Werk

Label: Article

Jahr: 1967

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?31311157X_0092|log105

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 92 (1967), Praha

K JEDNOMU PROBLÉMU S. M. ULAMA

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Došlo 2. dubna 1966)

V [1], str. 28, je položena tato otázka:

Nechť A a B jsou nekonečné množiny, pro něž existuje transfinitní posloupnost bodových transformací $t_\xi(a) \in B$ pro $a \in A$. Transformace t_ξ mají tyto vlastnosti: 1) z toho, že pro některé množiny $X \subset A$ a $Y \subset A$ a některé ξ platí rovnost $t_\xi(X) \cap \cap t_\xi(Y) = \emptyset$, plyne, že pro libovolné $\eta > \xi$ je $t_\eta(X) \cap t_\eta(Y) = \emptyset$; 2) pro každou nekonečnou množinu $X \subset A$ existuje ξ takové, že $t_\xi(X)$ obsahuje alespoň dva různé prvky, 3) je-li $X \cap Y = \emptyset$ pro konečné X, Y, existuje η takové, že $t_\eta(X) \cap t_\eta(Y) = \emptyset$.

Bude mohutnost A vždy menší nebo rovna mohutnosti B? Odpověď na tuto otázku je záporná, což dokážeme konstrukcí protipříkladu.

Budiž A rovno polootevřenému intervalu $(0, 1\rangle$ na množině reálných čísel, budiž B množina všech čísel z $(0, 1\rangle$, která lze vyjádřit ve tvaru $m/2^n$, kde m je přirozené číslo, n nezáporné celé číslo. Pro každé nezáporné celé n definujme rozklad $\mathscr{P}_n$ množiny A na n podmnožin $P_{nk} = (k/2^n, (k+1)/2^n\rangle$ pro $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$. Je zřejmě $P_{nk} \cap \cap P_{nl} = \emptyset$ pro $k \neq l$ a $\bigcup_{k=0}^{2^n-1} P_{nk} = A$. Tedy při pevném n každý prvek $a \in A$ náleží právě do jedné z množin P_{nk} a $\mathscr{P}_n$ je skutečně rozklad množiny A.

Pro každé nezáporné celé n definujme zobrazení t_n množiny A do množiny B takto: $t_n(a) = (k + 1)/2^n$ pro $a \in P_{nk}$.

Ověříme, že posloupnost $\{t_n\}$ skutečně splňuje podmínky.

1) Nechť pro některé množiny $X \subset A$ a $Y \subset A$ a některé ξ platí $t_\xi(X) \cap t_\xi(Y) = \emptyset$. Znamená to, že každá z množin $P_{\xi k}$ může mít neprázdný průnik nejvýše s jednou z množin X, Y. Je-li $\eta > \xi$, pak rozklad $\mathscr{P}_\eta$ je zjemněním rozkladu $\mathscr{P}_\xi$, tedy také každá z množin $P_{\eta k}$ může mít neprázdný průnik nejvýše s jednou z množin X, Y a je tedy $t_\eta(X) \cap t_\eta(Y) = \emptyset$.

2) Druhá podmínka platí nejen pro nekonečné množiny, ale pro všechny množiny $X \subset A$ obsahující alespoň dva prvky. Buďtež x, y dva různé prvky z X a budiž n takové přirozené číslo, že $1/2^n < |x - y|$. Pak prvky x a y leží v různých třídách rozkladu $\mathscr{P}_n$ a tedy $t_n(x) \neq t_n(y)$. Množina $t_n(X)$ tedy obsahuje alespoň dva různé prvky, a to $t_n(x)$ a $t_n(y)$.