STRUČNÉ CHARAKTERISTIKY ČLÁNKŮ OTIŠTĚNÝCH V TOMTO ČÍSLE V CIZÍM JAZYKU

VLASTA PEŘINOVÁ, Olomouc: *Branching of solution of algebraic integral equation.* (Větvení řešení algebraické integrální rovnice.)

V článku je uvažována obecná algebraická integrální rovnice za určitých předpokladů o zadaných funkcích. Je studováno chování řešení $y_0(s)$ existujícího pro hodnotu μ_0 parametru μ v okolí bodu μ_0. Na základě teorie lineárních integrálních rovnic je dokázáno, že v okolí bodu μ_0 existuje různý počet řešení dané rovnice ve tvaru řady podle určitých mocnin $(\mu - \mu_0)$ v závislosti na tom, zda číslo 1 je nebo není vlastní hodnotou určitého jádra. Studují se případy, kdy číslo 1 není vlastní hodnotou a kdy je vlastní hodnotou p-násobnou.

VLASTA PEŘINOVÁ, Olomouc: *On the nonhomogeneous algebraic integral equation.* (O nehomogenní algebraické integrální rovnici.)

V práci je pro obecnou nehomogenní algebraickou integrální rovnici dokázána za určitých předpokladů věta o existenci a jednoznačnosti řešení, jehož norma je ohraničena malým předem daným číslem.

BRUNO BUDINSKÝ, Praha: *The Gauss and Gauss-Codazzi-Ricci equations for rheonomous anholonomic manifold.* (Gaussovy a Gauss-Codazzi-Ricciho rovnice pro reonomní anholonomní varietu.)

V práci je definována m-rozměrná reonomní anholonomní varieta, která je v jistém smyslu zobecněním anholonomní variety L_n^m ležící v prostoru L_n s afinní konexí. Pro reonomní varietu jsou odvozeny (v tenzorovém tvaru) základní rovnice Gaussovy a podmínky integrability těchto rovnic tzv. Gauss-Codazzi-Ricciho. rovnice

BRUNO BUDINSKÝ, Praha: *Parallel displacement of vectors on rheonomous anholonomic manifold.* (Paralelní přenos vektorů na reonomní anholonomní varietě.)

V práci je ukázáno, že paralelní přenos vektorů na anholonomní varietě lze pro případ reonomní anholonomní variety několika různými způsoby zobecnit.

VLASTA PEŘINOVÁ, Olomouc: *Countable infinity of eigenvalues of symmetric algebraic integral equation.* (Spočetnost vlastních hodnot symetrické algebraické integrální rovnice.)

Pro homogenní symetrickou algebraickou integrální rovnici n-tého řádu je studována mohutnost množiny vlastních hodnot. Pomocí teorie větvení řešení je za určitých předpokladů dokázána spočetnost této množiny. Na základě souvislosti algebraických integrálních rovnic s lineárními integrálními rovnicemi je provedeno srovnání s výsledky z teorie těchto rovnic. Speciálně je vyšetřována rovnice druhého řádu.

KAREL KARTÁK, Praha: *An $\mathscr{L}^*$-convergence in differential equations.* ($\mathscr{L}^*$-konvergence v diferenciálních rovnicích.)

Je dána nutná a postačující podmínka pro spojitou závislost jisté třídy lineárních diferenciálních rovnic na parametru.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

RŮZNÉ

POZNÁMKA O NORME V PRIESTOROCH $L_\infty(S, \mu)$

IVAN SINGER, Řež u Prahy

(Došlo dňa 11. Januára 1968)

Podľa [1], $L_\infty(S, \mu)$ je lineárny priestor podstatne ohraničených merateľných reálnych funkcií na merateľnej množine S so spočetnou additívnou nezápornou mierou μ a s normou $\|f\| = \operatorname{vrai\,sup}_\mu |f(s)| = \inf_N \sup_{s \in S-N} |f(s)|$, kde $v(\mu, N)$ je totálna variácia μ na N a $v(\mu, N) = 0$. Z vlastností $L_\infty(S, \mu)$ okamžite plynie, že ak $f \in L_\infty(S, \mu)$, potom

(i) existuje nulová množina $M \subset S$ tak, že $\|f\| \sup_{s \in S-M} |f(s)|$ a pre každé $\xi < \|f\|$ existuje $M_\xi \subset S - M$, že $\mu(M_\xi) > 0$ a $|f(s)| \geqq \xi$ pre $s \in M_\xi$.

(ii) ak $f, g \in L_\infty(S, \mu)$ sú L-integrabilné funkcie, potom

$$\int_S |f(s)\, g(s)|\, \mu(ds) = \alpha \,.\int_S |g(s)|\, \mu(ds) \quad \text{kde} \quad 0 \leqq \alpha \leqq \|f\|\,.$$

Platí:

Veta. *Nech $f \in L_\infty(S, \mu)$ je $L-$ integrabilná funkcia a nech $\|f\| = 1$ potom*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_S |f(s)|^{n+1}\, \mu(ds)}{\int_S |f(s)|^n\, \mu(ds)} = 1 \quad \text{pre} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Dôkaz. Podľa (ii) je

$$\int_S |f(s)|^{n+1}\, \mu(ds) = \alpha_n \int_S |f(s)|^n\, \mu(ds)\,,$$

kde $0 < \alpha_n \leqq \|f\| = 1$ a teda postupnosť α_n je ohraničená s 1. Naviac platí, že $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$. V opačnom prípade by existovalo η, $0 < \eta < 1$ a nekonečná postupnosť n_i taká, že $\alpha_{n_i} \leqq \eta < \xi < 1$, kde ξ je ľubovoľné číslo z intervalu $(\eta, 1)$. Potom

$$p_{n_i} = \frac{\frac{1}{\xi}\int_S |f(s)|^{n_i+1}\,\mu(ds)}{\int_S |f(s)|^{n_i}\,\mu(ds)} \leqq \frac{\eta}{\xi} < 1\,.$$

Označme $f_\xi(s) = f(s)/\xi$. Podľa (i) existuje $M_\xi \subset S$, $\mu(M_\xi) > 0$ tak, že $\xi \leqq |f(s)| \leqq 1$ pre každé $s \in M_\xi$ a $1 \leqq |f_\xi(s)| \leqq 1/\xi = \|f_\xi\|$ pre všetky $s \in M_\xi$. Môžeme písať

$$p_{n_i} = \frac{\int_S |f_\xi(s)|^{n_i+1}\,\mu(ds)}{\int_S |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds)} = \frac{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i+1}\,\mu(ds) + \int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i+1}\,\mu(ds)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds) + \int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds)} =$$

$$= \frac{\alpha_{n_i}^{(\xi)} \int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds) + \int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i+1}\,\mu(ds)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds) + \int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds)}\,,$$

kde $1 \leqq \alpha_{n_i}^{(\xi)} \leqq 1/\xi$, použijúc (ii). Je zrejme, že $\lim_{n_i \to \infty} \int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds) = +\infty$ a $\lim_{n_i \to \infty} \int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds) = 0$, pretože $|f_\xi(s)| < 1$ na $S - (M \cup M_\xi)$. Potom platí

$$\lim_{n_i \to \infty} \frac{\int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i+1}\,\mu(ds)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds)} = \lim_{n_i \to \infty} \frac{\int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds)} = 0$$

a pre $\varepsilon = (\xi - \eta)/2\eta$ existuje také n_j, že pre všetky $n_i > n_j$ je

$$0 \leqq \frac{\int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds)} < \frac{(\xi - \eta)}{2\eta}$$

a potom

$$p_{n_i} = \frac{\alpha_{n_i}^{(\xi)} + \dfrac{\int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i+1}\,\mu(ds)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds)}}{1 + \dfrac{\int_{S-M_\xi} |f_\xi(s)|^{n_i}\,\mu(ds)}{\int_{M_\xi} |f_\xi(s)^{n_i}\,\mu(ds)}} \geqq \frac{\alpha_{n_i}^{(\xi)}}{1 + \dfrac{(\xi - \eta)}{2\eta}} \geqq \frac{1}{1 + \dfrac{(\xi - \eta)}{2\eta}} = \frac{2\eta}{\eta + \xi} > \frac{\eta}{\xi}\,,$$

čo je v rozpore s predpokladom, že pre všetky n_i platí $p_{n_i} \leqq \eta/\xi$.

Dôsledok. *Nech $f \in L_\infty(S, \mu)$ je integrabilná funkcia s kladnou normou. Potom*

$$\|f\|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_S f(s)^{2(n+1)}\,\mu(ds)}{\int_S f(s)^{2n}\,\mu(ds)}.$$

Dôsledok je zrejmy ak v predchádzajúcej vete uvažujeme funkciu $\Phi(s) = f(s)^2/\|f\|^2$.

Literatúra

[1] *N. Dunford, J. T. Schwartz:* Линейные операторы, Москва 1962.

Adresa autora: Řež u Prahy (Ústav jaderného výzkumu ČSAV).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

VEDECKÁ PRÁCA PROF. K. PETRA V OBLASTI TEÓRIE ČÍSEL*)

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava

Vážení prítomní!

Je veľmi ťažko v takomto krátkom príhovore, ak mám pritom zachovať rozumné proporcie, pojednať podrobnejšie o Petrových prácach z teórie čísel.

Keď som opätovne prezrel súbor jeho vedeckých prác napočítal som 22 pôvodných prác, ktoré jednoznačne patria do teórie čísel. Tým ale nie je povedané, že by metódy teórie čísel neboli obsiahnuté aj v mnohých ďalších prácach, a to nielen v prácach algebraického charakteru, ale aj v prácach pojednávajúcich napr. o Bernouilliho číslach a Bernouilliho polynómoch.

Číselne teoretické práce prof. Petra sa týkajú zhruba týchto odborov:

a) Práce z elementárnej teórie čísel.
b) Aritmetická teória foriem.
c) Počet tried kvadratických foriem a analytická teória čísel.
d) Teória algebraických čísel.

Prehovorím postupne o jednotlivých úsekoch.

Petr prednášal často teóriu čísel a niektoré jeho práce z elementárnej teórie čísel sú zrejme výsledkom snahy zlepšovať a zjednodušovať dôkazy. Tak napr. jeho dôkaz kvadratického zákona reciprocity z roku 1933 je najkratší, ktorý poznám. Pritom je veľmi prehľadný.

Jedna z význačných prác z elementárnej teórie čísel je práca o Pellovej rovnici, kde ukázal, aký je vzťah medzi riešiteľnosťou rovnice $x^2 - dy^2 = 1$ $(d > 0)$ a rovnicami $d_1x^2 - d_2y^2 = \pm 1, \pm 2$, kde $d_1d_2 = d$, $d_1 < d_2$.

Iná z jeho prác podáva nový dôkaz vety o minimu kvadratickej formy

$$\min \left| \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k \right| < \left(\tfrac{4}{3}\right)^{(n-1)/2} . \sqrt[n]{|D|}$$

(pritom sú x_i celé čísla, nie všetky rovné nule a D je diskriminant kv. formy).

Z aritmetickej teórie foriem napísal niekoľko prác o kompozícii foriem.

*) Prejav prednesený na oslave 100 rokov od narodenia prof. Karla Petra dňa 7. júna 1968.

Už tieto drobné ukázky dokazujú, že v samotnej teórii čísel bol prof. Petr veľmi mnohostranný. Pravda (a uvádzam to hlavne pre mladých tu prítomných priateľov) bolo to v období, keď rozvoj matematiky nemal ešte taký búrlivý trend ako za posledných 25–30 rokov.

Veľký počet Petrových prác týka sa použitia teórie eliptických funkcií na problémy číselnej teórie.

Ako je známe eliptické funkcie dajú sa vyjadriť pomocou štyroch tzv. ϑ-funkcií $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$. To sú rýchlo konvergujúce nekonečné rady. Tak napr. funkcia $\vartheta_3(z)$ je definovaná takto:

$$\vartheta_3(z) = 1 + 2q \cos 2\pi z + 2q^4 \cos 4\pi z + 2q^9 \cos 6\pi z + \dots,$$

kde $q = e^{i\pi\tau}$ a číslo τ leží v hornej polrovine. Je to teda funkcia dvoch premenných z a τ. Pri pevnom τ je to celistvá funkcia z, pri pevnom z regulárna funkcia τ v hornej polrovine.

Vlastnosti týchto špeciálnych funkcií boli v druhej polovine minulého storočia predmetom podrobného záujmu matematikov. Existuje mnoho vzťahov medzi týmito funkciami a eliptickými funkciami $\wp$, σ, ζ. Sú známe rozmanité transformácie ϑ-funkcií, ich trigonometrické rozvoje, rozmanité adičné teorémy, atď. Treba poznamenať, že štúdium týchto funkcií značne prispelo k rozvoju matematickej analýzy v komplexnom obore.

Ako tieto funkcie súvisia s číselnou teóriou vyložím na veľmi jednoduchom príklade.

Uvažujme napr. rozvoj

$$[\vartheta_3(0)]^4 = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} r_4(n) \,.\, q^n .$$

Je zrejmé, že číslo $r_4(n)$ dáva počet riešení rovnice $n = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ v celých číslach. Ak dokážeme napr. že $r_4(n) > 0$, pre každé celé číslo $n > 0$, dokážeme tým túto Lagrangeovu vetu: Každé celé číslo $n > 0$ sa dá písať ako súčet 4 štvorcov. To je skutočne pravda. (Naviac podrobný výpočet čísla $r_4(n)$ dáva rovnosť $r_4(n) = 8 \sum_{d|n, 4 \neq d} d$.)

Petr sa zaoberal predovšetkým iným problémom. Uvažujme o všetkých kvadratických formách s celočíselnými koeficientmi $ax^2 + bxy + cy^2$, ktoré majú pevný diskriminant $d = b^2 - 4ac$. Takých je, pravda, mnoho. Nazvime dve formy (a, b, c), (a', b', c') ekvivalentnými, ak jedna prejde v druhú lineárnou substitúciou $x = r\xi + s\eta$, $y = t\xi + u\eta$, $ru - ts = 1$. Dá sa dokázať, že počet tried ekvivalentných foriem, označme ho znakom $h(d)$, je konečný.

Gauss a Dirichlet odvodili explicitné vzorce pre číslo $h(d)$. Metódy, ktoré pritom použili, dali vznik dnes veľmi rozvinutej analytickej teórii čísel.

Kronecker a Hermite našli isté rekurentné vzorce pre číslo $h(d)$, $d < 0$. Petr majstrovsky používajúc teóriu eliptických funkcií dokázal rad nových všeobecnejších a výhodnejších vzorcov.

Typický príklad takého vzorca je tento. Označme znakom $F(n)$ počet tried diskriminantu $-n$. Potom platí

$$F(n) + 2F(n - 1^2) + 2F(n - 2^2) + \ldots = \sum_\lambda d_\lambda - \sum_i d_i ,$$

kde na pravej strane sú isté (presne určené) delitele čísla n. Na ľavej strane berieme sčítance len potiaľ, pokiaľ sú ich argumenty kladné.

V období 15–20 rokov sa Petr niekoľko raz vrátil k tejto problematike a dokázal asi 20 rekurentných vzťahov podobného typu, napr. také, kde na ľavej strane sú výrazy

$$F(n) + 2F(n - 2^2) + F(n - 4^2) + \ldots$$

$$F(n) + 2F(n - 9.1^2) + 2F(n - 9.2^2) + \ldots$$

Pri odvodzovaní takýchto vzťahov treba majstrovsky kombinovať znalosti z teórie eliptických funkcií, trigonometrické rozvoje ϑ-funkcií s vyvinutým citom pre číselne teoretické problémy.

Ako – v istom zmysle vedľajší produkt – dostal v týchto súvislostiach prof. Petr explicitné vzorce pre počet celočíselných riešení rovníc napr. tvaru $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ax_4^2 = n$ $(a = 3, 5, 9)$ a pre rad iných rovníc.

Petr odvodil (používajúc vlastnosti ϑ-funkcií) aj klasický vzorec pre číslo $h(d)$ v novom tvare:

$$h(d) = -\frac{1}{|d|} \sum (d, k) \, . \, k \, , \quad (d < 0) \, ,$$

kde súčet sa vzťahuje na čísla $k = 1, 2, \ldots, -d - 1$ a (d, k) je Weberovo zovšeobecnenie Legendreovho symbolu. Pri dôkaze tohto vzorca je charakteristické, že sa mu podarilo obísť obtiažne limitné prechody, kroré používal napr. Dirichlet.

Petrove metódy a výsledky podnietili rad ďalších autorov k novým vyšetrovaniam. Našli trvalé miesto v známej Dicksonovej monografii, History of the theory of numbers, kde v III. zväzku je Petrovým výsledkom venované mnoho miesta ako rovnocennému partnerovi takých matematikov akými boli Hermite, Kronecker a iní.

Petr použil teóriu ϑ funkcií ešte na dva ďalšie okruhy otázok. Odvodil vzorce pre počet vyjadrení celého čísla $n > 0$ ako súčet 10 a súčet 12 štvorcov. Iba na ilustráciu: Vyšetrenie výrazu $[\sum q^{k^2}]^{10}$ vedie ku štúdiu štvrtej derivácie funkcie $\vartheta_i \vartheta_j (\vartheta_k(z)/\vartheta_l(z))$.

Nie menej prekvapujúce je použitie eliptických funkcií (konkrétne Weierstrassovej σ-funkcie) na dôkaz zákona reciprocity pre bikvadratické a bikubické zvyšky. (Práca z r. 1929.)

Dve Petrove práce z algebraickej teórie čísel pochádzajú z rokov 1934–1936. Pravda, i niektoré staršie práce a aj niektoré práce z posledných rokov jeho života (z rokov 1946 a 1947), zapadajú do tejto oblasti.

V prvej z týchto prác, ktorá bola pre mňa osobne veľmi dôležitá, ide o riešenie tejto otázky: Nájsť metódu ako poznať či kongruencia

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0 \pmod p$$

je reducibilná alebo nie. Otázka se dá, pravda, vždy rozhodnúť po konečnom počte krokov. Petr našiel však metódu, ako tak urobiť bez skúšania. Explicitné vzorce a algoritmy boli vždy Petrovým ideálom. Nešlo len o to, že to odpovedalo povahe problémov a tendenciam obdobia kedy vyrástal a pracoval, ale — ako to vyplýva z celej Petrovej vedeckej činnosti — bol to základný rys jeho tvorby. V letnom semestri roku 1934 mal Petr o teórii konečných telies prednášku „publice" (1 hod. týždenne). Problematika ma osobne tak zaujala, že konečné telesá sa stali mojou prvou láskou. V roku 1937 som na túto tému vypracoval (ako posledný Petrov doktorant) svoju dizertačnú prácu. Na problematike konečných telies som sa naučil matematicky tvoriť. Vtedy som nemal tušenie o tom, že teória konečných telies nájde o 20 rokov neskôr uplatnenie v takých odvetviach ako je matematická štatistika, teória kódovania a kombinatorická matematika vôbec.

Posledná práca, o ktorej by som sa chcel zmieniť, je práca „O bázi celých čísel v obecných tělesech algebraických", ktorú Petr predniesol na Druhom sjezdu matematiků zemí slovanských v Prahe v septembri r. 1934 (a publikoval väčšinou iba bez dôkazov v roku 1935).

Celým algebraickým číslom nazývame číslo ϑ, ktoré vyhovuje rovnici $f(\vartheta) = 0$, kde $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ je polynóm, v ktorom a_i sú celé racionálne čísla. Nech ϑ je celé algebraické číslo a $R(\vartheta)$ teleso, ktoré vznikne adjunkciou čísla ϑ k telesu racionálnych čísel R. Vyšetrujme okruh celých algebraických čísel telesa $R(\vartheta)$. Ide o to nájsť bázu tohto okruhu, tj. n alg. celých čísel $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, tak, aby každé celé číslo $\in R(\vartheta)$ sa dalo napísať (a to jednoznačne) v tvare

$$x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \ldots + x_n\omega_n ,$$

kde x_i sú celé racionálne čísla.

Báza sa dá napísať v tvare

$$1, \frac{\varphi_1(\vartheta)}{d_1}, \frac{\varphi_2(\vartheta)}{d_2}, \ldots, \frac{\varphi_{n-1}(\vartheta)}{d_{n-1}},$$

kde $d_i \mid d_{i+1}$ a $\varphi_i(x)$ je polynóm stupňa i. Ide o to určiť celé čísla $d_i > 0$ a polynómy $\varphi_i(x)$ alebo ich aspoň tak obmedziť, aby boli prístupné numerickému výpočtu. Petr našiel rad obmedzujúcich podmienok pre čísla d_i a polynómy $\varphi_i(x)$. Petrovu metódu som aj osobne vyskúšal na mnohých príkladoch. Som presvedčený, že by stálo za to túto metódu podrobnejšie rozpracovať. Vec nie je ovšem tak jednoduchá, ako by sa mohlo na prvý pohľad zdať. Napr. Delone v knihe „Teorija iracionalnostej tretej stepeni" (1940) venuje problému bázy v špeciálnom prípade kubického telesa mnoho a mnoho strán. (Za dobrú predprípravu môže slúžiť kniha W. Berwick, Integral bases, Cambridge Tracts, No 22, 1927.)

Úhrnom možno povedať, že prof. Petr celou svojou učiteľskou i vedeckou tvorbou sa stal zakladateľom moderného vývinu teórie čísel u nás a ovlivnil značnou mierou teóriu čísel i v medzinárodnom meradle.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

Řešení úlohy č. 3 (autor Jan Mařík) z roč. *81* (1956), str. 247.

Úloha: Rozhodněte, zda platí tato věta: Buďte G, H otevřené konvexní množiny v obyčejném trojrozměrném (event. n-rozměrném) prostoru. Množina H buď omezená a nechť $\overline{H} \subset G$. Nechť funkce f má omezené spojité (resp. omezené) derivace prvního řádu na množině $G - \overline{H}$. Potom je funkce f stejnoměrně spojitá (na $G - \overline{H}$).

1. Označení. Pro $c \in E_n$, $R > 0$ buď $\Omega(c, R) = \{x; |x - c| < R\}$ (koule). Symboly $\overline{M}$, M^0, hr M rozumíme uzávěr, vnitřek, hranici množiny $M \subset E_n$. Body prostoru E_n ($n > 1$) budeme někdy psát ve tvaru $[x, y]$, kde $x \in E_{n-1}$, $y \in E_1$. Pro $x, y \in E_n$ buď $x \cdot y$ skalární součin x a y; $\overline{xy}$ buď pro $x \neq y$ úsečka o koncových bodech x, y; pro $x = y$ buď $\overline{xy} = \{x\}$. Konvexním tělesem v E_n rozumíme kompaktní konvexní množinu s neprázdným vnitřkem.

2. Lemma. *Buď M neprázdná otevřená množina v E_n, parciální derivace prvního řádu funkce f buďte omezené v M. Potom existuje $\alpha > 0$ s touto vlastností: je-li $x, y \in M$, $\overline{xy} \subset M$, pak $|f(y) - f(x)| \leqq \alpha |y - x|$.*

Důkaz. Nechť pro každé $z \in M$ a $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $|\partial f(z)/\partial x_i| \leqq \alpha_1$. Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu. Můžeme předpokládat, že $x \neq y$. Pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ položme $z(t) = x + t(y - x)$. Pro každé $t \in \langle 0, 1 \rangle$ zřejmě existuje n-rozměrný otevřený interval I_t, který obsahuje bod $z(t)$ a splňuje vztah $\bar{I}_t \subset M$. Protože je $\langle 0, 1\rangle$ kompaktní, existují čísla $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ tak, že označíme-li $z_i = z(t_i)$, je každá úsečka $\overline{z_{i-1} z_i}$ obsažena v některém I_t. Nechť $z_i = [z_i^1, z_i^2, \ldots, z_i^n]$. Ze známé věty (např. V. Jarník: Diferenciální počet II, Praha 1955, věta 182) plyne, že

$$|f(z_i) - f(z_{i-1})| \leqq \alpha_1 \sum_{j=1}^{n} |z_i^j - z_{i-1}^j| \leqq \alpha_1 \sqrt{(n)}\, |z_i - z_{i-1}|$$

($i = 1, 2, \ldots, k$). Je ovšem

$$|f(y) - f(x)| = |\sum_{i=1}^{k} (f(z_i) - f(z_{i-1}))| \leqq \sum_{i=1}^{k} \alpha_1 \sqrt{(n)}\, |z_i - z_{i-1}| = \alpha_1 \sqrt{(n)}\, |y - x| .$$

Nyní položíme $\alpha = \alpha_1 \sqrt{(n)} + 1$.

3. Lemma. *Buď K konvexní těleso v E_n ($n > 1$), $c \in$ hr K. Potom existuje $w \in K^0$ takové, že $K \subset \{x; (x - c) \cdot (w - c) \geqq 0\}$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $c = 0$ $(= [0, 0, \ldots, 0])$. Buď $N = \{v; v \in E_n, K \subset \{x; x . v \leqq 0\}\}$, $N_1 = \{x; -x \in N\}$. Snadno zjistíme, že N_1 je neprázdná konvexní množina. Protože K je konvexní těleso, je K^0 neprázdná konvexní množina. Předpokládejme, že $K^0 \cap N_1 = \emptyset$; odvodíme spor. Pro množiny K^0, N_1 použijeme známé věty o oddělování konvexních množin (např. F. Valentine: Convex Sets, New York 1964, věta 2.9). Z této věty plyne, že existuje $0 \neq v_1 \in E_n$ a $\lambda \in E_1$ tak, že $K^0 \subset \{x; x . v_1 \leqq \lambda\}$ a $N_1 \subset \{x; x . v_1 \geqq \lambda\}$. Protože $0 \in N_1$, je $\lambda \leqq 0$. Ze spojitosti skalárního součinu a ze vztahu $0 \in \operatorname{hr} K^0$ plyne, že $\lambda \geqq 0$. Je tedy $\lambda = 0$. Protože K je konvexní těleso, je $\overline{K^0} = K$ a tedy zřejmě $K \subset \{x; x . v_1 \leqq 0\}$. Odtud plyne, že $v_1 \in N$, tedy $-v_1 \in N_1$. To ovšem znamená, že $-v_1 . v_1 = -|v_1|^2 \geqq 0$. To je spor, neboť $v_1 \neq 0$. Existuje tedy $w \in K^0 \cap N_1$. Pro toto w je zřejmě $K \subset \{x; x . w \geqq 0\}$.

Lemma je dokázáno.

4. Lemma. *Buď K konvexní těleso v E_n $(n > 1)$, $c \in \operatorname{hr} K$. Existuje $\Delta > 0$ s touto vlastností: Je-li $0 < \delta \leqq \Delta$ a $u_1, u_2 \in \Omega(c, \delta) - K$, existují body u'_1, u'_2 tak, že množiny $\overline{u_1u'_1}$, $\overline{u'_1u'_2}$, $\overline{u_2u'_2}$ jsou obsaženy v $\Omega(c, \delta) - K$.*

Důkaz. Nechť w má stejný význam jako v lemmatu 3. Nejprve předpokládejme, že $c = 0$ a $w = [0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$. Položme $K_x = \{y; [x, y] \in K\}$ pro $x \in E_{n-1}$; dále položme $K' = \{x; x \in E_{n-1}, K_x \cap K^0 \neq \emptyset\}$. Protože K je konvexní těleso, existují pro každé $x \in K'$ čísla $\alpha_x < \beta_x$ taková, že $K_x = \langle \alpha_x, \beta_x \rangle$. Z lemmatu 3 plyne, že pro taková x je $\alpha_x \geqq 0$ a dále pro $x = [0, \ldots, 0] \in E_{n-1}$ je $0 = \alpha_x < \vartheta < \beta_x$. Odtud snadno plyne, že existuje $\Delta > 0$ tak, že $\Omega(0, \Delta) \cap E_{n-1} \subset K'$ a že pro $[x, y] \in \Omega(0, \Delta) - K$ je $y < \alpha_x$. Buď nyní $0 < \delta \leqq \Delta$, $u_i = [x_i, y_i] \in \Omega(0, \delta) - K$, $i = 1, 2$. Existuje zřejmě $\varepsilon_i < 0$ tak, že $u'_i = [x_i, \varepsilon_i] \in \Omega(0, \delta)$, a protože $y_i < \alpha_{x_i}$, je $\overline{u_iu'_i} \subset \Omega(0, \delta) - K$. Je ovšem $u'_i \in \Omega(0, \delta) \cap \{[x, y]; y < 0\}$, což je konvexní množina disjunktní s K, a tedy $\overline{u'_1u'_2} \subset \Omega(0, \delta) - K$. Pro případ, že $c = 0$ a $w = [0, \vartheta]$ $(\vartheta > 0)$, je lemma dokázáno.

V obecném případě položme $\vartheta = |w - c| > 0$ a sestrojme isometrické zobrazení φ prostoru E_n na E_n takové, že $\varphi(c) = 0$ a $\varphi(w - c) = [0, \vartheta]$. Takové zobrazení jistě existuje. Nyní aplikujeme první část důkazu.

5. Věta. *Buďte G, H otevřené konvexní množiny v E_n. Buď $G \neq \emptyset$, množina H buď omezená a nechť $\overline{H} \subset G$. Buď f funkce na $G - \overline{H}$ s touto vlastností: existuje $\alpha > 0$ tak, že platí*

$$|f(y) - f(x)| \leqq \alpha |y - x| , \tag{1}$$

kdykoli $x, y \in G - \overline{H}$, $\overline{xy} \subset G - \overline{H}$. Potom je funkce f stejnoměrně spojitá na $G - \overline{H}$.

Důkaz. Je-li $H = \emptyset$, je množina $G - \overline{H}$ konvexní a z (1) tvrzení ihned plyne. Buď tedy $H \neq \emptyset$. Je-li $n = 1$, je ovšem $G - \overline{H}$ sjednocením dvou disjunktních otevřených intervalů. Odtud a z (1) je platnost tvrzení zřejmá.

V dalším předpokládáme, že $H \neq \emptyset$ a $n > 1$. Označme $M = G - \overline{H}$. Množina M je otevřená a $\overline{H}$ je konvexní těleso.

Předpokládejme, že tvrzení věty není správné. Potom existuje $\varepsilon > 0$ a body x_m, x'_m $(m = 1, 2, \ldots)$ z M takové, že pro každé m je

$$|x_m - x'_m| < \frac{1}{m}, \tag{2}$$

$$|f(x_m) - f(x'_m)| \geqq \varepsilon. \tag{3}$$

Tvrdíme, že posloupnost $\{x_m\}$ je omezená. Kdyby tomu tak nebylo, existoval by, jak snadno zjistíme, otevřený poloprostor P disjunktní s $\overline{H}$ tak, že pro nekonečně mnoho indexů m by platilo $x_m \in P$, $x'_m \in P$. Pak by ovšem byla množina $P \cap M = P \cap G$ konvexní a tedy vzhledem k (2) a (1) bychom dostali pro dostatečně velké m spor s (3). Posloupnost $\{x_m\}$ má tedy alespoň jeden hromadný bod. Označme ho y. Je $y \in \overline{M}$. Existuje posloupnost $\{x_{m_k}\}$ vybraná z posloupnosti $\{x_m\}$, pro niž $x_{m_k} \to y$. Pišme y_k (resp. y'_k) místo x_{m_k} (resp. x'_{m_k}). Je tedy

$$y_k \to y \tag{4}$$

a vzhledem k (2) také

$$y'_k \to y\,. \tag{5}$$

Bod y zřejmě neleží v H. Kdyby však neležel v $\overline{H}$, byl by průnik dostatečně malé koule o středu y s množinou M konvexní a vzhledem k (4), (5), (1) bychom dostali spor s (3).

Z předpokladu, že f není stejnoměrně spojitá v M, tedy plyne, že existují posloupnosti $\{y_k\}$, $\{y'_k\}$ bodů z M a bod $y \in \operatorname{hr} H$ tak, že platí (4), (5) a že pro každé přirozené k je

$$|f(y_k) - f(y'_k)| \geqq \varepsilon\,. \tag{6}$$

Zřejmě existuje $\Delta_1 > 0$ tak, že $\Omega(y, \Delta_1) - \overline{H} \subset M$. V lemmatu 4 položíme $K = \overline{H}$, $c = y$ a sestrojíme příslušné číslo $\Delta > 0$. Dále položme $\delta = \min(\Delta, \Delta_1, \frac{1}{6}\varepsilon\alpha^{-1})$. Ze (4) a (5) plyne, že existuje přirozené číslo i tak, že $y_i \in \Omega(y, \delta)$, $y'_i \in \Omega(y, \delta)$. Předpoklady lemmatu 4 jsou splněny, položíme-li $y_i = u_1$, $y'_i = u_2$, $y = c$, $\overline{H} = K$. Nyní podle tohoto lemmatu sestrojíme body u'_1, u'_2. Protože každá z množin $\overline{u_1 u'_1}$, $\overline{u_1 u_2}$, $\overline{u_2 u'_2}$ leží v $\Omega(y, \delta) - \overline{H} \subset M$, je podle (1)

$$|f(y_i) - f(y'_i)| \leqq |f(y_i) - f(u'_1)| + |f(u'_1) - f(u'_2)| + |f(u'_2) - f(y'_i)| < \alpha\,.\,6\delta \leqq \varepsilon\,.$$

Vztah $|f(y_i) - f(y'_i)| < \varepsilon$ je však ve sporu s (6). Je tedy f stejnoměrně spojitá na $G - \overline{H}$. Věta je dokázána.

6. Poznámka. O množinách G, H nechť platí předpoklady věty 5. Z lemmatu 2 a věty 5 zejména plyne toto: Nechť funkce f má omezené derivace prvního řádu na množině $G - \overline{H}$. Potom je funkce f stejnoměrně spojitá (na $G - \overline{H}$).

Ivan Netuka, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

RECENSE

Rédei L.: BEGRÜNDUNG DER EUKLIDISCHEN UND NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIEN NACH F. KLEIN. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1965 (© Akadémiai Kiadó, Budapest 1965) stran 364, obrázků 146.

Angl. překlad. FOUNDATION OF EUCLIDEAN AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES ACCORDING TO F. KLEIN. Pergamon Press Oxford, London, Edinburgh, New York, Toronto, Sydney, Paris, Braunschweig 1968 (© Akadémiai Kiadó, Budapest 1968) stran X + 400, obrázků 146.

Monografie obsahuje jednotným způsobem neformalizovaně axiomaticky podané základy tří trojrozměrných geometrií: parabolické, hyperbolické a eliptické, včetně důkazu bezespornosti a důkazu jejich ekvivalence s analytickými modely podle definice Kleinovy. Přitom jsou důsledně budovány nad teorií množin (mělo by být přesně řečeno nad kterou teorií množin), na rozdíl od jiných pojetí (např. Hilbert, Hessenberg, Veblen a Young, aj.).

V kapitole I jsou formulovány axiomy. Prostorem $\mathfrak{R}$ se rozumí neprázdná množina, jejíž prvky jsou nazvány body, pro níž se předpokládá existence takových dvou systémů neprázdných podmnožin nazvaných přímky resp. roviny, že jsou splněny axiomy incidence $I_1 - I_8$ (Hilbertovy). Dále se předpokládá existence podmnožiny $\mathfrak{R}' \subseteq \mathfrak{R}$, nazvané základní oblast, na níž je pro body přímky definovaná trojčlenná relace „mezi" splňující axiomy relace „mezi" $II_1 - II_6$ (Hilbertovy) a axiom spojitosti III (Dedekindův). Konečně se předpokládá existence grupy vzájemně jednoznačných zobrazení prostoru $\mathfrak{R}$ na sebe, nazvaných pohyby, splňujících axiomy pohybu $IV_1 - IV_8$.

Kapitoly II—V obsahují výsledky odvozené z axiomů I a II. Pomocí pojmu nevlastního trsu přímek prostoru $\mathfrak{R}$ je zkonstruován projektivní uzávěr jakožto nadmnožina $\overline{\mathfrak{R}} \supseteq \mathfrak{R}$ splňující Veblenovy axiomy, takže je projektivním prostorem nad určitým algebraickým tělesem, přičemž prvky množinového rozdílu $\overline{\mathfrak{R}} \setminus \mathfrak{R}$ jsou nazvané nevlastní body pro rozlišení od bodů prostoru $\mathfrak{R}$ nazvaných vlastní body. Pro body přímky projektivního prostoru $\overline{\mathfrak{R}}$ je definovana nejdříve čtyřčlenná relace „oddělování" zobecněna později pro prvky všech projektivních útvarů prvého řádu (tj. svazků přímek resp. rovin).

Kapitola VI obsahuje výsledky odvozené z axiomů I, II, III. Postupným zkonstruováním reálných afinních a projektivních souřadnic na přímce, v rovině a v projektivním prostoru $\overline{\mathfrak{R}}$ je dokázáno, že $\overline{\mathfrak{R}}$ je projektivní prostor právě nad tělesem reálných čísel.

Poslední kapitola VII obsahuje výsledky odvozené z axiomů I, II, III, IV. Pomocí pojmu bodů v nekonečnu jakožto speciálních nevlastních bodů projektivního prostoru $\overline{\mathfrak{R}}$ jsou rozlišovány právě tři možné případy prostoru $\mathfrak{R}$: eliptický, když $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}$, nebo parabolický resp. hyperbolický, když $\overline{\mathfrak{R}} \neq \mathfrak{R}$ a každá přímka projektivního prostoru $\overline{\mathfrak{R}}$ obsahující aspoň jeden vlastní bod obsahuje právě jeden resp. aspoň dva různé nevlastní body. Je ukázáno, že pro každý z těchto tří případů je grupa pohybů prostoru $\mathfrak{R}$ indukována jednoznačně určenou grupou kolineací projektivního prostoru $\overline{\mathfrak{R}}$ splňující Kleinovu definici. Obráceně je dokázáno, že podle Kleina definovaný elipticky, parabolický a hyperbolický prostor $\mathfrak{R}$ splňuje axiomy I, II, III, IV včetně výše uvedené definice těchto tří prostorů.

Kniha je určena těm, kteří se zajímají o studium základů geometrie, a k jejímu studiu se předpokládají předběžné znalosti přibližně v rozsahu literatury uvedené na konci knihy. Výklad je pečlivý, stručný a přesný; vyskytují se jen běžné tiskové chyby, z nichž tři nejzávažnější zde opravujeme: str. 280, řádek 16 zdola místo *improper points* má být *proper points*; str. 366, řádek 15 shora má být $\|\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2\| = \|\mathfrak{S}_1\| + \|\mathfrak{S}_2\|$; str. 378, řádek 3—2 zdola má být $\|\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2\| = \|\mathfrak{M}_1\| + \|\mathfrak{M}_2\|$. Jedná se o vynikající dílo a mohu je vřele doporučit všem, kteří se chtějí podrobněji seznámit se základy geometrie.

Josef Kateřiňák, Žilina

W. Feit: CHARACTERS OF FINITE GROUPS. W. A. Benjamin, Inc., New York—Amsterdam, 1967. Strán 186, cena $ 9,50.

Táto kniha vznikla spracovaním autorových prednášok na Yaleskej univerzite. Nemá preto ráz monografie, ktorá by si kládla za cieľ zachytiť v celej šírke výsledky dosiahnuté doteraz v literatúre o teórii charakterov. Na druhej strane nezostáva len pri základných definíciách a vetách, ktoré sa uvádzajú vo všetkých knihách o teórii grúp. Aj pri pomerne malom objeme knihy podarilo sa autorovi (po didaktickej stránke veľmi premysleným spôsobom) podať nielen základné klasické výsledky o teórii charakterov, ale doviesť čitateľa až po problematiku študovanú v súčasnosti. Pripomeňme, že W. Feit je spoluautorom obsiahleho pojednania (W. Feit - J. G. Thompson: *Solvability of groups of odd order*, Pacif. Journ. Math. *13* (1963), 775—1029), v ktorom sa dokazuje, že každá konečná grupa nepárneho rádu je riešiteľná. Tým bola daná odpoveď na známy Burnsideov problém, ktorý bol všeobecne považovaný za jeden z najťažších otvorených problémov v teórii konečných grúp.

Kniha se skladá zo štyroch kapitol. Úvodná kapitola I obsahuje základné pojmy o reprezentácii grúp, definíciu charakteru, pojem indukovaného charakteru a odvodenie najdôležitejších vlastností charakterov. Kapitola II pojednáva o Schurových indexoch, o charakteroch s racionálnymi hodnotami, o okruhu charakterov a o rovniciach v grupách. V kapitole III sa vety o charakteroch aplikujú na štúdium štruktúry konečnej grupy G. Odvodzujú sa kritériá pre to, aby G bola riešiteľná, aby G nebola jednoduchou grupou, a aby systém všetkých podgrúp grupy G splňoval určitú podmienku komplementárnosti. Tu sú dokázané viaceré klasické výsledky Burnsidea a Frobeniusa, ako aj rad novších výsledkov (ide o vety R. Brauera, P. Halla, G. Suzukiho a J. G. Thompsona). Kapitola IV obsahuje ďalšie aplikácie, z ktorých značná časť pochádza od autora knihy. Medzi iným sa v tejto kapitole dokazuje nejednoduchosť pre niektoré triedy grúp nepárneho rádu.

Kniha je písaná lakonickým štýlom (definícia-veta-dôkaz), spestreným poznámkami typu „nasledujúci výsledok bol asi 40 rokov otvorenou otázkou". Autor formuluje tiež niekoľko doteraz nieriešených problémov. Vcelku možno knihu charakterizovať ako veľmi zdarilú učebnicu jednej z dôležitých častí teórie konečných grúp.

Ján Jakubík, Košice

Felix Klein: ELEMENTARMATHEMATIK VOM HÖHEREN STANDPUNKTE AUS. Springer-Verlag 1968; I. díl má 309 stran a stojí DM 24,—, II. díl 302 strany, cena DM 24,—, III. díl 238 stran, cena DM 19,80.

Dobře známý trojdílný soubor Kleinových přednášek o elementární matematice tu vychází v novém vydání, jež je přetiskem čtvrtého vydání 14. svazku a třetích vydání 15. a 16. svazku edice „Die Grundlagen der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen". Čtenáři se tak znovu dostává do rukou dílo vzniklé na počátku našeho století, před více než šedesáti lety. Jeho autor, vynikající německý matematik Felix Klein (1849—1925) patří k těm, kteří rozhodujícím způsobem pomáhali skloubení jednotlivých obsáhlých matematických disciplín devatenáctého století v jeden organický celek matematiky. I tento soubor jeho přednášek byl motivován úsilím napomoci k porozumění celistvosti matematiky, především pomoci středoškolským učitelům matematiky překlenout rozpor mezi matematiou, kterou vyučovali sami, a tou, kterou studovali na vysoké škole. To je téma stále aktuální: ukázat současnou tvářnost matematiky a bohatstvím jejích výsledků a metod podnětně ovlivnit její vyučování.

Aspoň stručně připomeňme obsah jednotlivých svazků. První díl je rozdělen na tři části: aritmetiku, algebru a analysu. V 1. části se autor zabývá zavedením pojmu přirozeného čísla ve škole a ukazuje logické základy počítání s celými čísly, zavedení racionálních, iracionálních čísel a komplexních čísel. Zabývá se tu i některými otázkami z teorie čísel, řetězovými zlomky, rovnicí pro dělení kruhu. Nevyhýbá se ani obtížnějším problémům — např. konstrukcím pravítkem a kružítkem a dokazuje nemožnost takto zkonstruovat pravidelný sedmiúhelník. V části věnované algebře pojednává o algebraických rovnicích nad tělesem reálných resp. komplexních čísel. Pro způsob výkladu je tu charakteristické užití názorných geometrických metod. Třetí část — analysa — je věnována nejprve logaritmické a exponenciální funkci (i s historickým vývojem jejich teorie) a goniometrickým funkcím s jejich užitím v trigonometrii (i sférické) a v rozvojích periodických funkcí. Pak se autor obrací k elementům diferenciálního počtu a jeho historii. V dodatku 3. části je podán důkaz transcendence čísel e a π a úvod do teorie množin (mohutnosti, ordinální čísla).

Druhý díl souboru je věnován geometrii a jeho cílem je podat stručný přehled po tehdejší geometrii v rozsahu, který — jak píše autor — by měl znát středoškolský učitel matematiky. Po úvodní kapitole o základních geometrických útvarech a jejich analytickém vyjádření se autor v 2. a 3. kapitole obrací k výkladu o geometrických transformacích, které tvoří těžiště tohoto dílu. Druhá kapitola podává výklad o afinních, projektivních a některých dalších algebraických bodových transformacích. První polovina 3. kapitoly je věnována systematice geometrie ve smyslu Kleinovy klasifikace podle transformačních grup, druhá polovina je určena základům geometrie a obsahuje i kritický pohled na Eukleidovy Elementy. Závěrečná kapitola se zabývá tehdejším stavem vyučování geometrii v Anglii, Francii, Itálii a v Německu.

Třetí díl s podtitulem „Präzisions- und Approximationsmathematik" svým vznikem předchází oběma předchozím dílům. Byl určen širšímu okruhu čtenářů a jeho obsahem jsou aplikace diferenciálního a integrálního počtu v geometrii. Na tomto materiálu autor vtipně sleduje rozdíly a vzájemné vztahy „ryzí" a „aplikované" matematiky. První část je určena funkcím reálné proměnné a jejich grafům. Autor ukazuje např. rozdíly mezi grafem spojité funkce a empirickou křivkou, podává konstrukci Weierstrassovy spojité nediferencovatelné funkce, zabývá se aproximací funkcí pomocí polynomů, trigonometrických polynomů a řad, a interpolací. Druhá část tohoto dílu je věnována geometrii rovinných křivek. Autor se tu především zabývá pojmem rovinné křivky a ukazuje na příkladu Peanovy křivky, jak třeba tento pojem zúžit, abychom dostali křivky dostatečně „rozumné"; pak přechází k aplikacím geometrie (např. v geodézii). Krátká třetí část je určena názorným pomůckám při vyučování geometrii.

Kleinovy přednášky jsou sepsány velmi zajímavě a přitom náročně, s velkou přesností; ve své době sehrály významnou roli v popularisaci matematických výsledků i v modernisaci vyučování matematice. I dnes mohou být svým stylem ukázkou přednášek, jak přesně a podnětně ukázat stavbu matematiky své doby.

Václav Vilhelm, Praha

M. M. Lawrientiew: SOME IMPROPERLY POSED PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS, Springer-Verlag 1967, ve sbírce Springer Tracts in Natural Philosophy Volume 11, str. 72.

Problémy matematické fysiky vedou často na rovnice tvaru $A\varphi = f$, kde A je operátor z prostoru Φ do prostoru F, přičemž f je známý prvek $\in F$.

Od Hadamarda pochází pojem korektnosti úlohy tohoto tvaru. Později se ukázalo, že řada úloh, které se objevily v nových oborech, není korektní podle Hadamarda (příkladem je Cauchyova úloha pro Laplaceovu rovnici). Aby se úloha stala korektní, je možno buď pozměnit topologie v prostorech Φ, F nebo vzíti prvek f (který má význam měřené veličiny) jako náhodnou proměnnou (správná hodnota + chyba měření). To je obsahem první kapitoly.

V druhé kapitole se zabývá autor úlohami o prodloužení analytických funkcí, když jsou známy jejich hodnoty na části hranice oblasti (souvisí s předcházejícím, neboť nalezení analytické funkce jedné komplexní proměnné je právě Cauchyova úloha pro Laplaceovu rovnici).

V třetí kapitole jsou řešeny úlohy týkající se nalezení operátoru A (např. ze známého potenciálu určit tvar tělesa). Pro úlohy z druhé a třetí kapitoly je dokazována jednoznačnost nebo stabilita řešení.

Václav Alda, Praha

Johann von Neumann: MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER QUANTENMECHANIK, Springer-Verlag 1968, nezměněný dotisk prvního vydání z r. 1932, které vyšlo jako 38. svazek sbírky Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, str. 262.

Vzhledem k vývoji a rozvoji, který prodělala kvantová mechanika, je druhé vydání (v nezměněné formě) po 36 letech pozoruhodným svědectvím o originalitě a hodnotě knihy; o tom svědčí ostatně tři překlady.

Kniha se liší od ostatních učebnic tím, že je v ní položen důraz na logickou výstavbu teorie, ke které autor sám podstatně přispěl.

O problémy, kterými se kniha zabývá (axiomatika, teorie měření, statistika, skryté proměnné) byl vzbuzen v posledních letech opět zájem. Výsledky, které byly docíleny, pak potvrzují a prohlubují von Neumannovy idee, takže druhé vydání není jen pomník autorovi, ale zdroj živého poznání i po 36 letech.

Václav Alda, Praha

AEQUATIONES MATHEMATICAE, Volume 2, Number 1. University of Waterloo, Ontario, Canada; Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland; 1968, 136 str.

První číslo časopisu v novém ročníku 1968 je věnováno ALEXANDRU M. OSTROVSKÉMU k sedmdesátému pátému výročí jeho narození. Po krátkém zhodnocení celého díla Alexandra M. Ostrovského a výčtu jeho vědeckých prací a ostatních publikací následuje devět článků, věnovaných autory k tomuto výročí: *S. Wołodźko* — Solution générale de l'équation fonctionelle $f[x + y \,.\, f(x)] = f(x) \,.\, f(y)$; *W. Smajdor* — Analytic Solutions of the Equation $\varphi(z) = h(z, \varphi[f(z)]\}$ with Right Side Contracting; *P. G. Ciarlet* — An $O(h^2)$ Method for a Non-Smooth Boundary Value Problem; *H. Schwerdtfeger* — Involutory Functions and Even Functions; *B. Schweizer* and *A. Sklar* — A Grammar of Functions, I; *E. F. Bonsall*, *B. E. Cain* and *H. Schneider* — The Numerical Range of a Continuous Mapping of a Normed Space; *D. Ž. Djoković* — Eigenvectors Obtained from the Adjoint Matrix; *R. Mullin* — On Rota's Problem Concerning Partitions; *E. Hille* — Some Properties of the Jordan Operator. Časopis uzavírá několik problémů k řešení a krátká sdělení.

Oldřich Horáček, Praha

Beniamino Segre: ISTITUZIONI DI GEOMETRIA SUPERIORE. (Autorovy přednášky redigoval Pier Vittorio Ceccherini, Roma 1965)

Celé dílo je rozděleno do tří svazků a dodatku, a to tak, že první svazek (409 stran) nadepsaný *Strutture algebriche* v částech 1—16 zavádí algebraické pojmy, jichž se potom dále používá, druhý svazek (293 stran) nadepsaný *Spazi proiettivi* v částech 17—19 pojednává o geometrii v lineárních prostorech a dále pak v prostorech grafických a fibrovaných a třetí svazek (357 stran) nadepsaný *Complessi, reti, disegni* se v části 20 zabývá uvedenými pojmy. Konečně dodatek (90 stran) přináší stručný přehled poznatků i dosud otevřených problémů převážně z geometrie oblouků a vrchlíků nad Galoisovými tělesy. (Tento dodatek redigovali Giovanni Lariccia, Giulia Maria Cattaneo a Giorgio Vergara Cafarelli.)

V úvodu (na 24 stranách) se pojednává o postavení geometrie v dějinném vývoji matematiky od předhistorických dob až do přítomnosti. Autor v něm rozebírá — namnoze s originálními postřehy — vzájemné ovlivňování a podmíněnost rozvoje geometrie s ostatními odvětvími matematiky, ale nevyhýbá se ani jejím vztahům k přírodním vědám, zejména k fyzice, a k filosofii i ke kulturnímu vývoji lidstva v nejširším smyslu.

První svazek se ve svých šestnácti částech (1. Classi modulo p. 2. Gruppi. 3. Anelli. 4. Corpi e campi. 5. Sottoinsiemi, equivalenza, rappresentazioni, omomorfismi. 6. Numeri cardinali. 7. Cenno sui reticoli. 8. Sottogruppi ed omomorfismi tra gruppi. 9. Sottoanelli ed ideali. 10. Reticolo delle sottostrutture. 11. Caratteristica di anelli e di corpi. 12. Zeri e decomponibilità dei polinomi. 13. Estensioni ed aggiunzioni. 14. Corpi finiti e campi di Galois. 15. Spazi vettoriali sopra un campo. 16. Complementi della teoria dei gruppi.), které připomínají namnoze úvodní první část autorových knih Lezioni di geometria moderna a Lectures on modern geometry, zabývá algebraickými základy geometrie. Liší se od nich jen tím, že zavádí pojem svazu (reticolo) a pak se o něj důsledně opírá a že podrobněji zpracovává teorii vektorových prostorů a teorii grup, zejména grup permutací.

Ani druhý svazek se svými dalšími třemi částmi (17. Spazi lineari sopra un corpo qualunque. 18. Spazi lineari sopra un corpo commutativo. 19. Spazi grafici e fibrazioni.) neodchyluje příliš od obou uvedených autorových děl, až na to, že jejich látku zpracovává o něco podrobněji, zvláště pokud jde o oblouky (archi) a vrchlíky (calotte) v prostorech nad konečnými Galoisovými tělesy, a konečně že zavádí pojem fibrací a fibrovaných prostorů, především grafických prostorů ireducibilních, z nichž zvláštní pozornost věnuje opět prostorům nad tělesy Galoisovými.

Teprve třetí svazek obsahující jedinou poslední část (20. Teoria generale dei sistemi di blocchi di un sistema finito.) přináší zcela novou látku. Je to v podstatě teorie komplexů rozdělená do osmi úseků (sezioni: 1. Generalità sui complessi. 2. Operazioni tra complessi. 3. Piani cartesiani d'ordine n e le reti. 4. Le 1-reti in senso stretto, i 3-tessuti ed i quadrati latini. 5. Le 2-reti in senso stretto ed i piani affini. 6. Le 3-reti in senso stretto. 7. Le t-reti in senso stretto. 8. Complessi a due indici.).

Komplex K nad dvěma — zpravidla konečnými — množinami P a R je definován jako uspořádaná trojice množin (P, R, I), kde I je nějaká podmnožina kartézského součinu $P \times R \supseteq I$, která indukuje určitou korespondenci mezi množinami P a R a nazývá se relací incidence. Názornou představu dostaneme, považujeme-li P za množinu bodů, R za množinu přímek (nebo jiných čar) a jejich korespondenci indukovanou množinou I prostě za incidenci. Speciálním případem takto definovaného komplexu je neorientovaný graf. Záměna množin P a R vede ke komplexu duálnímu. Nahrazení množiny I jejím komplementem v kartézském součinu $P \times R$ vede ke komplexu komplementárnímu. Kromě těchto operací jsou zavedeny ještě další operace unární a dále binární operace dvou komplexů (direktní a kanonický součet, sjednocení, průnik a kartézský součin dvou komplexů).

Množinu $P \times R$ možno též považovat za množinu bodů v rovině, na jejíchž osách soustavy souřadnic jsou množiny bodů, a to P třeba na ose x a pak množina R na ose y. Skutečně se tato množina někdy rovinou nazývá. Všechny jednotlivé body roviny $P \times R$ lze pak znázornit obdélníkovou maticí, která přejde v matici čtvercovou (třeba n-řadou) při ekvivalenci množin P a R. Jednotlivé řady (řádky nebo sloupce) čtvercové matice odpovídají tzv. generátorům roviny. Dalším důležitým útvarem ve čtvercové matici je blok (blocco), který je definován jako podmnožina n bodů, a to takových, že v každém generátoru (vodorovném i svislém) leží právě jeden jeho bod. Blok tedy může být dán i chápán jako funkce zobrazující n různých souřadnic bodů jedné z obou os (např. x) na n různých souřadnic bodů druhé z os (tedy potom y), tj. jako prostá funkce $y = f(x)$. Týž blok vyjadřuje ovšem i funkce inversní $x = f^{-1}(y)$. Splynutím obou os přejde blok v permutaci n prvků, takže přiřazení bloků a permutací je vzájemně jednoznačné. Počet bloků je tedy $n!$

a tvoří tzv. totální síť n-tého stupně roviny, jež celá je nyní nazvána P (rete totale di grado n del piano P). Jednotlivé podmnožiny této totální sítě bloků tvoří sítě bloků n-tého stupně (reti di grado n) roviny P a každou síť možno pak považovat za komplex $K = (P, \{f\}, I)$.

Dva body ležící na témže generátoru jsou závislé, každé jiné dva body nezávislé. Jsou tedy všechny body libovolného bloku nezávislé. Síť K se obyčejně označuje symbolem $K_{t,n,k}$ a nazývá se t-síť stupně n s indexem k, když každou skupinou t nezávislých bodů v rovině P prochází právě k bloků dané sítě. Pro index $k = 1$ se síť $K_{t,n,1}$ nazývá sítí v užším smyslu (in senso stretto) a značí se obyčejně prostě $K_{t,n}$. Studiu jednosítí, dvojsítí, trojsítí i obecně t-sítí (zejména v užším smyslu) je pak věnována podstatná část celého třetího svazku, a to především v souvislosti s tzv. symetriemi. Symetrie σ_f podle bloku f je příbuznost, jež každému bodu $(x; y)$ v rovině přiřazuje bod $(f^{-1}(y); f(x))$. Dva bloky f_1, f_2 jsou ortogonální, když symetrie podle jednoho z nich ponechává druhý beze změny, což nastává, když platí $f_1 f_2^{-1} = f_2 f_1^{-1}$.

Jednosítě $K_{1,n}$ v užším smyslu se probírají v souvislosti s trojtkáněmi (3-tessuti) a s latinskými a řeckolatinskými čtverci. Jako jejich zvláštní případ je uveden Eulerův problém 36 důstojníků. Dvojsítě $K_{2,n}$ v užším smyslu se pak studují v souvislosti s afinními rovinami konečného řádu n. Jako jeden z příkladů je sestrojena afinní rovina, ve které neplatí Desarguesova věta o trojúhelnících; ta však platí ve vhodné její podrovině. Trojsítě $K_{3,n}$ v užším smyslu jsou studovány zejména v souvislosti s tzv. vnořitelností (immergibilità), což je isomorfismus se sítí $K_{3,n}$ kartézské roviny dané přímkové kvadratické plochy Q v trojrozměrném projektivním prostoru. Na základě symetrií se zavádějí podmínky C, D a E a zkoumají se druhy trojsítí, které těmto podmínkám vyhovují. U t-sítí se práce zabývá hlavně problémy existence jednotlivých sítí při daném jejich stupni n. Pojem sítě se pak zobecňuje na sítě se singulárními bloky obsahujícími celé generátory.

Poslední úsek se zabývá komplexy se dvěma indexy $K = (P, R, I)$, což jsou speciální komplexy v tom smyslu, že libovolnými t různými body množiny P prochází vždy právě m čar množiny R a jakýchkoli s různých čar množiny R se protíná vždy právě v n bodech množiny P. Takový komplex K se dvěma indexy se zpravidla označuje $K : (t, s) — (\pi, \varrho, n, m)$ (kde π je početnost množiny P, ϱ množiny R) a jeho zvláštním případem, když $s = 1$, je tzv. t-výkres (t-disegno) $K : (t, 1) — (\pi, \varrho, n, m)$, který se obyčejně označuje prostě $K : t — (\pi, \varrho, n, m)$. Jednovýkresy $K : 1 — (\pi, \varrho, n, m)$ jsou konfigurace (π_n, ϱ_m) a ty souvisí s problémem Kirkmanovým známým ve speciálnější formulaci jako problém školačky (a school girl's problem). Na závěr se věnuje pozornost dvojvýkresům, zvláště symetrickým, a tzv. Steinerovým t-systémům, což jsou výkresy typu $K : t — (\pi, \varrho, n, 1)$.

Dílo končí obsáhlým seznamem literatury a podrobným osobním i věcným rejstříkem.

Je napsáno velice jasně a srozumitelně a jeho čtení nevyžaduje téměř žádné předběžné znalosti vysokoškolské matematiky s výjimkou základů lineární algebry. I při svém značném rozsahu obsahuje jen málo chyb a to jsou většinou jen nepatrná nedopatření, která si čtenář snadno opraví sám. Jeho prostudování přinese velký užitek každému, kdo se chce obeznámit s předmětem studia i metodami moderní geometrie, zejména v konečných oborech.

Karel Šindelář, Žilina

ÜBUNGEN FÜR JUNGE MATHEMATIKER, 1. díl — *Eberhard Lehmann:* ZAHLENTHEORIE. Lipsko: B. G. Teubner 1968. 159 str.

Podle předmluvy mají Übungen pomoci odstranit nedostatek vhodné literatury pro účastníky matematické olympiády a pro členy středoškolských matematických zájmových kroužků. Jde tedy o stejný cíl, jako mají svazečky edice Škola mladých matematiků, kterou u nás vydává Ústřední výbor celostátní matematické olympiády v nakladatelství Mladá fronta.

1. díl Übungen je věnován číselné teorii. Knížka má formu sbírky úloh. Úloh obsahuje 170, přičemž 122 je řešených. Řešení ostatních si lze zkontrolovat podle výsledků, které jsou uvedeny na konci knihy. Tyto výsledky jsou většinou tak podrobné, že jde vlastně o celá řešení. V knížce jsou

uvedeny potřebné definice a v odstavcích označených jako poznámky a důsledky se upozorňuje na význam výsledků některých úloh, popř. se tyto výsledky formulují ve věty. Nejde tedy o pouhou sbírku úloh, nýbrž o učebnici, která ovšem nepoužívá způsobu běžného v dnešních matematických učebnicích, kde se nejdříve vysloví věta a pak se provede její důkaz. Zde se nejdříve čtenáři předloží úloha a potom se její výsledek, má-li teoretický význam, formuluje jako věta. Ovšem i při tomto postupu je třeba se nedopouštět logických skoků. Autor se jich dopouští ve 3. kapitole, kde se při řešení úloh 34, 35 a 36 mlčky předpokládá znalost věty, že každé složené číslo má za dělitele aspoň jedno prvočíslo. Dále se při řešení úlohy 36 mlčky předpokládá, že čtenář zná tzv. prvočíselnou vlastnost (Dělí-li prvočíslo p součin $a \cdot b$, pak p dělí a nebo b.).

V úvodní kapitole jsou zopakovány pojmy prvočíslo, nejmenší společný násobek a největší společný dělitel. V úlohách je věnována pozornost užití matematické indukce a elementárnímu řešení neurčitých rovnic. 2. kapitola se jmenuje *Číselné obory, Dirichletův princip.* Je zde definován nekomutativní okruh a těleso. Těžiště kapitoly je však v úlohách, v nichž se užívá Dirichletova principu. Obsah 3. kapitoly je zcela zřejmý z názvu *Rozklad přirozených čísel v součin prvočísel, Eukleidův algoritmus.*

První tři kapitoly lze chápat jako přípravu k probrání hlavní kapitoly knížky a to čtvrté, která se jmenuje *Počítání s kongruencemi.* V oboru celých čísel se zavádí jako rovnost kongruence mod m. V tomto oboru se potom studuje sčítání, odčítání, násobení a dělení, určují se také mocniny. V případě prvočíselného modulu se zabývají úlohy hledáním čísel převrácených, druhých a třetích odmocnin, řeší se kvadratické kongruence a kubické kongruence typu $x^3 \equiv a \pmod p$. Při studiu násobení, mocnin a odmocnin se užívá orientovaných grafů. V úlohách se ukazuje použití kongruence — kontroluje se správnost výpočtů devítkovou a jedenáctkovou zkouškou, odvozují se znaky dělitelnosti pro čísla napsaná v desítkové soustavě, dokazuje se malá Fermatova věta a věta Wilsonova.

Kapitola 5. se nazývá *Logaritmy modulo* p. V literatuře se pro tento logaritmus užívá také název index. V dodatku na konci knihy jsou uvedeny příslušné tabulky pro prvočísla p menší než 100. Tato teorie je potom použita při řešení lineárních neurčitých rovnic a kongruencí typu $ax \equiv b \pmod m$, kde m je prvočíslo nebo číslo složené, v jehož rozkladu na prvočinitele se každé prvočíslo vyskytuje nejvýše jednou.

Celkově lze o knížce říci, že se autorovi podařil splnit cíl, který Übungen mají. Další díly Übungen mají být věnovány elementární geometrii a nerovnostem.

Jiří Mída, Praha

Hans Grauert, Ingo Lieb: DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG I. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1967. X + 200 stran, 25 obrázků. Cena DM 12,80.

Kniha je první částí třídílné učebnice diferenciálního a integrálního počtu a nese podtitul „Funkce jedné reálné proměnné". Pro orientaci uveďme nejprve obsah podle kapitol: I — Reálná čísla. II — Množiny a posloupnosti. III — Nekonečné řady. IV — Funkce. V — Derivování. VI — Speciální funkce a Taylorova věta. VII — Integrace.

Náplň je tedy celkem obvyklá. Čtenáře, zvyklého na objemnější učebnice diferenciálního a integrálního počtu, však možná poněkud překvapí skutečnost, že toto vše je obsaženo na 200 stránkách knížky kapesního formátu, zvláště když autoři v předmluvě zdůrazňují, že důkazy jsou prováděny podrobně.

Knížka je určena především studentům matematiky a fyziky a nepředpokládá žádné předběžné znalosti z tzv. vyšší matematiky; vyžaduje ovšem při úsporném způsobu výkladu čtenáře pozorného a vnímavého. Podle zkušeností autorů lze látku knihy přednést během jednoho semestru ve 4—5tihodinové přednášce.

Výklad se v některých detailech odlišuje od tradičního. Výrazněji se to projevuje v aplikaci polospojitých funkcí, jejichž definice předchází definici spojitosti a kterých je široce využíváno při definici Lebesgueova integrálu. Autoři byli vedeni snahou vyložit a formulovat klasickou látku tak, aby se různé definice a věty daly přenést bez podstatnější změny přímo na obecnější případy. To je vidět například na tom, jak je zaváděn pojem derivace: Autoři ji zavádějí poněkud jinak než je obvyklé, bez využívání nového limitního přechodu, a to jim umožňuje přenést definici i na případ diferenciálů funkcí více proměnných nebo na funkce na topologických vektorových prostorech. Podobně je tomu i v kapitole o integraci.

Méně pozornosti než obvykle je věnováno např. otázkám extrémů a vůbec průběhu funkcí. Zato je v šesté kapitole Taylorova věta spojena s obsáhlejším odstavcem věnovaném interpolaci; interpolačních formulí je využito na konci knihy v odstavci o přibližném výpočtu integrálů. Dosti podrobně jsou zkoumány též elementární funkce, které autoři definují pomocí nekonečných řad. Lebesgueův integrál pak zavádějí autoři pomocí stupňovitých funkcí, tedy bez použití pojmu míry. Jinak obsahuje šestá kapitola všechen obvyklý materiál — integraci per partes, substituční větu, integraci racionálních funkcí apod.

Jde tedy o pokus o moderní učebnici, psanou od nejelementárnějších partií se zřetelem na další disciplíny matematické analýzy (až po funkcionální analýzu), přihlížející již při výkladu úvodních partií matematické analýzy k potřebám a metodám těch disciplín, s nimiž se studenti seznámí později. Srovnání zkušeností autorů při výkladu základů matematické analýzy s našimi zkušenostmi by bylo jistě zajímavé.

Alois Kufner, Praha

Hans Grauert, Wolfgang Fischer: DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG II. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1968. XII + 216 stran, 25 obrázků. Cena DM 12,80.

Druhá část třídílné učebnice diferenciálního a integrálního počtu, jejíž první díl je posuzován v předcházející recensi, je věnována jednak diferenciálnímu počtu funkcí více proměnných, jednak obyčejným diferenciálním rovnicím. Je určena především studentům druhého až třetího semestru a vyžaduje (až na několik vyjímek) jen znalosti obsažené v prvním dílu.

O způsobu výkladu platí to, co bylo řečeno o dílu prvním: autoři se pokoušejí o přesné a systematické vybudování teorie a u definic i používaných metod mají na mysli jejich přenesení na co nejobecnější případy, aniž by přitom zbytečně zvětšovali rozsah knihy.

První čtyři kapitoly jsou věnovány funkcím více reálných proměnných. V prvé kapitole je nejprve zaveden n-rozměrný euklidovský prostor R^n a pak jsou studovány křivky v R^n (jako zobrazení intervalu do R^n), pojem oblouku, některé speciální křivky a pojem tečny a křivosti. Kapitola druhá, nazvaná „Topologie prostoru R^n", obsahuje též definici funkce a zobrazení z R^n do R^m a jeden odstavec je věnován posloupnostem funkcí. Třetí kapitola je věnována otázkám diferencovatelnosti, Taylorově formuli a lokálním extrémům funkcí více proměnných. Definice tečných vektorů a Pfaffových forem, zkoumání regulárních zobrazení, implicitní funkce a vázané extrémy tvoří obsah čtvrté kapitoly; zde je užito některých pojmů a tvrzení z lineární algebry, uvedených na začátku kapitoly bez důkazu.

Druhá polovina knihy se zabývá obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Autorům pochopitelně ani nemůže jít o úplnost; chtějí jednak podrobněji zkoumat některé diferenciální rovnice, důležité pro fyziku, jednak uvést hlavní věty o existenci, jednoznačnosti a stabilitě řešení. Úvodní charakter má kapitola pátá. Je zde formulován problém, zkoumány některé speciálnější rovnice (Bernoulliova, Riccatiova) a poněkud podrobněji jsou studovány kmity struny. Šestá kapitola se zabývá existenčními větami pro rovnice prvního řádu a závislostí řešení na počáteční podmínce. V kapitole sedmé je zkoumána jednak souvislost mezi diferenciálními rovnicemi a Pfaffovými formami (jichž je využito ke zkoumání geometrických vlastností soustavy integrálních křivek v okolí isolovaného singulárního bodu), jednak jsou uvedeny některé metody přibližného řešení diferenciálních rovnic (Picardovy iterace, užití mocninných řad). Poslední kapitola je věnována především systémům diferenciálních rovnic a rovnicím vyššího řádu; také zde je bez důkazu užito několika výsledků z lineární algebry. Nakonec jsou podrobně zkoumány tři speciální diferenciální rovnice druhého řádu: Besselova rovnice, Legendreova rovnice a rovnice Schrödingerova (pro kulově symetrický případ).

Podobně jako u prvního dílu i u tohoto dílu učebnice měli autoři na mysli především návaznost vykládané látky na další partie matematiky, zvláště v první polovině knihy. Druhá polovina pak obsahuje více či méně subjektivní výběr problémů a metod, kterým autoři chtějí vyhovět jak potřebám fyziků, tak požadavkům matematiků.

Alois Kufner, Praha

DÁLE VYŠLO:

Alois Apfelbeck: KONGRUENCE, Mladá Fronta, Praha 1968, 136 stran, cena 6 Kčs.

Je to 21. svazek edice Škola mladých matematiků, o které jsme v tomto časopise již psali. I tato knížka je určena zejména řešitelům matematické olympiády.

Jan Vyšín - Vlastimil Macháček: ŠESTNÁCTÝ ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY, Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1968, 149 stran, 44 obr., cena 6 Kčs.

Knížka podává zprávu o XVI. ročníku naší celostátní soutěže, který se konal ve školním roce 1966—1967, a také o IX. mezinárodní matematické olympiádě uspořádané v červenci 1967 v Jugoslávii.

Redakce

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

ZPRÁVY

PROFESOR VÁCLAV HLAVATÝ ČESKÝ MATEMATIK SVĚTOVÉHO JMÉNA

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha

Dne 11. ledna 1969 zemřel v Bloomingtonu v USA vědec světového formátu, pokračovatel velkého díla ALBERTA EINSTEINA, náš vynikající český matematik prof. Dr VÁCLAV HLAVATÝ. Zesnul několik dní před dovršením svých 75. narozenin, kdy by bylo jeho velkolepé dílo znovu připomínáno ve světové odborné literatuře. Zaskočen nemocí, umírá daleko od své vlasti — v touze po domově, v naději na návrat. Ani sláva, ani úspěchy nepřervaly v něm citová pouta, jimiž byl vázán ke své rodné zemi, k domovu, k petřínským strániím, k pražské universitě. A právě léta jeho nejzávažnějších objevů, které našly — až na jeho rodnou zem — patřičnou a důstojnou odezvu ve všech kulturně vyspělých zemích, jsou prosáklá hořkostí jeho osudu. V době, kdy v jeho vlasti se staví nákladné pomníky a za čas se zase bourají, staví Čech Václav Hlavatý svému národu v zahraničí památník do daleké budoucnosti. Téměř dvacet let jeho exilu a stejný počet let zhoubných politických a společenských deformací zastřely osobnost profesora Hlavatého před očima našich studentů a mladých učitelů a u těch pak, kteří jej dobře znali, zasunuly vzpomínky na něho a jeho odkaz do palčivého podvědomí. Hřejivého pocitu vděku a díku, které by mu dnes za celou naši vědeckou a kulturní veřejnost měly projevit představitelé našich výsostných vědeckých institucí, se profesor Hlavatý nedožil.

Bylo by příliš málo sklánět se dnes nad památkou kvalitního člověka, který tak úspěšně a důstojně representoval za hranicemi naši vědu a vyjadřovat opožděný obdiv nad jeho dílem. Naši studenti matematiky a fyziky, náš mladý vědecký dorost by měl znát ideovou náplň celoživotního díla profesora Hlavatého, vycházet z jeho prací a jít v tomto směru dál. Je společenskou národní povinností našich matematiků starší a střední generace, těch, kteří s hrdostí citovali před lednem 1968 jeho jméno na okraji svých přednášek, i těch, jimiž letargie minulých let vypínala závity svobodného myšlení z jejich logických obvodů, aby přiblížili osobnost profesora Hlavatého a jeho dílo naší široké veřejnosti, osobnost vynikajícího vědce, ušlechtilého člověka, demokrata a humanisty.

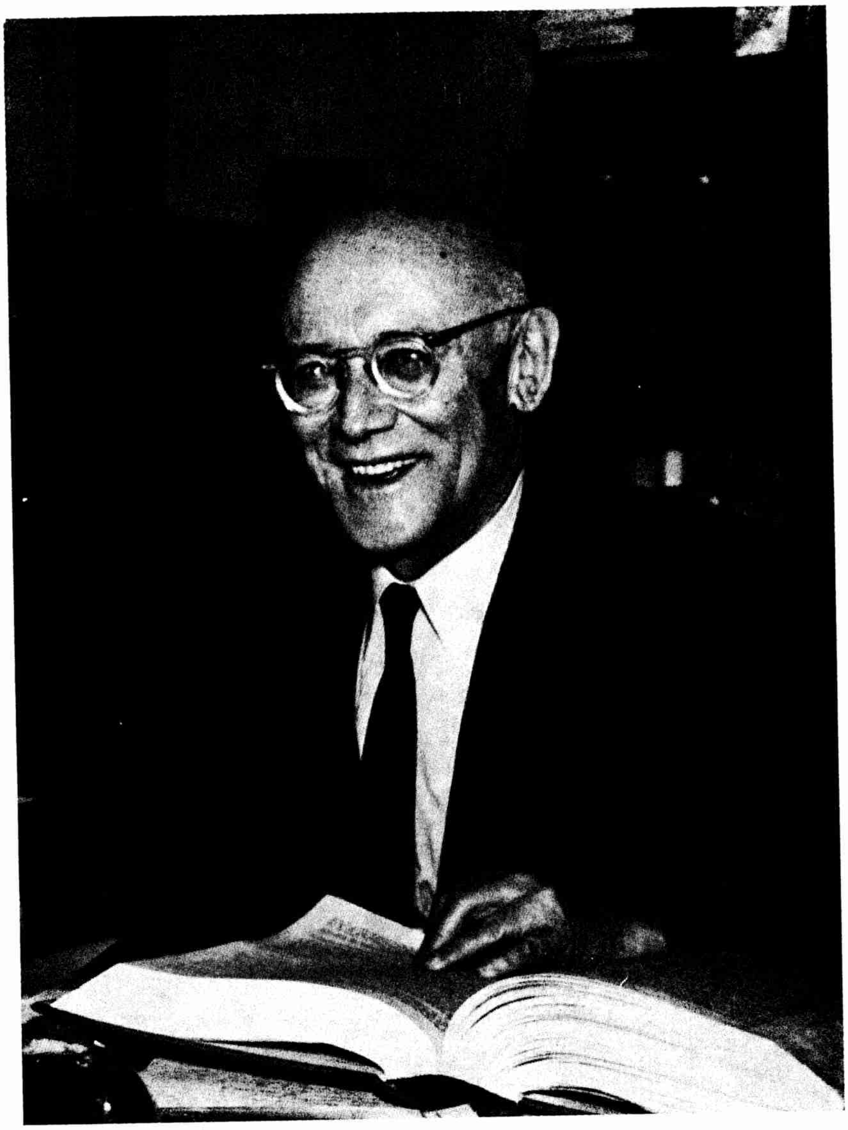
Profesor Hlavatý narodil se roku 1894 v Lounech, v kraji, odkud vyšla řada našich význačných vědců, umělců a učitelů. Poesie tohoto kraje, blízkost sopečného Středohoří, tradice ryzího čestvi tohoto kusu země na výspě Slovanstva, prostředí lidí s humorem a muzikantskou krví a především bodří, důsledni učitelé určovali rytmus jeho dětských a chlapeckých let, přiváděli jej k estetice stálého poznávání a snad k myšlence hledat smysl života v kráse bezúnavné tvůrčí práce. Za studentských let na Lounské reálce vytvářejí se v něm dvě záliby: hudba a divadlo na straně jedné a zájem o harmonii matematiky na straně druhé. S tímto zaměřením přichází do Prahy na tehdejší filosofickou fakultu, aby tam studoval matematiku a hudební estetiku. Zde se v něm střetávají oba dva mocné proudy jeho zálib; vítězí hluboký zájem o abstraktní matematiku, láska k umění — především k hudbě — zůstává trvale nejen koníčkem, ale náplní jeho života při oddechu a inspirací k další tvůrčí práci. První světová válka, jejíž úsek prožil jako voják v zákopech italské fronty, přerušila jeho vysokoškolské studium. V r. 1918 je zajat a vrací se domů na jaře 1919 jako italský domobranec. Lidská tragedie prvé světové války, demoralisace člověka v beznaději zítřejší existence, triumf šrapnelů nad lidskou duší a duševní ubohost těch, kteří vydávali rozkazy, probouzí v člověku Hlavatém, zatíženém čistými ideály z dětství, nový citový proud — proud odporu proti každému násilí, nenávist k falešným ideologiím a emocem, které strhují prostého člověka v područí gangů toužících po moci. Po návratu domů dokončuje rychle své studium a brzy na to je promován v Karolinu. Nastupuje místo profesora matematiky a deskriptivní geometrie na gymnasiu ve Slovenské ulici v Praze, kde vyučuje též francouzštině. Po půl roce přechází na reálku v Lounech, z níž vyšel. Intensivně věnuje se tvůrčí práci v matematice, vypomáhá ochotnickému divadlu a vášnivě pěstuje hudbu. Jako žák výborného Kolaříka a St. Nováka, koncertního mistra České Filharmonie, je oporou místního kvarteta, hraje v různých triích, vystupuje na koncertech (též jako člen Pražského orchestrálního sdružení). Je prostě hybnou silou v kulturním životě svého rodného města. V roce 1922 vychází jeho první vědecká studie v Rozpravách Akademie. V roce 1923 je přeložen na reálku na Vyšehrad. Brzy na to získává stipedium Akademie věd na půlroční pobyt v Holandsku. Svými vědeckými pracemi stává se známým a uznávaným doma i v zahraničí. V roce 1925 se habilituje na Karlově universitě. Jeho vědecké práce vycházejí v odborných matematických časopisech ve Francii, Holandsku, Italii, USA, SSSR a jinde. V roce 1927/28 získává Rockefelerovu nadaci pro studium v Římě; odtud odchází na studijní pobyty do Paříže a Oxfordu. Koná vědecké přednášky na mnoha zahraničních universitách. V Moskvě navazuje dobrá a trvalá přátelství se sovětskými geometry. V dubnu roku 1931 je jmenován mimořádným profesorem geometrie a filosofie matematiky na Karlově universitě, řádným profesorem se stává od července roku 1936. Těsně před vypuknutím druhé světové války vrací se do své již zotročené vlasti z ročního přednáškového pobytu v USA.

Byl říjen 1939 s tíhou nemilosrdné okupace a s vnitřní úlevou nad rozpoutanou válkou jako nad jedinou nadějí na likvidaci bezpráví a násilí. Tehdy jsem Vás, profesore Hlavatý, poprvé uviděl a to při své prvé státnici. Měl jste jizlivý úsměv a byl jste přísný. Vaše oči však dávaly klid a mé odpovědi jste rozváděl do hloubky, která vábila. Byl jste ztělesněním té úcty, kterou jsem pociťoval, když jsem poprvé stál před branou university. Pak jsem začal chodit na Vaše přednášky. Měsíc nato, den 17. listopadu, nás oddělil; Vás odsunul do totální pasivní resistence, mě do koncetračního tábora. Setkal jsem se s Vámi až po květnu 1945, při přednáškách a při druhé státní zkoušce. Váš úsměv byl stejný, byl jste stejně přísný. Lidé z Vašeho okolí vykládali o Vašem nekompromisním statečném postoji za německé okupace, o dnech a nocích, které jste za květnového povstání trávil se zbraní v ruce na barikádách.

Po květnu 1945 přičiňuje se profesor Hlavatý o urychlené obnovení provozu našich vysokých škol a to nejen po stránce pedagogického zajištění a vedení mladých vědeckých pracovníků, ale též z hlediska nové organisace školy a zajištění jejich materiálních potřeb. Zakládá kroužek svých žáků, které obětavě a tvrdě vede cestou svého vědeckého zaměření. Ví velmi dobře o tom, že hrůzy a okupace zasely strach a politickou desorientaci do duší mladých lidí a je přesvědčen o tom, že výchova člověka k demokracii, která na rozdíl od autoritativních režimů, neposkytuje člověku laciné emoce, je těžká a její úspěch spočívá především ve vnitřní kázni každého občana. Přes vyčerpávající práci spojenou s výstavbou znovu otevřených vysokých škol a jejich provozem, se znovuvzkříšením našeho vědeckého života, nechce profesor Hlavatý stát stranou veřejného dění, protože je přesvědčen, že malé národy mohou jen svou vyspělou politickou morálkou obstát v soutěži s národy velkými a mocnými. Je socialista, je demokrat, není však marxistou revolučních hesel. Je stoupencem ideí T. G. Masaryka a sdílí demokratickou koncepci Jana Masaryka. Dosvědčuje to i jeho citát z dopisu zaslaném jeho příteli ze srpna 1965:

... *Dočetl jsem se v článku „Úvahy kolem gravitace“* (*Letectví, kosmonautika*, 1965, č. 1), *že jsem americký fyzik českého původu. Přirozeně, že jsem se musel dát naturalisovat, když mně domov vzal občanství, ale pořád se cítím Čechem, nikoliv Američanem českého původu. To vypadá, jako bych se byl již zde narodil. Já jsem zatím vyrostl doma a za to, co umím, vděčím Masarykově republice* ...

V roce 1947 je jmenován poslancem za tehdejší národně socialistickou stranu; má na starosti kulturní a školské otázky. Pro svou koncepci jednotné střední školy dostává se do rozporu i s vedoucími činiteli své členské strany. Únorové události roku 1948 vidí reálně, posuzuje je jako zákonitost vývoje politického uspořádání světa po druhé světové válce. Ještě před únorem 1948 je pozván na přednáškový pobyt do Spojených Států (přímé pozvání od A. Einsteina). S odjezdem váhá. Po audienci u presidenta E. Beneše, která trvala dvě hodiny a jejíž pravděpodobný účel bylo předání zdvořilostního poselství paní Rooseveltové, připravuje se profesor Hlavatý na roční, event. dvouroční pobyt v USA (s plánovaným odjezdem v září 1948). Záhadná smrt Jana Masaryka, první náznaky úpadku demokracie v jeho pojetí a rozpad kamarádského soužití na vysokých školách vedou ke ztrátě jeho původního elánu, k jeho skepsi. Koncem července 1948 odjíždí legálně s celou svou rodinou. Již jeho první dopisy jeho známým doma jsou naplněny starostí o vývoj v jeho rodné zemi a současně touhou vrátit se domů co nejdříve. Politické procesy a jejich důsledky z let padesátých



Profesor Václav Hlavatý

a pozdějších odrazují jej od úmyslu brzského návratu; jeho žádostem o další prodloužení pobytu nebylo vyhověno. Státá se nedobrovolně emigrantem. Již ke sklonku svého života píše věrnému příteli:

... Vzal jsem si sebou do ciziny jen jednu věc, památku na domov: Dykovu báseň „Země mluví". Končí: „Prosím Tě, matka Tvá, braň si mne synu! Jdi, třeba k smrti jdeš! Opustíš-li mne, nezahynu! Opustíš-li mne, zahyneš!" Tu báseň jsem vozil a vozím sebou po všech svých cestách životem a jejím čtením se modlím ke ztracené vlasti, kterou jsem opustil bez boje. Tak za to jsem si umínil, že svou prací budu propagovat české jméno. Dělám to poctivě, nemohu vám to prokázat, to bych se musel chlubit, ale snad mi věříte i takto, že skutečně hledím odčinit hřích, který jsem na vlasti spáchal, když jsem ji opustil. Já vím, že kdybych byl zůstal, asi by mne čekal osud gen. Piky a Milady Horákové, ale to pro poctivého člověka není výmluva. Tak to skutečně hledím napravit poctivou prací ve svém oboru, ... Tak, když budete číst v novinách, že emigranti jsou odpadlíci, není to vždy pravda, ale vždy to bolí! ...

Profesor Hlavatý zůstává tedy v emigraci, lépe řečeno v exilu. Je vedoucím pracovníkem matematického institutu na Indiana University v Bloomingstonu. Jeho příchodem a dalším působením roste pověst této university. Vychovává mnoho žáků z různých zemí světa jen ne z Československa (nikoliv svou vinou); píše vědecké práce a knihy, propaguje jméno československé matematiky v četných přednáškách na celém světě. Všude vystupuje jako Čech. Píší mu vědecké instituce z celého světa, jen jeho domov mlčí, nezná jej. Sám se pokouší navázat spojení. A výsledek? Prosím, úryvek z textu dopisu, který píše svému příteli do vlasti před odjezdem na přednáškovou cestu kolem světa v květnu 1967:

... Můj odjezd se pomalu blíží. Přijímám to se smíšenými pocity. Tak tedy Čecháček od Dobroměřic bude v Pakistánu budovat vládní vědecký institut. Jak rád by ten človíček sloužil své rodné zemi! Ale nejde to, mocipáni jsou jiného politického přesvědčení, než ten malý človíček, co posluhuje aziatským studentům, protože to „vyžaduje prestiž USA". Přitom tu prestiž podporuje Američan od Dobroměřic! Věř mi, že je mně někdy skutečně těžko! Od té doby co jsem přijel, jsem každou knihu, kterou jsem publikoval, poslal Akademii Věd v Praze. Nejen, že mně nikdy nepoděkovali (to bylo by moc žádáno od lidí, kteří zřejmě nemají smysl pro mezinárodní zdvořilost), ale ani mně nikdy nepotvrdili příjem toho, co jsem poslal! Musím doznat, že pražská Akademie je jediná instituce, která se tak neslušně chová ...

Na své přednáškové cestě kolem světa měl celkem 70 přednášek na přibližně 50 různých témat přednesených v angličtině, francouzštině, italštině a němčině. Za 17 let exilu vychovával žáky po Americe, Evropě, Asii. Cizokrajní vědečtí pracovníci, především mladí profesoři matematiky různých universit, jsou k němu vysíláni „na dopečení" (jak říkal sám), není však mezi nimi jediný, koho by přijímal celým svým srdcem, jediný Čechoslovák. V jednom z dopisů píše o své práci na universitě v Bloomingtonu:

... Nejmenší část práce zaberou přednášky na universitě. Přednáším dle svých knih diferenciální geometrii, přímkovou geometrii, algebraickou geometrii, teorii relativity, každý rok něco jiného, ale nedá mně to moc práce. Více času zaberou odborné přednášky, které mám na pozvání téměř po celé Americe. ... Ještě více času zaberou moji cizokrajní studenti ... Ovšem nejvíce času zabere moje vědecká práce. Bohudíky, ještě mám co říci ve vědě a vrchovatě to používám ...

S přibývajícími léty roste u profesora Hlavatého touha po návratu do Prahy. O možnost návratu podává prvou oficiální žádost zhruba před osmi lety. Tento pokus a pokusy další jsou bezvýsledné. Mocenský aparát jej nezná, ignoruje. V době jeho velkých úspěchů, v roce 1954, byl lidovým trestním soudem v Praze II (výnos z 10. 2. 1954, č. 80, Nt 2306/53) zabaven jeho majetek (byt a zařízení, polovina rodinné vilky v Kunštátě na Mor.) V československém rozhlase nebyla až do konce roku 1968 jediná zmínka o profesoru Hlavatém. Po onemocnění v roce 1967 chtěl se léčit v Mariánských lázních a podal příslušnou žádost u americké cestovní kanceláře. Po tříměsíční urgenci se dovídá, že jeho žádost byla naším konsulátem postoupena do Prahy jako „zvláštní případ“, který leží k rozhodnutí na stole A. Novotného. Současně se dovídá, že se v Praze množí pověsti, že Václav Hlavatý se chce vlivem Novotného dostat zpět a v beznaději na návrat, v obavách z oslepnutí, dožívá poslední dny svého života zcela sám, života, který přes všechny jeho osobní úspěchy ve vědě a úctu ve společnosti mu nastavoval jizlivě rozšklebenou tvář vlastního osudu. Budiž nám útěchou, že spád politických událostí u nás po lednu 1968 a spontánní postoj lidu obou našich národů v tragických dnech srpna obsahoval i vroucí stisk ruky profesoru Hlavatému, který — opustiv vlast bez boje — bojoval za ni čestným způsobem a takovými prostředky, proti nimž jsou hory plechu a kvalitní oceli i řízené střely bezmocné.

Povahu profesora Hlavatého výstižně dokreslují slova ženy, jeho velké lásky:

... Z přemíry práce a zaměstnání nervově onemocněl a snad toto vypjetí bylo i základem jeho geniality. Život neměl lehký, podléhal často pesimismu, nevěřil si, musel být povzbuzován nebo zas v práci mírněn, byly to samé výkyvy. Někdy byl skromný, někdy sebevědomý, někdy velmi umíněný, nevyzpytatelný a svéhlavý, což bylo nakonec jeho neštěstím. Byl čestný, velmi citlivý a nechtěl nikdy ublížit, což se mu ale často nepodařilo — i jeho vtip byl někdy krutý! Ve společnosti byl ohromně oblíben, byl vždycky jejím středem, vynikající postavou; všude kam přišel, měl úspěchy ... Přes všechny ty úspěchy byl v duši nešťastný a proto snad také se stal věřícím, nejen tedy pro tu vesmírnou velikost, do které nahlížel ...

Odkaz profesora Hlavatého světové vědě a především vědě jeho národa, je velký. Napsal 158 vědeckých prací z oboru diferenciální a algebraické geometrie a z obecné teorie relativity. Jeho knižní publikace jsou jednak pedagogického rázu (učebnice) nebo jsou to monografie v rámci jeho specialisace. Několikařádkový pokus o stručnou charakteristiku jeho celoživotního díla mohl by zde podat jen zkreslenou informaci o bohatých ideích a dosažených výsledcích a proto bude rozboru jeho díla později věnován obšírnější článek v našem odborném (matematickém a fyzikálním) tisku.*) Jeho největší objevy, jimiž se proslavil po celém vědeckém světě, jsou jeho výsledky z let 1953/54, které se týkají Einsteinovy jednotné teorie pole. Profesor Hlavatý skloubil fenomenologickou Einsteinovu teorii s exaktní geometrickou problematikou a cestou geometrické interpretace dosahuje překvapivých matematických výsledků, které jednak sjednocují výsledky v tomto směru dosažené, jednak jsou jednotícím matematickým podkladem složité Einsteinovy teorie s jejími fyzikálními důsledky. Tento výkon byl vysoce oceněn jak matematiky, tak teoretickými fyziky, neboť závěry vyplývající z Hlavatého teorie, dávají nové pohledy na fyzikální strukturu celé problematiky a eliminují předem řadu hypotéz o všeobecných fyzikálních zákonitostech vesmíru. Tento vědecký výkon, spolu s celoživotním dílem profesora Hlavatého, byl uctěn vydáním Sborníku: „*Perspectives in Geometry and Relativity*", Essays in Honor of Václav Hlavatý (Edited by Banesh Hoffmann, Indiana University Press, Bloomington and London, 1966) u příležitosti jeho 70. narozenin. Do tohoto sborníku přispělo svými články celkem 47 matematiků a fyziků, z nichž většina jsou světové kapacity na příslušném vědním úseku. (Např.: A. LICHNEROWICZ (Collége de France), I. L. SYNGE (Dublin Institute for Advanced Studies), O. COSTA DE BEAREGARD (Institut Henri Poincaré), H. S. M. COXETER (University Toronto), HOMER V. CRAIG (University of Texas), E. T. DAVIES (University Southampton), R. DEBEVER (University of Brussels), J. EHLERS (University of Hamburg), L. GODEAUX (Centre Belge de Recherches Mathématiques), P. JORDAN (University of Hamburg), A. KAVAGUCHI (Hokkaido University), R. N. MISRA (University of Corakhpur), A. PERES (Israel Institute of Technology), A. Z. PETROW (Universita Kazaň), J. PLEBAŇSKI (Varšava), A. TERRACINI (University of Turin), A. TRAUTMAN (Varšava), H. I. TREDER (Akademie NDR), KENTARO YANO, SHIGERU ISHIHARA (Tokyo) aj.). Jde o známé vědce z celého světa, ze zemí, v nichž příslušné disciplíny jsou na výši. Není mezi nimi jediný vědec z Československa.

Československá společnost pro vědy a umění v USA (Czechoslovak Society of Arts and Sciences in America), jejímž byl profesor Hlavatý presidentem, uctila na veřejných vzpomínkových večerech důstojně památku zasloužilého Čecha.

Je dostatek podkladů k tomu, abychom my sami — zde doma — mohli zhodnotit veliké dílo Václava Hlavatého a zpřístupnit jej naší odborné veřejnosti. Je dostatek materiálu pro dokreslení „lidského portrétu" tohoto syna našeho národa.

Díky vám všem, kteří jste nezištně poskytli ústní a písemné informace ze života profesora Hlavatého.

Díky vám, jeho kamarádům z Loun a z Prahy, kteří jste mu dodávali útěchu a víru v návrat do vlasti. My, žáci profesora Hlavatého, uctíme společně s vámi též památku v únoru tohoto roku zesnulého profesora KARLA VIHANA, věrného přítele profesora

*) Rozbor vědeckého díla prof. V. Hlavatého bude otištěn v některém z dalších čísel Časopisu pro pěstování matematiky.

Hlavatého, který dal k disposici podstatnou část korespondence a jiné podklady pro možnost sepsání tohoto pietního článku. My všichni vyjadřujeme též dík panu Dr. Bořivoji Lůžkovi, který v roce 1967 — tedy ještě za života profesora Hlavatého — uveřejnil v měsíčníku Dialog č. 1 (Orgán SKNV, Ústí n. Lab.) krátkou studii ze života profesora Hlavatého (Václav Hlavatý — Czech Mathematician), v němž lidsky milými slovy seznamuje širokou veřejnost s osobností význačného československého a světového matematika, který vydal ze sebe a současně obětoval co mohl pro obrození našeho společenského života.

OBHAJOBY A DISERTAČNÍ PRÁCE DOKTORŮ A KANDIDÁTŮ VĚD

Před *komisemi pro obhajoby doktorských disertačních prací* obhájili dne 4. října 1968 Doc. RNDr. Václav Havel, CSc. práci na téma: „Koordinatizace v incidenční geometrii“ a dne 26. března 1969 Doc. RNDr. Zbyněk Nádeník, CSc. práci nazvanou „Šest prací z geometrie ve velkém“.

Před *komisemi pro obhajoby kandidátských disertačních prací* obhájili dne 21. listopadu 1968 Ivan Havel práci na téma: „O gramatikách s podmínkami a o regulárních aproximacích“, dne 9. ledna 1969 Jaroslav Nadrchal práci na téma: „Automatizace překladu programů samočinným počítačem“, dne 20. ledna 1969 Jiří Brabec práci na téma: „Aproximace signálů Kotenikovými řadami“ a Jan Havrda práci na téma: „Některé aspekty matematického programování“ a dne 5. února 1969 Jan Hejcman práci na téma: „Stejnoměrná dimense zobrazení a prostorů a metoda částečných součinů“. Dne 24. března 1969 se konala obhajoba veřejnou vědeckou rozpravou souboru prací z teorie vyučování matematice prof. Jana Vyšína.

Redakce

JMENOVÁNÍ

President republiky jmenoval s účinností od 1. listopadu 1968 doc. PhDr. Karla Čulíka, DrSc. řádným profesorem pro obor matematika a doc. Ing. Jindřicha Mikesku, DrSc. řádným profesorem pro obor aplikovaná matematika.

Ministr školství jmenoval s účinností od 1. listopadu 1968 RNDr. Jaroslava Blažka, CSc., RNDr. Bohumila Cenkla, CSc. a RNDr. Františka Fialu, CSc. docenty pro obor matematika.

Redakce