jestliže každá s ní příbuzná matice je regulární příp. singulární. Jsou-li prvky uvažovaných matic z tělesa obsahujícího alespoň tři prvky a označujeme-li nulový, jednotkový a opačný k jednotkovému obvyklým způsobem 0, $+1$ a -1, platí:

Věta 1. *Pro čtvercovou matici $A = \|a_{ij}\|$ o n řádcích jsou ekvivalentní podmínky:*

a) *A je absolutně regulární.*

b) *V každém řádku a v každém sloupci matice A existuje právě jeden prvek, např. a_{rs}, takový, že $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$ a totéž platí pro každou matici příbuznou s A. Pro tyto prvky dokonce platí $0 \neq a_{rs}|A_{rs}|(-1)^{r+s} = |A|$, když $|A_{rs}|$ je doplněk prvku a_{rs} v determinantu $|A|$.*

c) *Existuje právě jedna n-tice nenulových prvků z A, z nichž žádné dva nepatří do téhož řádku ani do téhož sloupce. Jsou-li to prvky $a_{i\alpha_i}$, $1 \leqq i \leqq n$, platí zřejmě $\prod_{i=1}^{n} a_{i\alpha_i} = \pm |A|$.*

Věta 3. *Čtvercová matice o n řádcích je absolutně regulární právě tehdy, když ji lze výměnou jejích řádků nebo sloupců uvést na takový tvar $A = \|a_{ij}\|$, že platí:*

1. *Všechny hlavní podmatice řádu $m < n$ matice A jsou absolutně regulární a*

2. *Jestliže $|M|$ je minor matice A, který není hlavní, a jestliže $|M^*|$ je jeho doplněk, pak $|M| \,.\, |M^*| = 0$ a totéž platí pro každou matici příbuznou s A.*

Nepodařilo se však dokázat tyto věty v případě, že v nich zeslabíme podmínky b) příp. 2 vypuštěním dovětku „*a totéž platí pro každou matici příbuznou s A*". Zejména lze pro čtvercovou matici $A = \|a_{ij}\|$ o n řádcích, která splňuje podmínku 1 a příslušně zeslabenou podmínku 2, položit tuto otázku:

Může existovat permutace $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ čísel $1, 2, \ldots, n$, která je různá od permutace základní $(1, 2, \ldots, n)$ a pro niž platí $\prod_{i=1}^{n} a_{i\beta_i} \neq 0$?

Snadno se nahlédne, že takovéto permutace mohou být jenom mezi těmi, které splňují podmínku $\beta_i \neq i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

Summary

ABSOLUTE RANK OF SQUARE MATRICES

KAREL ČULÍK, Brno

Matrices $A = \|a_{ij}\|$ and $B = \|b_{ij}\|$ of the same type m/n are said to be related, if $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_{ij} = 0$ for all i, j $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$. The *absolute rank* of a matrix is the minimum of ranks of all matrices related to the given matrix. A square matrix is said to be *absolute regular* resp. *singular*, if every matrix

related to it is regular resp. singular. If the elements of matrices belong to a field containing at least three elements and if zero, the unit and its opposite are denoted by 0, 1 and -1, then there hold the following theorems:

Theorem 1. *For a square matrix $A = \|a_{ij}\|$ with n rows the following conditions are equivalent:*

a) A is absolute regular.

b) In every row and in every column of A there exists just one element, e. g. a_{rs} such that $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$ and the same is valid for every matrix related to A.

c) There exists just one n-uple of non-zero elements of A such that no two of these elements belong to the same row or column.

Theorem 3. *A square matrix with n rows is absolute regular if and only if it is possible by a permutation of its rows or columns to obtain a matrix $A = \|a_{ij}\|$ such that*

1. *all the main submatrices of degree $m < n$ of A are absolute regular and*

2. *if $|M|$ is a minor of A which is not main, and if $|M^*|$ is its complementary minor, then $|M| \, . \, |M^*| = 0$ and the same is valid for every matrix related to A.*

There remains unsolved the problem, whether the phrase "and the same is valid for every matrix related to A" can be omitted in these theorems (in conditions b) and 2). Namely for a square matrix $A = \|a_{ij}\|$ with n rows satisfying the condition 1 and the weaker (in the previous sense) condition 2, there arises the following question:

Does there exist a permutation $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ of integers $1, 2, \ldots, n$ different from $(1, 2, \ldots, n)$ such that $\prod_{i=1}^{n} a_{i\beta_i} \neq 0$?

Such a permutation must satisfy the condition $\beta_i \neq i$ for all $i = 1, 2, \ldots, n$.