Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae

14,1 (1973)

О РАЗЛОЖЕНИИ КОНЕЧНО-АДДИТИВНОЙ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВА

И.И. АЛЕКСАНДРОВ, Куйбышев

Содержание: Пусть Σ_0 некоторая алгебра подмножеств множества S. Через $ba = ba(S, \Sigma_0)$ обозначается пространство вещественных функций множества, определенных, конечно-аддитивных и ограниченных на Σ_0 ([1],стр. 261). В [2] показано, что для каждой функции $\nu \in ba$ существует разложение на абсолютно непрерывную и сингулярную части относительно любой функции $\lambda \in ba$. В этой заметке менее сложным путем доказывается несколько более общее утверждение: упомянутое разложение возможно и без предположения о том, что $\lambda \in ba$.

Ключевые слова: Конечно-аддитивная функция множества, абсолютно непрерывная часть, сингулярная часть

AMS, Primary: 28A10 Ref. Ž. 7.518.117

Итак, пусть λ определена и конечно-аддитивна на Σ_0. Положим $\tau(e) = v(\lambda, e)$, $e \in \Sigma_0$. Через Σ обозначим класс тех множеств из Σ_0, на которых τ конечна. Этот класс упорядочим, считая, что $a \leq e$ равносильно $a \subset e$. Конечно-аддитивную на Σ_0 функцию μ назовем усиленно абсолютно непрерывной относительно λ, если выполняются условия:

A1) $\lim\limits_{\tau(e)\to 0} v(\mu, e) = 0$; A2) $\lim\limits_{e \in \Sigma} v(\mu, e') = 0$.

Если $e \in \Sigma_0$, то функция $\mu \cdot e$ определяется равенством $(\mu \cdot e)(a) = \mu(a e)$, $a \in \Sigma_0$. Множество ba естественно упорядочивается ([1], стр. 179). Мы говорим, что $\nu \in$ $\in \mathfrak{ba}$ сингулярна относительно λ, если $v(\nu) \wedge \tau \cdot e = 0$ для всех $e \in \Sigma$. Если $v(\lambda, S) < +\infty$, то мы приходим к определениям абсолютной непрерывности и сингулярности, принятым в [2].

§ 1.

Теорема 1. Если $\mu \in \mathfrak{ba}$, то существует единственное представление $\mu = \mu_1 + \mu_0$, где μ_1 усиленно абсолютно непрерывна относительно λ и μ_0 сингулярна относительно λ.

Доказательство использует теорию полуупорядоченных пространств [3]. Как известно, $\mathfrak{ba}$ является K-пространством или, что то же, (условно) полной линейной структурой ([1], стр. 180). Если в качестве нормы элемента $\mu \in \mathfrak{ba}$ взять $v(\mu, S)$ то $\mathfrak{ba}$ будет так называемым KB-пространством. Это следует из общих результатов, приведенных в [3] (стр. 215, 217).

Через $V^1(\tau) = V^1(S, \Sigma, \tau)$ обозначим множество функций, удовлетворяющих условиям A1) и A2). По A2) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $e \in \Sigma$, что $v(\mu, e') < \varepsilon$. Из условия A1) следует, что $\mu \cdot e$ абсолютно непрерывна относительно $\tau \cdot e$. Функция, абсолютно непрерывная относительно ограниченной функции, сама ограничена ([5], стр. 529). Таким образом $v(\mu, e) < +\infty$. Следовательно, $v(\mu, S) < +\infty$. Итак, $V^1(\tau) \subset \mathfrak{ba}$. Определение множества $V^1(\tau)$, данное здесь, эквивалентно приведенному в [4] (стр. 9). Там же доказано, что это множество является подпространством пространства ba . Из результатов, приведенных в [6] (стр. 21) следует, что $V^1(\tau)$ также является KB -пространством.

Очевидно, что $v(\mu) \leq v(\nu) \in V^1(\tau)$ влечет $\mu \in V^1(\tau)$ (т.е. $V^1(\tau)$ нормально содержится в ba). Если KB -пространство нормально содержится в другом KB -пространстве, то оно является его компонентой. Это утверждение по существу доказано хотя и не сформулировано явно в [3] (стр. 222, артикул 2.63). Таким образом, $V^1(\tau)$ является компонентой пространства ba .

Множество функций $\nu \in ba$, сингулярных относительно λ , обозначим через V . Докажем, что если $\nu \in V$ и $\sigma \in V^1(\tau)$, то $v(\nu) \wedge v(\sigma) = 0$ (т.е. множества V и $V^1(\tau)$ дизъюнктны [3] (стр. 32)). Пусть сначала $\sigma = \sum_i x_i \tau \cdot e_i$, $e_i \in \Sigma$, $i = \overline{1, i(\sigma)}$, множества e_i попарно не пересекаются. Такие функции в [4] называются ступенчатыми. Поскольку $v(\sigma) \wedge v(\nu) =$

$$= (\sum_i |x_i| \tau \cdot e_i) \wedge v(\nu) \leq \sum_i |x_i| (\tau \cdot e_i \wedge v(\nu))$$

([3], стр. 27) и $\tau \cdot e_i \wedge v(\nu) = 0$, то $v(\sigma) \wedge v(\nu) = 0$. Для произвольной функции $\sigma \in V^1(\tau)$ существует последовательность ступенчатых функций $\{\sigma_m\}$, сходящаяся по норме к σ ([4], стр. 9). Так как операция $\wedge$ непрерывна ([3], стр. 211), то из $v(\nu) \wedge v(\sigma_m) = 0$ следует $v(\nu) \wedge v(\sigma) = 0$. Обратно, если $v(\nu) \wedge v(\sigma) = 0$ для всех $\sigma \in V^1(\tau)$, то в частности $v(\nu) \wedge \tau \cdot e = 0$ при любом $e \in \Sigma$. Следовательно, $\nu \in V$. Это означает, что V является дизъюнктным дополнением компоненты $V^1(\tau)$.

Дизъюнктное дополнение компоненты само является компонентой, и эти две компоненты образуют разложение исходного пространства ([3], стр. 63, 66). Теперь из общих принципов теории K-пространств (см. [3], стр. 66-67, а также стр. 35) следует, что каждый элемент $\mu \in ba$ единственным образом представим в виде $\mu = \mu_1 + \mu_0$, где $\mu_1 \in V^1(\tau)$, $\mu_0 \in V$. Теорема доказана.

§ 2.

В этом параграфе вышеизложенное применяется к теории пространства $V^1(\tau)$. Мы охарактеризуем элементы этого пространства в терминах упорядоченности.

Заметим сначала, что при каждом $e \in \Sigma_0$ множество функций вида $\mu \cdot e$, $\mu \in ba$ является компонентой пространства ba. Через P_e обозначим оператор проектирования на эту компоненту. Оператор проектирования на компоненту $V^1(\tau)$ обозначим через P. Отметим, что если $\mu \in ba$, то $P_e \mu = \mu \cdot e$ и $P\mu = \mu_1$, где μ_1 усиленно абсолютно непрерывная часть функции μ (см. теор. 1).

<u>Теорема 2</u>. Если $0 \le \nu \in ba$, то $P\nu = \sup\{\nu \wedge n\tau \cdot e\}$, где $\sup$ берется по всем $e \in \Sigma$ и $n = \overline{1, +\infty}$.

<u>Доказательство</u>. Поскольку $0 \le \nu \wedge n\tau \cdot e \in V^1(\tau)$, то из определения оператора проектирования ([3], стр. 63) следует $\nu \wedge n\tau \cdot e \le P\nu$. Поэтому $\sup\limits_{e,n}\{\nu \wedge n\tau \cdot e\} \le P\nu$. С другой стороны, применяя формулу (1.8) из [4] (стр. 4), можно заключить, что $0 \le P\nu \in V^1(\tau)$ влечет $P\nu = \sup\limits_{a \in \Sigma}\{P\nu \cdot a\}$ или, что то же самое, $P\nu = \sup\limits_{a \in \Sigma}\{P_a P\nu\}$. Пусть $\Sigma(e) = \{a : a \in \Sigma, a \subset e\}$. Функция $\tau \cdot e$ является

единицей ([3], стр. 89) пространства $V^1(e, \Sigma(e), \tau \cdot e)$, и $P_e P\nu$ принадлежит этому пространству. Применив лемму IV. 2.1 из [7] (стр. 97), получим

$$P_e P\nu = \sup_m \{P_e P\nu \wedge m\tau \cdot e\} = \sup_m \{P\nu \wedge m\tau \cdot e\} .$$

Поскольку $P\nu = \sup_{e \in \Sigma} \{P_e P\nu\}$ и $P\nu \leq \nu$, то $P\nu \leq \sup_{e,m} \{\nu \wedge m\tau \cdot e\}$. Обратное неравенство было получено выше.

Следствие. Если $0 \leq \nu \in ba$, то $\nu \in V^1(\tau)$ равносильно $\nu = \sup_{e,m} \{\nu \wedge m\tau \cdot e\}$.

В дальнейшем операция $\wedge$ рассматривается в упорядоченном множестве всех функций, конечно-аддитивных на Σ_0

Теорема 3. Если $0 \leq \nu \in ba$, то $P\nu$ является единственным минимальным элементом множества

$$E = \{\mu : 0 \leq \mu \leq \nu, \ (\nu - \mu) \wedge \tau = 0\} .$$

Доказательство. Пусть $0 \leq \mu \leq P\nu$ и $(\nu - \mu) \wedge \tau = 0$. Поскольку $P\nu - \mu \leq \nu - \mu$, то $(P\nu - \mu) \wedge \tau = 0$. Тем более $[(P\nu - \mu) \cdot e] \wedge \tau \cdot e = 0$ при всех $e \in \Sigma$. Так как $0 \leq (P\nu - \mu) \cdot e \in V^1(e, \Sigma(e), \tau \cdot e) = V^1(\tau \cdot e)$ и $\tau \cdot e$ является единицей пространства $V^1(\tau \cdot e)$, то $(P\nu - \mu) \cdot e = 0$. Итак, $(P\nu)(e) = \mu(e)$ при всех $e \in \Sigma$, т.е. $P\nu = \mu$. Это значит, что $P\nu$ является минимальным элементом множества E.

Пусть $\sigma = \min E$. Посколку $(\nu - \sigma \wedge P\nu) \wedge \tau = [(\nu - P\nu) \wedge \tau] \vee [(\nu - \sigma) \wedge \tau] = 0$ и $\sigma \wedge P\nu \leq \nu$, то $\sigma \wedge P\nu \in E$. Из $\sigma \wedge P\nu \leq P\nu$ следует (по первой части доказательства) $\sigma \wedge P\nu = P\nu$, что равносильно $P\nu \leq \sigma$.

Отсюда $P\nu = \sigma$, ибо σ минимальный элемент E.

<u>Следствие</u>. Пусть $0 \leq \nu \in ba$. Тогда:

1) $\nu \in V^1(\tau)$, если и только если $\{\nu\} = \{\mu : 0 \leq \mu \leq \nu, (\nu - \mu) \wedge \tau = 0\}$;

2) $0 \leq \mu \leq P\nu$, если и только если $0 \leq \mu \leq \nu$ и $\mu \in V^1(\tau)$;

3) $0 \leq \mu = P\nu$, если и только если $\mu \in V^1(\tau)$ и $(\nu - \mu) \wedge \tau = 0$.

Литература

[1] Н. ДАНФОРД и Дж. ШВАРЦ: Линейные операторы. Общая теория. Москва, НИЛ, 1962.

[2] R. DARST: A decomposition of finitely additive set functions. J. reine und angew. Math., 210, No 1-2 (1962), 31-37.

[3] Л.В. КАНТОРОВИЧ, Б.З. ВУЛИХ, А.Г. ПИНСКЕР: Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Москва-Ленинград, ГИТТЛ, 1950.

[4] И.И. АЛЕКСАНДРОВ: О банаховых пространствах функций множества и аналитическом представлении некоторых классов линейных операторов, I. Изв. вузов, Математика, № 11, 1968, 3-11.

[5] S. LEADER: The theory of L^p-spaces for finitely additive set functions. Ann. Math., 58, No 3 (1953), 528-543.

[6] И.И. АЛЕКСАНДРОВ: О банаховых пространствах функций множества и аналитическом представлении некоторых классов линейных операторов, II. Изв. вузов, Математика, № 12 (1968), 16-23.

7 Б.З. ВУЛИХ: Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Москва, Физматгиз, 1961.

В У З

Куйбышев

СССР

(Oblatum 20.9. 1972)