Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

ZOBECNĚNÍ VĚT O KOŘENECH ANALYTICKÝCH FUNKCÍ

HANA ŠVECOVÁ, Praha

(Došlo dne 9. září 1959)

V článku je s pomocí kombinatoricko-topologických metod podáno zobecnění principu argumentu (věta 3,2), Rouchéovy věty (věta 3,3) a Hurwitzovy věty (věta 3,4) na funkce spojité a nenulové s výjimkou konečného počtu bodů. Dále jsou studovány nulové body a body nespojitosti funkce $\bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$, kde Φ, Ψ jsou meromorfní funkce.

I. ZÁKLADNÍ POJMY

1. POLYEDR

V této práci se omezíme na případ komplexní roviny E_2, jejíž prvky budeme nazývat čísly nebo body.

Definice 1,1. Buď $\Sigma \subset E_2$. Nechť existuje homeomorfní zobrazení F množiny Σ na uzavřenou úsečku. Potom množinu Σ nazveme *jednorozměrným simplexem* a vzory koncových bodů úsečky $F(\Sigma)$ při zobrazení F nazveme *vrcholy* simplexu Σ. Je-li $z \in E_2$, pak bod z nazveme *nulrozměrným* simplexem a zároveň vrcholem tohoto simplexu.

Buď K konečný systém jednorozměrných a nulrozměrných simplexů s vlastnostmi:

a) libovolné dva simplexy Σ_1, Σ_2 systému K jsou buď disjunktní, nebo jejich průnik je vrcholem obou simplexů Σ_1, Σ_2;

b) je-li $\Sigma \in K$, σ vrchol simplexu Σ, pak je $\sigma \in K$.

Nechť dále systém K obsahuje alespoň jeden jednorozměrný simplex. Potom systém K nazveme (jednorozměrným) *komplexem*.

Sjednocení všech simplexů komplexu nazveme (jednorozměrným) *polyedrem*. Je-li polyedr P sjednocením všech simplexů komplexu K, říkáme, že K je *simpliciální rozklad* polyedru P.

Říkáme, že simpliciální rozklad K_1 polyedru P je *zjemněním* simpliciálního rozkladu K polyedru P, jestliže každý simplex komplexu K_1 jako bodová množina je částí některého simplexu komplexu K.

V dalším budeme běžně používat tohoto tvrzení (důkaz je snadný): *Každá Jordanova křivka je polyedr. Je-li Γ Jordanova křivka, pak ke každému kladnému ε existuje simpliciální rozklad křivky Γ, jehož každý simplex má průměr menší než ε.*

2. ORIENTACE UZAVŘENÉ JORDANOVY KŘIVKY

Definice 1,2. *Orientací* jednorozměrného simplexu nazveme funkci $t(z_{i_1}, z_{i_2})$, definovanou na množině všech uspořádaných dvojic vrcholů daného simplexu a nabývající hodnot ± 1 tak, že je $t(z_1, z_2) = -t(z_2, z_1)$.

Buď S jednotková kružnice, ε jedno z čísel $+1, -1$. Definujme orientaci libovolného jednorozměrného simplexu libovolného simpliciálního rozkladu kružnice S takto: Je-li $\Sigma \subset S$ jednorozměrný simplex s vrcholy $z_1 = e^{i\zeta_1}$, $z_2 = e^{i\zeta_2}$, kde $\zeta_1, \zeta_2 \in (-\pi, \pi\rangle$, $\zeta_1 < \zeta_2$, přiřaďme simplexu Σ orientaci t_Σ tak, aby platilo:

$$t_\Sigma(z_1, z_2) = \left\langle \begin{array}{l} \varepsilon, \text{ není-li } e^{i\pi} \text{ vnitřním bodem simplexu}, \\ -\varepsilon, \text{ je-li } e^{i\pi} \text{ vnitřním bodem simplexu}. \end{array} \right.$$

Potom říkáme, že je dána orientace t kružnice S a kružnici S nazýváme orientovanou.

Buď Γ uzavřená Jordanova křivka, F homeomorfní zobrazení orientované jednotkové kružnice S na Γ. Přiřaďme každému jednorozměrnému simplexu $\Sigma' \subset \Sigma$ s vrcholy z'_1, z'_2 orientaci $t'_{\Sigma'}$:

$$t'_{\Sigma'}(z'_1, z'_2) = t_\Sigma(F^{-1}(z'_1), F^{-1}(z'_2)),$$

kde t je orientace kružnice S a Σ je vzor simplexu Σ' při zobrazení F. Potom říkáme, že je dána *orientace křivky* Γ a křivku Γ nazýváme orientovanou.

Z definice 1,2 plyne **věta:**

Uzavřená Jordanova křivka může mít právě dvě různé orientace.

3. NUMERACE

Definice 1,3. Nechť každému vrcholu jednorozměrného simplexu Σ je přiřazeno některé přirozené číslo. Dvojici čísel odpovídajících vrcholům simplexu Σ budeme psát v neklesajícím pořadí a nazývat *numerací* simplexu Σ. Číslo odpovídající při této numeraci vrcholu z simplexu budeme nazývat numerací vrcholu z.

Jestliže při dané numeraci jednorozměrného simplexu oběma vrcholům odpovídá totéž číslo, pak tuto numeraci nazýváme *degenerovanou*. Numeraci, jež není degenerovaná, nazýváme nedegenerovanou.

Je-li každému vrcholu komplexu K přiřazeno přirozené číslo, říkáme, že je dána numerace komplexu K.

Buď z bod simplexu Σ v komplexu K. Není-li z vrcholem simplexu Σ, pak nosičem bodu z nazýváme simplex Σ. Je-li z vrcholem simplexu Σ, pak nosičem bodu z nazýváme bod z.

Buď K_1 zjemnění simpliciálního rozkladu K polyedru P. Numeraci N_1 komplexu K_1 nazýváme *pokračováním numerace* N komplexu K, jestliže každému vrcholu komplexu K_1 je v numeraci N_1 přiřazeno jedno z čísel numerace jeho nosiče v numeraci N.

V části II budeme potřebovat následující lemma, jež je speciálním případem Spernerova lemmatu (důkaz viz [1], str. 90).

Lemma 1,1. *Buď Σ jednorozměrný simplex s numerací* 1, 2. *Při každém pokračování této numerace na libovolný simpliciální rozklad K simplexu Σ má lichý počet jednorozměrných simplexů komplexu K numeraci* 1, 2.

Zaveďme toto označení: $a_k = 2k - 1$, $b_k = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Definice 1,4. Numeraci simplexu nazveme *přípustnou*, jestliže z každé dvojice a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ se v ní vyskytuje nejvýše jedno číslo. Numeraci komplexu nazveme přípustnou, jestliže vytváří přípustné numerace na všech simplexech komplexu.

4. STUPEŇ NUMERACE

Mějme dánu uzavřenou Jordanovu křivku Γ s orientací t. Buď K simpliciální rozklad polyedru Γ, N přípustná numerace komplexu K čísly $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 3$, $b_2 = 4$. Buď Σ jednorozměrný simplex komplexu K s nedegenerovanou numerací. Označme z_k $(k = 1, 2)$ vrchol simplexu Σ, jemuž odpovídá číslo a_k nebo b_k. Označme β_Σ počet vrcholů simplexu Σ, kterým v numeraci N odpovídají sudá čísla. Přiřaďme simplexu Σ číslo γ_Σ:

$$\gamma_\Sigma = (-1)^{\beta_\Sigma} \cdot t_\Sigma(z_1, z_2) \,. \tag{1}$$

Definice 1,5. Číslo γ_Σ definované vztahem (1) nazveme *vahou* simplexu Σ.

Buď c_1 jedno z čísel 1, 2, c_2 jedno z čísel 3, 4. Označme $s(c_1, c_2)$ počet simplexů komplexu K s numerací c_1, c_2 a kladnou vahou, $p(c_1, c_2)$ počet simplexů komplexu K s touž numerací a zápornou vahou. V [1], str. 93, je dokázána tato věta:

Rozdíl $s(c_1, c_2) - p(c_1, c_2)$ nezávisí na výběru čísel c_1, c_2.

Definice 1,6. Číslo $\gamma_N = s(c_1, c_2) - p(c_1, c_2)$ nazveme *stupněm numerace* N.

5. ROTACE SPOJITÉ FUNKCE

Buď $\varphi(x + iy) = \varphi_1(x, y) + i\,\varphi_2(x, y)$ spojitá komplexní funkce definovaná a nenulová v bodech uzavřené Jordanovy křivky Γ. Funkce φ_1, φ_2 jsou spojité reálné funkce.

φ_i jsou stejnoměrně spojité na Γ, a tedy existují čísla $\alpha > 0$, $\delta > 0$ tak, že v okolí (ležícím na Γ) poloměru 2δ libovolného bodu z křivky Γ má alespoň jedna z funkcí φ_1, φ_2 stálé znamení a je v absolutní hodnotě větší než α. Označme (pro $i = 1, 2$) F_i množinu všech $z = x + iy \in \Gamma$, pro něž je $\varphi_i(x, y) \geqq \alpha$. Podobně označme G_i ($i = 1, 2$) množinu všech $z = x + iy \in \Gamma$, pro něž je $\varphi_i(x, y) \leqq -\alpha$. Množiny F_i, G_i zřejmě pokrývají Γ. Označme dále δ_1 menší ze vzdáleností množin F_i, G_i ($i = 1, 2$). Buď $\delta_0 = \min(\delta, \delta_1)$.

Definice 1,7. *Hvězdou* vrcholu z v komplexu K nazveme množinu bodů všech simplexů komplexu K, jejichž vrcholem je bod z.

Definice 1,8. Buď K simpliciální rozklad křivky Γ, jehož každý simplex má průměr nejvýše δ_0. Očíslujme vrcholy komplexu K tak, že každému vrcholu přiřadíme buď jedno z čísel a_k, kde k jsou indexy těch funkcí φ_i, které jsou v daném vrcholu kladné a na celé jeho hvězdě nezáporné, nebo jedno z čísel b_j, kde j jsou indexy těch funkcí φ_i, které jsou v daném vrcholu záporné a na celé jeho hvězdě nekladné. O numeraci N, konstruované tímto způsobem, budeme říkat, že *je vytvořena funkcí* φ.

Poznámka. Speciálně můžeme každému vrcholu přiřadit buď jedno z čísel a_k, kde k jsou indexy těch F_i, které pokrývají hvězdu daného vrcholu, nebo jedno z čísel b_j, kde j jsou indexy těch G_i, které pokrývají tuto hvězdu. V důkazech budeme používat výhradně této numerace, a to pod názvem *speciální numerace*.

Numerace N z definice 1,8 je zřejmě přípustná. Je tedy definován její stupeň.

Věta. *Stupeň numerace vytvořené funkcí φ nezávisí na výběru simpliciálního rozkladu polyedru Γ a numerace N.* (Důkaz viz [1], str. 95.)

Definice 1,9. Stupeň numerace N vytvořené funkcí φ nazveme *rotací funkce* φ na Γ.

Poznámka. Z definice rotace je vidět, že při změně orientace křivky Γ změní rotace znaménko, nikoliv absolutní hodnotu.

6. HOMOTOPIE

Definice 1,10. Říkáme, že komplexní funkce φ, ψ jsou *homotopní* na křivce Γ, jestliže existuje funkce $X(z, t)$ s hodnotami v E_2, definovaná, spojitá a nenulová na množině $\Gamma \times \langle 0, 1 \rangle$ a splňující podmínky

$$X(z, 0) = \varphi(z)\,, \quad X(z, 1) = \psi(z)$$

pro $z \in \Gamma$.

Věta 1,1. *Jsou-li funkce φ, ψ homotopní na orientované uzavřené Jordanově křivce Γ, pak mají na Γ touž rotaci.*

Důkaz. Z definice 1,8 a 1,9 plyne toto: Je-li Φ_0 spojitá komplexní funkce nenulová na Γ, pak existuje ν tak, že platí: je-li Φ_1 komplexní funkce spojitá a nenulová na Γ a je-li $|\Phi_0(z) - \Phi_1(z)| < \nu$ pro všechna $z \in \Gamma$, potom existuje společná numerace vytvořená funkcí Φ_0 a Φ_1, a tedy obě funkce mají na Γ touž rotaci. Odtud plyne tvrzení věty.

7. INDEX FUNKCE V NULOVÉM BODĚ

Označení. Buď $S_\varrho(z_0)$ kružnice o středu z_0 a poloměru ϱ. Zobrazení $F(z) = \frac{z - z_0}{\varrho}$ zobrazuje homeomorfně kružnici $S_\varrho(z_0)$ na jednotkovou kružnici S. Položme v definici 1,2 $\varepsilon = 1$ a přiřaďme kružnici S příslušnou orientaci t. Označme t^* tu orientaci kružnice $S_\varrho(z_0)$, jež simplexu $\Sigma^0 \subset S_\varrho(z_0)$ s vrcholy z_1^0, z_2^0 přiřazuje orientaci

$$t^*_{\Sigma^0}(z_1^0, z_2^0) = t_{F(\Sigma^0)}(F(z_1^0), F(z_2^0)) .$$

Úmluva. Od tohoto místa až do konce této práce budeme pod názvem orientace kružnice vždy rozumět orientaci t^*; při tom každou kružnici budeme automaticky pokládat za orientovanou.

Buď Γ orientovaná uzavřená Jordanova křivka, G její vnitřek. Buď Φ spojitá komplexní funkce definovaná na $\bar{G}$; nechť Φ má v G jen isolované nulové body, z nichž žádný neleží na Γ; označme je $z_1, z_2, \ldots, z_r$. Kolem každého nulového bodu z_k opišme kružnici S_k^ε o poloměru ε, jejž volíme tak malý, aby všechny uzavřené kruhy T_k^ε s hranicemi S_k^ε ležely v G a neprotínaly se navzájem. Na každé kružnici S_k^ε je definována funkce Φ_k^ε předpisem: $\Phi_k^\varepsilon(z) = \Phi(z)$ pro $z \in S_k^\varepsilon$. Nechť čísla $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ vyhovují podmínkám kladeným na ε. Středová projekce o středu z_k určuje topologické zobrazení F kružnice $S_k^{\varepsilon_1}$ na $S_k^{\varepsilon_2}$ ($F(z) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} z$ pro $z \in S_k^{\varepsilon_1}$). Označme $\Psi_k^{\varepsilon_1}(z) = \Phi(F(z))$ pro $z \in S_k^{\varepsilon_1}$. Rotace funkce $\Psi_k^{\varepsilon_1}$ na $S_k^{\varepsilon_1}$ je zřejmě rovna rotaci funkce $\Phi_k^{\varepsilon_2}$ na $S_k^{\varepsilon_2}$. Funkce $\Psi_k^{\varepsilon_1}$, $\Phi_k^{\varepsilon_1}$ jsou na $S_k^{\varepsilon_1}$ homotopní, a tedy (v důsledku věty 1,1) je rotace funkce $\Phi_k^{\varepsilon_1}$ na $S_k^{\varepsilon_1}$ rovna rotaci funkce $\Phi_k^{\varepsilon_2}$ na $S_k^{\varepsilon_2}$. Označme ji γ_k.

Definice 1,11. Číslo γ_k nazveme *indexem* funkce Φ v bodě z_k. Číslo $\sum_{k=1}^{r} \gamma_k$ nazveme *algebraickým počtem* nulových bodů funkce Φ uvnitř křivky Γ.

Věta 1,2. *Algebraický počet nulových bodů funkce Φ uvnitř Γ je v absolutní hodnotě roven absolutní hodnotě rotace funkce Φ na Γ.* (Důkaz viz [1], str. 98.)

II. POMOCNÉ DEFINICE A VĚTY

1. POMOCNÁ FUNKCE A_f

Buď Γ uzavřená Jordanova křivka ($\Gamma \subset E_2$), t její orientace. Zvolme bod $z_0 \in \Gamma$. Buď F homeomorfní zobrazení jednotkové kružnice S ($S \subset E_2$) na křivku

Γ takové, že je $F^{-1}(z_0) = e^{i\pi}$. Buď G zobrazení intervalu $(-\pi, \pi\rangle$ na kružnici S takové, že pro $\zeta \in (-\pi, \pi\rangle$ je $G(\zeta) = e^{i\zeta}$. Parciální zobrazení $G^* = G_{(-\pi,\pi)}$, které převádí interval $(-\pi, \pi)$ na množinu $S \dot{-} e^{i\pi}$, je zřejmě homeomorfní.

Nechť z_1, z_2 jsou dva body křivky Γ, různé od z_0. Potom existuje právě jeden simplex $\Sigma \subset \Gamma$ s vrcholy z_1, z_2, který neobsahuje bod z_0. (Je to simplex $\Sigma = F[G^*(\langle\zeta_1, \zeta_2\rangle)]$, kde $\zeta_i = G^{-1}(F^{-1}(z_i))$ $(i = 1, 2)$.) Uspořádejme body křivky Γ tímto způsobem: pišme $z_1 \prec z_2$, jestliže $t_\Sigma(z_1, z_2) = +1$ (t_Σ je orientace simplexu Σ), $r_0 \prec z$ pro všechna $z \neq z_0$, $z \in \Gamma$. Tato relace zřejmě splňuje axiomy uspořádání. Dále budeme používat těchto označení:

$z \to z^*_-$, jestliže $z \to z^*$, $z \prec z^*$;

$z \to z^*_+$, jestliže $z \to z^*$, $z^* \prec z$;

$z \to z_{0-}$, jestliže $z \to z_0$, $z^1 \prec z$ pro některé $z^1 \in \Gamma$, $z^1 \neq z_0$;

$z \to z_{0+}$, jestliže $z \to z_0$, $z \prec z^1$ pro některé $z^1 \in \Gamma$;

$z^* = \min\limits_{z \in \mathfrak{A} \subset \Gamma} z$, jestliže $z^* \in \mathfrak{A}$ a pro každé $z \in \mathfrak{A}$, $z \neq z^*$ je $z^* \prec z$;

$z^* = \max\limits_{z \in \mathfrak{A} \subset \Gamma} z$, jestliže $z^* \in \mathfrak{A}$ a pro každé $z \in \mathfrak{A}$, $z \neq z^*$ je $z \prec z^*$.

Konečně intervalem (z', z'') (resp. $\langle z', z''\rangle$) nazveme množinu všech $z \in \Gamma$ takových, že platí $z' \prec z \prec z''$ (resp. $z' \preceq z \preceq z''$); intervalem (z_1, z_0) nazveme množinu všech $z \in \Gamma$ takových, že platí $z_1 \prec z$.

Buď f komplexní funkce komplexní proměnné, spojitá a nenulová na Γ. Znakem $\arg f(z)$ (resp. $\arg' f(z)$) budeme značit číslo $\alpha(z)$ (resp. $\alpha'(z)$), pro které platí $f(z) = |f(z)| \, . \, e^{i\alpha(z)}$, $\alpha(z) \in (-\pi, \pi\rangle$ (resp. $f(z) = |f(z)| \, . \, e^{i\alpha'(z)}$, $\alpha'(z) \in \langle 0, 2\pi)$).

Buď $\mathfrak{M}$ množina všech $z \in \Gamma$, pro která je $\arg f(z) = \pi$. Jestliže je množina $\mathfrak{M}$ neprázdná, můžeme sestrojit posloupnost $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$ bodů křivky Γ tímto způsobem:

$$u_1 = \min_{z \in \mathfrak{M}} z\,;$$

$$v_n = \min_{z \in \mathfrak{N}_n} z\,,$$

kde $\mathfrak{N}_n$ je množina všech $z \in \Gamma$ takových, že $u_n \prec z$, $\arg f(z) = 0$;

$$u_{n+1} = \min_{z \in \mathfrak{M}_n} z\,,$$

kde $\mathfrak{M}_n$ je množina všech $z \in \Gamma$ takových, že $v_n \prec z$, $\arg f(z) = \pi$. $(n = 1, 2, \ldots)$.

Věta. *Nechť $\mathfrak{A}$ je uzavřená množina, $\emptyset \neq \mathfrak{A} \subset \Gamma$. Potom existuje bod $\tilde{z} = \min\limits_{z \in \mathfrak{A}} z$. Jestliže pro některý bod $z_1 \in \Gamma$ platí $\mathfrak{A} \subset \langle z_0, z_1\rangle$, pak existuje bod $\tilde{\tilde{z}} = \max\limits_{z \in \mathfrak{A}} z$.*

Důkaz. Z definice orientace plyne, že existuje takové homeomorfní zobrazení H intervalu $(-\pi, \pi)$ na $\Gamma \dot{-} z_0$, že pro $\zeta_1, \zeta_2 \in (-\pi, \pi)$, $\zeta_1 < \zeta_2$ je $H(\zeta_1) \prec H(\zeta_2)$. Buď $z' \in \mathfrak{A}$. Položme $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \langle z_0, z'\rangle$. Množina $H^{-1}(\mathfrak{B})$ je kompaktní číselná množina, a tedy existuje její minimum $\tilde{\zeta}$. Protože pro $z \in \mathfrak{A}$, $z \operatorname{non} \in \mathfrak{B}$ je $H(\tilde{\zeta}) \prec z$, platí $H(\tilde{\zeta}) = \min\limits_{z \in \mathfrak{A}} z$. Jestliže je $\mathfrak{A} \subset \langle z_0, z_1\rangle$, pak $H^{-1}(\mathfrak{A})$ je rovněž kompaktní číselná množina, a tedy existuje její maximum $\tilde{\tilde{\zeta}}$ a platí $H(\tilde{\tilde{\zeta}}) = \max_{z \in \mathfrak{A}} z$.

Věta. *Buď $\mathfrak{A}$ jedna z množin $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_n$, $\mathfrak{A}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Je-li $\mathfrak{A}$ neprázdná, pak existuje bod $\tilde{\tilde{z}} = \min_{z \in \mathfrak{A}} z$.*

Důkaz. Množina $\mathfrak{A}$ je uzavřená v důsledku spojitosti a nenulovosti funkce f. Věta tedy plyne z předchozí věty.

Věta. *Bodů u_n, a tedy i bodů v_n, je možno sestrojit jen konečný počet.*

Důkaz. Předpokládejme, že bodů u_n existuje nekonečně mnoho. Protože množina Γ je kompaktní, můžeme z nich vybrat posloupnost konvergentní k bodu $u^* \in \Gamma$. Jsou-li u_{n_1}, u_{n_2} dva body z této posloupnosti, $n_1 < n_2$, existuje podle definice bodů u_n, v_n bod v_{n_1} takový, že je $\arg f(v_{n_1}) = 0$, $u_{n_1} \precsim v_{n_1} \precsim u_{n_2}$. Je tedy $\lim_{k \to \infty} u_{n_k} = u^* = \lim_{k \to \infty} v_{n_k}$, $\arg f(u_{n_k}) = \pi$, $\arg f(v_{n_k}) = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Odtud plyne $f(u^*) = 0$, což odporuje předpokladu. Věta je dokázána.

Označme $w_{2m-1} = u_m$, $w_{2m} = v_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Nechť bodů w_n existuje právě r.

Definice 2,1. *Označme A_f funkci definovanou na Γ s těmito vlastnostmi:*

Je-li $\mathfrak{M} = \emptyset$, je $A_f(z) = \arg f(z)$ *pro všechna* $z \in \Gamma$.

Je-li $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, *je*

$$
\begin{aligned}
A_f(z_0) &= \arg f(z_0)\,; \\
A_f(z) &= \arg f(z) \quad \textit{pro} \quad z_0 \precsim z \precsim w_1\,, \quad \textit{je-li} \quad z_0 \neq w\,; \\
A_f(w_1) &= \lim_{z \to w_1 -} A_f(z)\,, \quad \textit{je-li} \quad z_0 \neq w_1\,; \\
A_f(z) &= \arg' f(z) + 2k_n\pi \quad \textit{pro} \quad w_n \precsim z \precsim w_{n+1} \quad \textit{při lichém } n\,; \\
A_f(z) &= \arg f(z) + 2k_n\pi \quad \textit{pro} \quad w_n \precsim z \precsim w_{n+1} \quad \textit{při sudém } n\,; \\
A_f(w_{n+1}) &= \lim_{z \to w_{n+1} -} A_f(z) \quad (n = 1, \ldots, r-1)\,; \\
A_f(z) &= \arg' f(z) + 2k_r\pi \quad \textit{pro} \quad w_r \precsim z \quad \textit{při lichém } r\,; \\
A_f(z) &= \arg f(z) + 2k_r\pi \quad \textit{pro} \quad w_r \precsim z \quad \textit{při sudém } r\,.
\end{aligned}
$$

Při tom k_n $(n = 1, \ldots, r)$ je voleno tak, aby platilo $\lim_{z \to w_n +} A_f(z) = A_f(w_n)$.

Bod z_0 nazveme výchozím bodem funkce A_f.

Poznámka. Z definice 2,1 je ihned vidět, že A_f je spojitou funkcí z ve všech bodech křivky Γ kromě bodu z_0, kde je spojitá zprava. Funkce A_f obecně závisí na volbě bodu z_0.

Z definice 2,1 ihned plyne tato věta:

Věta. *Nechť hodnota funkce B_f, spojité na $\Gamma \dot{-} z_0$ a spojité zprava v bodě z_0, se liší v každém bodě $z \in \Gamma$ od hodnoty $\arg f(z)$ o celistvý násobek 2π; nechť platí $B_f(z_0) = \arg f(z_0)$, kde z_0 je výchozí bod funkce A_f. Potom je $B_f(z) = A_f(z)$ pro všechna $z \in \Gamma$.*

Definice 2,2. Rozdíl $\lim\limits_{z \to z_{0-}} A_f(z) - A_f(z_0)$ budeme nazývat *změnou funkce A_f na Γ.*

Věta. *Změna funkce A_f nezávisí na volbě výchozího bodu.*

Důkaz. Buď z_0 výchozí bod funkce A_f; příslušné uspořádání značme $\prec$. Buď $\tilde{z}_0$ výchozí bod funkce $\tilde{A}_f$, příslušné uspořádání značme $<$. Snadno se nahlédne, že význam symbolů $z \to z_-^*$, $z \to z_+^*$ je při obou uspořádáních týž. Nechť platí

$$\tilde{A}_f(z_0) = A_f(z_0) + 2k\pi \,. \tag{2}$$

Funkce $\tilde{A}_f(z) - A_f(z)$ je spojitá pro $z_0 \prec z \prec \tilde{z}_0$ a nabývá tam jen hodnot, které jsou celými násobky 2π, dále je spojitá zprava v bodě z_0. Je tedy

$$\begin{gathered} \tilde{A}_f(z) - A_f(z) = 2k\pi \quad \text{pro} \quad z_0 \preceq z < \tilde{z}_0 \,, \\ \lim_{z \to \tilde{z}_{0-}} A_f(z) = A_f(\tilde{z}_0) + 2k\pi \,. \end{gathered} \tag{3}$$

Nechť změna funkce $\tilde{A}_f$ při výchozím bodě $\tilde{z}_0$ je rovna c, tj.

$$\lim_{z \to \tilde{z}_{0-}} \tilde{A}_f(z) - \tilde{A}_f(\tilde{z}_0) = c \,. \tag{4}$$

Potom podle (3) je

$$\tilde{A}_f(\tilde{z}_0) = A_f(\tilde{z}_0) + 2k\pi - c \,.$$

Funkce $\tilde{A}_f(z) - A_f(z)$ je spojitá pro $\tilde{z}_0 \prec z$ a spojitá zprava v bodě $\tilde{z}_0$. Je tedy

$$\begin{gathered} \tilde{A}_f(z) - A_f(z) = 2k\pi - c \quad \text{pro} \quad \tilde{z}_0 \prec z \,, \\ \lim_{z \to z_{0-}} A_f(z) = \tilde{A}_f(z_0) - 2k\pi + c \,, \end{gathered}$$

a tedy vzhledem k (2) a (4)

$$\lim_{z \to z_{0-}} A_f(z) - A_f(z_0) = c = \lim_{z \to \tilde{z}_{0-}} \tilde{A}_f(z) - \tilde{A}_f(z_0) \,.$$

Věta je dokázána.

2. SOUVISLOST FUNKCE A_f S ROTACÍ FUNKCE f

Věta 2,1. *Buď f komplexní funkce komplexní proměnné, spojitá a nenulová na orientované uzavřené Jordanově křivce Γ. Potom rotace funkce f na Γ je rovna změně funkce A_f na Γ, dělené 2π.*

Důkaz. Zaveďme funkci φ definovanou na Γ předpisem $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{|f(z)|}$. Zřejmě je $A_f(z) = A_\varphi(z)$. Z vlastností funkce

$$X(z, t) = t\, f(z) + (1 - t)\, f(z) \frac{f(z)}{|f(z)|}$$

plyne, že funkce f, φ jsou na Γ homotopní. Podle věty 1,1 nám tedy stačí vyšetřovat rotaci spojité funkce φ, $|\varphi(z)| = 1$ pro $z \in \Gamma$. Nechť $\varphi(x + iy) = \varphi_1(x, y) + i\, \varphi_2(x, y)$.

Zvolme $\alpha > 0$, $\delta > 0$ tak, aby v okolí poloměru 2δ libovolného bodu $z \in \Gamma$ alespoň jedna z funkcí φ_1, φ_2 měla absolutní hodnotu větší než α a aby bylo $\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Buď K dostatečně jemný simpliciální rozklad křivky Γ (všechny jeho simplexy mají průměr menší než δ_0 z odstavce 5 části I) a N jeho speciální numerace vytvořená funkcí φ (viz pozn. za definicí 1,8). Budeme předpokládat (bez újmy obecnosti), že K obsahuje lichý počet jednorozměrných simplexů.

Nechť simplex $\Sigma \in K$ má numeraci 1, 3. Označme z_1 vrchol simplexu Σ s numerací 1, z_2 vrchol s numerací 3. Je tedy $\varphi_i(z_j) \geqq \alpha$ pro $i, j = 1, 2$.

Označme $A = a_1 + ia_2$, $B = b_1 + ib_2$ čísla s vlastnostmi:

$$|A| = |B| = 1\,; \quad a_1 > 0,\ a_2 = \alpha\,; \quad b_1 = \alpha,\ b_2 = a_1\,.$$

Čísla A, B jsou tím jednoznačně určena a je $\alpha < a_1$ (neboť jinak by bylo $\alpha \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$). Označme $\beta = \arg A = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{a_1}$. Protože pro $j = 1, 2$ je $\frac{\alpha}{a_1} \leqq \frac{\varphi_2(z_j)}{\varphi_1(z_j)} \leqq \frac{a_1}{\alpha}$, platí

$$\beta \leqq \arg \varphi(z_j) = \operatorname{arctg} \frac{\varphi_2(z_j)}{\varphi_1(z_j)} \leqq \frac{\pi}{2} - \beta \quad (j = 1, 2)\,. \tag{5}$$

Naopak platí: Jestliže z_j je vrcholem v komplexu K a platí (5), pak je

$$\frac{\alpha}{a_1} \leqq \frac{\varphi_2(z_j)}{\varphi_1(z_j)} \leqq \frac{a_1}{\alpha}\,,$$

a tedy $\varphi_1(z_j) \geqq \alpha$, $\varphi_2(z_j) \geqq \alpha$; to znamená, že vrchol z_j má numeraci 1 nebo 3.

Dokázali jsme tedy tato dvě tvrzení:

Tvrzení 1. Jestliže simplex $\Sigma \in K$ má numeraci 1, 3, pak pro jeho vrcholy z_1, z_2 platí (5).

Tvrzení 2. Jestliže pro vrchol z_j v komplexu K platí (5), pak vrchol z_j má numeraci 1 nebo 3.

Podobně lze dokázat další dvě tvrzení:

Tvrzení 3. Nechť pro vrchol $z \in K$ platí $|\arg \varphi(z)| < \beta$. Pak z má numeraci 1.

Tvrzení 4. Nechť pro vrchol $z \in K$ platí $\frac{\pi}{2} - \beta < \arg \varphi(z) < \frac{\pi}{2} + \beta$. Pak z má numeraci 3.

V dalším budeme předpokládat, že numerace N má tuto vlastnost: Je-li z_i vrchol některého simplexu komplexu K, $\beta \leqq \arg \varphi(z_i) \leqq \frac{\pi}{2} - \beta$, pak vrchol z_i má numeraci 1, jestliže na celé hvězdě vrcholu z_i je $\varphi_1(z) \geqq \alpha$, a 3, jestliže tomu tak není. (Z věty následující za def. 1,8 plyne, že splněním tohoto speciálního požadavku se nemění hodnota rotace funkce φ.)

Jestliže simplex Σ s vrcholy z_1, z_2 má numeraci 1, 3, pak (podle tvrzení 1) platí $\beta \leqq \arg \varphi(z_i) \leqq \frac{\pi}{2} - \beta$ $(i = 1, 2)$. Nechť vrchol z_1 má numeraci 1, vrchol z_2 numeraci 3. Je-li z_3 druhý vrchol patřící k hvězdě vrcholu z_2, pak je (vzhledem k volbě numerace N)

$$\frac{\pi}{2} - \beta < \arg \varphi(z_3) < \frac{\pi}{2} + \beta$$

a vrchol z_3 má numeraci 3. Zvolme výchozí bod $z_0 \in \Gamma$ tak, aby neležel v žádném simplexu s numerací 1, 3. (To je možné, neboť všech simplexů je lichý počet, a tedy alespoň jeden z nich nemá numeraci 1, 3.)

Buď $\mathfrak{N}$ množina všech vrcholů simplexů s numerací 1,3 ležících na Γ (resp. v intervalu $J \subset \Gamma$). Vrchol $z^1 = \min\limits_{z \in \mathfrak{N}} z$ je vrcholem právě jednoho simplexu Σ^1 s numerací 1, 3, ležícího na Γ (resp. v J); podobně vrchol $z^2 = \max\limits_{z \in \mathfrak{N}} z$ je vrcholem právě jednoho simplexu Σ^2 s numerací 1, 3. Nazvěme Σ^1 prvním a Σ^2 posledním simplexem s numerací 1, 3 na Γ (resp. v J).

Buďte Σ', Σ'' dva simplexy komplexu K s numerací 1, 3. Označme jejich vrcholy z^1, z^2, z^3, z^4 tak, aby bylo $z^1 \prec z^2 \preceq z^3 \prec z^4$. Jestliže v intervalu $\langle z^2, z^3 \rangle$ neleží žádný simplex s numerací 1, 3, pak budeme říkat, že simplexy Σ', Σ'' následují za sebou nebo že simplex s vrcholy z^3, z^4 následuje za simplexem s vrcholy z^1, z^2.

Tvrzení 5. Nechť pro žádné $z \in \Gamma$ není $\arg \varphi(z) = \pi$. Potom je rotace funkce φ i změna funkce A_φ na Γ rovna nule.

Důkaz. Jestliže na Γ neexistuje simplex s numerací 1, 3, je tvrzení zřejmé. Nechť tedy existuje simplex s numerací 1, 3. Dokážeme nyní:

Jestliže dva simplexy s numerací 1, 3 následují za sebou, pak jejich váhy mají různá znamení.

Předpokládejme, že tomu tak není, tj. že např. simplex Σ^* s vrcholy z_1^*, z_2^* a kladnou vahou následuje za simplexem Σ s vrcholy z_1, z_2, který má rovněž kladnou váhu. Označení vrcholů volme tak, aby vrcholy s indexem 1 měly numeraci 1 a vrcholy s indexem 2 numeraci 3. Je tedy $z_1 \prec z_2 \prec z_1^* \prec z_2^*$. Buď z_3 druhý vrchol patřící k hvězdě vrcholu z_2. Vrchol z_3 má numeraci 3 a platí $z_3 \prec z_1^*$, $\frac{\pi}{2} - \beta < \arg \varphi(z_3) < \frac{\pi}{2} + \beta$, $\beta \leqq \arg \varphi(z_1^*) \leqq \frac{\pi}{2} - \beta$.

Buď $\mathfrak{A}$ množina všech $z \in \langle z_3, z_1^* \rangle$, jež jsou vrcholy simplexů komplexu K a mají numeraci 3; buď $\tilde{z} = \max\limits_{z \in \mathfrak{A}} z$. Je $z_3 \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ konečná, a tedy $\tilde{z}$ existuje a je $z_2 \prec \tilde{z} \prec z_1^*$. Buď $\tilde{\tilde{z}}$ ten vrchol patřící k hvězdě vrcholu $\tilde{z}$, pro nějž je $\tilde{z} \prec \tilde{\tilde{z}}$. Numerace vrcholu $\tilde{\tilde{z}}$ není rovna 3, neboť $\tilde{\tilde{z}}$ non $\in \mathfrak{A}$; není rovna 4, neboť pak by numerace N nebyla přípustná. Kdyby numerace vrcholu $\tilde{\tilde{z}}$ byla rovna 2, platilo by $\arg \varphi(\tilde{\tilde{z}}) > \frac{\pi}{2} + \beta$ (neboť je $\varphi_2(\tilde{\tilde{z}}) \geqq \alpha$) a v intervalu $(\tilde{\tilde{z}}, z_1^*)$ by vzhledem ke spojitosti funkce arg φ existoval bod ζ, pro nějž by platilo arg $\varphi(\zeta) = \frac{\pi}{2}$, a tedy by v intervalu $(\tilde{\tilde{z}}, z_1^*)$ existoval vrchol s numerací 3, což je ve sporu s volbou bodu $\tilde{z}$. Má tedy bod $\tilde{\tilde{z}}$ numeraci 1 a v intervalu $\langle z_2, z_1^*\rangle$ leží simplex s numerací 1, 3, což je ve sporu s předpokladem, že simplexy Σ, Σ^* následují za sebou. Analogicky dojdeme ke sporu, předpokládáme-li, že oba za sebou následující simplexy mají zápornou váhu.

Nechť první simplex s numerací 1, 3 na Γ má kladnou váhu. Je tedy $-\pi <$ $<$ arg $\varphi(z_0) \leqq \frac{\pi}{2} - \beta$ (jinak by v důsledku spojitosti funkce arg $\varphi(z)$ měl první simplex s numerací 1, 3 zápornou váhu). Protože funkce arg φ nenabývá hodnoty π, musí mít poslední simplex s numerací 1, 3 zápornou váhu. Rotace funkce φ na Γ je tedy nulová.

Změna funkce A_φ na Γ je zřejmě nulová, a tedy je tvrzení 5 dokázáno.

Tvrzení 6. Nechť existuje z^0 tak, že je arg $\varphi(z_0) = \pi$. Potom rotace funkce φ na Γ je rovna změně funkce A_φ na Γ, dělené 2π.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že jsme zvolili $z_0 = z^0$. Nechť w_n $(n =$ $= 1, \ldots, r)$ jsou body z definice 2,1. Platí tedy $w_1 = z_0$. Budeme používat tohoto tvrzení:

Buď $1 \leqq n \leqq r$. Symbolem (w_r, w_{r+1}) značme interval (w_r, z_0). Jestliže dva simplexy s numerací 1, 3, ležící v intervalu (w_n, w_{n+1}), za sebou následují, pak jejich váhy mají různá znamení. (Důkaz je zcela analogický důkazu obdobného tvrzení v důkazu tvrzení 5.)

Buď n liché, $1 \leqq n \leqq r - 1$. Je tedy

$$\arg \varphi(w_n) = \arg' \varphi(w_n) = \pi\,, \quad \arg \varphi(w_{n+1}) = \arg' \varphi(w_{n+1}) = 0\,.$$

Nechť platí

$$A_\varphi(w_n) = \arg \varphi(w_n) + 2k_n\pi\,.$$

Jestliže v intervalu (w_n, w_{n+1}) neleží žádný simplex s numerací 1, 3, pak ze spojitosti funkce arg' $\varphi(z)$ plyne

$$\lim_{z \to w_{n+1-}} \arg' \varphi(z) = 2\pi\,,$$

a tedy

$$A_\varphi(w_{n+1}) = \lim_{z \to w_{n+1}} \arg' \varphi(z) + 2k_n\pi = \arg \varphi(w_{n+1}) + 2(k_n + 1)\,\pi\,. \tag{6}$$

Předpokládejme nyní, že v intervalu (w_n, w_{n+1}) existuje simplex s numerací 1, 3. První simplex tohoto intervalu s numerací 1, 3 musí mít zápornou váhu. Označíme-li tedy s_n (resp. p_n) počet simplexů s numerací 1, 3 a kladnou (resp. zápornou) vahou v intervalu (w_n, w_{n+1}), je

$$A_\varphi(w_{n+1}) = \begin{cases} \arg \varphi(w_{n+1}) + 2(k_n + 1)\,\pi\,, & \text{je-li } s_n - p_n = 0\,, \\ \arg \varphi(w_{n+1}) + 2k_n\pi\,, & \text{je-li } s_n - p_n = -1\,. \end{cases} \tag{7}$$

Položíme-li $A_\varphi(w_{r+1}) = \lim\limits_{z \to z_0-} A_\varphi(z)$, $(w_r, w_{r+1}) = (w_r, z_0)$, můžeme postupovat analogicky dále: Nechť je

$$A_\varphi(w_{n+1}) = \arg \varphi(w_{n+1}) + 2l_n\pi .$$

Neexistuje-li v intervalu (w_{n+1}, w_{n+2}) simplex s numerací 1, 3, pak je

$$\lim_{z \to w_{n+2}-} \arg \varphi(z) = -\pi = \arg \varphi(z) - 2\pi ,$$

a tedy

$$A_\varphi(w_{n+2}) = \arg \varphi(w_{n+2}) + 2(l_n - 1)\pi . \tag{8}$$

Jestliže v intervalu (w_{n+1}, w_{n+2}) existuje simplex s numerací 1, 3, pak první simplex s numerací 1, 3 má kladnou váhu. Je tedy

$$A_\varphi(w_{n+2}) = \begin{cases} \arg \varphi(w_{n+2}) + 2l_n\pi , & \text{je-li } s_{n+1} - p_{n+1} = 1 , \\ \arg \varphi(w_{n+2}) + 2(l_n - 1)\pi , & \text{je-li } s_{n+1} - p_{n+1} = 0 . \end{cases} \tag{9}$$

Shrneme-li výsledky (6), (7), (8), (9), dostáváme pro liché n, $1 \leqq n \leqq r - 1$

$$A_\varphi(w_{n+2}) = \begin{cases} A_\varphi(w_n) + 2\pi , & \text{je-li } (s_n + s_{n+1}) - (p_n + p_{n+1}) = 1 , \\ A_\varphi(w_n) , & \text{je-li } (s_n + s_{n+1}) - (p_n + p_{n+1}) = 0 , \\ A_\varphi(w_n) - 2\pi , & \text{je-li } (s_n + s_{n+1}) - (p_n + p_{n+1}) = -1 . \end{cases} \tag{10}$$

Označme $s = \sum\limits_{n=1}^{r} s_n$, $p = \sum\limits_{n=1}^{r} p_n$. Je-li r sudé, dává (10) tento výsledek:

$$\lim_{z \to z_0-} A_\varphi(z) = A_\varphi(z_0) + 2k\pi ,$$

kde $k = s - p$ je rotace funkce φ na Γ.

Nechť je nyní r liché. Je tedy $\arg \varphi(w_r) = \arg' \varphi(w_r) = \pi$. Funkce $\arg' \varphi(z)$ je spojitá v intervalu (w_r, z_0) a nenabývá tam hodnoty 0. První simplex intervalu (w_r, z_0) s numerací 1, 3 má zápornou váhu, poslední simplex má kladnou váhu. Je tedy $s_r - p_r = 0$, $\lim\limits_{z \to z_0-} A_\varphi(z) = A_\varphi(w_r)$. Platí tedy i v tomto případě

$$\lim_{z \to z_0-} A_\varphi(z) - A_\varphi(z_0) = 2k\pi ,$$

kde $k = s - p$ je rotace funkce φ na Γ. Tvrzení 6 je dokázáno.

Věta 2,1 je zřejmým důsledkem dokázaných tvrzení.

3. ZMĚNA ARGUMENTU A ROTACE SPOJITÉ FUNKCE

Označení. Symbolem $\gamma_\varphi(z_0)$ budeme značit index funkce φ v bodě z_0.

Lemma 2,1. *$\varphi(z)$, $\psi(z)$ buďte komplexní funkce, spojité a nenulové na Γ. Potom změna funkce $A_{\varphi.\psi}$ na Γ je rovna součtu změny funkce A_φ a změny funkce A_ψ na Γ.*

Důkaz. Označme $\chi(z) = \varphi(z) . \psi(z)$ pro $z \in \Gamma$. z_0 buď výchozí bod funkcí

A_χ, A_φ, A_ψ. Funkce $A_\chi(z)$, $A_\varphi(z) + A_\psi(z)$ jsou spojité pro každé $z \in \Gamma$, $z \neq z_0$, a spojité zprava v bodě z_0. Je-li $z \in \Gamma$, pak existuje celé číslo $l(z)$ tak, že

$$\omega(z) = A_\chi(z) - A_\varphi(z) - A_\psi(z) = 2l(z)\,\pi\,.$$

Funkce ω je spojitá na každé souvislé podmnožině křivky Γ neobsahující z_0, a tedy je tam konstantní. Na druhé straně ke každé dvojici bodů $z_1, z_2 \in \Gamma$, $z_1 \neq z_0 \neq z_2$, existuje souvislá podmnožina (simplex) křivky Γ, která obsahuje body z_1, z_2 a neobsahuje bod z_0. Je tedy $l(z) = l$ pro všechna $z \neq z_0$. Dále je

$$\omega(z_0) = \lim_{z \to z_0+} \omega(z) = 2l\pi\,, \quad \lim_{z \to z_0-} \omega(z) = 2l\pi\,,$$

a proto platí

$$\lim_{z \to z_0-} \omega(z) - \omega(z_0) =$$
$$= (\lim_{z \to z_0-} A_\chi(z) - A_\chi(z_0)) - (\lim_{z \to z_0-} A_\varphi(z) - A_\varphi(z_0) + \lim_{z \to z_0-} A_\psi(z) - A_\psi(z_0)) = 0\,.$$

Lemma je dokázáno.

Z věty 2,1 plyne, že lemma 2,1 je možno formulovat ve tvaru:

Lemma 2,1'. *$\varphi(z)$, $\psi(z)$ buďte komplexní funkce, spojité a nenulové na Γ. Potom rotace funkce $\varphi \,.\, \psi$ na Γ je rovna součtu rotace funkce φ a rotace funkce ψ na Γ.*

Věta 2,2. *Buď z_0 k-násobný nulový bod holomorfní funkce φ. Potom index funkce φ v bodě z_0 je roven k.*

Důkaz. Nechť $\varphi(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ v oblasti G obsahující bod z_0. Je $k \geqq 0$, $a_k \neq 0$. Můžeme tedy psát

$$\varphi(z) = (z - z_0)^k \,.\, \psi(z)\,,$$

kde $\psi(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-k}$. Je $\psi(z_0) = a_k \neq 0$, a tedy z věty 1,2 plyne $\gamma_\psi(z_0) = 0$.

Buď S_ε kružnice o středu z_0 a poloměru ε; položme $\chi(z) = z - z_0$. Změna funkce A_χ na S_ε je zřejmě rovna jedné, a tedy $\gamma_\chi(z_0) = 1$. Podle lemmatu 2,1' je $\gamma_\varphi(z_0) = k \,.\, \gamma_\chi(z_0) + \gamma_\psi(z_0) = k$. Věta je dokázána.

Buď z_0 bod vnitřku křivky Γ, $\varphi(z) = z - z_0$. Funkce φ má uvnitř Γ právě jeden nulový bod z_0 a index funkce φ v bodě z_0 je roven jedné. Podle věty 1,2 je tedy rotace funkce φ na Γ v absolutní hodnotě rovna jedné. Při tom hodnota rotace funkce φ na Γ nezávisí na výběru bodu z_0, neboť platí toto tvrzení:

Tvrzení. Nechť z_0, z_1 jsou dva body ležící uvnitř křivky Γ. Potom funkce $\varphi(z) = z - z_0$ a $\psi(z) = z - z_1$ jsou na Γ homotopní.

Důkaz. Buď G vnitřek Γ. G je souvislá množina, a tedy lze body z_0, z_1 spojit lomenou čarou L ležící v G. Buď F homeomorfní zobrazení intervalu $\langle 0, 1\rangle$ na L takové, že je $F(0) = z_0$, $F(1) = z_1$. Funkce $X(z, t) = z - F(t)$ je spojitá a nenulová na $\Gamma \times \langle 0, 1\rangle$ a je $X(z, 0) = z - z_0$, $X(z, 1) = z - z_1$.

Tvrzení je tedy dokázáno.

Označení. Buď z_0 bod vnitřku křivky Γ. Označme t^* tu orientaci křivky Γ, při níž je rotace funkce $\varphi(z) = z - z_0$ na Γ rovna jedné.

Úmluva. Od tohoto místa budeme pod názvem *orientace uzavřené Jordanovy křivky* vždy rozumět orientaci t^*; při tom každou uzavřenou Jordanovu křivku budeme automaticky pokládat za orientovanou.

Definice 2,3. Za předpokladu orientace t^* křivky Γ budeme změnu funkce A_f na Γ nazývat *změnou argumentu* funkce f na Γ.

Nyní, když máme určitým způsobem definovánu orientaci křivky Γ, můžeme formulovat tuto větu:

Věta 2,3. *Buď φ spojitá funkce definovaná na uzávěru oblasti, jejíž hranicí je uzavřená Jordanova křivka Γ. Nechť je $\varphi(z) \neq 0$ pro $z \in \Gamma$. Potom algebraický počet nulových bodů funkce φ uvnitř Γ je roven rotaci funkce φ na Γ.*

Důkaz věty 2,3 je proveden v [1], str. 98. Součástí tohoto důkazu je důkaz tvrzení, obsaženého v následujícím lemmatu.

Lemma 2,2. *Buď T uzávěr oblasti, jejíž hranici tvoří uzavřená Jordanova křivka Γ; $z_1, z_2, \ldots, z_r$ nechť jsou body této oblasti. S_k^ε $(k = 1, 2, \ldots, r)$ buď kružnice o středu z_k a poloměru ε takovém, že platí:*

a) *je-li T_k^ε uzavřený kruh, jehož hranicí je kružnice S_k^ε, pak je $T_k^\varepsilon \subset T$;*

b) *pro $i \neq k$ je $T_i^\varepsilon \cap T_k^\varepsilon = \emptyset$.*

Nechť funkce Φ, definovaná na množině $T_1 = \overline{T - \bigcup_{k=1}^{r} T_k^\varepsilon}$ je na T_1 spojitá a nenulová. Označme γ rotaci funkce Φ na Γ, γ_k rotaci funkce Φ na S_k^ε. Potom platí

$$\gamma = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k .$$

Poznámka. Z vět 2,1, 2,2 a 2,3 plyne přímo princip argumentu pro holomorfní funkce, a to s vynecháním předpokladu, že křivka Γ je rektifikace schopná.

III. ZOBECNĚNÍ VĚT Z TEORIE ANALYTICKÝCH FUNKCÍ

1. ZOBECNĚNÍ PRINCIPU ARGUMENTU A ROUCHÉOVY A HURWITZOVY VĚTY

Rozšíříme nyní pojem indexu funkce v bodě na libovolný bod, v jehož okolí (neobsahujícím daný bod) je uvažovaná funkce spojitá a nenulová.

Nechť funkce φ je definována v kruhovém okolí G bodu z_0. Nechť φ je spojitá a nenulová na množině $G \dot{-} z_0$. Buď S_ε kružnice o středu z_0 a poloměru ε takovém, že je $S_\varepsilon \subset G$. Rotace funkce φ na S_ε nezávisí na ε (viz 7. odst. I. části). Označme ji $\gamma_\varphi(z_0)$.

Definice 3,1. Číslo $\gamma_\varphi(z_0)$ nazveme *indexem funkce φ v bodě z_0*. Jestliže funkce φ má uvnitř křivky Γ jen isolované nulové body a body nespojitosti, pak součet indexů funkce φ ve všech nulových bodech a bodech nespojitosti uvnitř křivky Γ nazveme *algebraickým počtem nulových bodů a bodů nespojitosti* funkce φ uvnitř Γ.

Věta 3,1. *Buď z_0 k-násobný pól funkce φ. Potom index funkce φ v bodě z_0 je roven $-k$.*

Důkaz je analogický důkazu věty 2,2.

Věta 3,2. *Nechť funkce f má v $\overline{G}$ jen konečný počet nulových bodů a bodů nespojitosti a je spojitá a nenulová na Γ. Potom algebraický počet nulových bodů a bodů nespojitosti funkce f, ležících uvnitř Γ, je roven změně argumentu funkce f na Γ.*

Důkaz. Označme $z_1, \ldots, z_r$ všechny nulové body a body nespojitosti funkce f ležící uvnitř Γ. Opišme kolem každého bodu z_k kružnici S_k^ε o poloměru ε takovém, že uzavřený kruh T_k^ε s hranicí S_k^ε leží celý v G a žádné dva z těchto kruhů nemají společný bod. Funkce f je na množině $G - \bigcup_{k=1}^{r} T_k^\varepsilon$ spojitá a nenulová. Podle lemmatu 2,2 je rotace funkce f na Γ rovna součtu rotací funkce f na S_k^ε, a tedy (viz věta 2,1) věta platí.

Věta 3,3. *Nechť funkce f, φ mají v $\overline{G}$ jen konečný počet bodů nespojitosti a jsou spojité na Γ. Nechť funkce f, $f + \varphi$ mají v G jen konečný počet nulových bodů. Nechť pro $z \in \Gamma$ platí $|f(z)| > |\varphi(z)|$. Potom algebraický počet nulových bodů a bodů nespojitosti funkce $f(z) + \varphi(z)$ uvnitř Γ je týž jako u funkce f.*

Důkaz. Podle předpokladu je $|f(z)| > |\varphi(z)| \geqq 0$, a tedy $f(z) \neq 0$ na Γ. Nechť $X(z, t) = f(z) + t\,\varphi(z)$. Funkce X je spojitá na $\Gamma \times \langle 0, 1\rangle$ a je

$$|X(z, t)| = |f(z) + t\,\varphi(z)| \geqq |f(z)| - t|\varphi(z)| > 0\,.$$

Platí $X(z, 0) = f(z)$, $X(z, 1) = f(z) + \varphi(z)$. Funkce $f(z) + \varphi(z)$, $f(z)$ jsou tedy homotopní na Γ a věta plyne z věty 3,1.

Věta 3,4. *Nechť funkce $f, f_1, f_2, f_3, \ldots$ mají v $\overline{G}$ jen konečný počet nulových bodů a bodů nespojitosti a jsou spojité na Γ. Nechť funkce f je nenulová na Γ a $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ stejnoměrně na Γ. Potom existuje číslo $\nu \geqq 0$ tak, že pro $n > \nu$ má funkce f_n uvnitř Γ stejný algebraický počet nulových bodů a bodů nespojitosti jako funkce f.*

Důkaz. Označme pro $z \in \Gamma$ $\chi_n(z) = f_n(z) - f(z)$. Buď $\varrho = \min_{z\in\Gamma} |f(z)|$. Podle předpokladu je $\varrho > 0$. Ze stejnoměrné konvergence funkcí f_n plyne, že existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $|\chi_n(z)| < \varrho$ pro $z \in \Gamma$. Protože je $\varrho \leqq |f(z)|$, platí pro $n > n_0$ $|\chi_n(z)| < |f(z)|$ a podle věty 3,2 má funkce $f(z) + \chi_n(z) = f_n(z)$ uvnitř Γ stejný algebraický počet nulových bodů a pólů jako $f(z)$. Stačí tedy položit $\nu = n_0$.

Poznámka. Z těchto vět a z věty 3,1 ihned vyplývá Rouchéova a Hurwitzova věta pro funkce holomorfní až na póly.

2. ZÁVISLOST INDEXU FUNKCE $\bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$ NA TVARU FUNKCÍ Φ, Ψ

Vyšetřujme nyní funkce tvaru $f(z) = \bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$, kde Φ, Ψ jsou holomorfní (resp. meromorfní). Nulové body těchto funkcí na rozdíl od funkcí holomorfních nemusí být isolované, mohou tvořit celé čáry. V dalším si budeme všímat pouze isolovaných nulových bodů. Zjistili jsme, že index holomorfní funkce v daném bodě se lehce určí z koeficientů Taylorova rozvoje této funkce. Rozvineme nyní funkci $f = \bar{z}\Phi + \Psi$ v řadu analogickou řadě Taylorově, z jejíchž koeficientů lze určit index této funkce v isolovaném nulovém bodě (resp. bodě nespojitosti).

Věta 3,5. *Buďte Φ, Ψ funkce holomorfní v okolí bodu z_0, který je nulovým bodem funkce $f(z) = \bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$. Pišme funkce Φ, Ψ ve tvaru*

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n\,, \quad \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n\,.$$

Buď k celé číslo, $k \geqq 1$. Nechť platí

1. $a_i = b_i = 0$ *pro* $0 \leqq i \leqq k - 2$,
2. $a_{k-1}\bar{z}_0 + b_{k-1} = 0$,
3. *alespoň jedno z čísel* $|a_{k-1}|$, $|a_k\bar{z}_0 + b_k|$ *je různé od nuly.*

Potom platí: Jestliže je $|a_{k-1}| \neq |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, pak z_0 je isolovaným nulovým bodem funkce f; v případě, že $|a_{k-1}| < |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, je $\gamma_f(z_0) = k$, a v případě, že $|a_{k-1}| > |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, je $\gamma_f(z_0) = k - 2$. Je-li $|a_{k-1}| = |a_k\bar{z}_0 + b_k|$ a je-li z_0 isolovaným nulovým bodem funkce f, potom platí $k - 2 \leqq \gamma_f(z_0) \leqq k$. (Přesnější kriterium pro poslední případ je obsaženo v důkazu.)

Důkaz. Všimněme si, že věta 3,5 neklade na holomorfní funkce Φ, Ψ žádné omezující podmínky kromě předpokladu pro případ $|a_{k-1}| = |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, že nulový bod z_0 je isolovaný. Jsou-li Φ, Ψ holomorfní funkce, pak existuje k tak, že platí 1 a 3. Můžeme tedy psát $f(z) = (z - z_0)^{k-1} . A(z)$, kde $A(z) = \sum_{n=k-1}^{\infty} (a_n\bar{z} + b_n)(z - z_0)^{n-k+1}$. Je-li $A(z_0) = a_{k-1}\bar{z}_0 + b_{k-1} = 0$, je splněna i podmínka 2. V případě, že $A(z_0) \neq 0$, jsou splněny podmínky 1, 2, 3, dosadíme-li za k číslo $k - 1$.

Označme $u = z - z_0$; nechť Φ, Ψ jsou holomorfní a nenulové pro $|u| \leqq r_1$. Uvažujme body $u \in S_r$, kde S_r je kružnice se středem v počátku a poloměrem $r \leqq r_1$. Potom je

$$\begin{aligned}(11)\qquad f(z) = f(u + z_0) = f^*(u) &= \sum_{n=0}^{\infty}[(a_n\bar{z}_0 + b_n)\, u^n + a_n r^2 u^{n-1}] = \\ &= [c_k u^k + c_{k+1}u^{k+1} + \ldots] + [a_{k-1}r^2u^{k-2} + a_k r^2 u^{k-1} + \ldots]\,,\end{aligned}$$

kde $c_n = a_n\bar{z}_0 + b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Protože je $f^*(0) = 0$, platí $c_0 = 0$.

Nechť nejdříve platí $|a_{k-1}| \neq |a_k\bar{z}_0 + b_k|$. Předpokládejme, že je $k \geqq 2$. Z předpokladu vyplývá, že pro $0 < |u| = r \leqq r_1$ je $a_{k-1}r^2u^{k-2} + c_ku^k \neq 0$. Dokážeme, že existuje r_2 tak, že funkce $a_{k-1}r^2u^{k-2} + c_ku^k$ je pro $r < r_2$ homotopní s f^* na S_r.

Definujme pro všechna $z \in E_2$ funkce

$$f_1(u) = a_{k-1}r^2u^{k-2}\,, \quad f_2(u) = c_ku^k\,.$$

Funkce $f_1(u) + f_2(u)$ nemá uvnitř S_{r_1} nulový bod různý od nuly. Zřejmě existuje r_2 tak, že pro $r \leqq r_2$ platí

$$||c_k| - |a_{k-1}|| > r\,\{[|a_k| + |a_{k+1}|\,r_1 + |a_{k+2}|\,r_1^2 + \ldots] + \\ + [|c_{k+1}| + |c_{k+2}|\,r_1 + \ldots]\}\,.$$

Ale odtud plyne pro $|u| = r \leqq r_2$

$$|f_1(u) + f_2(u)| = r^k \left|a_{k-1} + c_k\frac{u^2}{r^2}\right| \geqq ||c_k| - |a_{k-1}||\,r^k > \\ > r^{k+1}\{[|a_k| + |a_{k+1}|\,r_1 + \ldots] + [|c_{k+1}| + |c_{k+2}|\,r_1 + \ldots]\} \geqq \\ \geqq r^{k+1}\left|[a_k + a_{k+1}u + \ldots] + \left[c_{k+1}\frac{u^2}{r^2} + c_{k+2}\frac{u^3}{r^2} + \ldots\right]\right| = \\ = |[a_kr^2u^{k-1} + a_{k+1}r^2u^k + \ldots] + [c_{k+1}u^{k+1} + c_{k+2}u^{k+2} + \ldots]| = \\ = |f^*(u) - (f_1(u) + f_2(u))|\,.$$

Buď $\varepsilon \leqq r_2$. Definujme pro $|u| \leqq r_2$ holomorfní funkce

$$\varphi_1(u) = a_{k-1}\varepsilon^2u^{k-2}\,, \quad \varphi(u) = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_nu^n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n\varepsilon^2u^{n-1}\,.$$

Pro $u \in S_\varepsilon$ je

$$|\varphi_1(u) + f_2(u)| = |f_1(u) + f_2(u)| > |f^*(u) - (f_1(u) + f_2(u))| = |\varphi(u)|\,,$$

a tedy z Rouchéovy věty plyne, že funkce $f_1 + f_2$, f^* mají touž rotaci na S_ε. Je-li $|a_{k-1}| < |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, je podle Rouchéovy věty a podle věty 2,2 rotace funkce $f_1 + f_2$ na S_ε rovna k, je-li $|a_{k-1}| > |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, je rotace funkce $f_1 + f_2$ na S_ε rovna $k - 2$. Z definice funkce f^* plyne, že rotace funkce f^* na S_ε je rovna indexu funkce f v bodě z_0.

Je-li $k = 1$, pak pro $u \neq 0$ je $f^*(u) = \dfrac{1}{u}\,.\,g(u)$, kde $g(u) = [c_1u^2 + c_2u^3 + \ldots] + [a_0r^2 + a_1r^2u + a_2r^2u^2 + \ldots]$. Z předešlé části důkazu plyne, že pro $|a_0| < |c_1|$ je rotace funkce g na S_ε rovna 2, a tedy (viz lemma 2,1′) $\gamma_f(z_0) = 1$. Podobně pro $|a_0| > |c_1|$ je $\gamma_f(z_0) = -1$.

Nechť nyní $|a_{k-1}| = |a_k\bar{z}_0 + b_k|$. Položme

$$\lambda = \frac{1}{k}\arg\frac{c_k}{a_{k-1}}\,, \quad u = v\,.\,e^{-i\lambda}\,.$$

Místo funkce f zkoumejme funkci proměnné v

$$\tilde{f}(v) = \frac{f^*(u)}{a_{k-1}},$$

kterou je možno zapsat (s použitím předpokladu, že je $\left|\frac{c_k}{a_{k-1}}\right| = 1$) ve tvaru

$$\tilde{f}(v) = v^{k-2}\{[v^2 + \alpha_{k+1}v^3 + \alpha_{k+2}v^4 + \dots] + [r^2 + \beta_k r^2 v + \beta_{k+1}r^2v^2 + \dots]\},$$

kde $\alpha_n = \frac{c_n}{a_{k-1}} e^{-in\lambda}$, $\beta_n = \frac{a_n}{a_{k-1}} e^{-i(n-1)\lambda}$.

Nechť pro $0 < |u| \leqq \varrho_1$ je $f^*(u) \neq 0$. Funkce $\tilde{f}, f^*$ jsou zřejmě homotopní na kružnici S_r pro $r \leqq \varrho$.

Píšeme-li $v = x + iy$, pak platí $v^2 + r^2 = v(v + \bar{v}) = v \,.\, 2x$. Má-li funkce $\tilde{f}$ na kružnici S_r rotaci l, pak funkce

$$F(v) = \frac{\tilde{f}(v)}{v^{k-1}}$$

má na S_r rotaci $l - k + 1$ a platí

$$F(v) = 2x + r^2\left\{\left[\alpha_{k+1}\frac{v^2}{r^2} + \alpha_{k+2}\frac{v^3}{r^2} + \dots\right] + [\beta_k + \beta_{k+1}v + \beta_{k+2}v^2 + \dots]\right\}.$$

Označme

$$J = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right).$$

Snadno se dokáže, že existuje číslo $\varrho_2 \leqq \varrho_1$ tak, že pro $r \leqq \varrho_2$, $\arg v$ non $\in J$ je

$$|2x| > |\mathrm{Re}\,(F(v) - 2x)|,$$

a tedy

(12) $$\operatorname{sgn} \mathrm{Re}\,(F(v)) = \operatorname{sgn} x \quad \text{pro} \quad r \leqq \varrho_2, \quad \arg v \text{ non} \in J.$$

Zaveďme označení (při značení $v = x + iy$):

$$g_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k+n} v^{n+1}, \quad g_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_k,$$

$$G(x, y) = \mathrm{Re}\,(F(v)) = 2x + \mathrm{Re}\,(g_1(x, y)) + (x^2 + y^2)\,\mathrm{Re}\,(g_2(x, y)).$$

g_1, g_2 jsou analytické funkce, proto jejich reálné části mají spojité parciální derivace. Odtud plyne existence a spojitost parciálních derivací funkce G. Dále je $\frac{\partial G}{\partial x}(0, 0) = 2 \neq 0$. Rovnicí $G(x, y) = 0$ je tedy v jistém okolí počátku definováno x implicitně jako funkce proměnné y se spojitou derivací.

Můžeme tedy zvolit $r \leqq \varrho_2$ tak, že na kružnici S_r leží právě dva nulové body funkce G. Označme je v_1, v_2, a to tak, aby bylo $\mathrm{Im}(v_1) > 0$ (je tedy vzhledem k (12) $\mathrm{Im}(v_2) < 0$).

Nyní se již z definice rotace lehce dokáže, že platí:

Jestliže je $\mathrm{Im}(F(v_1)) < 0$, $\mathrm{Im}(F(v_2)) > 0$, pak $\gamma_F(0) = -1$.

Jestliže je $\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}(F(v_1)) = \mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}(F(v_2))$, pak $\gamma_F(0) = 0$.

Jestliže je $\mathrm{Im}(F(v_1)) > 0$, $\mathrm{Im}(F(v_2)) < 0$, pak $\gamma_F(0) = 1$.

Věta plyne ze vztahu $\gamma_f(z_0) = \gamma_F(0) + k - 1$.

Věta 3,6. *Buďte Φ, Ψ holomorfní funkce, z isolovaný nulový bod funkce $f(z) = \bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$. Potom platí $\gamma_f(z_0) \geqq -1$.*

Důkaz. Buď S_ε kružnice se středem z_0 a poloměrem ε takovým, že uvnitř S_ε a na S_ε je $f(z) \neq 0$. Pro $z \in S_\varepsilon$ platí

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n ,$$

kde $\alpha_{-1} = a_0\varepsilon^2$, $\alpha_0 = a_1\varepsilon^2$, $\alpha_n = a_n\bar{z}_0 + b_n + a_{n-1}\varepsilon^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Položíme-li $\beta_n = \alpha_{n-1}$, je

$$f(z) = (z - z_0)^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^n .$$

Definujme pro všechna $z \in S_\varepsilon$ funkci

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^n$$

(ε je stále pevné).

g je holomorfní funkce, a tedy je uvnitř S_ε spojitá a má tam pouze isolované nulové body. Dále je $g(z) \neq 0$ pro $z \in S_\varepsilon$. Protože rotace funkce g na S_ε je rovna součtu indexů funkce g v nulových bodech uvnitř S_ε, je rotace funkce g na S_ε nezáporná. Funkce $(z - z_0)^{-1} \cdot g(z)$ je na S_ε homotopní s f, a tedy je $\gamma_f(z_0) \geqq -1$. Věta je dokázána.

Nechť nyní funkce Φ, Ψ jsou holomorfní v oblasti G až na póly; funkce $f(z) = \bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$ nechť má v G jen isolované nulové body. Je-li z_0 bodem nespojitosti funkce f, pak z_0 je nutně pólem alespoň jedné z funkcí Φ, Ψ. Body nespojitosti funkce f budeme pro stručnost nazývat póly funkce f.

Buď z_0 s-násobný pól funkce Φ a t-násobný pól funkce Ψ ($s = 0$, příp. $t = 0$ značí, že z_0 není pólem funkce Φ, příp. Ψ). Označme $r = \max(s, t)$. Je tedy možno psát

$$\Phi(z) = (z - z_0)^{-r} \cdot \Phi_1(z) , \quad \Psi(z) = (z - z_0)^{-r} \cdot \Psi_1(z) ,$$
$$f(z) = (z - z_0)^{-r}(\bar{z}\,\Phi_1(z) + \Psi_1(z)) = (z - z_0)^{-r} \cdot g(z) ,$$

kde Φ_1, Ψ_1 jsou holomorfní v bodě z_0. Je-li $g(z_0) \neq 0$, pak je $\gamma_g(z_0) = 0$, $\gamma_f(z_0) = -r$. Je-li $g(z_0) = 0$, pak podle lemmatu 2,1' a věty 3,1 platí $\gamma_f(z_0) = \gamma_g(z_0) - r$. Na funkci g lze aplikovat větu 3,5.