Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

LIEOVY GRUPY A KINEMATICKÁ GEOMETRIE V ROVINĚ

ADOLF KARGER, Praha

(Došlo dne 14. dubna 1967)

V předložené práci se studuje kinematická geometrie v euklidovské rovině, pseudoeuklidovské rovině, na sféře v prostoru E_3 a na sféře v prostoru E_3^1. Autor děkuje prof. URBANOVI za četné rady a připomínky k této práci.

I. OBECNÉ VLASTNOSTI AFINNÍHO POHYBU

1. DEFINICE AFINNÍHO POHYBU A KANONICKÁ FORMA

Buď G nekonečná souvislá Lieova grupa afinních transformací afinního prostoru A_n, jejíž Lieova algebra $\mathfrak{g}$ má triviální centrum. Každou grupu afinních transformací v A_n lze uvažovat jako lineární grupu matic typu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix},$$

kde a je sloupec typu n a b nesingulární matice typu $n \times n$. Budeme-li v dalším mluvit o grupě G, budeme mít na mysli právě tuto její representaci.

Je-li $\mathcal{R}$ repér v A_n a je-li $\bar{\mathcal{R}}$ jeho obraz při nějaké transformaci z G, pak existuje právě jeden prvek $g \in G$, že $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R}g$. Násobení repérů a prvků z G definujeme formálně jako součin řádku $\mathcal{R} = (\mathrm{A}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a matice g. Je-li $\mathrm{X} = \mathrm{A} + x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n$ bod z A_n, přiřaďme mu $(n + 1)$-tici čísel

$$X_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

lze tedy psát $\mathrm{X} = \mathcal{R}X_{\mathcal{R}}$, kde součin vpravo znamená součin řádku a sloupce. Je-li $\bar{\mathcal{R}} = \mathcal{R}g$ pro nějaké $g \in G$, jsou souřadnice transformovaného bodu $\bar{\mathrm{X}} = g\mathrm{X}$ v repéru $\bar{\mathcal{R}}$ stejné, jako souřadnice bodu X v repéru $\mathcal{R}$, a tedy $\bar{X}_{\bar{\mathcal{R}}} = X_{\mathcal{R}}$.

Platí tedy: $X = \mathcal{R}X_{\mathcal{R}}$, $\bar{X} = \mathcal{R}\bar{X}_{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{R}}\bar{X}_{\bar{\mathcal{R}}} = \bar{\mathcal{R}}X_{\mathcal{R}} = (\mathcal{R}g)X_{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \,.\, gX_{\mathcal{R}}$, a tedy $\bar{X}_{\mathcal{R}} = gX_{\mathcal{R}}$. Je-li $\mathbf{v}$ vektor z A_n, přiřadíme mu v každém repéru sloupec $n + 1$ čísel

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix},$$

kde v^i jsou jeho souřadnice v tomto repéru. Vektory se při transformacích grupy G chovají podobně jako body. Grupa G působí tedy na repéry zprava a na souřadnice bodů a vektorů zleva. V dalším budeme stále předpokládat, že v A_n je pevně zvolený repér, index $\mathcal{R}$ u souřadnic budeme proto vynechávat.

Afinním pohybem nazveme jednoparametrickou soustavu afinních transformací z G. Taková soustava je (při pevně zvoleném repéru) popsána křivkou $g(t)$ z G. Budeme o ní předpokládat, že je třídy C^2 a že nemá singulární body. Ukažme ještě, jak se změní křivka $g(t)$, změní-li se repéry $\mathcal{R}$ a $\bar{\mathcal{R}}$. Nechť $\bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathcal{R}}_1 g_1$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 g_2$. Pak $\bar{\mathcal{R}}_1 g_1 = \mathcal{R}_1 g_2 g$, a tedy $\bar{\mathcal{R}}_1 = \mathcal{R}_1 g_2\, g(t)\, g_1^{-1}$. Křivka $g(t)$ tedy přejde v křivku $g_2\, g(t)\, g_1^{-1}$.

Kinematická geometrie afinního pohybu studuje jeho geometrické vlastnosti, tedy ty vlastnosti křivky $g(t)$, které nezávisí na parametrisaci křivky $g(t)$ ani na volbě repérů $\mathcal{R}$ a $\bar{\mathcal{R}}$, tj. na levých a pravých translacích v grupě G. Označme dále $\mathfrak{g}$ Lieovu algebru grupy G (interpretovanou jako tečný prostor v jednotce grupy), $\Omega, \bar{\Omega}$ její pravoinvariantní a levoinvariantní kanonickou formu.

Máme tedy

$$(1)\quad \Omega\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right)_{g(t)} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \,.\, g^{-1}(t)\,, \quad \bar{\Omega}\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right)_{g(t)} = g^{-1}(t)\,\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,, \quad \Omega\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{ad}g(t)\,\bar{\Omega}\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right).$$

(Translace a jejich diferenciály značíme stejnými písmeny, neboť zde nemůže dojít k nedorozumění.) Při změně parametru na křivce $g(t)$ se hodnoty Ω i $\bar{\Omega}$ násobí týmž faktorem, při translacích na grupě G se změní takto:

$$\Omega\left(g_1 \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} g_2\right) = \mathrm{ad}g_1 \Omega\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right), \quad \bar{\Omega}\left(g_1 \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} g_2\right) = \mathrm{ad}g_2^{-1}\, \bar{\Omega}\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right).$$

Označme $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}\mathbf{v})^2$ Killingovu kvadratickou formu na $\mathfrak{g}$. Tato forma je invariantní při zobrazeních z adjungované representace grupy G, tj. platí $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\mathrm{ad}g \,.\, \mathbf{v}, \mathrm{ad}g \,.\, \mathbf{v})$ pro všechna $g \in G$ a $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$. Zúžení forem $\Omega, \bar{\Omega}$ na křivku $g(t)$ značme $\mathrm{dP}, \mathrm{d}\bar{\mathrm{P}}$. Předpokládejme, že pro náš pohyb je $(\mathrm{dP}, \mathrm{dP}) \neq 0$ na celém definičním intervalu. Pak je $\mathrm{dP} = a \,.\, \mathrm{d}t \,.\, \mathbf{R}$, $\mathrm{d}\bar{\mathrm{P}} = \bar{a} \,.\, \mathrm{d}t \,.\, \bar{\mathbf{R}}$ kde $\mathbf{R}, \bar{\mathbf{R}} \in \mathfrak{g}$ jsou voleny tak, aby byly jednotkové vzhledem ke Killingově kv. formě. Tento zápis je skutečně možný, protože forma dP je lineární diferenciální forma s vektorovými hodnotami, závislá na jednom parametru. Množinu vektorů $\mathbf{R}(t)$ a $\bar{\mathbf{R}}(t)$ nazveme pevným a hybným řídicím kuželem pohybu, vzhledem k tomu, že podle (1) je $(\mathrm{ad}g(t))\,\mathrm{d}\bar{P} = \mathrm{dP}$, je

$(\mathrm{ad}g\mathbf{R}, \mathrm{ad}g\mathbf{R}) = (\mathbf{R}, \mathbf{R})$ a $\bar{a} = a$. (Lze předpokládat $a > 0$.) Parametr φ, pro nějž je $a \,.\, \mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi$, nazveme kanonickým parametrem.

Platí tedy:

$$\mathrm{dP} = \mathrm{d}\varphi\mathbf{R}\,, \quad \mathrm{d}\bar{\mathrm{P}} = \mathrm{d}\varphi\bar{\mathbf{R}}\,, \quad \bar{\mathbf{R}} = \mathrm{ad}(g^{-1})\,\mathbf{R}\,. \tag{2}$$

Je-li ψ jiný kanonický parametr, je zřejmě $\psi = \pm\varphi + c$, kde c je konstanta. V tomto smyslu je kanonický parametr invariantem pohybu.

Věta 1. *Nechť je dán kužel* $\mathbf{R}(t)$ *v* $\mathfrak{g}$, $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \pm 1$, $t \in [0, 1]$. *Pak existuje jediný pohyb* $g(t)$ *takový, že* $g(0) = e$, *jeho pevným řídicím kuželem je* $\mathbf{R}(t)$ *a parametr* t *je kanonický.*

Důkaz této věty je snadnou aplikací důkazu analogické věty z [2].

2. ADJUNGOVANÝ POHYB

Adjungovaná representace grupy G v $\mathfrak{g}$ přiřazuje každému pohybu $g(t)$ z G pohyb v $\mathfrak{g}$, totiž $\mathrm{ad}g(t)$. Tento pohyb je pro každé t automorfismem $\mathfrak{g}$, zachovávajícím invariantní kvadratické formy na $\mathfrak{g}$, speciálně tedy i Killingovu formu. Adjungovaný pohyb je tedy skutečně „pohybem“. Vzhledem k předpokladu o centru $\mathfrak{g}$ je adjungovaná representace lokálním isomorfismem a je tedy možné studovat vlastnosti daného pohybu pomocí adjungovaného pohybu.

Lemma. *Budiž*

$$\mathbf{Y}(t) = \mathrm{ad}g(t)^{-1}\,\mathbf{X}(t), \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{g}\,. \quad \text{Pak} \quad \mathbf{Y}' = \mathrm{ad}g(t)^{-1}\,.\,\mathbf{X}' + \mathrm{ad}g(t)^{-1}[\mathbf{X}, g'g^{-1}]\,.$$

Věta 2. *Kužele* $\mathrm{ad}g(t_0)\,\bar{\mathbf{R}}(t)$ a $\mathbf{R}(t)$ *mají v bodě* t_0 *styk alespoň prvého řádu.*

Důkaz.

$$\{\mathrm{ad}g(t_0)\,\bar{\mathbf{R}}(t)\}_{t_0} = \mathbf{R}(t_0)\,,$$
$$\{\mathrm{ad}g(t_0)\,\bar{\mathbf{R}}(t)\}'_{t_0} = \mathrm{ad}g(t_0)\,\{\mathrm{ad}g^{-1}(t)\,\mathbf{R}'(t)\}_{t_0} + \{\mathrm{ad}g^{-1}(t)\,[\mathbf{R}, \mathbf{R}]\}_{t_0} = \mathbf{R}'_{t_0}\,,$$
$$\{\mathrm{ad}g(t_0)\,\bar{\mathbf{R}}(t)\}''_{t_0} = \mathbf{R}''(t_0) + \left\{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,[\mathbf{R}', \mathbf{R}]\right\}_{t_0}\,.$$

Při adjungovaném pohybu se tedy hybný řídicí kužel „odvaluje“ po pevném řídicím kuželi.

3. TRAJEKTORIE A OKAMŽITÝ POHYB

Buď $\mathbf{R} \in \mathfrak{g}$ libovolný pevný vektor. Vektoru $\mathbf{R}$ lze přiřadit vektorové pole $\mathbf{R}_i$ na A_n takto: $(\mathbf{R}_i)_\mathrm{X} = \{(\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau)\,(\exp(\tau\mathbf{R}))\,\mathrm{X}\}_0$ pro všechny body X z A_n.

Věta 3. $(\boldsymbol{R}_i)_X = \mathbf{R}X$.

Důkaz. Nechť $g(\tau) = \exp(\tau\mathbf{R})$ a tedy $(g'(\tau))_0 = \mathbf{R}$. Trajektorie bodu X v jednoparametrické podgrupě $g(\tau)$ je $X(\tau) = g(\tau)X$ a její tečný vektor pro $\tau = 0$ je $X'(0) = g'(0)X = \mathbf{R}X$, neboť $g(0) = e$.

Věta 4. *Buď dán pohyb $g(t)$ jako funkce kanonického parametru. Pak tečné vektory trajektorií všech bodů tvoří pro každé t_0 vektorové pole $\boldsymbol{R}(t_0)_i$ indukované vektorem $\mathbf{R}(t_0)$ na A_n.*

Důkaz. $g(t)$ A je trajektorie bodu A, vektor tečny trajektorie v bodě $g(t_0)$ A je

$$\boldsymbol{T}_{g(t_0)A} = (g(t)\,A)'_{g(t_0)A} = (g'A)_{gA} = (g'g^{-1}gA)_{gA} = (g'g^{-1}B)_B = (\mathbf{R}B)_B = (\boldsymbol{R}_i)_{g(t_0)A}\,.$$

Definice. 1-parametrickou podgrupu $\exp(\tau\,\mathbf{R}(t_0))$ nazývejme okamžitým pohybem v t_0 pohybu $g(t)$.

Tvrzení. a) $\exp(\tau\overline{\mathbf{R}}(t_0)) = g(t_0)\exp(\tau\mathbf{R}(t_0))\,g(t_0)^{-1}$.

b) *Daný pohyb a okamžitý pohyb mají pro každé t_0 společné tečny trajektorií.*

Důkaz tvrzení a) plyne z definice $\mathbf{R}$ a adjungované representace,

b) z vět 3 a 4. Z tvrzení plyne, že vlastnosti 1. řádu daného pohybu lze vyšetřovat pomocí okamžitých pohybů.

Definice. Buďte $\boldsymbol{R}_i(t)$ vektorová pole indukovaná pohybem $g(t)$ v A_n. Množinu bodů (závislou na parametru t), v nichž je některé z těchto polí nulové, nazveme pevnou polodií. Analogicky definujeme hybnou polodii. Je tedy pevná polodie řešením rovnice

$$\mathbf{R}X = 0 \tag{3}$$

a hybná polodie je řešením rovnice $\overline{\mathbf{R}}X = 0$, pokud tato řešení existují.

Definice. Buď $g(t)$ pohyb. Pohyb daný křivkou $g(t)^{-1}$ nazývejme vratným pohybem daného pohybu. Pevný řídicí kužel vratného pohybu označme S, hybný označme $\overline{\mathrm{S}}$. Pak platí

Věta 5. $\mathbf{R} + \overline{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{R}} + \mathbf{S} = 0$.

Důkaz. Zvolme kanonický parametr – to lze, neboť řídicí kužel nezávisí na změně parametru. Pak $\mathbf{R} = g'g^{-1}$, $\overline{\mathbf{S}} = (g^{-1})^{-1}(g^{-1})' = g\,.\,(g^{-1})' = -g'g^{-1}$ a podobně pro druhou rovnost.

Důsledek. *Pevná polodie vratného pohybu je hybnou polodií původního pohybu a podobně pro druhou polodii. Uveďme ještě následující vztahy, potřebné v dalším:*

$$\bar{\mathbf{R}}(t) = \operatorname{ad} g^{-1}(t)\,\mathbf{R}(t)\,,$$

$$(4)\qquad \bar{\mathbf{R}}'(t) = \operatorname{ad} g^{-1}\mathbf{R}'(t)\,,\quad \bar{\mathbf{R}}''(t) = -[\bar{\mathbf{R}}, \bar{\mathbf{R}}'] + \operatorname{ad} g^{-1}(t)\,\mathbf{R}''(t)\,.$$

4. TRAJEKTORIE A POLODIE ADJUNGOVANÉHO POHYBU

Je-li $g(t)$ pohyb z G, pak trajektorie vektoru $\mathbf{X} \in \mathfrak{g}$ při adjungovaném pohybu je $\mathbf{X}(t) = \operatorname{ad} g(t)\,\mathbf{X} = g(t)\,\mathbf{X}g\,(t)^{-1}$, kde součin vpravo je míněn jako součin matic.

Lemma. *Tečný vektor trajektorie v bodě* $\mathbf{X}(t_0)$ *je*

$$(5)\qquad [\mathbf{R}(t_0), \mathbf{X}(t_0)]\,.$$

Důkaz.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g\mathbf{X}g^{-1})_{t_0} = \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,.\,\mathbf{X}g^{-1}\right)_{t_0} + \left(g\mathbf{X}\,.\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,g^{-1}\right)_{t_0} = \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,g^{-1}\,.\,g\mathbf{X}g^{-1}\right)_{t_0} +$$

$$+ \left(g\mathbf{X}g^{-1}\,.\left(-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\,g^{-1}\right)\right)_{t_0} = \mathbf{R}(t_0)\,\mathbf{X}(t_0) - \mathbf{X}(t_0)\,\mathbf{R}(t_0) = [\mathbf{R}(t_0), \mathbf{X}(t_0)]\,.$$

Důsledek. Polodie adjungovaného pohybu jsou dány rovnicemi

$$(6)\qquad [\mathbf{R}, \mathbf{X}] = 0 \quad \text{a} \quad [\bar{\mathbf{R}}, \mathbf{X}] = 0\,.$$

Věta 6. *Adjungovaný pohyb má netriviální polodie.*

Věta je jednoduchým důsledkem lemmatu.

II. KINEMATICKÁ GEOMETRIE ROVINY A SFÉRY

1. FRENETOVY FORMULE PRO ŘÍDICÍ KUŽEL V ALGEBRÁCH DIMENSE 3 HODNOSTI 1

Lieovy algebry dimense 3 hodnosti 1 jsou dvou typů:

1. typ: Lze vybrat basi $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ tak, aby platilo

$$[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 0\,,\quad [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] = \alpha\mathbf{X}_1 + \beta\mathbf{X}_2\,,\quad [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = \gamma\mathbf{X}_1 + \delta\mathbf{X}_2\,,$$

kde $\Delta = \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} \neq 0$, a matice $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$ má přitom jeden z těchto reálných Jordanových tvarů

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Pro vektor $\mathbf{X} = a_1\mathbf{X}_1 + a_2\mathbf{X}_2 + a_3\mathbf{X}_3$ z $\mathfrak{g}$ platí pak $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = a_3^2$. Na podalgebře generované vektory $\mathbf{X}_1$ a $\mathbf{X}_2$ je tedy Killingova forma degenerovaná. Chceme-li sestrojit Frenetův repér řídicího kužele obvyklým způsobem, je k tomu zapotřebí, aby existovala invariantní kvadratická forma na celé algebře. Zjistěme, pro které z našich algeber taková forma existuje. Vzhledem k tomu, že na prostoru generovaném vektorem $\mathbf{X}_3$ takovou formu už máme, lze předpokládat, že hledaná forma je tvaru

$$\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} = a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2 .$$

Je-li tato forma invariantní, musí být

$$\{\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{X}_3]\} + \{[\mathbf{X}, \mathbf{X}_3], \mathbf{Y}\} = 0 .$$

(Kvadratická forma a jí příslušná symetrická bilineární forma jsou stejně označeny.) Snadno se zjistí, že tato soustava má netriviální řešení pouze pro algebry, v nichž je $\alpha + \delta = 0$. To nastává pouze pro tyto Jordanovy tvary matice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \alpha_1 = -1 ;$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \alpha = 0 , \quad \beta = 1 .$$

Přicházejí tedy v úvahu pouze tyto dvě algebry

a) $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 0$, $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_1$, $[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = -\mathbf{X}_2$, $\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} = a_1a_2$,

b) $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 0$, $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_2$, $[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = -\mathbf{X}_1$, $\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} = a_1^2 + a_2^2$.

2. typ: U tohoto typu lze vybrat basi tak, aby bylo

a) $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_3$, $[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_1$, $[\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_1] = \mathbf{X}_2$, $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$,

b) $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_3$, $[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = \mathbf{X}_1$, $[\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_1] = -\mathbf{X}_2$, $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2$.

Tyto čtyři algebry jsou algebrami následujících Lieových grup (zaveďme pro ně nové označení):

E^0: typ 1a: grupa euklidovských shodností v rovině,

E^1: typ 1b: grupa pseudoeuklidovských shodností v rovině,

S^0: typ 2a: grupa sférických transformací v E_3,

S^1: typ 2b: grupa ekvicentroafinních transformací v rovině.

V dalším se budeme zabývat jen těmito grupami a jejich algebrami. Označme $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ součin $([\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2], \mathbf{X}_3)$. Pak platí

Lemma.

$$(\mathbf{X}_{i_1}, \mathbf{X}_{i_2}, \mathbf{X}_{i_3}) = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} . (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3).$$

$(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3) = 0$, jsou-li vektory $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ lineárně závislé.

$(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ je invariantní při adjungovaném zobrazení.

Lemma je snadným důsledkem invariantnosti Killingovy formy. Stejná věta platí i pro formu $\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\}$ v E^0 a E^1.

Předpokládejme nyní, že v některé z našich algeber je dán kužel $\mathbf{P}(t)$, tj. jednoparametrická soustava vektorů, který nemusí nutně být řídicím kuželem nějakého pohybu, a nechť $(\mathbf{P}, \mathbf{P}) \neq 0$.

Zvolme $\mathbf{R}(t) = \lambda(t)\, \mathbf{P}(t)$ tak, aby $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \varepsilon_0$, kde $\varepsilon_0 = \pm 1$ a předpokládejme, že všude je $\mathbf{R}' \neq 0$; dále zvolme $\varkappa_1 > 0$ tak, aby platilo $\mathbf{R}'(t) = \varkappa_1 \mathbf{T}$, a $(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = \pm 1$ pro $(\mathbf{R}', \mathbf{R}') \neq 0$ a $\{\mathbf{T}, \mathbf{T}\} = \pm 1$ pro $(\mathbf{R}', \mathbf{R}') = 0$.

Pišme $\mathbf{N} = [\mathbf{R}, \mathbf{T}]$. Násobíme-li Killingovu formu resp. formu $\{,\}$ vhodným faktorem úměrnosti, lze ještě dosáhnout toho, aby $(\mathbf{N}, \mathbf{N})$ resp. $\{\mathbf{N}, \mathbf{N}\} = \pm 1$. Snadno se zjistí, že při naší volbě Killingovy formy i formy $\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\}$ je tento požadavek splněn.

Zaveďme označení: $(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = \varepsilon_1$, $(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = \varepsilon_4$,

$$\begin{aligned} &\varepsilon_2 = \varepsilon_1 && \text{pro} \quad \varepsilon_1 \neq 0\,, && \varepsilon_3 = \varepsilon_4 && \text{pro} \quad \varepsilon_1 \neq 0\,, \\ &\varepsilon_2 = \{\mathbf{T}, \mathbf{T}\} && \text{pro} \quad \varepsilon_1 = 0\,, && \varepsilon_3 = \{\mathbf{N}, \mathbf{N}\} && \text{pro} \quad \varepsilon_1 = 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Věta 7. *Za uvedených předpokladů a označení platí Frenetovy formule:*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &= \varkappa_1 \mathbf{T}\,, & [\mathbf{R}, \mathbf{T}] &= \mathbf{N}\,, \\ \mathbf{T}' &= -\varkappa_1 \varepsilon_0 \varepsilon_1 \mathbf{R} + \varkappa_2 \mathbf{N}\,, & [\mathbf{T}, \mathbf{N}] &= \varepsilon_4 \varepsilon_0 \mathbf{R}\,, \\ \mathbf{N}' &= -\varkappa_2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \mathbf{T}\,. & [\mathbf{R}, \mathbf{N}] &= -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \mathbf{T}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Důkaz. Předně je $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) =$ konst, $\{\mathbf{R}, \mathbf{R}\} =$ konst atd. Z toho plyne, že $\mathbf{R}'$ má složku do $\mathbf{R}$ nulovou a podobně pro ostatní. Dále je $(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = (\mathbf{T}, \mathbf{N}) = (\mathbf{N}, \mathbf{R}) = \{\mathbf{R}, \mathbf{T}\} = \ldots = 0$. Z toho plyne $(\mathbf{R}', \mathbf{T}) + (\mathbf{R}, \mathbf{T}') = \varkappa_1(\mathbf{T}, \mathbf{T}) + (\mathbf{R}, \alpha\mathbf{R} + \gamma\mathbf{N}) = \varkappa_1\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_0 \neq 0$, a tedy $\alpha = -\varepsilon_0\varepsilon_1\varkappa_1$; γ označíme $\varkappa_2$. Dále $(\mathbf{N}', \mathbf{R}) + (\mathbf{R}', \mathbf{N}) = \varkappa_1(\mathbf{T}, \mathbf{N}) + (\alpha\mathbf{R} + \beta\mathbf{T}, \mathbf{R}) = \alpha\varepsilon_0 = 0$, a tedy $\alpha = 0$. $(\mathbf{T}', \mathbf{N}) + (\mathbf{T}, \mathbf{N}') = \varkappa_2(\mathbf{N}, \mathbf{N}) + \beta(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = 0$. Rozlišme nyní oba případy:

i) $(\mathbf{T}, \mathbf{T}) \neq 0$, a tedy $\beta = -\varkappa_2\varepsilon_1\varepsilon_4 = -\varkappa_2\varepsilon_2\varepsilon_3$,

ii) $(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = 0$, a tedy $\beta = -\varkappa_2\varepsilon_2\varepsilon_3$, uvážíme-li druhou formu.

Zbývají formule pro násobení:

$(\mathbf{R}, [\mathbf{T}, \mathbf{N}]) = ([\mathbf{R}, \mathbf{T}], \mathbf{N}) = (\mathbf{N}, \mathbf{N}) = \varepsilon_4$. Je-li $[\mathbf{T}, \mathbf{N}] = \alpha\mathbf{R} + \beta\mathbf{T} + \gamma\mathbf{N}$, je $\beta = 0$, $\gamma = 0$ a $\alpha\varepsilon_0 = \varepsilon_4$, tj. $\alpha = \varepsilon_0\varepsilon_4$ a podobně pro ostatní: je-li $[\mathbf{R}, \mathbf{N}] = \beta\mathbf{T}$, pak $(\mathbf{T}, [\mathbf{R}, \mathbf{N}]) = \beta(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = \beta\varepsilon_1$ resp. $\{\mathbf{T}, [\mathbf{R}, \mathbf{N}]\} = \beta\{\mathbf{T}, \mathbf{T}\}$. Dále je $(\mathbf{T}, [\mathbf{R}, \mathbf{N}]) = ([\mathbf{T}, \mathbf{R}], \mathbf{N}) = -\varepsilon_4$ resp. $\{\mathbf{T}, [\mathbf{R}, \mathbf{N}]\} = \{\mathbf{N}, \mathbf{N}\}$. V obou případech je $-\varepsilon_3 = \beta\varepsilon_2$, tj. $\beta = -\varepsilon_2\varepsilon_3$. Tím je věta dokázána.

Parametr s, v němž je $\varkappa_1 = 1$, nazveme obloukem křivky $\mathbf{R}(t)$; výraz $\varkappa_2\varepsilon_2\varepsilon_3/\varkappa_1$, který nezávisí na parametrisaci, nazveme křivostí k křivky $\mathbf{R}(t)$ v $\mathfrak{g}$.

Věta 8. *Křivost k křivky $\mathbf{R}(t)$ je dána vztahem*

$$k = \frac{(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{R}'')\,\varepsilon_2}{\{\varepsilon_2(\mathbf{R}', \mathbf{R}')\}^{3/2}}\,. \tag{9}$$

Důkaz. $\mathbf{R}' = \varkappa_1 T$, $[\mathbf{R}, \mathbf{R}'] = \varkappa_1\mathbf{N}$,

$$\mathbf{R}'' = \varkappa_1'\mathbf{T} - \varkappa_1^2\varepsilon_0\varepsilon_1\,.\,\mathbf{R} + \varkappa_1\varkappa_2\,.\,\mathbf{N}\,,\quad (\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{R}'') = \varkappa_1^2\varkappa_2\varepsilon_3\,,$$
$$(\mathbf{R}', \mathbf{R}') = \varkappa_1^2\varepsilon_2 \quad \text{a} \quad \varkappa_1 = [\varepsilon_2(\mathbf{R}', \mathbf{R}')]^{1/2}\,.$$

Je tedy

$$k = \frac{\varkappa_1^2\varkappa_2\varepsilon_2\varepsilon_3}{\varkappa_1^3} = \frac{(\mathbf{R}, \mathbf{R}', \mathbf{R}'')\,\varepsilon_2}{\{\varepsilon_2(\mathbf{R}', \mathbf{R}')\}^{3/2}}\,.$$

Chceme-li získat Frenetovy formule pro pohyb, je třeba k odvozeným vztahům přidat ještě rovnici (2). Platí tedy celkem

Věta 9. *Buď $g(t)$ pohyb v některé z grup E^i nebo S^i $(i = 0, 1)$ třídy C^4 bez singulárních bodů $((\mathbf{R}, \mathbf{R}) \neq 0, \mathbf{R}' \neq 0)$. Pak platí*

$$d\mathbf{P} = d\varphi\mathbf{R}\,,\quad d\mathbf{T} = -\varkappa_1\,d\varphi\varepsilon_0\varepsilon_1\mathbf{R} + \varkappa_2\,d\varphi\mathbf{N}\,,$$
$$d\mathbf{R} = d\varphi\varkappa_1\mathbf{T}\,,\quad d\mathbf{N} = -\varkappa_2\,d\varphi\varepsilon_2\varepsilon_3\mathbf{N}\,.$$

Definice. Invarianty $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ nazvěme 1. a 2. křivostí pohybu.

Najděme souvislost mezi invarianty polodií a invarianty řídicího kužele pro pohyb v grupách E^i. Je-li $\mathbf{R}(t)$ řídicí kužel nějakého pohybu z této grupy, je $\mathbf{RX} = 0$ rovnice pevné polodie. Označme $\boldsymbol{x}(t)$ křivku, která je řešením této rovnice. Pak je $\mathbf{R}(t)\,\boldsymbol{x}(t) = 0$. Z toho plyne $\mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}\boldsymbol{x}' = 0$, a tedy $\mathbf{R}\mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x}' = 0$. V E^i platí $\mathbf{R}^2\boldsymbol{v} = -\varepsilon_2\varepsilon_3\boldsymbol{v}$ pro každý vektor v rovině. Je tedy $\varepsilon_2\varepsilon_3\boldsymbol{x}' = \mathbf{R}\mathbf{R}'\boldsymbol{x}$, tj. $\boldsymbol{x}' = \varepsilon_2\varepsilon_3\mathbf{R}\mathbf{R}'\boldsymbol{x} = \varkappa_1\varepsilon_2\varepsilon_3(\mathbf{TR} + \mathbf{N})\,\boldsymbol{x} = \varkappa_1\varepsilon_2\varepsilon_3\mathbf{N}\boldsymbol{x}$; jednotkový tečný vektor pak je roven $\boldsymbol{t} = \varepsilon_2\varepsilon_3\mathbf{N}\boldsymbol{x}$, $\varkappa_1 = ds/d\varphi$, $d\boldsymbol{t}/ds = d\boldsymbol{t}/d\varphi\,.\,d\varphi/ds = (1/\varkappa_1)\,k\,.\,\boldsymbol{n} = (\varepsilon_2\varepsilon_3)/\varkappa_1\,.\,(d/d\varphi)\,(\mathbf{N}\boldsymbol{x}) = (\varepsilon_2\varepsilon_3)/\varkappa_1\,(\mathbf{N}'\boldsymbol{x} + \mathbf{N}\boldsymbol{x}') = (1/\varkappa_1)\,(\varkappa_2\mathbf{T}\boldsymbol{x} + \varepsilon_2\varepsilon_3\varkappa_1\mathbf{NT}\boldsymbol{x}) = -(1/\varkappa_1)\,\varkappa_2\mathbf{T}\boldsymbol{x}$. Srovnáním dostaneme, že křivost k polodie je rovna $k = \varkappa_2/\varkappa_1$ a normálový vektor $\boldsymbol{n}$ je $\boldsymbol{n} = -\mathbf{T}\boldsymbol{x}$. Stejné vztahy platí pro hybnou polodii a hybný řídicí kužel.

2. VZTAHY MEZI INVARIANTY ŘÍDICÍCH KUŽELŮ

Buďte $\mathbf{R}(t)$ a $\overline{\mathbf{R}}(t)$ řídicí kužele nějakého pohybu $g(t)$, $\varkappa_1, \varkappa_2, \bar{\varkappa}_1, \bar{\varkappa}_2$ jejich invarianty. Pak je $\overline{\mathbf{R}}'(t) = \bar{\varkappa}_1 \overline{\mathbf{T}}(t)$, $\mathbf{R}' = \varkappa_1 \mathbf{T}$, $\overline{\mathbf{R}}' = \mathrm{ad}g^{-1}\mathbf{R}'$; z toho plyne $\bar{\varkappa}_1 \overline{\mathbf{T}} = \mathrm{ad}g^{-1}\mathbf{R}' = \mathrm{ad}g^{-1}\varkappa_1\mathbf{T} = \varkappa_1 \mathrm{ad}g^{-1}\mathbf{T}$. Jelikož $(\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{T}}) = (\mathrm{ad}g^{-1}\mathbf{T}, \mathrm{ad}g^{-1}\mathbf{T}) = (\mathbf{T}, \mathbf{T})$, je $\overline{\mathbf{T}} = \mathrm{ad}g^{-1}\mathbf{T}$, $\bar{\varkappa}_1 = \varkappa_1$. $\overline{\mathbf{T}}' = \mathrm{ad}g^{-1}\mathbf{T}' + [\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{R}}]$; podle (4), dosadíme-li z (8)

$$-\varepsilon\bar{\varkappa}_1\overline{\mathbf{R}} + \bar{\varkappa}_2\overline{\mathbf{N}} = \mathrm{ad}g^{-1}(\varepsilon\varkappa_1\mathbf{R} + \varkappa_2\mathbf{N}) + [\overline{\mathbf{T}}, \overline{\mathbf{R}}] = \varepsilon\varkappa_1\overline{\mathbf{R}} + \varkappa_2\,\mathrm{ad}g^{-1}\mathbf{N} - \overline{\mathbf{N}}\,.$$

Protože je $(\overline{\mathbf{N}}, \overline{\mathbf{N}}) = (\mathbf{N}, \mathbf{N})$, je $\bar{\varkappa}_2 = \varkappa_2 - 1$.

Věta 10. *Pro invarianty obou řídicích kuželů platí vztahy*

$$\bar{\varkappa}_1 = \varkappa_1\,, \quad \varkappa_2 - \bar{\varkappa}_2 = 1\,. \tag{10}$$

Přímým důsledkem této věty je

Věta 11. *Adjungovaný pohyb vzniká odvalováním řídicích kuželů a při daných* $\mathbf{R}(0)$ *a* $\overline{\mathbf{R}}(0)$ *je jimi určen.*

V grupách E^0 a E^1 platí též věta pro pevnou a hybnou polodii, vzhledem ke vztahům, které platí mezi invarianty řídicích kuželů a polodií v těchto grupách.

3. KŘIVOST TRAJEKTORIE V KINEMATICE E^0 A E^1

Buď tedy E^0 grupa euklidovských shodností a E^1 grupa pseudoeuklidovských přímých shodností v rovině. V E^i zvolme basi

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

kde $\varepsilon = -1$ pro $i = 0$ a $\varepsilon = +1$ pro $i = 1$. Pak je $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = 0$, $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] = -\varepsilon\mathbf{X}_2$, $[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = -\mathbf{X}_1$. Při $\mathbf{X} = \sum a_k\mathbf{X}_k \in E^i$ je $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = a_3^2$, $\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\} = a_1^2 - \varepsilon a_2^2$.

Nechť nyní $g(t)$ je pohyb z E^i třídy C^4 bez singulárních bodů ($(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \neq 0$, $\mathbf{R}' \neq 0$). Kanonický parameter je úhel otočení. Pišme $\mathbf{R}(t) = a\mathbf{X}_1 + b\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3$, to znamená, že předpokládáme, že kanonický parametr je vybrán tak, že třetí složka vektoru $\mathbf{R}$ je kladná. Označme $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ bod v rovině a $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\}$ formu, kterou forma $\{\mathbf{X}, \mathbf{X}\}$ zřejmým způsobem indukuje v rovině, $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ pak značme antisymetrický součin vektorů v rovině, $\varepsilon' = \operatorname{sgn}\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\}$.

Tečný vektor $\boldsymbol{x}'$ trajektorie $\boldsymbol{x}(t) = g(t)\,\boldsymbol{x}$ bodu $\boldsymbol{x}$ v bodě $\boldsymbol{x}(t)$ je roven $\boldsymbol{x}'(t) = \mathbf{R}(t)\,\boldsymbol{x}(t)$; pak je dále $\boldsymbol{x}'' = \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}\boldsymbol{x}' = \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x}$ a pro oblouk s trajektorie je $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = (\varepsilon'\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\})^{1/2}$. Křivost $k_{\boldsymbol{x}}$ trajektorie v bodě $\boldsymbol{x}$ je pak dána tímto vztahem

$$k_{\boldsymbol{x}} = \frac{\langle \boldsymbol{x}'', \boldsymbol{x}' \rangle}{\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{3/2}} = \frac{\langle \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x} \rangle}{(\varepsilon'\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\})^{3/2}} \,. \tag{11}$$

Vektor $-\varepsilon\mathbf{R}^2\boldsymbol{x}$ má směr kladné normály trajektorie a jeho velikost je $(\varepsilon'\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\})^{1/2}$. Střed oskulační „kružnice" $S_{\boldsymbol{x}}$ (v případě E^0 je to skutečně kružnice, v případě E^1 je to pseudoeuklidovská kružnice, tj. rovnoosá hyperbola resp. dvě sdružené rovnoosé hyperboly) trajektorie v bodě $\boldsymbol{x}$ je dána vztahem:

$$S_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + (k_{\boldsymbol{x}})^{-1} \,.\, \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \frac{\varepsilon(\varepsilon'\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\})^{3/2}}{\langle \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x} \rangle} \,.\, \frac{1}{(\varepsilon'\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\})^{1/2}} \mathbf{R}^2\boldsymbol{x} =$$

$$= \boldsymbol{x} - \frac{\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\}}{\langle \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x} \rangle} \varepsilon'\varepsilon\mathbf{R}^2\boldsymbol{x} \,.$$

Rozlišme nyní oba případy:

a) E^0: Zaveďme polární souřadnice vztahy $x_1 = b + \varrho \cos \vartheta$, $x_2 = -a + \varrho \sin \vartheta$ kde $\varrho \in (-\infty, +\infty)$, $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Pak

$$\mathbf{R}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varrho \sin \vartheta \\ -\varrho \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}'\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ a' \\ b' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^2\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varrho \cos \vartheta \\ -\varrho \sin \vartheta \end{pmatrix};$$

$$\frac{\{\mathbf{R}\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x}\}}{\langle \mathbf{R}'\boldsymbol{x} + \mathbf{R}^2\boldsymbol{x}, \mathbf{R}\boldsymbol{x} \rangle} = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - \varrho(a' \cos \vartheta + b' \sin \vartheta)} = \frac{\varrho}{\varrho - (a' \cos \vartheta + b' \sin \vartheta)} =$$

$$= \frac{\varrho}{\varrho + \varkappa_1 \cos \varphi} \,;$$

$$a' \cos \vartheta + b' \sin \vartheta = \sqrt{\{(a')^2 + (b')^2\}} \left(\frac{a'}{\sqrt{\{(a')^2 + (b')^2\}}} \cos \vartheta + \right.$$

$$\left. + \frac{b'}{\sqrt{\{(a')^2 + (b')^2\}}} \sin \vartheta \right) = -\varkappa_1 \cos \varphi \,,$$

kde φ je úhel mezi normálou polodie a pólovou přímkou. Množina inflexních bodů trajektorií je dána rovnicí $\varrho + \varkappa_1 \cos \varphi = 0$, což skutečně je rovnice inflexní kružnice. Tím je rovněž nalezen geometrický význam 1. křivosti pohybu: $-\varkappa_1$ je průměr inflexní kružnice, $\varkappa_1$ je průměr kružnice vratu (i s orientací). Napišme nyní rovnice příbuznosti mezi body a jejich středy křivosti: Má-li bod $\boldsymbol{x}$ souřadnice (ϱ, ϑ) a $S_{\boldsymbol{x}}$ souřadnice (ϱ', ϑ'), je

$$\vartheta = \vartheta' \,, \quad \varrho' = \varrho - \frac{\varrho^2}{\varrho + d} = \frac{\varrho^2 + \varrho d - \varrho^2}{\varrho + d}$$

(kde píšeme $d = \varkappa_1 \cos \varphi$), a tedy $\varrho\varrho' = d(\varrho - \varrho')$.

Při tom φ je úhel kladné jednotkové normály s jednotkovým vektorem pólové přímky, orientovaným ve smyslu rostoucího kanonického parametru. Tečna polodie je orientována ve smyslu rostoucího kanonického parametru, normála tak, že $(\mathbf{t}_x, \mathbf{n}_x)$ tvoří pravotočivý repér. Za těchto předpokladů platí $(1/r) - (1/\bar{r}) = (1/2r_0)$, jsou-li $r, \bar{r}, r_0$ orientované poloměry křivosti pevné a hybné polodie a kružnice vratu.

b) E^1: Zaveďme nejprve polární souřadnice vztahy

$$x_1 = -b + \varrho \operatorname{ch} \vartheta\,, \quad x_2 = -a + \varrho \operatorname{sh} \vartheta\,.$$

Analogicky jako v prvém případě dostaneme

$$\frac{\{\mathbf{R}x, \mathbf{R}x\}}{\langle \mathbf{R}'x + \mathbf{R}^2 x, \mathbf{R}x\rangle} = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + \varrho(+a' \operatorname{ch} \vartheta - b' \operatorname{sh} \vartheta)} = \frac{\varrho}{\varrho - \varkappa_1 \operatorname{ch} \varphi}\,,$$

kde φ je pseudoeuklidovský úhel mezi normálou a pólovou přímkou. Příbuznost má tuto rovnici (značíme-li opět ϱ, ϑ souř. bodu $\boldsymbol{x}$ a ϱ', ϑ' souř. bodu S_x)

$$\varrho\varrho' = -d(\varrho - \varrho')\,, \quad d = \varkappa_1 \operatorname{ch} \varphi\,.$$

Pro isotropické směry je $S_x = \boldsymbol{x}$, pro část roviny danou polárními souřadnicemi $x_1 = -b + \varrho \operatorname{sh} \vartheta$, $x_2 = -a + \varrho \operatorname{ch} \vartheta$ je

$$\varrho\varrho' = d(\varrho - \varrho')\,, \quad d = \varkappa_1 \operatorname{sh} \varphi\,.$$

Množina inflexních bodů je dána rovnicí $\varrho - \varkappa_1 \operatorname{ch} \varphi = 0$, což je pseudoeuklidovská kružnice s průměrem $\varkappa_1$, tj. rovnoosá hyperbola s osami délky $\varkappa_1$, můžeme ji tedy považovat za kružnici „obratu“. Podobně se definuje i kružnice „vratu“. Mají stejné vlastnosti, jako kružnice vratu a obratu v případě grupy E^0.

4. KINEMATIKA GRUPY S^0

$\boldsymbol{S}^0$ je algebra matic tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

pišme $\mathbf{X} = a_1\mathbf{X}_1 + a_2\mathbf{X}_2 + a_3\mathbf{X}_3$. $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 4. \sum(a_i)^2$, $\frac{1}{2}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, je-li $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ obvyklý vektorový součin. Ztotožníme-li centroeuklidovský prostor, ve kterém se děje pohyb, s algebrou $\boldsymbol{S}^0$ tak, že ztotožníme base těchto prostorů, je $\mathbf{RX} = \frac{1}{2}[\mathbf{R}, \mathbf{X}]$. Z toho plyne, že struktura sférického pohybu je táž jako struktura pohybu k němu adjungovaného. Budeme se tedy zabývat pouze adjungovaným pohybem, což učiníme v dalším. Právě uvedené skutečnosti se využívá při studiu sférické kinematiky pomocí kvaternionů (viz [4]). Označíme-li K multiplikativní grupu jednotkových kvaternionů, je K lokálně isomorfní s S^0. Lokální isomorfismus mezi nimi je dán např. takto: je-li g otočení kolem osy s jedn. vektorem $\boldsymbol{n}_0$ o úhel φ, přiřaďme mu kvaternion $\cos \varphi + \boldsymbol{n}_0 \sin \varphi$. Lieova algebra $\boldsymbol{K}$ grupy K je tvořena algebrou ryze imaginárních kvaternionů, jejíž algebraická struktura je dána obvyklým násobením kvaternionů (a je ovšem isomorfní s $\boldsymbol{S}^0$). Adjungovaná representace grupy K v algebře $\boldsymbol{K}$ je dána takto:

Je-li $k \in K$, $\mathbf{X} \in \boldsymbol{K}$, a je-li $\tilde{k} = k^{-1}$ sdružený kvaternion ke k, je $(\mathrm{ad}k)\,\mathbf{X} = k\mathbf{X}\tilde{k}$. Tím je dán lokální isomorfismus i mezi S^0 a ad$K$.

5. KINEMATIKA EKVICENTROAFINNÍ GRUPY S^1

Nechť S^1 je grupa ekvicentroafinních transformací v rovině, tedy grupa matic typu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_1 & g_2 \\ 0 & g_3 & g_4 \end{pmatrix},$$

pišme krátce

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix},$$

kde $g_1 g_4 - g_2 g_3 = 1$. $\boldsymbol{S}^1$ je algebra matic tvaru

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & -a_3 \end{pmatrix};$$

zvolme basi

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pak platí $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{X}_3$, $[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3] = -2\mathbf{X}_1$, $[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] = 2\mathbf{X}_2$, $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 4(a_3^2 + a_1 a_2)$. Rovnice $\mathbf{RX} = 0$ má jediné řešení $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. To znamená, že polodie degenerují v bod. Hledejme dále charakteristické směry operátoru $\mathbf{R}$, tj. řešme rovnici $\mathbf{RX} = \lambda\mathrm{X}$. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - (\mathbf{R}, \mathbf{R}) = 0$. Charakteristické směry jsou tedy dva reálné různé pro pohyb s $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = 1$, žádné (imaginární) pro pohyb s $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = -1$. V ekvicentroafinní grupě jsou tedy dva typy okamžitých pohybů (pomineme-li singulární pohyby s $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = 0$). Je-li $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = 1$, jsou trajektorie okamžitých pohybů hyperboly; je-li $(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = -1$, jsou to elipsy.

Snadno se zjistí, že tečna a normála trajektorie jsou sdružené směry kuželosečky, která je trajektorií okamžitého pohybu (normála trajektorie prochází počátkem).

Pro invarianty křivky v ekvicentroafinní geometrii platí: $s' = \langle x, x' \rangle$, $k = \langle x', x'' \rangle / \langle x, x' \rangle^3$. Vztahy pro invarianty trajektorie v bodě x pak jsou

$$\frac{ds}{dt} = \langle x, \mathbf{R}x \rangle , \quad k_x = \frac{\langle \mathbf{R}x, \mathbf{R}'x + \mathbf{R}^2 x \rangle}{\langle x, \mathbf{R}x \rangle^3} .$$

6. KINEMATIKA ADJUNGOVANÉHO POHYBU V GRUPÁCH E^i A S^i

Nechť je dán pohyb $g(t)$ třídy C^4 bez singulárních bodů v některé z těchto grup a uvažujme pohyb k němu adjungovaný. Jelikož algebry těchto grup mají hodnost 1, má rovnice $[\mathbf{R}, \mathbf{X}] = 0$ řešení pouze $\lambda\mathbf{R}$, kde λ je reálný parametr. To znamená, že polodie adjungovaného pohybu jsou jednoznačně určeny řídicími kuželi. Pro tečný vektor trajektorie bodu $\mathbf{X}$ platí podle (5): $\mathbf{X}' = [\mathbf{R}, \mathbf{X}]$, z toho plyne $\mathbf{X}'' = [\mathbf{R}', \mathbf{X}] + [\mathbf{R}, \mathbf{X}'] = (\mathrm{ad}\mathbf{R}')\,\mathbf{X} + (\mathrm{ad}\mathbf{R})^2\,\mathbf{X}$. Frenetův repér řídicího kužele (pevného) je tvořen vektory $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{R}$ a platí pro něj formule (8). Budeme zkoumat trajektorie bodů ležících na jednotkové kouli, to znamená na kouli dané rovnicí $(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \varepsilon$, kde $\varepsilon = \pm 1$.

Označme $\mathbf{t}_\mathbf{X}$ a $\mathbf{n}_\mathbf{X}$ tečný a normálový vektor trajektorie, ležící v tečné rovině koule v bodě $\mathbf{X}$, ne nutně jednotkový. Pak je $\mathbf{t}_\mathbf{X} = [\mathbf{R}, \mathbf{X}]$, $\mathbf{n}_\mathbf{X} = [\mathbf{X}, [\mathbf{R}, \mathbf{X}]]$. Označme $\bar{\varepsilon}_2 = \operatorname{sgn}(\mathbf{t}_\mathbf{X}, \mathbf{t}_\mathbf{X})$, $\bar{\varepsilon}_3 = \operatorname{sgn}(\mathbf{n}_\mathbf{X}, \mathbf{n}_\mathbf{X})$ s úmluvou podobnou jako v (7). Považujme za míru křivosti trajektorie její sférickou (geodetickou) křivost na jednotkové kouli. Pro ni platí podle (9)

$$k_x = \frac{(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'')\,\bar{\varepsilon}_2}{\left(\bar{\varepsilon}_2 \dfrac{ds}{dt}\right)^{3/2}} , \quad \bar{\varepsilon}_2 \frac{ds}{dt} = \{\bar{\varepsilon}_2 (\mathbf{X}', \mathbf{X}')\}^{1/2} .$$

Zaveďme vektor sférické (geodet.) křivosti takto:

$$(12) \quad \mathbf{S}_x = \mathbf{X} + \frac{1}{k_x}\mathbf{N}_x = \mathbf{X} + \frac{(\bar{\varepsilon}_2 (\mathbf{X}', \mathbf{X}'))^{3/2}\,\bar{\varepsilon}_2}{(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'')} \cdot \frac{1}{(\bar{\varepsilon}_2 (\mathbf{X}', \mathbf{X}'))^{1/2}} [\mathbf{X}, [\mathbf{R}, \mathbf{X}]] =$$

$$= \mathbf{X} + \frac{(\mathbf{X}', \mathbf{X}')}{(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{X}'')} [\mathbf{X}, [\mathbf{R}, \mathbf{X}]] = \mathbf{X} + \frac{(\mathrm{ad}\mathbf{R}\mathbf{X}, \mathrm{ad}\mathbf{R}\mathbf{X})}{(\mathbf{X}, \mathrm{ad}\mathbf{R}\mathbf{X}, \mathrm{ad}\mathbf{R}'\mathbf{X} + (\mathrm{ad}\mathbf{R})^2\,\mathbf{X})} [\mathbf{X}, [\mathbf{R}, \mathbf{X}]] .$$

Je-li $\mathbf{X} \equiv (\alpha, \beta, \gamma)$ bod a jsou-li α, β, γ jeho souřadnice v repéru $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, je po dosazení do (12):

$$\mathbf{S}_x \equiv \varepsilon_0 \varepsilon \left(\frac{(\beta^2 \varepsilon_2 + \gamma^2 \varepsilon_3) + \alpha \gamma \varkappa_1 \varepsilon_2}{(\beta^2 \varepsilon_2 + \gamma^2 \varepsilon_3) + \gamma \varkappa_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 \varepsilon} , \; \beta \frac{\gamma \varkappa_1 \varepsilon_2}{(\beta^2 \varepsilon_2 + \gamma^2 \varepsilon_3)\,\alpha + \gamma \varkappa_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 \varepsilon} , \right.$$

$$\left. \gamma \frac{\gamma \varkappa_1 \varepsilon_2}{(\beta^2 \varepsilon_2 + \gamma^2 \varepsilon_3)\,\alpha + \gamma \varkappa_1 \varepsilon_2 \varepsilon_0 \varepsilon} \right) .$$

Promítněme nyní bod **X** i bod $\mathbf{S}_x$ ze středu 0 do tečné roviny koule v bodě **R**, průměty těchto bodů označme $\pi\mathbf{X}$ a $\pi\mathbf{S}_x$ a zkoumejme takto vzniklou příbuznost v tečné rovině koule:

$$\pi\mathbf{X} : \left(1, \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}\right),$$

$$\pi\mathbf{S}_x : \left(1, \frac{\beta\gamma\varkappa_1\varepsilon_2}{(\beta^2\varepsilon_2 + \gamma^2\varepsilon_3) + \alpha\gamma\varkappa_1\varepsilon_2}, \frac{\gamma \,.\, \gamma\varkappa_1\varepsilon_2}{(\beta^2\varepsilon_2 + \gamma^2\varepsilon_3) + \alpha\gamma\varkappa_1\varepsilon_2}\right) =$$
$$= \left(1, \frac{\beta\gamma\varkappa_1}{(\beta^2 + \gamma^2\varepsilon_2\varepsilon_3) + \alpha\gamma\varkappa_1}, \frac{\gamma \,.\, \gamma\varkappa_1}{(\beta^2 + \gamma^2\varepsilon_2\varepsilon_3) + \alpha\gamma\varkappa_1}\right).$$

1. $\varepsilon_2 \,.\, \varepsilon_3 = +1$: Pišme $\beta/\alpha = \varrho \sin \varphi$, $\gamma/\alpha = \varrho \cos \varphi$, pak

$$\varphi = \varphi', \quad \varrho' = \frac{\varrho^2\varkappa_1 \cos \varphi}{\varrho^2 + \varrho\varkappa_1 \cos \varphi} = \frac{\varrho d}{\varrho + d},$$

kde $d = \varkappa_1 \cos \varphi$. Je tedy $\varrho\varrho' = d(\varrho - \varrho')$.

2. $\varepsilon_2 \,.\, \varepsilon_3 = -1$: Pišme $\beta/\alpha = \varrho \operatorname{sh} \varphi$, $\gamma/\alpha = \varrho \operatorname{ch} \varphi$, pak

$$\varphi = \varphi', \quad \varrho' = \frac{\varrho^2\varkappa_1 \operatorname{ch} \varphi}{-\varrho^2 + \varrho\varkappa_1 \operatorname{ch} \varphi} = \frac{\varrho d}{-\varrho + d},$$

kde $d = \varkappa_1 \operatorname{ch} \varphi$. V tomto případě je $\varrho\varrho' = -d(\varrho - \varrho')$. Je-li $\beta/\alpha = \varrho \operatorname{ch} \varphi$, $\gamma/\alpha = \varrho \operatorname{sh} \varphi$, je

$$\varphi = \varphi', \quad \varrho' = \frac{\varrho^2\varkappa_1 \operatorname{sh} \varphi}{\varrho^2 + \varrho\varkappa_1 \operatorname{sh} \varphi} = \frac{\varrho d}{\varrho + d},$$

kde $d = \varkappa_1 \operatorname{sh} \varphi$, a tedy $\varrho\varrho' = d(\varrho - \varrho')$.

Poznámka. Tam, kde je to zapotřebí, vezme se místo formy (,) forma {,}.

Množina bodů, pro které výše zavedený vektor křivosti nemá smysl, to znamená množina „inflexních" bodů ve smyslu příslušné geometrie, je dána rovnicemi

$$\varepsilon = \varepsilon_0\alpha^2 + \varepsilon_4^2(\varepsilon_2\beta^2 + \varepsilon_3\gamma^2), \quad 0 = \gamma\varkappa_1\varepsilon_2\varepsilon_0\varepsilon + \alpha(\beta^2\varepsilon_2 + \gamma^2\varepsilon_3).$$

Jestliže je $\varepsilon_4 = 0$, tj. v grupách E^0 a E^1, dostáváme

$$\gamma\varkappa_1\varepsilon_2 + \beta^2\varepsilon_2 + \gamma^2\varepsilon_3 = 0 \quad \text{tj.} \quad \varkappa_1\gamma + \beta^2 + \gamma^2\varepsilon_2\varepsilon_3 = 0,$$

což skutečně je rovnice inflexní kružnice (kružnice „obratu"). Jestliže je $\varepsilon_4 \neq 0$, je to křivka o těchto rovnicích

$$\varepsilon = \varepsilon_0\alpha^2 + \varepsilon_2\beta^2 + \varepsilon_3\gamma^2, \quad 0 = \gamma\varkappa_1\varepsilon_2 + (\varepsilon_0 - \varepsilon\alpha^2)\,\alpha.$$