Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

BEMERKUNG ZU EINER HALBGRUPPE DER ENDOMORPHISMEN AUF EINER EINFACH GEORDNETEN MENGE

BEDŘICH PONDĚLÍČEK, Poděbrady

(Eingegangen am 3. August 1959)

Der vorliegende Artikel enthält die folgenden zwei Hauptergebnisse: Satz 1 ist eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes über einfach archimedisch geordnete Gruppen (1, XIV) auf eine Klasse der Halbgruppen; Satz 2 ist eine Anwendung dieses Satzes für eine Halbgruppe der Endomorphismen auf einer einfach geordneten Menge (vergleiche Satz 3, [2]).

In der Arbeit [2] wurde folgender Satz bewiesen: *Auf der Halbgruppe Γ der Endomorphismen auf $\mathfrak{M}$, welche die Eigenschaft* (γ) *hat, sind folgende Eigenschaften äquivalent*:

a) *Γ ist stark monozyklisch;*

b) *Γ ist monozyklisch und genügt der linksseitigen Kürzungsregel;*

c) *Γ ist von links archimedisch geordnet und divergent.* (Wir benützen die Begriffe und Symbole der angeführten Arbeit.)

Wir betrachten folgende Eigenschaft der Halbgruppe Γ:

d) *Γ ist monozyklisch und kommutativ.*

Nach Anmerkung 2 der Arbeit [2] folgt, dass $d \Rightarrow a, b, c$ gilt. Also entsteht hier die Frage, ob auch $a, b, c \Rightarrow d$ gilt. Positive Antwort auf diese Frage gibt der Satz 2 dieser Arbeit. Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, beweisen wir Satz 1, welcher eigentlich den bekannten Satz über eine einfach archimedisch geordnete Gruppe ([1], XIV) auf eine Klasse der Halbgruppen verallgemeinert.

Unter einer *Halbgruppe* verstehen wir ein assoziatives Gruppoid. Unter dem *Einserelemente* e des Gruppoides Γ verstehen wir so ein Element $e \in \Gamma$, für welches $ea = a = ae$ (für alle $a \in \Gamma$) gilt. Es ist offenbar, dass jedes Gruppoid höchstens ein Einserelement hat. Wir sagen, dass das Gruppoid der *rechts-(links-)seitigen Kürzungsregel* genügt, wenn

$$ac = bc \Rightarrow a = b\,, \quad (ca = cb \Rightarrow a = b)$$

gilt. Γ sei ein Gruppoid, wir definieren die Relation $\varrho(\Gamma) \subset \Gamma \times \Gamma$ folgendermassen: $(a, b) \in \varrho(\Gamma)$ gilt dann und nur dann, wenn ein solches $r \in \Gamma$ existiert, dass $a = rb$ oder $a = br$ oder $ra = b$ oder $ar = b$ gilt.

Unter einem *teilweise geordneten Gruppoid* verstehen wir so ein Gruppoid, welches teilweise geordnet ist und für das $a \leqq b \Rightarrow ac \leqq bc$, $ca \leqq cb$ gilt. Wir sagen, dass die einfach geordnete Halbgruppe (mit einem Einserelement e) *von rechts* (*links*) *archimedisch geordnet* ist, wenn für $a < b$, $c > e$, resp. $a < b$, $c < e$ ein solches $n \in N$ (N bedeutet in der ganzen Arbeit die Menge aller natürlichen Zahlen) resp. $m \in N$ existiert, dass $ac^n \geqq b$ ($c^n a \geqq b$) resp. $a \geqq bc^m$ ($a \geqq c^m b$) gilt.

Satz 1. *Γ sei eine von links archimedisch geordnete Halbgruppe (mit einem Einserelement e) und genüge der rechtsseitigen Kürzungsregel. Γ habe folgende Eigenschaft:*

(R) $$a, b \in \Gamma\,; \quad a, b < e (a, b > e) \Rightarrow (a, b) \in \varrho(\Gamma)\,.$$

Dann ist die Halbgruppe Γ kommutativ und in eine einfach geordnete additive Gruppe aller reellen Zahlen einbettbar.

Bevor wir den Beweis dieses Satzes bringen, beweisen wir einige Hilfssätze. In den Hilfssätzen 1—17 setzen wir voraus, dass die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt sind.

Hilfssatz 1. $a < b \Rightarrow ac < bc$.

Beweis. $a < b \Rightarrow ac \leqq bc$. Wenn $ac = bc$ ist, dann ist $a = b$ (durch die rechtsseitige Kürzungsregel) und das ist ein Widerspruch.

Hilfssatz 2. $ac < bc \Rightarrow a < b$ ($ca < cb \Rightarrow a < b$).

Beweis. Nach Voraussetzung ist Γ einfach geordnet. Wir setzen voraus, dass $a \geqq b$ ist, dann ist $ac \geqq bc$ oder $ca \geqq cb$, und das ist ein Widerspruch.

Hilfssatz 3. $ab = e \Rightarrow ba = e$.

Beweis. $(ba)^2 = b(ab)\,a = bea = e(ba) \Rightarrow ba = e$.

Hilfssatz 4. $e < ab \Rightarrow e < ba$ ($e > ab \Rightarrow e > ba$).

Beweis. Wenn $e < ab$ ist, dann ist nach Hilfssatz 1 $a < aba$, und nach Hilfssatz 2 $e < ba$.

Hilfssatz 5. $a < b \Rightarrow a^n < b^n$ ($n \in N$).

Beweis. Wir werden die Induktion nach n beweisen. Offenbar gilt Hilfssatz 5 für $n = 1$. Wir setzen also voraus, dass Hilfssatz 5 für n gilt, dann ist (nach Hilfssatz 1) $a^n < b^n \Rightarrow a^{n+1} \leqq ab^n$; $a < b \Rightarrow ab^n < b^{n+1}$, und $a^{n+1} < < b^{n+1}$.

Hilfssatz 6. $a^n = b^n$ ($n \in N$) $\Rightarrow a = b$.

Der Beweis ergibt sich aus Hilfssatz 5 und aus der einfachen Anordnung der Halbgruppe Γ.

Hilfssatz 7. $a^n < b^n\ (n \in N) \Rightarrow a < b$.

Beweis. Wir setzen voraus, dass $a \geqq b$ ist, dann ist nach Hilfssatz 5 $a^n \geqq b^n$, was in Widerspruch ist.

Hilfssatz 8. $ab = e \Rightarrow a^n b^n = a\ \ (n \in N)$.

Der Beweis folgt leicht aus Hilfssatz 3.

Hilfssatz 9. $e < ab \Rightarrow e < a^n b^n\ (n \in N)$
$(e > ab \Rightarrow e > a^n b^n\ (n \in N))$.

Beweis. Wir beweisen die vollständige Induktion nach n. Offenbar gilt Hilfssatz 9 für $n = 1$. Wir setzen also voraus, dass Hilfssatz 9 für n gilt, dann ist $e < a^n b^n \Rightarrow ab \leqq a^{n+1} b^{n+1} \Rightarrow e < a^{n+1} b^{n+1}$.

Hilfssatz 10. $a^n b^n = e\ (n \in N) \Rightarrow ab = e$.

Der Beweis folgt aus Hilfssatz 9 und aus der einfachen Anordnung der Halbgruppe Γ.

Hilfssatz 11. $e < a^n b^n\ (n \in N) \Rightarrow e < ab$,
$(e > a^n b^n\ (n \in N) \Rightarrow e > ab)$.

Der Beweis folgt aus den Hilfssätzen 8 und 9 und aus der einfachen Anordnung der Halbgruppe Γ.

Hilfssatz 12. $e < a,\ m \leqq n\ (m, n \in N) \Rightarrow a^m \leqq a^n$.

Beweis. Wenn $m = n$ ist, dann ist $a^m = a^n$. Wenn $m < n$ ist, dann ist $n - m \in N$, und dann ist nach Hilfssatz 5 $e < a^{n-m}$, woraus nach Hilfssatz 1 $a^m < a^n$ folgt.

Hilfssatz 13. $e \neq a,\ a^n = a^m\ (m, n \in N) \Rightarrow m = n$.

Der Beweis folgt aus der Gültigkeit der rechtsseitigen Kürzungsregel.

Hilfssatz 14. $ab \leqq ba \Rightarrow a^n b^n \leqq (ab)^n \leqq (ba)^n \leqq b^n a^n\ \ (n \in N)$.

Beweis. Wir beweisen die Induktion nach n. Offenbar gilt Hilfssatz 14 für $n = 1$. Wir setzen also voraus, dass Hilfssatz 14 für n gilt, dann ist nach Hilfssatz 5 $(ab)^{n+1} \leqq (ba)^{n+1}$ und $a^{n+1} b^{n+1} = a(a^n b^n)\, b \leqq a(ba)^n b = (ab)^{n+1}$. Endlich ist

$$(ba)^{n+1} = b(ab)^n\, a \leqq b(b^n a^n)\, a = b^{n+1} a^{n+1} .$$

Hilfssatz 15. $ab = ba,\ h^n \leqq a,\ g^n \leqq b\ (n \in N) \Rightarrow (hg)^n \leqq ab\ (ab = ba,\ h^n \geqq a,\ g^n \geqq b\ (n \in N) \Rightarrow (hg)^n \geqq ab)$.

Beweis. Wenn $hg \leqq gh$ ist, dann ist nach Hilfssatz 14 $(hg)^n \leqq g^n h^n \leqq ba = ab$. Wenn $gh \leqq hg$ ist, dann ist wieder nach Hilfssatz 14 $(hg)^n \leqq h^n g^n \leqq ab$.

Hilfssatz 16. $ab = ba,\ \ e \leqq h^n a,\ \ e \leqq g^n b\ \ (n \in N) \Rightarrow e \leqq (hg)^n\, ab\ \ (ab = ba,\ e \geqq h^n a,\ e \geqq g^n b\ (n \in N) \Rightarrow e \geqq (hg)^n\, ab)$.

Beweis. Wenn $gh \leqq hg$ ist, dann ist nach Hilfssatz 14 $g^n h^n \leqq (hg)^n$, und $e \leqq h^n a \Rightarrow g^n \leqq g^n h^n a \Rightarrow g^n \leqq (hg)^n\, a \Rightarrow g^n b \leqq (hg)^n\, ab$, daher ist $e \leqq (hg)^n\, ab$.

Hilfssatz 17. $ab = ba,\ e \leqq h^n a,\ ab \leqq g^n\ (n \in N) \Rightarrow b \leqq (hg)^n$ $(ab = ba,\ e \geqq \geqq h^n a,\ ab \geqq g^n\ (n \in N) \Rightarrow b \geqq (hg)^n)$.

Beweis. Wenn $hg \leqq gh$ ist, dann ist nach Hilfssatz 14 $h^n g^n \leqq (hg)^n$, und $e \leqq h^n a \Rightarrow b \leqq h^n ab \Rightarrow b \leqq h^n g^n \Rightarrow b \leqq (hg)^n$. Wenn $gh \leqq hg$ ist, dann ist wieder nach Hilfssatz 14 $g^n h^n \leqq (hg)^n$, und $e \leqq h^n a \Rightarrow g^n \leqq g^n h^n a \Rightarrow ba \leqq \leqq g^n h^n a \Rightarrow$ (nach Hilfssatz 2 und der rechtsseitigen Kürzungsregel) $b \leqq g^n h^n \Rightarrow \Rightarrow b \leqq (hg)^n$.

Der letzte Hilfssatz betrifft reelle Zahlen.

Hilfssatz 18. *α, β, γ seien reelle Zahlen. Die Gleichung $\gamma = \alpha + \beta$ gilt dann und nur dann, wenn $x_1 \leqq \alpha \leqq x_2,\ y_1 \leqq \beta \leqq y_2 \Rightarrow x_1 + y_1 \leqq \gamma \leqq x_2 + y_2$, wobei x_1, x_2, y_1, y_2 rationale Zahlen sind.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist offensichtlich. Es sei $\gamma < < \alpha + \beta$. Offenbar existiert eine rationale Zahl z so, dass $\gamma < z < \alpha + \beta$ ist, woraus $z - \beta < \alpha$ folgt. Also existiert eine rationale Zahl x_1 so, dass $z - \beta < < x_1 < \alpha$ ist, woraus $y_1 = z - x_1 < \beta$ folgt. Nach der Voraussetzung des Hilfssatzes 18 ist $\gamma < z = x_1 + y_1 \leqq \gamma$, was in Widerspruch ist. Ebenso kommen wir zu einem Widerspruch für $\alpha + \beta < \gamma$. Also gilt $\gamma = \alpha + \beta$.

Beweis des Satzes 1. Wenn $\Gamma = \{e\}$ ist, dann ist Γ offenbar kommutativ Wählen wir ein beliebiges aber festes Element $f \in \Gamma,\ f > e$. Wir definieren die Abbildung φ der Halbgruppe Γ auf die Menge aller reellen Zahlen: $\varphi(e) = 0$. Sei $h > e$ $(h \in \Gamma)$. Nach den Hilfssätzen 5, 6 und 7, können wir die Menge der positiven rationalen Zahlen P und L definieren

$$(m, n, r, s \in N;\ mn^{-1} \in P \Leftrightarrow h^n \leqq f^m,\ rs^{-1} \in L \Leftrightarrow h^s \geqq f^r)\,.$$

Aus der einfachen Anordnung der Halbgruppe Γ folgt, dass $L \cup P$ die Menge aller positiven rationalen Zahlen ist. Ist

$$mn^{-1}\,,\quad rs^{-1} \in L \cap P\ \ (m, n, r, s \in N)\,,$$

dann ist $h^n = f^m$ und $h^s = f^r$, und $f^{nr} = h^{ns} = f^{ms}$, woraus nach Hilfssatz 13 $nr = ms$ folgt. Die Menge P und L enthalten also höchstens ein gemeinsames Element. Wenn $rs^{-1} \geqq mn^{-1} \in P$ ist $(m, n, r, s \in N)$, dann ist $h^n \leqq f^m$ und $ms \leqq \leqq nr$, und nach Hilfssätzen 5 und 12 ist $h^{ns} \leqq f^{ms} \leqq f^{nr}$, woraus nach den Hilfssätzen 6 und 7 $h^s \leqq f^r$ folgt, ist $rs^{-1} \in P$. Wenn $rs^{-1} \leqq mn^{-1} \in L$ ist $(m, n, r, s \in N)$, dann stellt man auf gleiche Weise fest, dass $rs^{-1} \in L$ ist. Endlich beweisen wir, dass die Mengen P und L nicht leer sind. Sei $h < f$, dann existiert ein solches $r \in N$, dass $h^r \geqq f$ ist, und $r^{-1} \in L$ und $1 \in P$. Sei $h = f$, dann ist $1 \in P \cap L$. Sei $h > f$, dann existiert ein solches $r \in N$, dass $h \leqq f^r$ ist, dann ist $r \in P$ und $1 \in L$. Offenbar bildet das Paar (L, P) Dedekindschnitt auf der Menge aller positiven rationalen Zahlen und bestimmt so eine positive reelle Zahl welche wir mit $\varphi(h)$ bezeichnen.

Es sei $h < e$ $(h \in \Gamma)$. Nach den Hilfssätzen 8, 7, 9 und 10 können wir die Menge der negativen rationalen Zahlen P und L definieren $(m, n, r, s \in N;$ $-mn^{-1} \in P \Leftrightarrow e \geqq h^n f^m$, $-rs^{-1} \in L \Leftrightarrow e \leqq h^s f^r)$. Offenbar ist $L \cup P$ die Menge aller negativen rationalen Zahlen. Ist $-mn^{-1}$, $-rs^{-1} \in L \cap P$ $(m, n, r, s \in N)$, dann ist $e = h^n f^m$ und $e = h^s f^r$, und nach Hilfssatz 8 $h^{nr} f^{mr} = e = h^{ms} f^{mr}$, woraus $h^{nr} = h^{ms}$ folgt, daher ist $nr = ms$ (nach Hilfssatz 13). Die Mengen P und L enthalten also höchstens ein gemeinsames Element.

Wenn $-rs^{-1} \geqq -mn^{-1} \in P$ ist $(m, n, r, s \in N)$, dann ist $e \geqq h^n f^m$ und $ms \geqq$ $\geqq nr$, und nach den Hilfssätzen 8, 9 und 12 ist $e \geqq h^{ns} f^{ms} \geqq h^{ns} f^{nr}$, woraus nach den Hilfssätzen 10 und 11 $e \geqq h^s f^r$ folgt, daher ist $-rs^{-1} \in P$. Wenn $-rs^{-1} \leqq -mn^{-1} \in L$ ist $(m, n, r, s \in N)$, dann stellt man auf gleiche Weise fest, dass $-rs^{-1} \in L$ ist. Es bleibt zu beweisen, dass die Mengen P und L nicht leer sind. Offenbar existieren solche $m, n \in N$, dass $e \geqq h^m f$ und $e \leqq f^n h$ gilt. Nach den Hilfssätzen 3 und 4 ist $e \leqq hf^n$, dann ist $-m^{-1} \in P$ und $-n \in L$. Offenbar bildet das Paar (L, P) den Dedekindschnitt auf der Menge aller negativen rationalen Zahlen, und bestimmt so eine negative reelle Zahl, welche wir wieder mit $\varphi(h)$ bezeichnen.

2. Wir beweisen die Richtigkeit der Behauptung

$$\varphi(hg) = \varphi(h) + \varphi(g) \quad (h, g \in \Gamma) . \tag{1}$$

Wenn $h = e$ oder $g = e$ ist, dann ist der Beweis trivial. Wenn $e < h, g$ ist, dann ist $h^n \geqq f^m$, $g^n \geqq f^r$ $(m, n, r \in N) \Rightarrow (hg)^n \geqq f^{m+r}$ (nach dem Hilfssatz 15), was eigentlich bedeutet, dass $mn^{-1} \in L_h$, $rn^{-1} \in L_g \Rightarrow mn^{-1} + rn^{-1} \in L_{hg}$. Weiter ist $h^n \leqq f^m$, $g^n \leqq f^r$ $(m, n, r \in N) \Rightarrow (hg)^n \leqq f^{m+r}$, was bedeutet, dass $mn^{-1} \in P_h$, $rn^{-1} \in P_g \Rightarrow mn^{-1} + rn^{-1} \in P_{hg}$. Die Richtigkeit der Behauptung (1) folgt aus Hilfssatz 18.

Wenn $h < e < g$ und $e < hg$ ist, dann ist $e \leqq h^n f^m$, $g^n \geqq f^r$, $r - m > 0$ $(m, n, r \in N) \Rightarrow (hg)^n \geqq f^{r-m}$ (nach Hilfssatz 17), was bedeutet, dass $-mn^{-1} \in$ $\in L_h$, $rn^{-1} \in L_g$, $rn^{-1} - mn^{-1} > 0 \Rightarrow rn^{-1} - mn^{-1} \in L_{hg}$ gilt. Weiter gilt $-mn^{-1} \in P_h$, $rn^{-1} \in P_g$, $rn^{-1} - mn^{-1} > 0 \Rightarrow rn^{-1} - mn^{-1} \in P_{hg}$. Aus Hilfssatz 18 folgt die Behauptung (1).

Wenn $g < e < h$ und $e < hg$ ist, dann existiert so ein $n \in N$, dass $e < h^n g$ ist, und nach Hilfssatz 4 ist $e < gh^n$, woraus $e < hgh^n$ folgt. Aus der Behauptung $\varphi(hg) + \varphi(h^n) = \varphi(hgh^n) = \varphi(h) + \varphi(gh^n) = \varphi(h) + \varphi(g) + \varphi(h^n)$ folgt die Behauptung (1).

Wenn $e = hg$ ist, dann ist nach Hilfssatz 3 $hg = gh$. Wir können also voraussetzen, dass $e < g$ ist. Aus der Behauptung $g = hg^2$ folgt, dass $\varphi(g) = \varphi(h) +$ $+ \varphi(g^2) = \varphi(h) + \varphi(g) + \varphi(g)$, und $\varphi(h) + \varphi(g) = 0$ ist.

Wenn $hg < e$ und $e < h$ ist, dann ist $g < e$. Offenbar existiert so ein $n \in N$, dass $e \leqq h^{n+1} g$ ist. Aus der Behauptung $\varphi(h^n) + \varphi(hg) = \varphi(h^{n+1}) = \varphi(h^{n+1}) +$ $+ \varphi(g) = \varphi(h^n) + \varphi(h) + \varphi(g)$ folgt die Behauptung (1).

Wenn $hg < e$ und $h < e$ ist, dann existiert so ein $n \in N$, dass $e \leqq f^n hg$ und $e < f^n$ ist. Aus der Behauptung $\varphi(f^n) + \varphi(hg) = \varphi(f^n hg) = \varphi(f^n h) + \varphi(g) = \varphi(f^n) + \varphi(h) + \varphi(g)$ folgt die Behauptung (1).

3. Jetzt beweisen wir, dass die Abbildung φ umkehrbar eindeutig ist. Ist $\varphi(h) = \varphi(g)$ $(h, g \in \Gamma)$, dann ist entweder $h = e = g$ oder $e < h, g$, oder $h, g < e$. Aus der Eigenschaft (R) folgt, dass $(h, g) \in \varrho(\Gamma)$ ist. Aus (1) folgt, dass $\varphi(r) = 0$ ist, woraus $r = e$, also $h = g$ folgt.

4. Es sei $h, g \in \Gamma$. Aus der Behauptung $\varphi(hg) = \varphi(h) + \varphi(g) = \varphi(g) + \varphi(h) = \varphi(gh)$ folgt, dass $hg = gh$ ist. Die Halbgruppe Γ ist also kommutativ. Wenn die Halbgruppe Γ das Element $f > e$ nicht enthält, beweisen wir Satz 1 analog mit Hilfe irgend eines Elementes $f' < e$.

Anmerkung. Der Leser stellt fest, dass Satz 1 auch dann gilt, wenn Γ der linksseitigen (statt rechtsseitigen) Kürzungsregel genügt. Somit gilt Satz 1 auch dann, wenn wir voraussetzen, dass Γ von rechts (statt von links) archimedisch geordnet ist. Die Kürzungsregel und die Eigenschaft (R) der Halbgruppe Γ sind aber notwendige Voraussetzungen für Satz 1, wie folgende Bespiele zeigen:

Beispiel 1. Γ sei eine natürlich geordnete Menge der reellen Zahlen. $\Gamma = \langle 0, \infty) - (0, 1)$. Das Multiplizieren in Γ definieren wir auf folgende Weise:

$$xy = x + [y]\,, \quad x > 0\,; \quad xy = y\,, \quad x = 0$$

für $x, y \in \Gamma$, wo $[y]$ das grösste Ganze der reellen Zahl y ist. Offenbar ist 0 das Einserelement des Gruppoides Γ. Also genügt es das assoziative Gesetz nur für positive Zahlen zu beglaubigen. Es sei $x, y, z \geqq 1$, dann ist $(xy)\, z = (x + [y])\, z = x + [y] + [z] = x + [y + [z]] = x(y + [z]) = x(yz)$. Es sei $x \leqq y$; $x, y, z \in \Gamma$. Wenn $y = 0$ ist, dann ist $xz = z \leqq z = yz$. Wenn $x = 0$, $y \geqq 1$ ist, dann ist $xz = z \leqq y + [z] = yz$. Wenn $x, y \geqq 1$ ist, dann ist $xz = x + [z] \leqq y + [z] = yz$. Wenn $z = 0$ ist, dann ist $xz = x \leqq y = zy$. Wenn $z \geqq 1$ ist, dann ist $zx = z + [x] \leqq z + [y] = zy$. Γ ist also eine einfach geordnete Halbgruppe.

Es sei $x, y, z \in \Gamma$, $x < y$, $z \geqq 1$, dann ist $[z] \geqq 1$. Offenbar existiert ein $n \in N$, dass $n \times [z] + [x] \geqq y$ ist, dann ist $z^n x = z + (n - 1) \times [z] + [x] = z - [z] + n \times [z] + [x] \geqq n \times [z] + [x] \geqq y$. Γ ist also archimedisch von links geordnet.

Es sei $xz = yz$ $(x, y, z \in \Gamma)$. Wenn $x = 0$, $y \geqq 1$ ist, dann ist $z = xz = yz = y + [z]$ und $y = z - [z] < 1$, das ist jedoch ein Widerspruch. Offenbar ist $x = 0 \Rightarrow y = 0$, und daher ist $x = y$. Wenn $x, y \geqq 1$ ist, dann ist $x + [z] = xz = yz = y + [z]$, daher ist $x = y$. Also genügt in Γ der rechtsseitigen Kürzungsregel.

Wir stellen leicht fest, dass Γ nicht die Eigenschaft (R) hat, und auch nicht