendants.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[B-M] D. BERTRAND and D. MASSER, Linear forms in elliptic integrals, Inventiones math. 58 (1980), 283-288.

[C1] G. V. CHOODNOVSKY, Algebraic independence of values of exponential and elliptic functions, Proc. I. C. M., Helsinki (1978)

[C2] G. V. CHOODNOVSKY, Algebraic grounds for the proof of algebraic independence, Part I : elementary algebra ; Pub. Math. Univ. P. et M. Curie (Paris VI), n° 25 (1979).

[C3] G. V. CHOODNOVSKY, Algebraic independence of the values of elliptic function at algebraic points, Inventiones Math. 61 (1980), 267-290.

[L] M. LAURENT, Transcendance de périodes d'intégrales elliptiques, J. für die reine und angew. Math. 316 (1980), 122-139.

[R] E. REYSSAT, Propriétés d'indépendance algébrique de nombres liés aux fonctions de Weierstrass, Acta Arith. (à paraître).

[Wa] M. WALDSCHMIDT, Nombres transcendants et fonctions sigma de Weierstrass, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 1 (1979), 111-114.

[Wü] G. WÜSTHOLZ, Algebraische Unabhängigkeit von Werten von Funktionen, die gewissen Differentialgleichungen genügen, J. für die reine und angew. Math. 127 (1980), 102-119.

(texte reçu le 17 février 1981)

-:-:-:-

Eric REYSSAT
Université P. et M. Curie (Paris VI)
Mathématiques, Tour 45-46
4, place Jussieu
F 75230 PARIS CEDEX 05