Werk

Titel: Etude des nombres 2-hautement composés.

Autor: BESSI, Gérard

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?320141322_0004|log20

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1974-1975 - exposé n° 20

ÉTUDE DES NOMBRES 2-HAUTEMENT COMPOSÉS

par

Gérard BESSI

-:-:-:-

§. 1. - Introduction

On dit qu'un nombre entier n est hautement composé si tout nombre m plus petit que n a moins de diviseurs que n. Si l'on définit $d(n)$ par le nombre de diviseurs de n, on sait que, si la décomposition en facteurs premiers de n est : $n = \prod_i p_i^{a_i}$ on a $d(n) = \prod_i (a_i + 1)$. La définition devient : n est hautement composé si et seulement si

$$m < n \Rightarrow d(m) < d(n) .$$

On voit que si $n = 2^{a_2} \dots p_r^{a_{p_r}}$ est un nombre hautement composé, on a :

$$a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{p_r} \; (d(2^{a_2} \dots p_r^{a_{p_r}}) = d(2^{\sigma(a_2)} \dots p_r^{\sigma(a_{p_r})})$$

où σ est une permutation de $\{a_2, \dots, a_{p_r}\}$).

Ramanujan [1] a défini et étudié les nombres hautement composés démontrant qu'à l'exception de $A=4$ et $A=36$ on a $a_{p_r}=1$ ([1], §. 8).

On restreint maintenant la définition des nombres hautement composés à $\mathcal{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} \ , \ n = 2^a 3^b\}$.

DÉFINITION. - On dit qu'un nombre $n \in \mathcal{N}_2$ est 2-hautement composé si $\forall m \in \mathcal{N}_2 \ , \ m < n \Rightarrow d(m) < d(n)$.

<u>Remarque</u> : La partie tronquée d'un nombre hautement composé est 2-hautement composé ($N = 2^{a_2} \dots p_r^{a_{p_r}}$ hautement composé, $\forall m = 2^{b_2} 3^{b_3} < 2^{a_2} 3^{a_3} = n$, on a $\pi = 2^{b_2} 3^{b_3} 5^{a_5} \dots p_r^{a_{p_r}} < N$ donc $d(M) < d(N)$ ce qui entraîne $d(m) < d(n)$.

La réciproque est fausse : $2^2 3 5^3$ non hautement composé (voir la table [1] p. 87) mais $2^3 3$ est 2-hautement composé (voir exemple II, b, 4).

PROBLÈME. - Etude des nombres 2-hautement composés et plus particulièrement de $q(x) = \text{card}\{n \ 2 \text{ h. c. } n \leq x\}$; comme on a :

$$\text{card}\{n \in \mathcal{N}_2 \quad n \leq x\} \leq c(\log x)^2 \quad ,$$

on a donc :

$$q(x) \leq c(\log x)^2 \ .$$

Notre problème sera donc d'obtenir une majoration plus fine, pour cela nous utiliserons les nombres 2-hautement composés supérieurs restriction à $\mathcal{N}_2$ des nombres hautement composés supérieurs que Ramanujan a défini ([1], §. 32) dont nous donnerons la définition et les propriétés plus loin, et l'on aura : $\text{card}\{n \ 2\text{-h. c. s. } n \leq x\} \leq c_1 \log x$.

Nous étudierons alors les nombres 2-hautement composés compris entre deux nombres 2-hautement composés supérieurs, et pour cela nous utiliserons la méthode des bénéfices introduite par J.-L. Nicolas ([2], §. 3) pour la répartition des nombres hautement composés de Ramanujan.

A ce problème peut être aussi associé un problème de programmation mathématique ; en effet, si $m \in \mathcal{N}_2$ on a $\log m = a \log 2 + b \log 3$ et $d(m) = (a+1)(b+1)$.

Les nombres 2-hautement composés sont les solutions des problèmes de programmation

$$\begin{cases} x \log 2 + y \log 3 \leq c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases} .$$

Dans une dernière partie nous étudierons les problèmes de la forme

$$\begin{cases} p_r x + q_r y \leq c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{p_r}{q_r} \text{ est un convergent dans le}$$

développement en fraction continue de $\theta = \dfrac{\log 2}{\log 3}$.

§. 2. - Étude des nombres 2-hautement composés et 2-hautement composés supérieurs

a) Etude élémentaire

On considère le développement en fractions continues de $\theta^{-1} = \dfrac{1}{\theta} = \dfrac{\log 3}{\log 2}$ comme $\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} < \theta^{-1} \Rightarrow \dfrac{2^{p_{2n}}}{3^{q_{2n}}} < 1$, $\dfrac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} > \theta^{-1} \Rightarrow \dfrac{2^{p_{2n+1}}}{3^{q_{2n+1}}} > 1$, donc en écrivant que pour n 2-hautement composés on a :

$$d\left(\frac{2^{p_{2n}}}{3^{q_{2n}}} n\right) < d(n) \quad , \quad d\left(\frac{3^{q_{2n+1}}}{2^{p_{2n+1}}} n\right) < d(n)$$

on obtient comme <u>conditions nécessaires</u> avec $n = 2^a 3^b$:

$$q_{2n+2}\, p_{2n+1}\, q_{2n}{}^{-1} \leq b \leq q_{2n+3}\, p_{2n+2}\, q_{2n+1}{}^{-1}$$

alors

$$\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}}(b+1) - p_{2n+2}{}^{-1} < a < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}(b+1) + p_{2n+1}{}^{-1}$$

$$q_{2n+3}\, p_{2n+2}\, q_{2n+1}{}^{-1} \leq b \leq q_{2n+4}\, p_{2n+3}\, q_{2n+2}{}^{-1}$$

alors

$$\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}}(b+1) - p_{2n+2}{}^{-1} < a < \frac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}}(b+1) + p_{2n+3}{}^{-1} \quad .$$

<u>Conditions suffisantes</u> $\qquad \theta^{-1} b - 1 \leq a \leq \theta^{-1}(b+2) - 1$

Pour $a < \theta^{-1} b - 1$, si $\forall m$ tel que $b - m > \theta(a+1) - 1$, on a :

$$\frac{[m\,\theta^{-1}]}{m}(b+1) - [m\,\theta^{-1}] < a+1$$

alors $2^a 3^b$ sera 2-hautement composé.

Pour $a > \theta^{-1}(b+2) - 1$, si $\forall m$ tel que $b + m < (a+1)\theta - 1$, on a :

$$\frac{[m\,\theta^{-1}]}{m}(b+1) + [m\,\theta^{-1}] + 1 > a+1 \ ,$$

alors $2^a 3^b$ sera 2-hautement composé.

b) <u>Étude des nombres 2-hautement composés supérieurs</u>

De même que Ramanujan [1] a introduit les nombres hautement composés supérieurs, on peut définir :

DÉFINITION. - $N \in \mathcal{N}_2$ est 2-hautement composé supérieur si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall M \in \mathcal{N}_2$, $\dfrac{d(M)}{M^{\varepsilon}} \leq \dfrac{d(N)}{N^{\varepsilon}}$.

PROPRIÉTÉS 1) $\forall \varepsilon > 0$ il existe au moins un nombre 2-hautement composé supérieur associé à ε

En effet, $d(N) = 2^{\frac{\log N}{\log \log N}} + 0(\frac{\log N}{\log \log N})$ Ramanujan [1], donc $\lim\limits_{\substack{N \to \infty \\ N \in \mathcal{N}_2}} \frac{d(N)}{N^{\varepsilon}} = 0$, donc la fonction $\frac{d(N)}{N^{\varepsilon}}$ a un maximum absolu dans $\mathcal{N}_2$ qu'elle atteint en un ou plusieurs points de $\mathcal{N}_2$.

2) Tout nombre 2-hautement composé supérieur est 2-hautement composé.

En effet, N 2-hautement composé supérieur $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tel que $d(M) \leq (\frac{M}{N})^{\varepsilon} d(N)$ or $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ N est 2-hautement composé.

3) $\forall \varepsilon > 0$ les nombres 2-hautement composés supérieurs associés à ε sont de la forme $2^{a_\varepsilon} 3^{b_\varepsilon}$ avec :

$$\log(a_\varepsilon+2)-\log(a_\varepsilon+1) \leq \varepsilon \log 2 \leq \log(a_\varepsilon+1)-\log a_\varepsilon$$

$$\log(b_\varepsilon+2)-\log(b_\varepsilon+1) \leq \varepsilon \log 3 \leq \log(b_\varepsilon+1)-\log b_\varepsilon .$$

En effet, il suffit d'écrire :

$$\frac{d(2N_\varepsilon)}{(2N_\varepsilon)^{\varepsilon}} \leq \frac{d(N_\varepsilon)}{N_\varepsilon^{\varepsilon}}$$

$$\frac{d(\frac{N_\varepsilon}{2})}{(\frac{N_\varepsilon}{2})^{\varepsilon}} \leq \frac{d(N_\varepsilon)}{N_\varepsilon^{\varepsilon}}$$

$$\frac{d(3N_\varepsilon)}{(3N_\varepsilon)^{\varepsilon}} \leq \frac{d(N_\varepsilon)}{N_\varepsilon^{\varepsilon}}$$

$$\frac{d(\frac{N_\varepsilon}{3})}{(\frac{N_\varepsilon}{3})^{\varepsilon}} \leq \frac{d(N_\varepsilon)}{N_\varepsilon^{\varepsilon}}$$

4) Si ε tel que :

$$\log(a_{\varepsilon+2})-\log(a_{\varepsilon+1}) < \varepsilon \log 2 < \log (a_{\varepsilon+1})- \log a_{\varepsilon}$$

$$\log(b_{\varepsilon+2})-\log(b_{\varepsilon+1}) < \varepsilon \log 3 < \log (b_{\varepsilon+1})- \log b_{\varepsilon}$$

il existe un nombre 2-hautement composé supérieur associé à ε et celui-ci est unique.

En effet, les conditions entraînent que $a_{\varepsilon} = [\frac{1}{2^{\varepsilon}-1}]$ et $b_{\varepsilon} = [\frac{1}{3^{\varepsilon}-1}]$ et Ramanujan ([1], §. 32) $N_{\varepsilon} = 2^{a_{\varepsilon}} 3^{b_{\varepsilon}}$ est 2-hautement composé supérieur.

<u>Remarque</u> : Si l'on pose $F(p,n) = \frac{\log(n+1)-\log n}{\log p}$ d'après 3 et 4, si l'on pose :

$$E_2 = \{ F(2,n) \quad n \geq 1 \}$$

$$E_3 = \{F(3,n) \quad n \geq 1 \} \qquad \text{et} \quad E = E_2 \cup E_3$$

en rangeant les valeurs de E qu'on peut noter ε_i, on aura :

$\forall \varepsilon \in]\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i[$ $\quad N_{\varepsilon}$ est constant et l'on posera par déf. N_i

$\varepsilon = \varepsilon_i$ $\quad N_{\varepsilon}$ est $N_i, 2N_i$ ou $3N_i$

et N_{i+1} est $2N_i$ ou $3N_i$ et les nombres 2-hautement composés supérieurs sont les N_i.

<u>Exemple</u> : $E_2 = \{ 1 ; 0,585 ; 0,415 ; 0,322 ; 0,263 \ldots \}$

$E_3 = \{0,631 ; 0,369 ; 0,262 ; 0,203 ; 0,166, \ldots \}$

$N_1 = 1 \quad N_3 = 2\ 3 \quad N_5 = 2^3.3 \quad N_7 = 2^4\ 3^2 \quad N_9 = 2^5\ 3^3$

$N_2 = 2 \quad N_4 = 2^2 3 \quad N_6 = 2^3.3^2 \quad N_8 = 2^5 3^2$.

5) Pour qu'un nombre $N = 2^a 3^b$ soit 2-hautement composé supérieur il faut et il suffit que :

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{b})^{\theta}-1} - 1 \leq a \leq \frac{1}{(1+\frac{1}{b+1})^{\theta}-1}$$

d'après le 3) et 4).

6) En utilisant les inégalités $\frac{U-1}{U} \leq \log U \leq U-1$, on a :

$$N_{\varepsilon} = 2^{a_{\varepsilon}} 3^{b_{\varepsilon}} \text{ est } 2\text{-h. c. s.} \Rightarrow \theta^{-1} b_{\varepsilon} - 2 \leq a_{\varepsilon} \leq \theta^{-1}(b_{\varepsilon}+2) .$$

<u>Conclusion.</u> - Ces résultats vont nous permettre de majorer

$\tilde{q}_s(X) = \text{card}\{N_{\varepsilon}\ 2\text{-h. c. s.}\ N_{\varepsilon} \leq X\}$

En effet, $N_{\varepsilon} \leq X \Rightarrow a_{\varepsilon} \log 2 + b_{\varepsilon} \log 3 \leq \log X$, comme

$$b_{\varepsilon} = \theta^{-1} a_{\varepsilon} + 0(1) \Rightarrow a_{\varepsilon} \leq c_1 \log X .$$

Donc il y a au plus $c_1 \log X$ choix possibles de a_{ε} et à chacun de ces choix ne correspond qu'un nombre fini de choix de b_{ε}

$$\tilde{q}_s(X) \leq c_1 \log X .$$

§. 3. - $q(X) \leq c(\log X)^{3/2}$

On a $\tilde{q}_s(X) \leq c_1 \log X$, il nous faut maintenant étudier les nombres 2-hautement composés compris entre deux nombres 2-hautement composés supérieurs, pour cela, comme pour les nombres hautement composés, on utilisera la méthode des bénéfices (J.-L Nicolas [2]).

a) <u>Bénéfices</u>

Un nombre 2-hautement composé supérieur est un maximum sur l'ensemble $\mathcal{N}_2$ pour la fonction $\frac{d(n)}{n^{\varepsilon}}$; donc pour la fonction $\log d(n) - \varepsilon \log n$.

On définit $\text{bén.}_{N_\varepsilon}(n) = \log d(N_\varepsilon) - \varepsilon \log N_\varepsilon - \log d(n) + \varepsilon \log n$.

THÉORÈME. - Soit n un nombre 2-hautement composé. Soit N_ε le nombre hautement composé supérieur précédent n, on a :

$$\text{bén.}_{N_\varepsilon} n \leq \varepsilon \log 3 .$$

Démonstration. - Soit N' le nombre 2-hautement composé supérieur suivant N_ε ; on a donc $N' \leq 3 N_\varepsilon$, donc on a : $N_\varepsilon \leq n \leq N' \leq 3N_\varepsilon$ ($n \leq N'$ car sinon le 2-hautement composé supérieur précédent n serait N'). Or :

$$n \text{ 2-h. c.} \Rightarrow d(n) \geq d(N_\varepsilon)$$

$$N' \text{ 2-h. c. s. donc 2-h. c.} \Rightarrow d(N') \geq d(n) ,$$

donc $d(N_\varepsilon) \leq d(n) \leq d(N')$, n 2-h. c. en appliquant la proposition 2 (J.-L. Nicolas [2] p. 5), on a :

$$\begin{aligned} \text{bén.}_{N_\varepsilon} n &\leq \text{bén.}_{N_\varepsilon} N' + \log \frac{d(N')}{d(N_\varepsilon)} \\ &= \log \frac{d(N_\varepsilon)}{d(N')} + \varepsilon \log \frac{N'}{N_\varepsilon} + \log \frac{d(N')}{d(N_\varepsilon)} = \varepsilon \log \frac{N'}{N_\varepsilon} \leq \varepsilon \log 3 \end{aligned}$$

donc $\text{bén.}_{N_\varepsilon} n \leq \varepsilon \log 3$.

b) Application

En appliquant ce théorème on va trouver des conditions nécessaires pour les nombres 2-hautement composés supérieurs à N_ε .

Soit $n = 2^a 3^b$, comme $\text{bén.}_{N_\varepsilon} n = \underbrace{G(a, a_\varepsilon, 2)}_{\geq 0} + \underbrace{G(b, b_\varepsilon, 3)}_{\geq 0}$,

on aura comme condition nécessaire $\varepsilon(a-a_\varepsilon) \log 2 + \log \frac{(a_\varepsilon+1)}{a+1} \leq \varepsilon \log 3$

en posant $h = a-a_\varepsilon$.

1) $h \geq 0$, $\varepsilon h \log 2 - \log (1 + \frac{h}{a_\varepsilon + 1}) \leq \varepsilon \log 3$

or $\log(1 + \frac{1}{a_\varepsilon + 1}) \leq \varepsilon \log 2$ et $\varepsilon \log 3 \leq \theta^{-1} \varepsilon \log 2 \leq \theta^{-1} \log (1 + \frac{1}{a_\varepsilon}) \leq \frac{\theta^{-1}}{a_\varepsilon}$

(car condition 3 de $2^{a_\varepsilon} 3^{b_\varepsilon}$ 2-hautement composé supérieur). Donc h doit vérifier

$$h \log(1 + \frac{1}{a_\varepsilon + 1}) - \log(1 + \frac{h}{a_\varepsilon + 1}) \leq \frac{\theta^{-1}}{a_\varepsilon}$$

comme on peut voir que $h < a_\varepsilon + 1$ en posant $F(x) = x \log (1 + \frac{1}{a_\varepsilon + 1}) - \log(1 + \frac{x}{a_\varepsilon + 1})$

et en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2

$$h \text{ doit vérifier } \frac{h^2}{8(a_\varepsilon + 1)^2} - \frac{h}{(a_\varepsilon + 1)^2} \leq \frac{\theta^{-1}}{a_\varepsilon}$$

$$h \leq 4 + 2\sqrt{4 + 2\theta^{-1} (\frac{a_\varepsilon + 1}{a_\varepsilon})^2} \Rightarrow h \leq 2\sqrt{2} \sqrt{\theta^{-1}} \sqrt{a_\varepsilon} + c .$$

2) $h \leq 0$ par le même raisonnement en posant $h' = -h$ on a :

$$h' \leq \sqrt{2\lambda a_\varepsilon} + c' .$$

Donc $a - a_\varepsilon = 0(\sqrt{a_\varepsilon})$.

c) $q(X) \leq c(\log X)^{3/2}$

Pour X donné, on note $N_1, \ldots, N_h$ les nombres 2-hautement composés supérieurs $\leq X$, on sait que $N_{i+1} \leq 3N_i$ et $h \leq c_1 \log X$,

$$q(X) \leq q(N_{h+1}) = \sum_{i=1}^{h} (q(N_{i+1}) - q(N_i)) + q(N_1)$$

or $q(N_{i+1}) - q(N_i) = \text{card}\{ n \text{ 2-hautement composé tel que } N_i \leq n < N_{i+1}\}$

or $N_{i+1} \leq 3N_i \Rightarrow q(N_{i+1}) - q(N_i) \leq \text{card}\{n \text{ 2-hautement composé tel que } N_i \leq n < 3N_i\}$

n est de la forme $2^a 3^b$ donc pour un a choisi il ne correspond qu'un seul h tel que $N^i \leq 2^a 3^b < 3N_i$, or comme $a - a_\varepsilon = 0(\sqrt{a_\varepsilon})$ donc il y a $0(\sqrt{a_\varepsilon})$ choix possibles de a et donc de n , or $a_\varepsilon \log 2 + b_\varepsilon \log 3 = \log N_i$ et

$a_\varepsilon = \theta^{-1} b_\varepsilon + 0(1) \Rightarrow 0(\sqrt{a_\varepsilon}) = 0(\sqrt{\log N_i}) = 0(\sqrt{\log X})$

$q(X) \leq h\, c_2 \sqrt{\log X} \leq c(\log X)^{3/2}$.

§. 4. - <u>Existence et majoration de</u> i_o <u>et</u> i'_o

On cherche toujours à majorer $\mathrm{card}\{n \text{ 2-h. c. } ; N_\varepsilon \leq n < N'_\varepsilon\}$ et comme $N' \leq 3N_\varepsilon$, il faut donc majorer $\mathrm{card}\{n \text{ 2-h. c. } ; N_\varepsilon \leq n < 3N_\varepsilon\}$.
On explicite les nombres $2^a 3^b$ compris entre N_ε et $3N_\varepsilon$, pour cela on peut écrire $2^a 3^b = 2^i 3^{-h} N_\varepsilon$ et la condition $N_\varepsilon \leq n < 3N_\varepsilon$ entraîne que pour un i fixé, h_i existe et est déterminé d'une manière unique $h_i = [i \frac{\log 2}{\log 3}] = [i\,\theta]$, on peut donc ordonner en i ces nombres et les noter $M_i = 2^i 3^{-h_i} N_\varepsilon$.
On a :

$$\{n = 2^a 3^b \text{ tel que } N_\varepsilon \leq n < 3N_\varepsilon\} = \{M_i \mid -a_\varepsilon \leq i < [\theta^{-1} b_\varepsilon + \theta^{-1}]\}.$$

PROPRIÉTÉ DES M_i. - En utilisant les propriétés 3 des nombres 2-hautement composés supérieurs on a :

$$\text{bén. } M_i = \varepsilon i \log 2 - \log \frac{a_\varepsilon + i + 1}{a_\varepsilon + 1} - \varepsilon h_i \log 3 - \log \frac{b_\varepsilon - h_i + 1}{b_\varepsilon + 1}$$

et on voit que :

(bén. M_i) est croissant pour $i \geq 0$

(bén. M_i) est décroissant pour $i \leq 0$

bén. $M_o = 0$.

<u>Remarque</u> : $\forall i$ tel que bén. $M_i \geq \varepsilon \log 3$

$\forall -i'$ tel que bén. $M_{-i'} \geq \varepsilon \log 3$

alors M_i et $M_{-i'}$ ne sont pas 2-hautement composés, donc si j_1 est le premier i, de même $-j'_1$ pour $-i'$ alors $\mathrm{card}\{n \text{ 2-h. c. } N_\varepsilon \leq n < N'\} \leq j_1 + j'_1$ mais ceci nous donnera si l'on évalue j_1 et j'_1 le même résultat qu'au §. 3. cependant on sait que les nombres 2-hautement composés compris entre N_ε et $3N_\varepsilon$ sont à prendre parmi les M_i, $-j'_1 \leq i \leq j_1$.

De plus on peut voir sur des exemples que si un M_i est barré par M_j (i.e. on a $M_j < M_i$ et $d(M_j) \geq d(M_i)$) donc M_i non 2-hautement composé, alors tous les nombres d'indice supérieur (en valeur absolu) sont barrés.

On va prouver qu'ils existent i_o et $i'_o \geq 0$ tels que

(1) $\forall -i'_o \leq i \leq i_o$ M_i est 2-hautement composé

(2) $\forall\, i > i_o$ M_i est barré

(2') $\forall\, i < -i'_o$ M_i est barré

(3) $M_{i_{o+1}}$ est barré par $\underset{\substack{-i'_o \leq j \leq i_o \\ M_j < M_{i_{o+1}}}}{\mathrm{Max}}\ M_j$

(3') $M_{-i'_{o-1}}$ est barré par $\underset{\substack{-i'_o \leq j \leq i_o \\ M_j < M_{-(i'_{o+1})}}}{\mathrm{Max}}\ M_j$.

DÉFINITION et CONDITION 1.

LEMME 1. - M_j <u>barre</u> $M_i \Rightarrow$ bén. $M_j <$ bén. M_i .

<u>Démonstration</u>. - On a bén. $M_i = g(i) + f(i)$ avec :

$$g(i) = \varepsilon \log M_i - \varepsilon \log N_\varepsilon$$

$$f(i) = \log d(N_\varepsilon) - \log d(M_i)$$

M_j barre $M_i \Rightarrow M_j < M_i$ et $d(M_j) \geq d(M_i) \Rightarrow g(j) < g(i)$ et $f(j) \leq f(i)$

$\Rightarrow$ bén. $M_j <$ bén. M_i .

Donc pour voir si un M_i est barré il suffit de regarder si les nombres de bénéfice plus petit le barrent.

DÉFINITION. - On pose i_o+1 le premier indice $i \geq 0$ tel que M_i soit barré

$-i'_o-1$ le premier indice $i \leq 0$ tel que M_i soit barré.

Alors par définition i_o et i'_o vérifient la condition 1 .

CONDITION 2.

LEMME 0. - M_{-1} <u>ne peut être barré que par</u> N_ε <u>ou par</u> M_2 , <u>mais</u> $d(M_2) \leq d(M_{-1})$.

<u>Démonstration</u>. - D'après le lemme 1, M_{-1} ne peut être barré par des M_i avec $i < 0$, il faut donc étudier les M_i avec $i \geq 0$. Or pour que M_i barre M_{-1} il est nécessaire que $M_i < M_{-1} \Rightarrow \frac{2^i}{3^{h_i}} < \frac{3}{2} \Rightarrow i+1 < \theta^{-1}(h_i+1)$, or :

$$d(M_i) = (a+i+1)(b-h_i+1) = ab + (i+1)b-(h_i-1)a-(i+1)(h_i-1)$$

or :

$$i+1 < \theta^{-1}(h_i+1)$$

$$\Rightarrow d(M_i) < ab + \theta^{-1}b(h_i+1)-(h_i-1)a-(i+1)(h_i-1)$$

or N_ε est 2-hautement composé supérieur $\Rightarrow \theta^{-1}b-a \leq 2$

$$\Rightarrow d(M_i) < ab + 2(h_i+1) + 2a - (i+1)(h_i-1)$$

$$\Rightarrow d(M_i) < a(b+2) + 2(h_i+1) - (i+1)(h_i-1)$$

$$\Rightarrow d(M_i) < d(M_{-1}) + 2(h_i+1) - (i+1)(h_i-1)$$

or pour $i \geq 5$, $h_i \geq 2$ $\quad (i+1)(h_i-1) \geq 6(h_i-1) \geq 2(h_i+1)+4h_i-8 \geq 2(h_i+1)$

$$\Rightarrow d(M_i) < d(M_{-1}) \text{ pour } i \geq 5 .$$

Donc il reste à voir $0 \leq i \leq 4$ or pour $i \neq 0$ et $i \neq 2$, $M_i > M_{-1}$, donc M_{-1} ne peut être barré que par N_ε ou par M_2 .

<u>Cas</u> M_2 $\qquad d(M_2) = (a+3)b \quad , \quad d(M_{-1}) = a(b+2)$

or $\theta^{-1} b \leq a+2$ et $\theta^{-1} \# 1,584$

$\Rightarrow \frac{3}{2} b + 0,08 \leq a+2 \Rightarrow \frac{3}{2} b \leq a$ pour $b \geq 13 \Rightarrow d(M_{-1}) \geq d(M_2)$

pour $b \leq 12$ on peut le vérifier sur la table des nombres 2-hautement composés supérieurs.

<u>Exemple</u> : $N_\varepsilon = 2^3 3^2 \quad d(M_2) = d(2^5 3) = 12 \quad d(M_{-1}) = d(2^2 3^3) = 12$

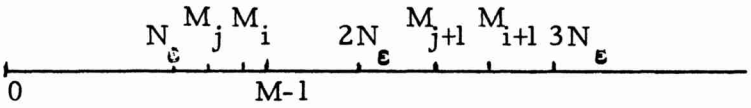
donc M_2 barre M_{-1} .

LEMME 2. - <u>Soit</u> $i \geq 0$ $\quad M_i$ <u>barré</u> $\Rightarrow M_{i+1}$ <u>barré</u>.

<u>Démonstration</u>. - On va comparer M_i à M_{-1} .

1°) $M_i < M_{-1}$: Soit M_j barrant M_i.

$$M_i < M_{-1} = \frac{3}{2} N_\varepsilon \Rightarrow M_{i+1} = 2\pi i$$



or M_i barré par $M_j \Rightarrow M_{j+1} < M_i$

$\Rightarrow 2M_j < 2M_i < 3N_\varepsilon \Rightarrow M_{j+1} = 2M_j$

$$\left.\begin{array}{l} d(M_{j+1}) = (a+j+2)\,(b-h_{j+1}) \\ d(M_{i+1}) = (a+i+2)\,(b-h_{i+1}) \end{array}\right. \Rightarrow \frac{d(M_{j+1})}{d(M_{i+1})} = \frac{(a+j+2)\,(b-h_{j+1})}{(a+i+2)\,(b-h_{i+1})}$$

si on pose $\quad c_j = a+j+2$

$\qquad d_j = b-h_{j+1} \qquad$ on a $\quad \dfrac{d(M_{j+1})}{d(M_{i+1})} = \dfrac{(c_{j+1})\,d_j}{(c_{i+1})\,d_i}$

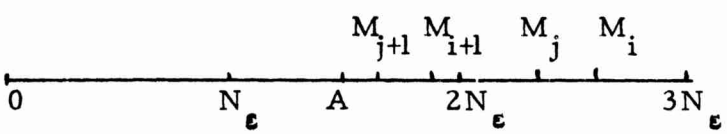
or M_j barre $M_i \Rightarrow c_j \cdot d_j \geq c_i\, d_i \qquad (1)$

de plus, d'après le lemme 1, on a bén. $M_j <$ bén. M_i , or croissance de (bén. M_i) pour $i \geq 0 \Rightarrow j < i \Rightarrow h_j < h_i \Rightarrow d_j > d_i \qquad (2)$.

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \frac{d(M_{j+1})}{d(M_{i+1})} \geq 1 \Rightarrow M_{i+1} \text{ est barré par } M_{j+1} .$$

2°) $M_i \geq M_{-1}$

a) $M_j \geq M_{-1}$



on a donc $M_{i+1} = \frac{2}{3} M_i$

$M_{j+1} = \frac{2}{3} M_j$

et donc $M_{j+1} < M_{i+1}$, de plus :

$$\frac{d(M_{j+1})}{d(M_{i+1})} = \frac{(a+j+2)\,(b-h_j)}{(a+i+2)\,(b-h_i)} = \frac{(c_{j+1})\,(d_{j-1})}{(c_{i+1})\,(d_{i-1})}$$

or M_j barre $M_i \Rightarrow j < i$ or $j < i \Rightarrow -c_j > -c_i$

$c_j\, d_j \geq c_i d_i$ et $d_j > d_i$

$$\Rightarrow \frac{d(M_{j+1})}{d(M_{i+1})} \geq 1 \Rightarrow M_{j+1} \text{ barre } M_{i+1} .$$

b) $M_j < M_{-1}$

Si $M_j = N_\varepsilon$, N_ε barre $M_i \Rightarrow d(N_\varepsilon) \geq d(M_i)$, or :

$$\left.\begin{array}{l} \text{bén. } M_{i+1} > \text{bén. } M_i \\ \\ g(i+1) < g(i) \end{array}\right\} \Rightarrow d(M_{i+1}) \leq d(M_i) \leq d(N_\varepsilon)$$

donc N_ε barre M_{i+1}

Si $M_j \neq N_\varepsilon$, $M_j < M_{-1}$ d'après le lemme 0 on a $d(M_j) \leq d(M_{-1})$

or M_j barre $M_i \Rightarrow M_{-1}$ barre $M_i \Rightarrow c\text{-}1\ d\text{-}1 \geq c_i\, d_i$, or :

$$\frac{d(N_\varepsilon)}{d(M_{i+1})} = \frac{c_o\, d_o}{(c_{i+1})(d_{i-1})} = \frac{(c_{-1}+1)(d_{-1}-1)}{(c_i+1)(d_i-1)}$$

or $c_{-1} < c_i$

et $d_{-1} > d_i$ $\Rightarrow \dfrac{d(N_\varepsilon)}{d(M_{i+1})} \geq 1 \Rightarrow N_\varepsilon$ barre M_{i+1} .

LEMME 2'. - <u>Soit</u> $-i \leq 0$, M_{-i} <u>barré</u> $\Rightarrow M_{-i-1}$ <u>barré</u>.

<u>Démonstration</u>. - On compare M_{-i} à M_1 les deux premiers cas sont similaires au lemme 2 pour le troisième il faut démontrer le lemme 0' .

LEMME 0'. - <u>Pour</u> $i > 0$ <u>tel que</u> $M_{-i} < M_1$ <u>alors</u> $d(M_{-i}) \leq d(M_1)$.

La condition $M_{-i} < M_1 \Rightarrow \theta^{-1}(h_i+1) < i+1$ et

$d(M_{-i}) = (a-i+1)(b+h_i+2) < ab+2b+a+2+2(i+1)+(h_i+1)(-i+1)-2$

donc : $d(M_{-i}) < d(M_1)$ pour $i > 4$

donc les seuls cas possibles sont M_{-1} et M_{-3} , or $d(M_{-1}) = d(\frac{3}{2} N_\varepsilon) = ab+2a$

et $d(M_{-3}) = d(\frac{9}{8} N_\varepsilon) = (a-2)(b+3)$ donc :

$$d(M_1)-d(M_{-1}) = 2b-a+2 \qquad d(M_1)-d(M_{-3}) = 2(2b-a+4)$$

or $a \leq \theta^{-1}(b+2) \leq (1,6)(b+2) = 2b+2+(1,2)-(0,4)b \leq 2b+2$ <u>pour</u> $b \geq 3$ <u>et</u> $d(M_1) \geq d(M_{-3})$.

Donc en appliquant successivement les lemmes 2 et 2' à partir de i_{o+1} et de $-i'_{o-1}$ on obtient la condition 2.

CONDITION 3.

LEMME 3. - $M_{i_{o+1}}$ <u>est barré par</u> $\max\limits_{\substack{-i'_o \leq j \leq i_o \\ M_j < M_{i_{o+1}}}} M_j$.

<u>Démonstration</u>. - Soit $M_{j_o} = \max\limits_{\substack{-i'_o \leq j \leq i_o \\ M_j < M_{i_{o+1}}}}$ et M_j le nombre qui barre M_i . On a

$M_j \leq M_{j_o} < M_{i_{o+1}}$ si $M_j = M_{i_o}$ problème résolu, donc on peut supposer

$M_j < M_{j_o} < M_{i_{o+1}}$ or $-i'_o \leq j_o \leq i_o$ donc M_{j_o} ne peut être barré par définition de i_o donc en particulier M_j ne barre par M_{j_o} or

$M_j < M_{j_o} \Rightarrow d(M_{j_o}) > d(M_j) \geq d(M_{i_{o+1}}) \Rightarrow M_{j_o}$ barre $M_{i_{o+1}}$.

Par une démonstration identique on obtient :

LEMME 3'. - $M_{-i'_o-1}$ <u>est barré par</u> $\max\limits_{\substack{-i'_o \leq j \leq i_o \\ M_j < M_{-i'_o-1}}} M_j$.

Les lemmes 3 et 3' donnent la condition 3.

<u>Conclusion</u> : On a donc démontré l existence de i_o et i'_o , pour un nombre 2-h-c supérieur mais la démonstration se généralise pour un nombre 2-h-c quelconque, maintenant nous allons essayer en se servant des 3 propriétés de i_o et i'_o d'obtenir une majoration de $i_o+i'_o$.

Pour cela on va essayer de ranger les nombres M_i dans l'ordre croissant des valeurs de M_i donc des valeurs de $g(i)$ et donc des valeurs de $i\frac{\log 2}{\log 3} - h_i = \{i\,\theta\}$.

On utilisera le théorème suivant pour ranger les $\{i\theta\}$ avec $-i'_o \leq i \leq i_o$ et θ un nombre irrationnel. On range les nombres $\{n\,\theta\}$ avec $N_1 \leq n \leq N_2$ N_1 , $N_2 \in \mathbb{Z}$ en une suite ordonnée

$$0 \leq \{n_o\theta\}\,,\ \{n_1\,\theta\}\,,\ldots,\ |n_N\,\theta| < 1 \qquad N = N_2 - N_1 \ .$$

Soit q_h le dénominateur du convergent principal de θ immédiatement $\leq N$, soit $r = [\frac{N-q_{h-1}}{q_h}]$ et $A = N - q_{h-1} - r\,q_h$ (on a donc $0 \leq A \leq q_{h-1}$) alors la famille

$$\begin{cases} \delta_i = n_{i+1} - n_i \\ \delta_N = n_o - n_N \end{cases}$$

défini pour $0 \leq i \leq N-1$ prend au plus 3 valeurs

1) $\delta_i = (-1)^h\,q_h$ lorsque $N_1 \leq n_i + (-1)^h\,q_h \leq N_2$

2) $\delta_i = (-1)^{h-1}\,(r\,q_h + q_{h-1})$ sinon et si $N_1 \leq n_i + (-1)^{h-1}(r\,q_h + q_{h-1}) \leq N_2$

3) $\delta_i = (-1)^{h-1}((r-1)\,q_h + q_{h-1})$ sinon.

Donc en introduisant $M_{i_{o+1}}$ et en écrivant qu'il est barré par celui qui le précède et de même pour $M_{-i'_{o-1}}$ on essayera d'obtenir une majoration de $i_o + i'_o$ en fonction de a_ε ce qui donnera

$$q(X) \leq c(\log X)^{1+K}$$

et l'on pense que

$$\frac{1}{3} < K < \frac{1}{2} \quad .$$

§. 5. - <u>Problèmes de programmation mathématiques à coefficients entiers</u>

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y \leq c \\ \max\ (x+1)(y+1) \end{cases} \qquad a_1 \text{ et } a_2 \text{ entiers.}$$

a) <u>Introduction</u>

On a le problème de programmation $\begin{matrix} x \log 2 + y \log 3 \leq c \\ \max\ (x+1)\ (y+1) \end{matrix}$

et l'on cherche à voir le rapport entre ce problème et les problèmes de la forme

$$\begin{cases} p_h x + q_h y \leq c \\ \max\ (x+1)\ (y+1) \end{cases}$$

où $\frac{p_h}{q_h}$ est un convergent dans le développement en fraction continue de $\theta = \frac{\log 2}{\log 3}$.

b) <u>Résultats généraux</u>

1) $$(I)\begin{cases} a_1 x + a_2 y = c \\ \max\ (x+1)\ (y+1) \end{cases} .$$

La solution réelle de (I) est $y^* = \frac{c+a_1-a_2}{2a_2}$ $\quad x^* = \frac{c+a_2-a_1}{2a_1}$.

2) Si (x, y) est la solution entière du problème I, alors :

$$|x-x^*| \leq \frac{a_2}{2} \quad , \quad |y-y^*| \leq \frac{a_1}{2} \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Si l'on pose $X = x-x^*$, $Y = y-y^*$, le problème I devient :

$$\begin{cases} a_1 X + a_2 Y \\ \max \left(\frac{c+a_1+a_2}{2a_1} + X\right) \left(Y + \frac{c+a_1+a_2}{2a_2}\right) \end{cases}$$

équivalent à :

$$\begin{cases} X + x^* \in \mathbb{Z} \\ Y + y^* \in \mathbb{Z} \\ a_1 X + a_2 Y = 0 \\ |X| \text{ minimum.} \end{cases}$$

Soit (X_o, Y_o) tel que $X_o + x^* \in \mathbb{Z}$, $Y_o + y^* \in \mathbb{Z}$ et $a_1 X_o + a_2 Y_o = 0$.

Alors $\exists h$ tel que $h\, a_2 \leq X_o < (h+1)\, a_2$.

Donc $0 \leq X_o - h\, a_2 < a_2$. Deux cas sont possibles :

a) $X_o - h\, a_2 < \frac{a_2}{2}$, donc $|X_o - h\, a_2| < \frac{a_2}{2}$;

b) $X_o - h\, a_2 \geq \frac{a_2}{2}$, donc $0 > X_o - (h+1)\, a_2 \geq -\frac{a_2}{2}$;

donc $|X_o - (h+1) a_2| \leq \frac{a_2}{2}$.

Donc la solution (X_1, Y_1) du problème est telle que $|X_1| \leq \frac{a_2}{2}$ et donc $|Y_1| = |-\frac{a_1 X}{a_2}| \leq \frac{a_1}{2}$.

Donc la solution (x_1, y_1) est telle que $|x_1 - x^*| \leq \frac{a_2}{2}$ et $|y_1 - y^*| \leq \frac{a_2}{2}$.

Pour $c > \frac{a_1^2 a_2^2 - 2a_1 - 2a_2 + 1}{2}$ alors la résolution du

problème II $\begin{cases} a_1 x + a_2 y \leq c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases}$ revient à la solution du

problème I $\begin{cases} a_1 x + a_2 y = c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases}$.

<u>Démonstration.</u> - Il suffit de prouver que pour $c > \frac{a_1^2 a_2^2 - 2a_1 - 2a_2 + 1}{2}$

si (x', y') solution de I avec $c-1$ et (x, y) solution de I avec c , alors

$(x'+1)(y'+1) < (x+1)(y+1)$.

Or (x', y') solution de I avec $c-1 \Rightarrow (x'+1)(y'+1) \leq (x'^*+1)(y'^*+ \frac{(c-1 + a_1+a_2)^2}{4a_1a_2}$

(x, y) solution de c si $X = x-x^*$ on a :

$$(x+1)(y+1) = -\frac{a_1}{a_2} X^2 + \frac{(c+a_1+a_2)^2}{4a_1a_2}$$

or 2) donne $|X| \leq \frac{a_2}{2} \Rightarrow (x+1)(y+1) \geq -\frac{a_1a_2}{4} + \frac{(c+a_1+a_2)^2}{4a_1a_2}$

donc pour $c > \frac{a_1^2 a_2^2 - 2a_1 - 2a_2 + 1}{2} \Rightarrow (x+1)(y+1) > (x'+1)(y'+1)$.

c) <u>Résolution de</u>

$$I \quad \begin{cases} p_{2n}\, x + q_{2n}\, y = c \\ \max\,(x+1)(y+1)\ . \end{cases}$$

Si l'on prend $c_m = 2m\, p_{2n} q_{2n} - p_{2n} - q_{2n}$ la solution pour c_m sera $x_o^m = m\, q_{2n} - 1$, $y_o^m = m\, p_{2n} - 1$, on appellera c_m une borne très supérieure.

On connaît la solution de I pour c_m , de même pour $c_{m+1} = c_m + 2a_1 a_2$

On va essayer d'étudier le problème pour $c_{m+\ell}$ avec $0 < \ell < 2a_1 a_2$.

α) c_{m+1}

$$I \quad \begin{cases} p_{2n}\, x + q_{2n}\, y = c_{m+1} \\ \max\,(x+1)\,(y+1) \end{cases}$$

la solution de I est de la forme $(x_o^m + i\ ,\ y_o^m + j)$, or :

$$p_{2n} x + q_{2n} y = c_{m+1} \Rightarrow p_{2n} i + q_{2n} j = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i = -q_{2n-1} + h\, q_{2n} \\ j = p_{2n-1} - h\, p_{2n}\ . \end{cases}$$

Donc la solution est à prendre parmi les $M_h = (-q_{2n-1} + h\, q_{2n}\ ,\ p_{2n-1} - h\, p_{2n})$;

pour choisir il faut étudier $(x_o - q_{2n-1} + h\, q_{2n} + 1)(y_o + p_{2n-1} - h\, p_{2n} + 1)$ polynôme en h maximum pour $h_1 = [[\ \dfrac{2p_{2n} q_{2n-1} + 1}{2p_{2n}\, q_{2n}}\ ]]$ (entier le plus proche) alors M_{h-1}^m <u>est la solution</u> (il peut y en avoir deux $[[\,0,5]]$).

β) $c_{m+\ell}$ à partir de $M_{h\ell-1}$ par le même raisonnement on a :

$$M_{h\ell}^m = (x_o^m - \ell\, q_{2n-1} + h\, \ell\, q_{2n}\ ,\ y_o^m + \ell\, p_{2n-1} - \ell\, p_{2n})$$

avec $h\ell = [[\ \ell\,(\dfrac{2p_{2n}\, q_{2n-1} + 1}{2p_{2n}\, q_{2n}})]]$.

d) <u>Résolution de</u> $I' \begin{cases} p_{2n-1}x + y_{2n-1}y = c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases}$

on a pour $c_{m+\ell}$ $\quad M^m_{h\ell} = (x^m_o + \ell\, q_{2n-2} + h\ell\, q_{2n-1}\ ,\ y^m_o - \ell\, p_{2n-2} - h\ell\, p_{2n-1})$

avec $\quad h\ell = [[-\dfrac{\ell(2p_{2n-1}\, q_{2n-2} - 1)}{2p_{2n-1}\, q_{2n-1}}]]$

<u>Cas particulier</u> : $p_3 = 2$, $q_3 = 3$, $h\ell = [[-\ell\frac{7}{12}]]$

c_{m+1} (3m-2 , 2m)	c_{m+2} (3m , 2m-1)	c_{m+3} (3m-1 , 2m)
c_{m+4} (3m+1 , 2m-1)	c_{m+5} (3m , 2m)	c_{m+6} (3m+2 , 2m-1) (3m-1 , 2m+1)
c_{m+2} (3m+1 , 2m)	c_{m+8} (3m , 2m+1)	c_{m+9} (3m+2 , 2m)
c_{m+10} (3m+1 , 2m+1)	c_{m+11} (3m+3 , 2m)	c_{m+12} (3m+2 , 2m+1)

e) <u>Résolution de</u> $\begin{cases} p_{2n}\ x + q_{2n}y \leq c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases}$ et $\begin{cases} p_{2n-1}x + q_{2n-1}y \leq c \\ \max (x+1)(y+1) \end{cases}$

par le même raisonnement que pour le résultat 3) on voit que pour $m > \dfrac{a_1 a_2}{4}$ les solutions de ces problèmes coïncident avec les solutions des problèmes I et I' ; ont dit que l'on a alors le régime permanent. Si l'on veut faire une étude avant le régime permanent et si l'on pose $\theta_\ell = h\ell - \ell\,\dfrac{(2p_{2n}\, q_{2n-1} + 1)}{2p_{2n}\, q_{2n}}$

cas pair, on aura pas de solutions pour les valeurs de $\ell+1$ tel que

$$\theta^2_{\ell+1} - \theta^2_\ell \geq \frac{4m\, a_1 a_2 + 2\ell + 1}{4\, a_1^2\, a_2^2}$$

-:-:-:-

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. RAMANUJAN, Highly composite numbers, Proc. London math. soc. series 2, t. 14, 1915, p. 347-409.

[2] J.-L. NICOLAS, Répartition des nombres hautement composés de Ramanujan. Canadian Journal of Math. vol. 23, n°1, 1971, p. 116-130.

-:-:-:-

Gérard BESSI
U.E.R. des Sciences de Limoges
Département de Mathématiques
123, rue Albert Thomas
87100 LIMOGES