Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

АБСОЛЮТНЫЙ РАНГ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

КАРЕЛ ЧУЛИК (Karel Čulík), Брно

(Поступило в редакцию 27/X 1959 г.)

Две матрицы одного и того же типа называются родственными, если их нулевые элементы расположены на тех же местах. Исследуется вопрос, как изменяется ранг матрицы при переходе к родственной матрице, т. е. при изменении ее ненулевых элементов, если не допускать, чтобы из них получились нули. Выводится несколько необходимых и достаточных условий для того, чтобы наименьший из рангов всех матриц, родственных квадратной матрице (т. наз. абсолютный ранг) порядка n, был также n. Далее выводятся некоторые результаты, касающиеся абсолютного ранга матриц.

В дальнейшем мы всюду предполагаем (поскольку не будет оговорено иное), что элементы матрицы взяты из любого поля, содержащего хотя бы три элемента. Элементы нулевой, единичный и обратный к единичному мы обозначаем в каждом таком поле, как обычно, через 0, 1, —1.

Матрицы $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ одного и того же типа m/n мы называем *родственными*, если для любого i, $1 \leqq i \leqq m$ и любого j, $1 \leqq j \leqq n$

$$a_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_{ij} = 0 . \tag{1}$$

Отношение родственности является, очевидно, эквивалентностью на множестве всех матриц над данным полем.

Рассмотрим прежде всего квадратную матрицу A с n строками, удовлетворяющую следующему условию:

(2) *существует n ненулевых элементов матрицы A, из которых никакие два не стоят в одной и той же строке или в одном и том же столбце.*

Лемма 1. *Если квадратная матрица удовлетворяет условию* (2), *то существует родственная ей матрица, являющаяся неособенной. Для матриц над полем с двумя элементами это утверждение не обязательно справедливо.*

Доказательство. Пусть квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$ с n строками удовлетворяет условию (2). Для $n = 1$ лемма, очевидно, справедлива. Допустим, что она справедлива и для $n - 1 \geqq 1$. Если a_{rs} — один из элементов, удовлетворяющих условию (2), то символом A_{rs} обозначим подматрицу матрицы A, получающуюся путем вычеркивания r-й строки и s-го столбца. Тогда A_{rs} также удовлетворяет условию (2) и по предположению индукции существует неособенная матрица A'_{rs}, родственная матрице A_{rs}. Пусть матрица $B = \|b_{ij}\|$ получается из A таким образом, что подматрица A_{rs} заменяется матрицей A'_{rs}. Тогда, конечно, B — матрица, родственная A, и согласно лапласовскому разложению определителя $|B|$ по элементам r-й строки будет

$$(3) \qquad |B| = b_{rs}|B_{rs}|(-1)^{r+s} + c\,, \quad \text{где} \quad c = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{n} b_{ri}|B_{ri}|(-1)^{r+i}\,,$$

причем $b_{rs}|B_{rs}| \neq 0$.

Если $|B| \neq 0$, то уже B будет искомой матрицей, а если $|B| = 0$, то $c \neq 0$, и мы подберем b'_{rs} так, чтобы $0 \neq b'_{rs} \neq b_{rs}$, что всегда возможно, если поле, над которым построены матрицы, содержит хотя бы три элемента. Тогда матрица B', полученная из B заменой элемента b_{rs} на b'_{rs}, будет искомой матрицей.

Наконец ясно, чот хотя квадратная матрица с $n > 1$ строками над полем с двумя элементами, все элементы которой равны 1, и выполняет условие (2), однако каждая родственная ей матрица над этим полем равна ей самой, т. е. является особенной.

Лемма 2. *Пусть M — матрица типа $n/n+1$ $(n+1/n)$ и пусть M_i означает квадратную подматрицу, полученную путем вычеркивания i-го столбца (i-й строки) матрицы M. Если существуют подматрицы M_i и M_k $i \neq j$, каждая из которых удовлетворяет условию* (2), *то существует такая матрица M', родственная M, что обе подматрицы M'_i и M'_j — неособенные.*

Доказательство. Для $n = 1$ утверждение, очевидно, справедливо, и допустим, что оно справедливо и для $n - 1 \geqq 1$. Пусть $M = \|a_{ij}\|$ будет типа $n/n+1$ и пусть для ее подматриц M_i и M_j выполняются условия леммы. Тогда среди элементов, о которых говорится в условии (2), имеется элемент a_{hj} из M_i и элемент a_{ki} из M_j (если сохранить овозначения элементов в M). Обозначим через N подматрицу матрицы M, полученную путем вычеркивания ее i-го и j-го столбцов, так что N будет типа $n/n-1$. Тогда матрицы N_h и N_k (полученные путем вычеркивания h-й и k-й строк из N) будут обе подматрицами как матрицы M_i, так и матрицы M_j, и будут обе удовлетворять условию (2). Далее мы вудем различать два случая:

1. $h \neq k$. Тогда по предположению индукции существует матрица N', родственная N, причем обе ее подматрицы N'_h и N'_k — неособенные. Пусть матрица P возникает из матрицы M заменой подматрицы N матрицей N'. Тогда, по аналогии с (3), согласно лапласовскому разложению определи-

теля $|P_i|$ по элементам j-го столбца (при обозначениях матрицы M) и определителя $|P_j|$ по элементам i-го столбца, имеют место соотношения

$$(4) \qquad |P_i| = a_{hj}|N'_h|(-1)^p + c\,, \quad |P_j| = a_{ki}|N'_k|(-1)^q + d\,,$$

где p и q — надлежащим образом подобранные четные или нечетные натуральные числа, а c и d — остаточные члены разложений. Из (4) непосредственно следует, что элементы a_{hj} и a_{ki} можно заменить подходящими элементами a'_{hj} и a'_{ki} так, чтобы $a'_{hj} \neq 0 \neq a'_{ki}$ и чтобы в полученной таким образом матрице M' обе ее подматрицы M'_i и M'_j были неособенными. Притом, конечно, и здесь M' родственна матрице M.

2. $h = k$. Тогда $N_h = N_k$, и по лемме 1 существует матрица N'_h, родственная N_h и неособенная. Пусть матрица P образована из M так, что подматрица N_h заменяется подматрицей N'_h. Тогда для подматриц P_i и P_j опять-таки имеет место (4), и далее мы поступаем так же, как и в случае 1. Этим и завершается доказательство.

Абсолютным рангом матрицы A называем наименьшей из рангов всех матриц, родственных матрице A, и обозначаем его через $h[A]$. Матрицу A (квадратную) называем *абсолютно неособенной*, соотв. *особенной*, если каждая родственная ей матрица является неособенной, соотв. особенной.

Если матрица A родственна матрице B, то $h[A] = h[B]$. Если матрица B получается из матрицы A путем замены некоторых строк между собой и некоторых столбцов между собой, то $h[B] = h[A]$. Если A' — матрица, транспонированная по отношению к матрице A, то опять $h[A'] = h[A]$.

Теорема 1. *Для квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ с n строками следующие условия являются эквивалентными*:

а) *A — абсолютно неособенная матрица.*

б) *В каждой строке и в каждом столбце существует точно один такой элемент, напр. a_{rs}, что $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$, причем это имеет место для любой матрицы, родственной A. Более того, для этих элементов $0 \neq a_{rs}|A_{rs}| \cdot (-1^{s+r}) = |A|$.*

в) *Существует в точности одна n-ка элементов, которая удовлетворяет (2). Если это элементы $a_{i\alpha_i}$, $1 \leqq i \leqq n$, то $\prod_{i=1}^{n} a_{i\alpha_i} = \pm |A|$.*

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б) Если A — абсолютно неособенная матрица, то она также является неособенной, и согласно лапласовскому разложению определителя $|A|$ по какому-либо столбцу или строке, в каждой строке и в каждом столбце должен существовать элемент, напр. a_{rs}, для которого $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$. Если бы, однако, для одного из таких элементов имело место $0 \neq a_{rs}|A_{rs}|(-1)^{r+s} \neq |A|$, то можно было бы определить матрицу $B = \|B_{ij}\|$ так: $b_{rs} = (a_{rs}|A_{rs}|(-1)^{r+s} - |A|)/(|A_{rs}|(-1)^{r+s})$ и $b_{ij} = a_{ij}$, если или $i \neq r$ или $j \neq s$. Однако, B — матрица родственная A и притом — неособенная, что невозможно. Остаются поэтому следующие возможности: для каждого элемента a_{ij} имеет место или $a_{ij}|A_{ij}|(-1)^{i+j} = |A|$ или $a_{ij}|A_{ij}| = 0$. Отсюда уже, согласно лапласовскому разложению определителя $|A|$, следует б), конечно, и для любой матрицы, родственной матрице A.

б) $\Rightarrow$ в) Пусть справедливо б), так что в первой строке матрицы A имеется элемент $a_{1\alpha_1}$, для которого $0 \neq a_{1\alpha_1}|A_{1\alpha_1}|(-1)^{1+\alpha_1} = |A|$. Тогда, конечно, $|A_{1\alpha_1}| \neq 0$ и, очевидно, существует перестановка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, для которой будет $\prod\limits_{i=1}^{n} a_{i\alpha_i} \neq 0$ т. е. выполняется условие (2). Далее применим доказательство от противного. Допустим, что и для перестановки $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \neq (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$ имеет место $\prod\limits_{i=1}^{n} a_{i\beta_i} \neq 0$, т. е. что не справедливо в). Прежде всего существует индекс r такой, что $\alpha_r \neq \beta_r$. Для подматрицы $A_{r\alpha_r}$ и $A_{r\beta_r}$, очевидно, выполняется условие (2), значит, для подматрицы M, образованной из матрицы A вычеркиванием ее r-й строки, выполняются условия леммы 2. Поэтому существует матрица M', родственная M, и обе соответствующие подматрицы $A'_{r\alpha_r}$ и $A'_{r\beta_r}$ — неособенные. Пусть A' возникает из A заменой подматрицы M матрицей M' Тогда A' родственна A и, кроме того, $a_{r\alpha_r}|A'_{r\alpha_r}| \neq 0 \neq a_{r\beta_r}|, A'_{r\beta_r}$ что противоречит условию б).

в) $\Rightarrow$ а) ясно без доказательства.

Теорема 2. *Квадратная матрица с n строками является абсолютно особенной, если и только если она не удовлетворяет условию* (2).

Доказательство. Если данная матрица выполняет условие (2), то по лемме 1 существует родственная ет матрица, являющаяся неособенной, так что данная матрица не будет абсолютно особенной. Достаточность указанного условия очевидна.

Следствие 1. *Абсолютно неособенную квадратную матрицу можно заменой ее строк или столбцов привести к такому виду, в котором все главные миноры являются определителями абсолютно неособенных главных подматриц.*

Доказательство. По теореме 1 в абсолютно неособенной квадратной матрице $A = \|a_{ij}\|$ с n строками существует точно одна перестановка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, для которой $\prod\limits_{i=1}^{n} a_{i\alpha_i} \neq 0$. Тогда можно поменять местами столбцы так, чтобы элемент $a_{i\alpha_i}$ перешел в i-й столбец для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом получится некоторая матрица $B = \|b_{ij}\|$, являющаяся также абсолютно неособенной, причем $b_{ii} = a_{i\alpha_i}$ для $1 \leqq i \leqq n$.

Пусть $|M|$ — главный минор порядка m, $1 \leqq m \leqq n$ матрицы B; предположим для простоты, что квадратная подматрица M образована вычеркиванием i-й строки и i-го столбца для $i = m + 1, \ldots, n$. Тогда подматрица M выполняет условие (2) для элементов $\prod_{i=1}^{m} b_{ii} \neq 0$, так что по теореме 2 она не будет абсолютно особенной. Но если бы она была, с другой стороны, абсолютно неособенной, то по теореме 1 существовала бы перестановка $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ чисел $1, 2, \ldots, m$, отличная от основной перестановки $(1, 2, \ldots, m)$ и должно было бы иметь место неравенство $\prod_{i=1}^{m} b_{i\beta_i} \cdot \prod_{i=m+1}^{n} b_{ii} \neq 0$, что невозможно.

Теорема 3. *Квадратная матрица с n строками является абсолютно неособенной, если и только если ее можно заменой ее строк или столбцов привести к таковому виду $A = \|a_{ij}\|$, что*

1. *все главные миноры порядка $m < n$ матрицы A являются определителями абсолютно неособенных матриц и*

2. *если $|M|$ есть минор матрицы A, не являющийся главным, а $|M^*|$ — его дополнение, то $|M| \,.\, |M^*| = 0$; это справедливо и для всех матриц, родственных матрице A.*

Доказательство. Если данная матрица — абсолютно неособенная, то согласно следствию 1 ее можно заменой строк или столбцов привести к такому виду $A = \|a_{ij}\|$, что справедливо 1. Пусть $|M|$ — минор порядка m, не являющийся главным, а $|M^*|$ — его дополнение в определителе $|A|$, и пусть $|M| \,.\, |M^*| \neq 0$. Тогда, конечно, матрицы M и M^* выполняют (2) и, далее, для каждой m-ки элементов $a_{j_i\alpha_i}$, $1 \leqq i \leqq m$ из M и для каждой $(n - m)$-ки элементов $a_{j_i\alpha_i}$, $m + 1 \leqq i \leqq n$ из M^*, которые удовлетворяют (2), $\prod_{i=1}^{n} a_{j_i\alpha_i} \neq 0$ и, следовательно, согласно теореме 1, все элементы должны быть взяты из главной диагонали матрицы A, т. е. минор M должен быть главным, что невозможно. Итак, A, так же как и каждая родственная ей матрица, выполняют условие (2).

Если данная матрица не является абсолютно неособенной, но заменой ее строк или столбцов ее можно привести к виду $A = \|a_{ij}\|$, удовлетворяющему 1 и 2, то и матрица A не будет абсолютно неособенной и, следовательно, существует особенная матрица $B = \|b_{ij}\|$, родственная A. Притом, однако, матрица B выполняет условие 1, поэтому неравенство $b_{ii}|B_{ii}| \neq 0$ справедливо для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Из лапласовского разложения определителя $|B|$ по любой i-й строке (или по любому i-му столбцу) и из $|B| = 0$ следует существование элемента b_{ik}, $k \neq i$ для которого было бы $b_{ik}|B_{ik}| \neq 0$, что невозможно для 2.

Тогда как по условию в) из теоремы 1 вопрос о том, является ли данная квадратная матрица абсолютно неособенной, можно решить только на основании свойств самой матрицы, по условию б) необходимо исследовать