SÉRIES DE DIRICHLET

par

Pierrette CASSOU-NOGUÈS

-:-:-:-

La fonction zêta de Riemann est définie pour $Re(s) > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} .$$

Cette série se prolonge à tout le plan complexe, en une fonction méromorphe ayant un seul pôle pour $s = 1$ et pour tout entier $k > 0$

$$\zeta(1-k) = -\frac{b_k}{k}$$

où b_k est le k-ième nombre de Bernoulli. Donc, pour tout entier $k > 0$, $\zeta(1-k) \in \mathbb{Q}$.

Soit K un corps de nombres quelconque et $\zeta_K(.)$ sa fonction zêta de Dedekind. Shintani a montré que l'on pouvait écrire $\zeta_K(.)$ comme une somme finie de séries de la forme

$$\sum_{m \in \mathbb{N}^r} \prod_{i=1}^{n} L_i(m)^{-s}$$

$$L_i(X) = v_{1i} X_1 + \ldots + v_{ri} X_r + a_i .$$

Il a montré [10] que ces séries se prolongeaient à tout le plan complexe en des fonctions méromorphes dont tous les pôles se trouvent sur la droite réelle et qui prennent des valeurs rationnelles sur les entiers négatifs ou nuls. Ceci lui permet de retrouver le fait que $\zeta_K(1-k) \in \mathbb{Q}$ pour tout entier $k>0$ (Siegel [9], Klingen [7]).

Soit maintenant $P \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_r]$ tel que $\mathrm{Re}(P(t_1,\dots,t_r))>0$ pour tout $(t_1,\dots,t_r) \in \mathbb{R}_+^r (t_1,\dots,t_r) \neq (0,\dots,0)$. Soit $Q \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_r]$; considérons

$$Z(P,Q)(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}^{*r}}{}' \, Q(n)\, P(n)^{-s}$$

Il existe $\sigma_o > 0$ tel que cette série soit absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s)>\sigma_o$ et Mellin [8] a montré qu'une telle série se prolonge à tout le plan complexe en une fonction méromorphe dont tous les pôles sont sur la droite réelle. Deux questions se posent alors

a) Peut-on calculer les valeurs aux entiers négatifs ?

b) Lorsque l'on peut les calculer, ces valeurs sont-elles dans le corps engendré sur $\mathbb{Q}$ par les coefficients de P et Q ?

On peut calculer les valeurs aux entiers négatifs de $Z(P,Q)(.)$ lorsque P satisfait la condition suivante que nous noterons "condition $*$". Ecrivons :

$$P(X_1,\dots,X_r) = P_\alpha(X_1,\dots,X_r) + P_{\alpha-1}(X_1,\dots,X_r) + \dots + P_o(X_1,\dots,X_r)$$

où $P_i(X_1,\dots,X_r)$ est un polynôme homogène de degré i.
Alors $\mathrm{Re}(P_\alpha(t_1,\dots,t_r)) > 0$ pour tout $(t_1,\dots,t_r) \in \mathbb{R}_+^r$ $(t_1,\dots,t_r) \neq (0,\dots,0)$.

On constate alors que les valeurs aux entiers négatifs n'appartiennent pas toujours au corps engendré par les coefficients du polynôme.

Exemple :

$$P(X_1,X_2) = X_1^4 + X_2^4 + X_1 X_2$$

$$Z(P,1)(0) = \frac{\pi}{8} .$$

Le but de cet article est de lier la nature de ces valeurs à la géométrie de certaines hypersurfaces définies à partir de P.

Dans toute la suite, nous fixons P satisfaisant la condition $*$. Nous supposons en outre P homogène. On note K le corps engendré sur $\mathbb{Q}$ par les coefficients de P et les racines α-ièmes de l'unité. On étudie pour tout polynôme $Q \in K[X_1, \dots, X_r]$

$$Z(P, Q)(.) .$$

Cette série se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf aux points $s = k/\alpha$ où $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq \deg Q + r$ et $-s \notin \mathbb{N}$, où elle peut avoir des pôles simples.

On convient de noter

$$Z(P, Q)\left(\frac{k}{\alpha}\right)$$

pour désigner soit le résidu de $Z(P, Q)(.)$ si cette fonction a effectivement un pôle pour $s = \frac{k}{\alpha}$, soit la valeur au point $s = \frac{k}{\alpha}$ lorsque $-s \in \mathbb{N}$.

On définit $\mathcal{E}$ le K-espace vectoriel engendré par les $Z(P, Q)(k)$ lorsque Q parcourt $K[X_1, \dots, X_r]$ et lorsque $k \in \mathbb{Z}$, $k \leq \frac{\deg Q + r}{\alpha}$ (on trouve donc ici, les valeurs aux entiers négatifs ou nuls et les pôles pour s entier $0 \leq s \leq \frac{\deg Q + r}{\alpha}$).

On obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 1. - $\mathcal{E}$ est de dimension inférieure ou égal à α^{r-1} et un système de générateurs est donné par

$$Z(P, X_1^{v_1 - 1} \dots X_r^{v_r - 1})\left(\frac{\sum_{i=1}^{r} v_i}{\alpha}\right)$$

où $(v_1, \dots, v_r)$ parcourt les r-uples de $\mathbb{Z}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{r} v_i \equiv 0 (\alpha) \quad \text{et} \quad 0 < v_i \leq \alpha .$$

Remarques

i) Les valeurs $Z(P, X_1^{v_1 - 1} \dots X_r^{v_r - 1})\left(\frac{\sum_{i=1}^{r} v_i}{\alpha}\right)$ sont en fait les résidus de $Z(P, X_1^{v_1 - 1} \dots X_r^{v_r - 1})(.)$ sur sa droite de convergence.

ii) On connaît des cas où la dimension de $\mathcal{S}$ est strictement inférieure à α^{r-1}. Par exemple dans le cas où P est un produit de formes linéaires (séries de Shintani) elle est égale à 1 .

Nous étudions ensuite la nature de ces générateurs.

Nous supposons maintenant que la variété projective V définie par l'annulation de P est non singulière et en position générale par rapport aux axes de coordonnées, ce qui signifie que les formes $X_i \frac{\partial P}{\partial X_i}$ n'ont pas de zéro commun différent de $(0,\dots,0)$. On définit sur $K[X_1,\dots,X_r]$ $\mathfrak{I}_A$ par

$$\mathfrak{I}_A(X_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin A \\ X_i & \text{si } i \in A \end{cases} .$$

Notons $P_A = \mathfrak{I}_A(P)$ et V_A la variété définie par l'annulation de P_A .

THÉORÈME 2. - <u>Les éléments de $\mathcal{S}$ sont des combinaisons à coefficients dans K de π-fois des "périodes" sur les variétés V_A , de 1 et de π .</u>

<u>Remarques</u>

i) On obtient des résultats analogues en considérant les résidus. On définit $\mathcal{S}_i$ le K-espace vectoriel engendré par les

$$Z(P,Q)\left(\frac{k}{\alpha}\right) \quad k \in \mathbb{Z}\ ,\ k \leq \deg Q + r$$

avec $k \equiv i\ (\alpha)$, pour tout $0 < i < \alpha$.

ii) Si l'on considère

$$Z(P,Q,\xi)(s) = \Sigma'\ Q(n)\ \xi^n\ P(n)^{-s}$$

où $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_r) \in \mathbb{C}^r$ et $|\xi_i| \leq 1$, $\xi_i \neq 1$ pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$, alors $Z(P,Q,\xi)(\,.\,)$ a un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$ et pour tout entier $k \geq 0$

$$Z(P,Q,\xi)(-k) \in K(\xi)$$

$K(\xi)$ étant le corps engendré sur K par les ξ_i .

I. - Préliminaires

Tous les résultats qui vont suivre reposent sur le théorème 0 qui donne une forme adéquate des résidus aux pôles et des valeurs aux entiers négatifs.

Notons J la forme $\mathbb{C}$-linéaire définie sur $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ par

$$J(X_1^{i_1} \dots X_r^{i_r}) = b_{i_1} \dots b_{i_r} .$$

THÉORÈME 0. - Soit un polynôme P satisfaisant l'hypothèse $*$. Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ et tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $k \leq \deg Q + r$, il existe un polynôme $S_{k,Q} \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_r]$ tel que

$$\lim_{s \to k/\alpha} (s - \frac{k}{\alpha}) \Gamma(s)\ Z(P,Q)(s) = J(S_{k,Q})$$

On a des formules explicites.

Notons

$$\mathcal{P}(X_1, \dots, X_r, Y) = P_\alpha(X_1, \dots, X_r) + Y P_{\alpha-1}(X_1, \dots, X_r) + \dots + Y^\alpha P_o(X_1, \dots, X_r)$$

où P_i est le polynôme homogène de degré i tel que

$$P(X_1, \dots, X_r) = P_\alpha(X_1, \dots, X_r) + P_{\alpha-1}(X_1, \dots, X_r) + \dots + P_o(X_1, \dots, X_r) .$$

On peut toujours supposer que Q est un polynôme homogène. Pour tout $(x_1, \dots, x_r, t) \in \mathbb{R}^{r+1}$

$$S(x_1, \dots, x_r, t) = \int_{x_1 t}^{\infty} \dots \int_{x_r t}^{\infty} Q(t_1, \dots, t_r)\, e^{-\mathcal{P}(t_1, \dots, t_r, t)}\, dt_1 \dots dt_r .$$

Alors $S_{k,Q}$ est le polynôme associé à la fonction polynôme

$$S_{k,Q}(x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{(\deg Q + r - k)!} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\deg Q + r - k} S(x_1, \dots, x_r, t)\Big|_{t=0} .$$

On peut montrer que le polynôme $S_{k,Q}$ défini par le théorème 0, vérifie

$$\frac{\partial^r}{\partial X_1 \ldots \partial X_r} S_{k,Q} = Q P^{k'} \qquad \text{si} \quad k = -k'\alpha$$

$$\frac{\partial^r}{\partial X_1 \ldots \partial X_r} S_{k,Q} = 0 \qquad \text{sinon.}$$

Nous supposons dans tout ce qui suit que P est homogène.

II. - Etude de la dimension

Notons $S = \{1, \ldots, r\}$.

Pour tout $A \subset S$, on définit

$\mathcal{L}_A$ le K-espace vectoriel engendré par les monômes

$$\prod_{i \in A} X_i^{v_i} \quad \text{tels que} \quad \Sigma\, v_i \equiv 0\ (\alpha) \quad \text{et} \quad v_i \geq 0$$

$\mathcal{L}_A^A$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_A$ engendré par les monômes qui satisfont en outre $v_i > 0$. On écrit $\mathcal{L}$ pour $\mathcal{L}_S$ et $\mathcal{L}^S$ pour $\mathcal{L}_S^S$; $\mathcal{L}_\emptyset = K$.

Soit $\Delta_A = \{(x_i)_{i \in A} \mid 0 < x_i < \infty\}$.

Définissons φ_A l'application

$$\mathcal{L}_A^A \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\omega \longmapsto \int_{\Delta_A} \omega\, e^{-P_A(t)} \frac{dt}{t}$$

$$\varphi_\emptyset = \mathrm{Id}_K .$$

Ces intégrales ont été étudiées par E. Stevenson [11].

PROPOSITION 3. - Pour tout polynôme $Q \in K[X_1, \ldots, X_r]$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k \leq \frac{\deg Q + r}{\alpha}$

$$Z(P,Q)(k) \in \sum_{A \subset S} \varphi_A(\mathcal{L}_A^A) .$$

Pour montrer cela on utilise le théorème 0. On a donc :

$$\mathcal{E} \subset \sum_{A\subset S} \varphi_A(\mathcal{L}_A^A) \, .$$

LEMME 4. -

$$\sum_{A\subset S} \varphi_A(\mathcal{L}_A^A) = \varphi_S(\mathcal{L}^S)$$

Preuve. -

$$\varphi_S(\mathcal{L}^S) \subset \sum_{A\subset S} \varphi_A(\mathcal{L}_A^A) \, .$$

Si $\omega \in \mathcal{L}_A^A$, pour tout $i \notin A$, $\omega t_i \dfrac{\partial P}{\partial t_i} \in \mathcal{L}_{A\cup\{i\}}^{A\cup\{i\}}$ et

$$\int_{\Delta_A} \omega e^{-P_A(t)} \frac{dt}{t} = \int_{\Delta_{A\cup\{i\}}} \omega t_i \frac{\partial P}{\partial t_i} e^{-P_{A\cup\{i\}}(t)} \frac{dt_i}{t_i} \frac{dt}{t} \, .$$

On peut donc étudier $\mathcal{E}$ par l'intérmédiaire de $\mathcal{L}^S$. Dwork [3] a étudié des quotients de cet espace.

Notons D_j les opérateurs sur $\mathcal{L}^S$

$$D_j = \exp(P(X)) \circ X_j \frac{\partial}{\partial X_j} \circ \exp(-P(X)) \, .$$

$$D_j Q = X_j \frac{\partial Q}{\partial X_j} - Q\, X_j \frac{\partial P}{\partial X_j} \, .$$

LEMME 5. - Il existe un homomorphisme surjectif $\overline{\varphi}_S$ qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^S \arrow[r] \arrow[d, no head] & \varphi_S(\mathcal{L}^S) \\
\mathcal{L}^S / \Sigma D_j \mathcal{L}^S \arrow[ur, "\overline{\varphi}_S"'] &
\end{tikzcd}$$

__Preuve.__ - Soit $\omega_1 = X_j \dfrac{\partial \omega}{\partial X_j} - \omega X_j \dfrac{\partial P}{\partial X_j}$ $\quad \omega \in \mathcal{L}^S$

$$\int_{\Delta_S} \omega_1 \, e^{-P(t)} \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \int_{\Delta_{S-\{j\}}} t_j \frac{\partial \omega}{\partial t_j} e^{-P(t)} \frac{dt_j}{t_j} \frac{dt}{t}$$

$$- \int_0^\infty \int_{\Delta_{S-\{j\}}} \omega \, t_j \frac{\partial P}{\partial t_j} e^{-P(t)} \frac{dt_j}{t_j} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty \int_{\Delta_{S-\{j\}}} \frac{\partial \omega}{\partial t_j} e^{-P(t)} \, dt_j \frac{dt}{t} ,$$

$$+ [\omega e^{-P(t)}]_{t_j=0}^{t_j=\infty} - \int_0^\infty \int_{\Delta_{S-\{j\}}} \frac{\partial \omega}{\partial t_j} e^{-P(t)} \, dt_j \frac{dt}{t} = 0 .$$

Dwork [3] a montré que $\mathcal{L}^S / \Sigma \, D_j \, \mathcal{L}^S$ est un K-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à α^{r-1} dont un système de générateurs est donné par

$$\prod_{i=1}^{r} X_i^{v_i} , \qquad \sum_{i=1}^{r} v_i \equiv 0 \, (\alpha) \quad 0 < v_i \leq \alpha .$$

Donc $\varphi_S(\mathcal{L}^S)$ est de dimension inférieure ou égale à α^{r-1} et un système de générateurs est donné par

$$\int_{\Delta_S} t^v e^{-P(t)} \frac{dt}{t} , \quad \sum_{i=1}^{r} v_i \equiv 0 \, (\alpha) , \quad 0 < v_i \leq \alpha .$$

Donc $\mathcal{S} \subset \varphi_S(\mathcal{L}^S)$ est de dimension inférieure ou égale à α^{r-1}. De plus

$$\int_{\Delta_S} t^v e^{-P(t)} \frac{dt}{t} = Z(P, X^{v-1}) \left(\frac{\sum_{i=1}^{r} v_i}{\alpha} \right) .$$

Donc $\mathcal{S} = \varphi_S(\mathcal{L}^S)$ et le théorème 1 est montré.

III. - Identification avec les périodes

On suppose maintenant que la variété projective V définie par l'annulation de P est non singulière et en position générale par rapport aux axes de coordonnées (ceci signifie que les formes $X_i \frac{\partial P}{\partial X_i}$ n'ont pas de zéro commun).

Notons μ_α le groupe des racines α-ièmes de l'unité.

Si Q est un polynôme homogène tel que $\deg Q + r \equiv 0(\alpha)$, on définit pour tout $\zeta \in \mu_\alpha^r$

$$Z_\zeta(P,Q)(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}^r}{}' \zeta_1 \dots \zeta_r\, Q(\zeta_1 n_1, \dots, \zeta_r n_r)\, P(\zeta_1 n_1, \dots, \zeta_r n_r)^{-s} \ .$$

On remarque que si $\zeta = (\zeta, \dots, \zeta)$, alors

$$Z_\zeta(P,Q)(s) = Z(P,Q)(s) \qquad \text{pour tout } s \in \mathbb{C} .$$

Notons $\bar\mu_\alpha^r$ le quotient de μ_α^r par la diagonale.

Nous allons considérer maintenant les vecteurs

$$\left(Z_\zeta(P, X^{v-1})\left(\frac{\sum_{i=1}^r v_i}{\alpha}\right)\right)_{\zeta\in\bar\mu_\alpha^r} .$$

Notons $\Delta_S(\zeta)$ l'image de Δ_S par l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^r &\longrightarrow \mathbb{C}^r \\ (x_i)_{i\in S} &\longrightarrow (\zeta_i x_i)_{i\in S} . \end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$Z_\zeta(P, X^{v-1})\left(\frac{\sum_{i=1}^r v_i}{\alpha}\right) = \int_{\Delta_S(\zeta)} t^v e^{-P(t)} \frac{dt}{t} .$$

Définissons maintenant l'application

$$\begin{aligned} \psi_S : \mathcal{L}^S &\longrightarrow \mathbb{C}^{\alpha^{r-1}} \\ \omega &\longmapsto \left(\int_{\Delta_S(\zeta)} \omega\, e^{-P(t)} \frac{dt}{t}\right)_{\zeta\in\bar\mu_\alpha^r} . \end{aligned}$$

THÉORÈME 6. - <u>Le</u> K-<u>espace vectoriel</u> $\psi_S(\mathcal{L}^S)$ <u>est de dimension</u> α^{r-1} <u>et une base est donnée par</u>

$$\left(Z_\zeta(P, X^{v-1})\left(\frac{\sum_{i=1}^{r} v_i}{\alpha}\right)\right)_{\zeta\in\bar{\mu}_\alpha^r}$$

<u>où</u> $(v_1, \dots, v_r)$ <u>parcourt un système de</u> r-<u>uple d'entiers tels que</u> $\Sigma\, v_i \equiv 0(\alpha)$ <u>et</u> $0 < v_i \leq \alpha$.

<u>Preuve</u>. - Pour montrer le théorème nous allons montrer qu'il existe un isomorphisme $\bar{\psi}_S$ qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^S \arrow[r, "\psi_S"] \arrow[d] & \psi_S(\mathcal{L}^S) \\
\mathcal{L}^S / \sum_{j=1}^{r} D_j \mathcal{L}^S \arrow[ur, "\bar{\psi}_S"'] &
\end{tikzcd}$$

Dwork [3] a montré que dans le cas où V est non singulière et en position générale $\mathcal{L}^S / \sum_{j=1}^{r} D_j \mathcal{L}^S$ est de dimension α^{r-1} et que le système de générateurs donné précédemment est une base. $\bar{\psi}_S$ existe et est surjective pour les mêmes raisons que $\bar{\varphi}_S$. Pour montrer l'injection nous allons montrer que la matrice

$$\mathfrak{X} = \left(Z_\zeta(P, X^{v-1})\left(\frac{\sum_{i=1} v_i}{\alpha}\right)\right)_{\substack{v \mid \Sigma v_i \equiv 0(\alpha) \quad 0<v_i\leq\alpha \\ \zeta\in\bar{\mu}_\alpha^r}}$$

est inversible.

Nous utilisons maintenant la théorie de la déformation introduite par Dwork pour étudier les fonctions zêta des hypersurfaces [5] .

On définit $\quad P_\lambda(X_1, \dots, X_r) = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i^\alpha + \lambda\, R(X_1, \dots, X_r)$.

On a $\quad P_o(X_1, \dots, X_r) = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i^\alpha$ polynôme de Fermat et

$$P_1(X_1, \dots, X_r) = P(X_1, \dots, X_r) .$$

On suppose que λ appartient à un domaine $\mathcal{D}$ du plan complexe qui contient 0 et 1 tel que la variété V_λ soit non singulière et en position générale. Alors $\mathcal{L}^S/\Sigma D_{j,\lambda}\mathcal{L}^S$ est encore de dimension α^{r-1} et admet la même base X^v , $\sum_{i=1}^r v_i \equiv 0\,(\alpha)$, $0 < v_i \leq \alpha$

$$\mathfrak{X}_\lambda = \left(Z_\zeta\,(P_\lambda\,,\ X^{v-1})\left(\frac{\sum_{i=1}^r v_i}{\alpha}\right)\right)_{\substack{v\\ \zeta\in\bar{\mu}_\alpha^r}} .$$

On étudie l'équation différentielle en λ satisfaite par $\mathfrak{X}_\lambda$:

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{\Delta_S(\zeta)} X^v\, e^{-P_\lambda(t)}\,\frac{dt}{t} = \int_{\Delta_S(\zeta)} \sigma_\lambda\,(t^v)\, e^{-P_\lambda(t)}\,\frac{dt}{t}$$

où σ_λ est l'opérateur défini sur $\mathcal{L}^S$ par

$$\sigma_\lambda = \exp P_\lambda \circ \frac{\partial}{\partial\lambda} \circ \exp(-P_\lambda) .$$

L'opérateur σ_λ commute avec les opérateurs $D_{j,\lambda}$ et donc opère sur le quotient $\mathcal{L}^S/\Sigma D_{j,\lambda}\mathcal{L}^S$. Soit G_λ la matrice de σ_λ dans la base X^v . Alors G_λ est une matrice à coefficients rationnels en λ , et on peut supposer qu'elle est sans singularités dans $\mathcal{D}$. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\,\mathfrak{X}_\lambda = G_\lambda\,\mathfrak{X}_\lambda$$

et donc $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}$ det $\mathfrak{X}_\lambda$ = trace G_λ . det $\mathfrak{X}_\lambda$.

Pour montrer que det $\mathfrak{X}_\lambda \neq 0$ dans $\mathcal{D}$, il suffit de montrer que det $\mathfrak{X}_o \neq 0$.
On peut calculer $\mathfrak{X}_o$ et on trouve

$$\det \mathfrak{X}_o = \prod_v \prod_j a_j\,\Gamma\left(\frac{v_j}{\alpha}\right)\,\left|\,\zeta^{v_j}\right|_{\substack{v\\ \zeta\in\bar{\mu}_\alpha^r}} .$$

Le déterminant qui apparaît à droite est un déterminant de groupe ; il est non nul.
On a donc montré que

$$\psi_S(\mathcal{L}^S) \simeq \mathcal{L}^S/\sum_{j=1}^r D_j\mathcal{L}^S .$$

Pour tout $A \subset S$, notons $D_{i,A} = \mathfrak{T}_A \circ D_i$.

<u>Définissons</u> $W_A = \mathcal{L}_A^A / \sum_{i \in A} D_{i,A} \mathcal{L}_A^{A-\{i\}}$.

Dwork ([5]) a montré que

$$\mathcal{L}^S / \sum_{j=1}^{r} D_j \mathcal{L}^S \simeq \bigoplus_{A \subset S} W_A$$

et Katz ([6]) a montré qu'il existe un isomorphisme θ_A qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} W_A \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "\mathfrak{J}_A \circ \sigma_\lambda"'] & \mathrm{Prim}^{r_A - 2}(V_A/K) \arrow[d, "\frac{d}{d\lambda}"] \\ W_A \arrow[r, "\theta_A"'] & \mathrm{Prim}^{r_A - 2}(V_A/K) \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Prim}^{r_A-2}(V_A/K)$ désigne le sous-espace de $H_{DR}^{r_A-2}(V_A/K)$ des classes primitives (dans le sens de la théorie de Hodge).

Nous recherchons maintenant les sous-espaces de $\psi_S(\mathcal{L}^S)$ qui correspondent aux W_A .

On <u>définit</u>

$$\psi_A : \mathcal{L}_A^A \longrightarrow \mathbb{C}^{\alpha^{r-1}}$$

$$\omega \longmapsto \left(\int_{\Delta_A(\zeta)} \omega \, e^{-P_A(t)} \frac{dt}{t} \right)_{\zeta \in \bar{\mu}_\alpha^r} .$$

<u>Notons</u> $\mathcal{M}_A = \psi_A(\mathcal{L}_A^A)$.

On peut montrer que :

$$W_A \simeq \mathcal{M}_A / \sum_{i \in A} \mathcal{M}_{A-\{i\}} = \overline{\mathcal{M}}_A$$

et que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{M}}_A \arrow[r, "\overline{\psi}_A"] \arrow[d, "\frac{d}{d\lambda}"'] & W_A \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "\sigma_{\lambda,A}"] & \mathrm{Prim}^{r_A-2}(V_A/K) \arrow[d, "\frac{d}{d\lambda}"] \\ \overline{\mathcal{M}}_A \arrow[r, "\overline{\psi}_A"'] & W_A \arrow[r, "\theta_A"'] & \mathrm{Prim}^{r_A-2}(V_A/K) \end{tikzcd} .$$

Considérons la base de W_A

$$\prod_{j\in A} X_j^{v_j} \quad \text{où} \quad \sum_{j\in A} v_j \equiv 0\,(\alpha) \quad \text{et} \quad 0<v_j<\alpha \ .$$

On note (ω) son image dans $\mathrm{Prim}^{r_A-2}(V_A/K)$.

Considérons une base de cycles (γ) et la matrice des périodes

$$P_\lambda = \left(\int_\gamma \omega\right)_{\substack{\omega\\ \gamma}} \ .$$

L'image dans $\overline{\mathcal{M}}_A$ de la base de W_A nous donne la matrice

$$\rho_\lambda = \left(\int_{\Delta_A(\zeta)} t^v e^{-P_{\lambda,A}(t)} \frac{dt}{t}\right)_{\substack{v\mid \Sigma v_j \equiv 0\,(\alpha) \quad 0<v_j<\alpha \\ \zeta\in\bar{\mu}_\alpha^r}}$$

Les deux matrices vérifient la même équation différentielle. On en déduit donc que

$$P_\lambda^{-1}\rho_\lambda = P_o^{-1}\rho_o \ .$$

On peut remarquer que cette égalité ne dépend pas de la base de cycles choisis (si l'on change cette base on multiplie à gauche les deux membres par une même matrice), ni des $\zeta\in\bar{\mu}_\alpha^r$.

On peut faire des calculs effectifs de P_o (Deligne [2]) et de ρ_o (cf. $\mathfrak{X}_o$) et on montre que $\frac{1}{\pi} P_o^{-1}\rho_o$ est une matrice à coefficients dans K . Donc pour tout λ $P_\lambda^{-1}\rho_\lambda$ est une matrice à coefficients dans K .

Le théorème 2 est démontré.

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. CASSOU-NOGUÈS, Etude de certaines séries de Dirichlet associées à un polynôme (en préparation).

[2] P. DELIGNE,

[3] B. DWORK, On the Zeta function of a hypersurface, Publ. Math. I.H.E.S. (12) (1962), 5-85.

[4] B. DWORK, On the Zeta function of a hypersurface II, Ann. of Maths 80 (1964), 227-299.

[5] B. DWORK, A deformation theory for the Zeta function, Cong. Math. Stockholm (1962), 247-259.

[6] N. KATZ, On the intersection matrix of a hypersurface, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 2 (1969), 583-598.

[7] H. KLINGEN, Über die Werte der Dedekindsche Zeta funktion, Math. Analem 145 (1962), 265-272.

[8] H. MELLIN, Eine formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichen Geschlecht, Acta Soc. Scient. fennicae 29 (1900) n° 4.

[9] C. L. SIEGEL, Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. K 1, 3 (1970), 15-56.

[10] T. SHINTANI, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non positive integers, J. of Fac. of Sc., Univ. of Tokyo, section 1, 23 (1976), 393-417.

[11] E. STEVENSON, Integral representation of algebraic cohomology classes on hypersurfaces, Pacific Journal of Math. 71 (1977).

(texte reçu le 21 mai 1981)

-:-:-:-

Pierrette CASSOU-NOGUÈS
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
F 33405 TALENCE CEDEX