Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

O ROZKLADU SINGULÁRNÍCH LINEÁRNÍCH TRANSFORMACÍ

VÁCLAV HAVEL, Brno

(Došlo dne 18. září 1959)

Prof. dr. Jiřímu Klapkovi k šedesátinám

Článek obsahuje algebraické i geometrické podmínky k tomu, aby existoval rozklad dané singulární lineární transformace n-rozměrného eukleidovského prostoru v podobnost (shodnost) a projekci.

1. Předmětem vyšetřování bude nejprve n-rozměrný (reálný eukleidovský) prostor **E**. Dokážeme větu, která zobecňuje, resp. prohlubuje dřívější výsledky E. STIEFELA, H. HADWIGERA a H. NAUMANNA; viz [2], str. 213—214, [3], str. 97 a [6], str. 78.

Věta 1. *Nechť* $\mathfrak{A}$ *je soustava vektorů* $\mathfrak{a}_1 = \overrightarrow{OA}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n = \overrightarrow{OA}_n$, *vytvářejících v* **E** *m-rovinu;* $2 \leqq m < n$. *Označme* $g_1, \ldots, g_n$ *podle velikosti uspořádaná charakteristická čísla Gramovy matice soustavy* $\mathfrak{A}$. *Soustavu* $\mathfrak{A}$ *lze pokládat za paralelní průmět určité soustavy nenulových vektorů navzájem kolmých a stejně dlouhých tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka: Jsou-li čísla* $g_{n-m+1}, \ldots, g_m$ *nenulová, pak se navzájem rovnají. O ortogonální průmět jde přitom právě v tom případě, když všecka nenulová charakteristická čísla se navzájem rovnají.*

Podotkněme, že Gramova matice dané soustavy vektorů $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_n$ je tvaru

$$\left\| \begin{array}{llll} \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_1, & \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_2, & \ldots, & \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_n \\ \mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_1, & \mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_2, & \ldots, & \mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \mathfrak{w}_n\mathfrak{w}_1, & \mathfrak{w}_n\mathfrak{w}_2, & \ldots, & \mathfrak{w}_n\mathfrak{w}_n \end{array} \right\|,$$

kde $\mathfrak{w}_i\mathfrak{w}_j$ znamená vnitřní (skalární) součin vektorů $\mathfrak{w}_i$, $\mathfrak{w}_j$.

Charakteristická čísla této Gramovy matice jsou kořeny $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ rovnice

$$\left| \begin{array}{llll} \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_1 - \lambda, & \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_2, & \ldots, & \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_n \\ \mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_1, & \mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_2 - \lambda, & \ldots, & \mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \mathfrak{w}_n\mathfrak{w}_1, & \mathfrak{w}_n\mathfrak{w}_2, & \ldots, & \mathfrak{w}_n\mathfrak{w}_n - \lambda \end{array} \right| = 0\,.$$

K účelům důkazu rozdělme tvrzení věty 1 na dvě části:

a) Nechť $n \geqq 2m - 1$. Pak soustava $\mathfrak{A}$ je v **E** vždy paralelním průmětem soustavy nenulových vektorů navzájem kolmých a stejně dlouhých.

b) Nechť $n < 2m - 1$. Pak soustava $\mathfrak{A}$ je v **E** paralelním průmětem soustavy nenulových vektorů navzájem kolmých a stejně dlouhých právě tehdy, když platí relace

$$(1) \qquad g_1 \geqq \ldots \geqq g_{n-m} \geqq g_{n-m+1} = \ldots = g_m > g_{m+1} = \ldots = g_n = 0\,.$$

Tvrzení o ortogonální projekci je ovšem pro oba případy společné: O ortogonální projekci běží právě v případě

$$(2) \qquad g_1 = \ldots = g_m < g_{m+1} = \ldots = g_n = 0\,.$$

Nechť $\mathfrak{A}$ je pevná soustava vektorů $\mathfrak{a}_1 = \overrightarrow{OA}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n = \overrightarrow{OA}_n$, vytvářejících v **E** m-rovinu **A**, přičemž $2 \leqq m < n$. K zjednodušení formulace nazveme e-reperem kteroukoliv soustavu vektorů $\overrightarrow{OE}_1, \ldots, \overrightarrow{OE}_n$ navzájem kolmých, majících společnou délku $e > 0$. V **E** zvolme pravoúhlý souřadnicový systém o počátku O a označme v něm $a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}$ složky vektoru $\mathfrak{a}_i$; $i = 1, \ldots, n$.

A) Nechť soustava $\mathfrak{A}$ je v **E** paralelním průmětem e-reperu $\mathfrak{E} = \{\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n\}$ při směru promítání **S**. Zvolme jiný e-reper $\mathfrak{E}' = \{\mathfrak{e}_1', \ldots, \mathfrak{e}_n'\}$. Potom platí rovnice

$$\mathfrak{e}_i' = t_{i,1}\mathfrak{e}_1 + \ldots + t_{i,n}\mathfrak{e}_n \quad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

kde matice $\boldsymbol{T} = \|t_{i,j}\|$ n-tého řádu je ortogonální.

Nechť soustava $\mathfrak{A}'$ tvořená n vektory $\mathfrak{a}_i' = (a_{i,1}', \ldots, a_{i,n}')$ je paralelním průmětem e-reperu $\mathfrak{E}'$ při promítání směrem **S** do **A**. Potom platí rovnice

$$\mathfrak{a}_i' = t_{i,1}\mathfrak{a}_1 + \ldots + t_{i,n}\mathfrak{a}_n \quad (i = 1, \ldots, n)\,,$$

anebo v maticovém zápisu $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{TA}$, kde $\boldsymbol{A} = \|a_{i,j}\|$, $\boldsymbol{A}' = \|a_{i,j}'\|$. Označme τ tu ortogonální transformaci prostoru **E**, při níž je vektoru $\mathfrak{e}_i$ přiřazen vektor $\mathfrak{e}_i'$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$; obdobně označme $\tilde{\tau}$ tu afinní transformaci m-roviny **A**, při níž je vektoru $\mathfrak{a}_i$ přiřazen vektor $\mathfrak{a}_i'$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Jako závěr vyslovíme pak

Tvrzení 1. *Je-li soustava $\mathfrak{A}$ paralelním průmětem e-reperu $\mathfrak{E}$ při promítání směrem* **S** *a je-li τ ortogonální transformace (neměnící počátek O), pak soustava $\tilde{\tau}\mathfrak{A}$ je paralelním průmětem e-reperu $\tau\mathfrak{E}$ rovněž při směru promítání* **S**.

B) Gramova matice soustavy $\mathfrak{A}$, tj. matice $\boldsymbol{AA}^* = \|\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j\|$ je symetrická a lze ji tedy uvést na diagonální tvar prostřednictvím vhodné ortogonální matice $\boldsymbol{M}$ řádu n-tého:[1])

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{AA}^*)\,\boldsymbol{M}^* = (\boldsymbol{MA})(\boldsymbol{MA})^*\,.$$

Označme dále $\bar{\mathfrak{A}}$ soustavu řádkových vektorů $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_n$ matice $\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{MA}$. Bez omezení obecnosti předpokládejme, že jde o takové pořadí, při němž $|\bar{\mathfrak{a}}_1| \geqq$

[1]) Hvězdičkou značíme matici transponovanou.

$\geqq \ldots \geqq |\mathfrak{a}_n|$. Z diagonálního tvaru matice $\bar{\mathbf{A}}$ pak vyplývá, že vektory $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_n$ jsou navzájem kolmé a právě posledních $n - m$ z nich je nulových.

Dokážeme

Tvrzení 2. *Je-li $n \geqq 2m - 1$, pak existuje soustava vektorů $\bar{\mathfrak{e}}_1 = \overrightarrow{O\bar{E}_1}, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_m = \overrightarrow{O\bar{E}_m}$ navzájem kolmých a stejně dlouhých, které jsou v* **E** *kolmými průměty soustavy vektorů $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_m$ při projekci do m-roviny $O\bar{E}_1 \ldots \bar{E}_m$.*

Důkaz. Mějme soustavu vektorů $\bar{\bar{\mathfrak{e}}}_1 = (d, 0, \ldots, 0)$, $\bar{\bar{\mathfrak{e}}}_2 = (0, d, 0, \ldots, 0), \ldots, \bar{\bar{\mathfrak{e}}}_m = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-1}, d, 0, \ldots, 0)$, kde $0 < d < |\bar{\mathfrak{a}}_m|$. Položme $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_j = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, d, \underbrace{0, \ldots,}_{m-j} 0, d_{j,1}, \ldots, d_{j,n}0_m)$, $\mathfrak{d}_j = (d_{j,1}, \ldots, d_{j,n-m})$; $j = 1, \ldots, m$.

Je-li $n \geqq 2m$, pak lze vždy sestrojit navzájem kolmé vektory $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_m$ tak, že $d^2 + \mathfrak{d}_1^2 = \bar{\mathfrak{a}}_1^2, \ldots, d^2 + \mathfrak{d}_m^2 = \bar{\mathfrak{a}}_m^2$. Vyplývá to z toho, že počet m vektorů $\mathfrak{d}_j$ není větší než počet $n - m$ jejich složek. Je-li $n = 2m - 1$, pak zvolme $d = |\bar{\mathfrak{a}}_m|$, vektor $\mathfrak{d}_m$ prohlašme za nulový a sestrojme vektory $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_{m-1}$ tak, aby $d^2 + \mathfrak{d}_1^2 = \bar{\mathfrak{a}}_1^2, \ldots, d^2 + \mathfrak{d}_{m-1}^2 = \bar{\mathfrak{a}}_{m-1}^2$. Takové vektory lze vždy sestrojit, neboť jejich počet $m - 1$ rovná se počtu jejich složek. Soustava $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_1, \ldots, \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_m$ je shodná se soustavou $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_m$ a její kolmou projekcí do m-roviny prvních m souřadnicových os je právě soustava $\bar{\bar{\mathfrak{e}}}_1, \ldots, \bar{\bar{\mathfrak{e}}}_m$. Odtud důkaz.

C) Navažme na předchozí odstavec a doplňme vektory $\bar{\mathfrak{e}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_m$ v d-reper $\bar{\mathfrak{E}} = \{\bar{\mathfrak{e}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_n\}$. Pak soustava $\bar{\mathfrak{A}}$ je paralelním průmětem reperu $\bar{\mathfrak{E}}$ při určitém směru promítání **S**, takže podle tvrzení 1 je též soustava $\mathfrak{A}$ paralelním průmětem některého d-reperu při témže směru promítání **S**.

Je známo, že charakteristická čísla Gramovy matice $\mathbf{AA}^*$ rovnají se charakteristickým číslům Gramovy matice $\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{A}}^*$ (matice $\bar{\mathbf{A}}$ je definována v části B)), tj. číslům $\bar{\mathfrak{a}}_1^2, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_n^2$. Platí-li $\bar{\mathfrak{a}}_1^2 = \ldots = \bar{\mathfrak{a}}_m^2$, lze položit $\bar{\mathfrak{e}}_1 = \bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_m = \bar{\mathfrak{a}}_m$ a vektory $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ doplnit v $|\mathfrak{a}_1|$-reper. Protože soustava $\bar{\mathfrak{A}}$ je ortogonálním průmětem tohoto reperu (směr **S** je nyní kolmý k **A**), je podle tvrzení 1 též soustava $\mathfrak{A}$ ortogonálním průmětem určitého $|\mathfrak{a}_1|$-reperu. Mají-li aspoň dva z vektorů $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_m$ různé délky, pak směr **S** již nemůže být kolmý k **A**. Část a) věty 1 je tím dokázána.

D) Nechť platí podmínka $n < 2m - 1$. Reper $\mathfrak{E}'$ z části A) zvolme speciálně tak, aby jeho prvních $n - m$ vektorů bylo kolmých k **A**; tyto vektory označme $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{n-m}$. Zbývající vektory z $\mathfrak{E}'$ leží pak v **A** a náleží též soustavě $\mathfrak{A}' = \tilde{\tau}\mathfrak{A}$ (viz část A)). Označme tedy $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-m}$ prvních $n - m$ vektorů z $\mathfrak{A}'$. Pak směr promítání **S** je současně rovnoběžný s vektory $\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{n}_m - \mathfrak{y}_m$. Speciálně pro směr **S** kolmý k **A** jsou vektory $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_m$ nulové. Položme $a_{i,m+1} = \ldots = a_{i,n} = 0$ a užijme označení zavedené v části A). Budeme vyšetřovat matice $\dot{\mathbf{A}} = \|a_{i,j}\|$, $\dot{\mathbf{A}}' = \|a'_{i,j}\|$; $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. Jest $\dot{\mathbf{A}}' = \mathbf{T}\dot{\mathbf{A}}$ a matici $\dot{\mathbf{A}}'$ lze psát ve tvaru $\dot{\mathbf{A}}' = \left\|\begin{matrix}\dot{\mathbf{P}}\\ \dot{\mathbf{B}}\end{matrix}\right\|$ s tímto významem matic $\dot{\mathbf{P}}, \dot{\mathbf{B}} : \dot{\mathbf{P}}$

je matice, jejíž řádkové vektory vzniknou z $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-m}$ vynecháním posledních $n - m$ složek. $\dot{\boldsymbol{B}}$ je matice, jejíž řádkové vektory vzniknou z posledních m vektorů soustavy $\mathfrak{A}'$ vynecháním posledních $n - m$ složek; řádkové vektory matice $\boldsymbol{B}$ jsou navzájem kolmé a mají společnou délku e. Platí tedy $\dot{\boldsymbol{B}}\dot{\boldsymbol{B}}^* = \dot{\boldsymbol{B}}^*\dot{\boldsymbol{B}} = e^2\boldsymbol{J}$, kde $\boldsymbol{J}$ je diagonální jednotková matice m-tého řádu. Dále platí relace $(\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{A}})^*(\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{A}}) = \dot{\boldsymbol{A}}^*\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}\dot{\boldsymbol{A}} = \dot{\boldsymbol{A}}^*\dot{\boldsymbol{A}} = \dot{\boldsymbol{P}}^*\dot{\boldsymbol{P}} + \dot{\boldsymbol{B}}^*\dot{\boldsymbol{B}}$, a z toho dále $\dot{\boldsymbol{A}}^*\dot{\boldsymbol{A}} = \dot{\boldsymbol{P}}^*\dot{\boldsymbol{P}} + e^2\dot{\boldsymbol{J}}$.

Charakteristická čísla matice $\dot{\boldsymbol{A}}^*\dot{\boldsymbol{A}}$ vzniknou tedy z charakteristických čísel matice $\dot{\boldsymbol{P}}^*\dot{\boldsymbol{P}}$ vždy přičtením čísla e^2. Seřaďme charakteristická čísla matice $\dot{\boldsymbol{P}}^*\dot{\boldsymbol{P}}$ podle velikosti; pak prvních $n - m$ z nich je nenulových a zbývající jsou nulové.[2]) Tedy charakteristická čísla matice $\dot{\boldsymbol{A}}^*\dot{\boldsymbol{A}}$ jsou

$$c_1 + e^2 \geqq \ldots \geqq c_{n-m} + e^2 \geqq \underbrace{e^2 = \ldots = e^2}_{m}.$$

Avšak nenulová charakteristická čísla matic $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ se po řadě rovnají, takže pro charakteristická čísla $g_1 \geqq \ldots \geqq g_n$ matice $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ platí relace (1), jak bylo dokázat. Jde-li o promítání ortogonální, pak vektory $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-m}$ jsou nulové a platí $c_1 = \ldots = c_{n-m} = 0$, takže platí relace (2). Nejde-li o promítání ortogonální, pak relace (2) neplatí.

Protože charakteristická čísla Gramovy matice $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ nejsou závislá na volbě pravoúhlého souřadnicového systému v $\mathbf{E}$, nebyla ani volba $a_{i,m+1} = \ldots = a_{i,n} = 0$ na úkor obecnosti.

E) Nechť platí $n < 2m - 1$. Pro charakteristická čísla Gramovy matice dané soustavy $\mathfrak{A}$ nechť je splněna podmínka (1). Podle B) stanovíme soustavu vektorů $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_n$. Při vhodném pořadí platí pak $g_1 = \bar{\mathfrak{a}}_1^2, \ldots, g_n = \bar{\mathfrak{a}}_n^2$, takže relaci (1) lze přepsat do tvaru

$$|\mathfrak{a}_1| \geqq \ldots \geqq |\mathfrak{a}_{n-m}| \geqq |\mathfrak{a}_{n-m+1}| = \ldots = |\mathfrak{a}_m| > |\mathfrak{a}_{m+1}| = \ldots = |\mathfrak{a}_n| = 0\,.$$

Položme $\bar{\mathfrak{e}}_{n-m+1} = \bar{\mathfrak{a}}_{n-m+1}, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_m = \bar{\mathfrak{a}}_m$ a společnou délku těchto vektorů označme d. Užijme větu 1, kde za n, m položíme hodnoty $2n - 2m, n - m$. Potom plyne v případě $n - m > 1$ tento závěr (který je pro $n - m = 1$ snadno patrný): V $(2n - 2m)$-rovině $\mathbf{R}$ kolmé současně k vektorům $\bar{\mathfrak{e}}_{n-m+1}, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_m$ lze sestrojit soustavu vektorů $\bar{\mathfrak{e}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_{n-m}$ navzájem kolmých a o společné délce d tak, že při směru $\mathbf{S}$ (určeném v $\mathbf{R}$ $(n - m)$-rovinou současně kolmou k vektorům $\bar{\mathfrak{e}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_{n-m}$) se vektory $\bar{\mathfrak{e}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_m$ promítají do vektorů $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_{n-m}$. Pak soustava $\bar{\mathfrak{A}}$ je při směru $\mathbf{S}$ průmětem d-reperu $\bar{\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{e}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_n\}$. Je-li navíc splněna podmínka $|\bar{\mathfrak{a}}_1| = \ldots = |\bar{\mathfrak{a}}_m|$, pak směr $\mathbf{S}$ je kolmý k $\mathbf{A}$; jinak nikoliv. Část b) věty 1 je dokázána.

2. Následující větu lze snadno dokázat jako bezprostřední důsledek věty 1:

[2]) Jsou-li $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ matice téhož řádu, pak maticím $\boldsymbol{MN}$, $\boldsymbol{NM}$ náleží po řadě táž charakteristická čísla. Doplníme tedy $\dot{\boldsymbol{P}}$ nulovými sloupci na matici $\boldsymbol{P}$ řádu m a užijeme známého faktu, že charakteristická čísla Gramovy matice $\boldsymbol{PP}^*$ jsou nezáporná.

Věta 2. *Afinní transformaci α prostoru* $\mathbf{E}$ *na m-rovinu* $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ $(2 \leqq m < n)$ *lze rozložit v podobnost a paralelní projekci tehdy a jen tehdy, jestliže při libovolném výběru vektorů* $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_n$ *navzájem kolmých, nenulových a stejně dlouhých splňují charakteristická čísla* $g_1 \geqq \ldots \geqq g_n$ *Gramovy matice soustavy* $\alpha\mathfrak{w}_1, \ldots, \alpha\mathfrak{w}_n$ *podmínku z věty* 1. *O projekci kolmou jde přitom právě v případě, kdy všecka nenulová charakteristická čísla se navzájem rovnají.*

F) Nechť α je afinní transformace prostoru $\mathbf{E}$ na m-rovinu $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$, přičemž $2 \leqq m < n$. Zvolme v $\mathbf{A}$ $(m - 1)$-rozměrnou sféru k a stanovme jí příslušnou válcovou nadplochu $\alpha^{-1}k$. Dále zvolme v $\mathbf{A}$ bod B a stanovme k němu příslušnou $(n - m)$-rovinu $\mathbf{C} = \alpha^{-1}B$. Nakonec zvolme m-rovinu $\mathbf{R}$ kolmou k $\mathbf{C}$. Pak $h = \mathbf{R} \cap \alpha^{-1}k$ je $(m - 1)$-rozměrný elipsoid v $\mathbf{R}$. Nalezneme nutnou i postačující podmínku k tomu, aby elipsoid h byl v $\mathbf{E}$ ortogonálním průmětem $(m - 1)$-rozměrné sféry k (ležící v některé m-rovině $\mathbf{K}$). Protože parciální zobrazení α_K je pak podobností, je z toho vidět, že jde též o nutnou a postačující podmínku k tomu, aby existoval žádaný rozklad transformace α. Nejprve odvodíme pomocnou větu.

Věta 3. *Nechť je dán $(m - 1)$-rozměrný elipsoid a nechť* $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_m$ *je soustava jeho hlavních poloměrů,*[3]) *přičemž*

$$|\mathfrak{r}_1| = \ldots = |\mathfrak{r}_s| > |\mathfrak{r}_{s+1}| \geqq \ldots \geqq |\mathfrak{r}_m| \quad (1 \leqq s \leqq m) \,. \tag{3}$$

Tento elipsoid lze pokládat za ortogonální průmět určité $(m - 1)$-rozměrné sféry tehdy a jen tehdy, když platí podmínka

$$n \geqq 2m - s \,. \tag{4}$$

Důkaz. Položme $\mathfrak{r}_j = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{j-1}, |\mathfrak{r}_j|, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-j})$, $\mathfrak{e}_j = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{j-1}, |\mathfrak{r}_j|, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m-j},$ $h_{j,1}, \ldots, h_{j,n-m})$, $\mathfrak{h}_j = (h_{j,1}, \ldots, h_{j,n-m})$; $j = 1, \ldots, m$. Vektory $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ jsou navzájem kolmé a mají společnou délku $|\mathfrak{r}_1|$ tehdy a jen tehdy, když vektory $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_m$ jsou navzájem kolmé, přičemž $\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{h}_1^2 = \mathfrak{r}_1^2, \ldots, \mathfrak{r}_m^2 + \mathfrak{h}_m^2 = \mathfrak{r}_m^2$. Avšak existence vektorů $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_m$ závisí právě na počtu $m - s$ nenulových z nich a počtu $n - m$ složek: Vektory $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_m$ existují právě tehdy, když $m - s \leqq$ $\leqq n - m$. Odtud důkaz.

K větě 3 připojíme ještě větu, jejíž důkaz je zcela analogický.

Věta 3'. *Nechť je dán $(m - 1)$-rozměrný elipsoid s hlavními poloměry* $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_m$, *přičemž*

$$|\mathfrak{r}_1| \geqq \ldots \geqq |\mathfrak{r}_{m-t}| > |\mathfrak{r}_{m-t+1}| = \ldots = |\mathfrak{r}_m| \quad (1 \leqq t \leqq m) \,.$$

Podmínka $n \geqq 2m - t$ je pak nutná i stačí k tomu, aby existovala $(m - 1)$-rozměrná sféra, která je ortogonálním průmětem daného elipsoidu.

Větu 3' však potřebovat nebudeme. Vrátíme se k větě 3; z ní a z F) plyne tento důležitý výsledek:

---

[3]) Hlavní poloměry (jakožto vektory) jsou sdružené a navzájem kolmé.

Věta 4. *Nechť α je afinní transformace prostoru* $\mathbf{E}$ *na m-rovinu* $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$, *přičemž* $2 \leqq m < n$; *nechť* $\mathbf{V}$, *resp.* v *jsou úplné vzory bodu, resp.* $(m - 1)$-*rozměrné sféry z* $\mathbf{A}$; $(m - 1)$-*rozměrný elipsoid, který je průnikem nadplochy* v *s m-rovinou* $\mathbf{R}$ *kolmou k* $\mathbf{V}$, *nechť má hlavní poloměry* $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_m$, *uspořádané tak že platí* (3). *Rozklad transformace* α *v podobnost a paralelní projekci existuje potom právě tehdy, platí-li podmínka* (4).

3. Obraťme pozornost k rozšířenému n-rozměrnému prostoru $\mathbf{E}^+ \supset \mathbf{E}$. Mějme dánu neafinní lineární transformaci λ prostoru $\mathbf{E}^+$ na vlastní m-rovinu $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}^+$; $2 \leqq m < n$. Označme $\mathbf{S}$ singulární $(n - m - 1)$-rovinu vzhledem k λ. Dále definujme nadrovinu $\mathbf{N}$ jako úplný vzor nevlastní $(m - 1)$-roviny $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ při λ. Nalezneme nutnou a postačující podmínku k tomu, aby se transformace λ dala rozložit v centrální projekci a shodnost.

G) Případ $m = n - 1$ vede k jednoduchému závěru. Nadrovina $\mathbf{N}$ má pak tuto vlastnost: Je-li $\mathbf{L}$ libovolná vlastní nadrovina neprocházející bodem $\mathbf{S}$, pak parciální zobrazení λ_L nadroviny $\mathbf{L}$ na $\mathbf{A}$ je afinní transformací právě tehdy, když nadroviny $\mathbf{L}$, $\mathbf{N}$ jsou rovnoběžné. Probíhá-li $\mathbf{L} \mathrel{+\!\!\!\!=} \mathbf{N}$ nadroviny rovnoběžné s $\mathbf{N}$, pak se parciální zobrazení λ_L od sebe liší pouze homotetiemi o středu $\mathbf{S}$. Z toho již vyplývá věta, kterou nyní vyslovíme.

Věta 5a. *Nechť λ je neafinní lineární transformace prostoru* $\mathbf{E}^+$ *na vlastní nadrovinu* $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}^+$. *Tuto transformaci lze rozložit v centrální projekci a shodnost tehdy a jen tehdy, platí-li podmínka:* 1. *Existuje nadrovina* $\mathbf{L}$, *která indukuje afinní parciální zobrazení* λ_L.

Lze ukázat, že podmínku 1 lze vyjádřit ještě dvěma dalšími způsoby: 2. Transformace λ převádí absolutní polaritu prostoru $\mathbf{E}^+$ ve sférickou antipolaritu m-roviny $\mathbf{A}$. 3. Převádí-li transformace λ dvojici perspektivních $(n - 1)$-simplexů $\{A_i\}_1^n$, $\{B_i\}_1^n$ opět ve dvojici perspektivních $(n - 1)$-simplexů $\{A_i'\}_1^n$, $\{B_i'\}_1^n$ a jsou-li $\{C_i\}_1^n$, $\{D_i'\}_1^n$ úběžníkové simplexy s vrcholy $C_i \in A_iB_i$, resp. $D_i' \in A_i'B_i'$, pak simplexy $\{C_i\}_1^n$, $\{D_i'\}_1^n$ jsou podobné.[4])

Pro $n = 3$ stanovil podmínku 2 L. Hofmann a podmínku 3 E. A. Mčedlišvili; viz [1], str. 40 a [4], str. 167—168.

H) Nechť $m < n - 1$. Pak má nadrovina $\mathbf{N}$ tuto vlastnost: Je-li $\mathbf{L}$ libovolná vlastní m-rovina disjunktní s $\mathbf{S}$, pak parciální zobrazení λ_L je afinní právě tehdy, když $\mathbf{L}$ je rovnoběžno s $\mathbf{N}$. Speciálně vedou k podobnostem λ_L nejvýš ty m-roviny $\mathbf{L}$, které jsou rovnoběžné s $\mathbf{N}$ (a ovšem disjunktní s $\mathbf{N}$). Zvolme tedy kteroukoliv $(m - 1)$-rozměrnou sféru k v $\mathbf{A}$ a kteroukoliv nadrovinu $\mathbf{M} \mathrel{+\!\!\!\!=} \mathbf{N}$ rovnoběžnou s $\mathbf{N}$. Položme $v = \lambda^{-1}k \cap \mathbf{M}$; útvar v je válcovou varietou, je to lineární obal nevlastní $(n - m - 2)$-roviny $\mathbf{S}' = \mathbf{S} \cap \mathbf{M}$ s libovolným z $(m - 1)$-rozměrných elipsoidů v $\mathbf{M}$, jemuž odpovídá v transformaci λ sféra k. Konečně zvolme v $\mathbf{M}$ některou m-rovinu $\mathbf{R}$ kolmou v $\mathbf{M}$ k $\mathbf{S}$ a označme h

[4]) Jde o simplexy s vlastními vrcholy, perspektivní podle vlastního středu. Úběžníkem rozumí se vzor anebo obraz nevlastního bodu při λ.

$(m-1)$-rozměrný elipsoid splňující podmínky $h \subset \mathbf{R}$, $\lambda h = k$. Nechť $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_m$ jsou hlavní poloměry elipsoidu h uspořádané tak, že platí (3). Podle věty 3a (kde n nahradíme hodnotou $n-1$) je h v $\mathbf{M}$ kolmým průmětem některé $(m-1)$-rozměrné sféry v $\mathbf{M}$ tehdy a jen tehdy, platí-li podmínka

$$n - 1 \geqq 2m - s\,. \tag{5}$$

Existují-li podobnosti λ_L, pak existuje mezi nimi též shodnost; získáme ji při vhodné volbě nadroviny $\mathbf{M}$. Z našich úvah vyplývá tento výsledek:

Věta 5b. *Nechť λ je neafinní lineární transformace prostoru $\mathbf{E}^+$ na vlastní m-rovinu $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}^+$; $2 \leqq m < n - 1$. Pak transformaci λ lze rozložit v centrální projekci a shodnost právě tehdy, platí-li* (5); *význam hodnoty s je stanoven v předchozím.*

I. Případ $m < n - 1$ vyšetříme ještě druhým způsobem. Zvolme ortogonální zobrazení ω převádějící m-rovinu $\mathbf{A}$ v m-rovinu $\mathbf{A}'$ ležící v nadrovině $\mathbf{M} \neq \mathbf{N}$ rovnoběžné s $\mathbf{N}$. Parciální zobrazení $(\lambda\omega)_M = \lambda'$ je afinní transformací nadroviny M na m-rovinu $\mathbf{A}'$ se singulární nevlastní $(n-m-2)$-rovinou $\mathbf{S}' = \mathbf{S} \cap \mathbf{M}$. Žádaný rozklad transformace λ ve shodnost a centrální projekci existuje pak právě tehdy, lze-li transformaci λ' rozložit v podobnost a paralelní projekci. Platí tedy tato věta:

Věta 5b'. *Nechť λ je neafinní lineární transformace prostoru $\mathbf{E}^+$ na m-rovinu $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}^+$; $2 \leqq m < n - 1$. Je-li $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_{n-1}$ libovolná soustava nenulových vektorů navzájem kolmých a stejně dlouhých v nadrovině $\mathbf{M}$ a jsou-li $g_1 \geqq \ldots \geqq g_{n-1}$ charakteristická čísla Gramovy matice soustavy $\lambda'\mathfrak{w}_1, \ldots, \lambda'\mathfrak{w}_{n-1}$, pak transformaci λ lze rozložit ve shodnost a centrální projekci právě tehdy, když platí tato podmínka: Jsou-li čísla $g_{n-m}, \ldots, g_m$ nenulová, pak se navzájem rovnají. Význam $\mathbf{M}$ a λ' stanoven před zněním věty.*

4. Afinní transformaci prostoru $\mathbf{E}$ na přímku a lze vždy rozložit v podobnost a paralelní projekci. Rovněž tak neafinní lineární transformaci prostoru $\mathbf{E}^+$ na vlastní přímku lze vždy rozložit ve shodnost a centrální projekci. Jednoduchý důkaz obou tvrzení zde neuvádíme.

Problematiku tohoto článku lze rozšířit na pseudoeukleidovské prostory, v nichž je definována metrika $\varrho(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x_i - y_i)^2}$; $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\varepsilon_i = \pm 1$; viz např. [5].

Na závěr uveďme neřešený problém rozkladu nesingulární afinní transformace prostoru $\mathbf{E}$ v podobnost a afinní m-transformaci, resp. problém rozkladu nesingulární afinní lineární transformace prostoru $\mathbf{E}^+$ ve shodnost a lineární m-transformaci.[5]) Dosud je známo řešení pouze pro speciální hodnoty m.

[5]) Lineární m-transformace má dva maximální podprostory samodružných bodů, a to m-rovinu a $(n-m-1)$-rovinu; u afinní m-transformace je zmíněná $(n-m-1)$-rovina nevlastní.