ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 85 * PRAHA 3. XI. 1960 * ČÍSLO 4

CONTRIBUTION TCHÉCOSLOVAQUE À LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES CONGRUENCES DE DROITES ET DES SURFACES À RÉSEAU CONJUGUÉ

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 26 janvier 1960)

A l'occasion du quinzième anniversaire de la Libération de la Tchécoslovaquie

L'article passe en revue les résultats concernant les congruences de droites et leurs surfaces focales, publiés par les géomètres tchécoslovaques dans les années 1945—1959.

L'aperçu qui va suivre a pour but de contribuer du moins partiellement à la planification de notre travail scientifique en géométrie différentielle; je suppose, en effet, qu'un choix responsable des sujets d'activité de recherches nécessite comme point de départ: 1. une revue de notre activité dans le domain considéré; 2. un aperçu des résultats mondiaux; 3. une appréciation de nos résultats à la lumière de l'évolution mondiale.

Le présent article résume les principaux résultats des travaux cités; je signale néanmoins que j'ai, exprès, laissé de côté les résultats de M. E. ČECH des travaux [1], [2] sur les applications des congruences de droites dans la théorie des correspondances entre les espaces projectifs. Ces résultats-là seront résumés (brièvement) d'une part dans l'article en préparation sur la géométrie différentielle tchécoslovaque d'après guèrre; d'autre part dans un aperçu plus étendu des résultats mondiaux en géométrie différentielle locale des correspondances entre les espaces, qui est aussi en préparation. L'article A. ŠVEC [10], engendré par une série de conférences faites à l'Institut de Géométrie de l'Université de Bologne, contient un aperçu sommaire des travaux Čech [3], [5] et [8] et Švec [1]—[8], [11].

Passons maintenant au sujet propre de notre article. La plupart des résultats contenus dans l'aperçu suivant sont dus à M. E. Čech, ou bien leurs auteurs ont été inspirés par lui, soit directement, soit indirectement. M. Čech a créé une théorie systématique des transformations développables des congruences de droites en visant principalement une analyse détaillée de leurs déformations projectives; c'est en particulier dans la théorie des congruences W qu'on a obtenu des résultats remarquables. Il faut avouer cependant qu'une vue totale de ses résultats ne donne pas encore l'impression d'une théorie achevée et fixe, surtout à cause de lacunes désagréables. Certaines d'entre elles seront sûrement comblées au cours des années qui vont suivre, mais pour écarter d'autres lacunes il faudra résoudre des problèmes des plus difficiles.

Mes travaux sont dédiés surtout à la généralisation des résultats de M. Čech aux espaces à plusieurs dimensions. J'ai construit les fondements de la théorie des congruences de droites dans P_n; mes articles, à l'exception de quelques résultats concrets, sont plutôt remplies d'optimisme du à la connaissance du fait que la théorie générale dans P_n est maitrisable. Il faudra néanmoins encore un effort considérable pour arriver à l'état optimum où sera achevée une théorie cohérente dans P_n et dont le cas de $n = 3$ sera un cas particulier. Un peu meilleure est la situation dans la théorie des déformations projectives des surfaces à réseau conjugué, où j'ai généralisé tous les résultats principaux de la théorie classique dans P_3 aux espaces P_{2n+1}. Cependant, l'élargissement de cette théorie aux variétés à plusieurs dimensions parait être extrèmement difficile.

Les travaux des membres du centre de Brno ont été inspirés par M. J. Klapka; à part de cela il y a encore les travaux de M. K. Svoboda dans la théorie des surfaces dont les indicatrices de courbure normale sont des circonférences. Dans ces travaux, M. Svoboda apparaît comme un digne continuateur de M. O. Borůvka. M. Klapka avec M. J. Brejcha ont étudié les répresentations d'une surface et du complexe de ses droites canoniques dans l'espace réglé. D'une manière semblable, M. V. Horák a envisagé des congruences de droites W aux surfaces focales réglées.

Dans la suite, je m'abstiens de toute conclusion concernant la valeur scientifique des travaux en question, car il y a chez nous des chercheurs mieux qualifiés pour cela, et, d'autre part, il s'agit aussi en partie de mes propres travaux. Qu'il me soit permis néanmoins de dire ceci: Je pense que nos résultats atteignent le niveau mondial et qu'ils égalent, en quantité aussi bien qu'en qualité, compte tenu du nombre peu élevé de chercheurs qui s'en occupent, p. ex. les résultats de l'école de Moscou du M. S. P. Finikov. Pour les années qui vont suivre, je souhaite à notre géométrie différentielle l'élimination de toutes les lacunes (même des plus difficiles) mentionnées ci-dessus et surtout un développement continu en ampleur ainsi qu'en profondeur.

I. THÉORIE DES CONGRUENCES DE DROITES DANS L'ESPACE PROJECTIF À TROIS DIMENSIONS

1. M. E. Čech étudie dans son travail [3] les *systèmes généraux à deux paramètres de droites* L dans l'espace projectif P_n à n dimensions. Si L est formée des droites $p = (x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, alors nous appelons espace tangent à L le long de la droite p l'espace $\tau = (x, y, x_u, x_v, y_u, y_v)$. Dim $\tau = m$ est appelé caractère de L; on a $3 \leqq m \leqq 5$. Dans l'espace P'_n soit situé un autre système L' formé de droites $p' = p'(u, v)$ et qui est en correspondance T avec L. La correspondance T peut être prolongée en correspondance ponctuelle T^* entre les variétés V_3 et V'_3, formées des points des droites des systèmes L et L' de telle manière que nous choisissons une correspondance ponctuelle $\pi = \pi(u, v)$ entre chaque paire de droites p, p' en correspondance. Nous disons que T est une *déformation ponctuelle* s'il existe un prolongement T^* de T tel que pour chaque (u, v) il existe une homographie $K(u, v)$: $P_n \to P'_n$, qui soit homographie tangente à la correspondance $T^* : V_3 \to V'_3$ pour chaque paire de points $z, z' = \pi(u, v)\, z$; $z \in p(u, v)$; toutes les correspondances π sont alors nécessairement des projectivités. D'après leur caractère et les propriétés des variétés focales (c'est-à-dire des surfaces ou des courbes directrices) il est possible de distinguer dix types de systèmes L de droites, la déformation ponctuelle étant possible seulement entre deux systèmes du même type. On a résolu la question de savoir quand deux systèmes de même type sont en déformation ponctuelle et l'on a donné une construction des correspondances T et π.

2. Les travaux [5]—[9] de M. Čech sont dédiés à une étude détaillée des *correspondances développables* (qui font correspondre des surfaces développables) *entre des congruences de droites dans* P_3.

Dans P_3 soit située une congruence non-parabolique de droites, que l'on peut donc décomposer de deux manières en couches de surfaces développables. Associons à chaque droite un repère local de telle manière que A_1, A_2 soient les foyers et (A_1, A_3), (A_2, A_4) soient les transformées de Laplace de la droite p; les équations fondamentales peuvent alors être écrites sous la forme (les équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ donnent des surfaces développables)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{11}A_1 + \alpha_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3\,,\\
\mathrm{d}A_2 &= \alpha_2\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4\,,\\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \beta_2\omega_1A_4\,,\\
\mathrm{d}A_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \beta_1\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4\,;
\end{aligned}
\tag{1}
$$

on oriente la congruence L en déclarant A_1 pour le premier foyer. Les formes

$$
\varphi = \alpha_1\alpha_2\omega_1\omega_2\,,\quad \varphi^* = \beta_1\beta_2\omega_1\omega_2\,,\quad F_1 = \alpha_1\beta_1\frac{\omega_2^3}{\omega_1}\,,\quad F_2 = \alpha_2\beta_2\frac{\omega_1^3}{\omega_2}
\tag{2}
$$

appelées *forme ponctuelle, planaire, première forme focale et seconde forme focale*, liées par l'identité $\varphi\varphi^* = F_1F_2$ et les équations

$$
\beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_2^2 = 0\,,\quad \alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2 = 0
\tag{3}
$$

sont alors invariantes. A la différence de M. A. Terracini[1]) qui appelle *élément*

[1]) A. Terracini, Su alcuni elementi lineari proiettivi (Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa, (2) 2, 401—428, 1933), et Osservazioni sulla geometria proiettiva delle congruenze di rette (Atti Ist. Veneto, 94, 75—86, 1934).

projective linéaire de la congruence L la forme $\frac{1}{4}(\varphi + \varphi^* + F_1 + F_2)$, M. Čech réserve ce nom à l'ensemble des formes et des équations (2) + (3).

Chaque droite p de la congruence L peut être considérée comme une droite p^* de l'espace duel P_3^*; l'ensemble des droites p^* engendre dans P_3^* une nouvelle congruence, appelée *dualisation* L^* de la congruence L. Si j'introduis de manière habituelle les repères duelles

$$E_1 = [A_2A_3A_4]\,,\quad E_2 = -\,[A_1A_3A_4]\,,\quad E_3 = [A_1A_2A_4]\,,\quad E_4 = -\,[A_1A_2A_3],$$

les équations fondamentales de la dualisation deviennent

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_3 &= -\,\omega_{33}E_3 - \beta_1\omega_2E_4 - \omega_1E_1\,, \\ \mathrm{d}E_4 &= -\,\beta_2\omega_1E_3 - \omega_{44}E_4 - \omega_2E_2\,, \\ \mathrm{d}E_1 &= -\,\omega_{31}E_3 - \omega_{41}E_4 - \omega_{11}E_1 - \alpha_2\omega_1E_2\,, \\ \mathrm{d}E_2 &= -\,\omega_{32}E_3 - \omega_{42}E_4 - \alpha_1\omega_2E_1 - \omega_{22}E_2\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Le changement d'orientation est donc donnée, dans l'expression analytique, par la substitution

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & \omega_1 & \omega_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ A_2 & A_1 & A_4 & A_3 & E_2 & E_1 & E_4 & E_3 & \omega_2 & \omega_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

et le passage à la dualisation par la substitution

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & \omega_1 & \omega_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ E_3 & E_4 & E_1 & E_2 & A_3 & A_4 & A_1 & A_2 & -\omega_1 & -\omega_2 & \beta_1 & \beta_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

De cela on voit dejà que les congruences L et L^* sont en correspondance développable, et, en même temps, on peut constater de quelle manière change l'élément projectif linéaire lors d'un changement d'orientation ou bien lors du passage à la dualisation.

Dans la suite, nous supposons que $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0$, les congruences L et L^* ont alors chacune deux surfaces focales. On trouve la signification géométrique des formes (2); les équations (3) donnent les asymptotiques de la première ou de la seconde surface focale de la congruence L.

3. Soient données deux congruences L, L' (dans l'espace P_3) en correspondance T. Je dirai que T est une *déformation projective* de second ordre, si pour chaque paire de droites p, p' en correspondance il existe une homographie osculatrice $H : P_3 \to P_3$, réalisant un contact analytique de second ordre des congruences HL, L' le long de la droite p' (le contact étant compris au sens réglé où les deux congruences sont représentées de la manière bien connue par des surfaces de l'hyperquadrique de Klein dans P_5). *La condition nécessaire et suffisante pour que les congruences L et L' soient en déformation projective de second ordre est l'égalité de leurs éléments projectifs linéaires.* Cette condition est équivalente à la condition que L et L' soient en déformation ponctuelle, planaire, focale (de 1ère et de 2e espèce) et asymptotique (de 1ère et de 2e espèce); ici nous disons que L et L' en correspondance développable sont en *déformation ponctuelle* si leurs formes ponctuelles coïncident, etc. Il s'ensuit de la forme de l'élément projectif linéaire (2) + (3) que si L et L' sont en trois des six déformations mentionnées, elles sont aussi en déformation projective de second ordre. La signification géométrique des déformations asymptotiques est évidente; elle a été donnée déjà ci-dessus pour le cas d'une déformation ponctuelle (et donc aussi duellement pour une déformation planaire). On a $F_1 = F_1'$ si et seulement s'il existe pour chaque paire de droites p, p' une homographie $h : P_3 \to P_3$ réalisant un contact analytique des congruences L, L' et des surfaces (A_1), (A_1') et (E_3), (E_3'); après un changement d'orientation on trouve la géométrisation de la condition $F_2 = F_2'$. Dans le travail [6] de Švec, on trouve une autre signification géométrique de ces déformations élémentaires à l'aide de l'étude de la correspondance existant entre les images de Klein de deux congruences.

Passons maintenant aux *problèmes d'existence*, voir Čech [5]—[7]. Auparavant, on savait seulement[2]) qu'une paire de congruences en déformation projective dépendait d'une fonction de deux variables, et on connaissait le résultat de Bam-Zelikovič: à chaque surface on peut construir une congruence déformable de tangentes, avec un choix arbitraire de sept fonctions d'une variable.

Les résultats de M. Čech sont les suivants (nous désignons par P, Π, F_1, F_2 A_1, A_2 les déformations ponctuelle, planaire, focale de 1ère et de 2e espèce, asymptotique de 1ère et de 2e espèce, respectivement): *On peut choisir la congruence L et les congruences L' qui sont en déformation* $P, \ldots, A_2$ *avec L dépendent d'une fonction de deux variables.* Dans le cas des déformations doubles, on ne trouve en principe que les types $P\Pi$, PA_1, A_1A_2, F_1F_2; *on peut choisir la congruence L, ses déformations dépendent alors de quatre fonctions d'une variable.* Ensuite, on a établi le résultat bien général que voici: *Les congruences pour lesquelles on s'est donné deux relations valables entre les formes* (2) (p. ex. de la forme $\varphi_i(\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_1, u, v) = 0$, où $du\, dv = 0$ sont les surfaces développables de L), *dépendent de six fonctions d'une variable.* Un cas spécial de ce théorème est constitué par théorème d'existence des congruences R, dû à Cartan; je montrerai celà au paragraphe 13.

4. Supposons que L et L' soient en déformation projective T de second ordre, elles sont alors aussi en déformation ponctuelle et planaire. Chacune de ces déformations est réalisée par une seule homographie, désignons-la par K, H, H^*, respectivement. *Si deux de ces homographies coïncident, il en va de même pour la troisième et T est une déformation projective singulière* dans ce sens que K réalise aussi un contact analytique de second ordre des surfaces focales de deux congruences.[3]) D'une manière générale, les homographies K, H, H^* ne coïnci-

[2]) С. П. Фиников, Теория конгруэнций. Москва-Ленинград, 1950, p. 493 et 499.
[3]) Voir E. Cartan, Sur le problème général de la déformation, CR Congres Strasbourg 1920, 397—406.

dent que pour les points de la droite $p \in L$, or, si elles coïncident encore pour d'autres points (sans qu'il s'agisse du cas singulier), alors elles coïncident pour les points d'une des plans focales; nous parlons alors d'une *déformation demi-singulière*. *Une paire de congruences en déformation demi-singulière dépend de neuf fonctions d'une variable.*

Une déformation projective T existant entre L et L' peut être prolongée en correspondance ponctuelle T^* de telle manière que les points des droites correspondantes p et p' se correspondent en homographie osculatrice H. Les déformations projectives T singulières sont caractérisées par le fait qu'elles sont *totalement asymptotiques*, c'est-à-dire que les asymptotiques de toute paire de surfaces non-développables des congruences L et L' sont en correspondance T^*, voir Čech [2, IV]. Dans le cas où T n'est pas demi-singulière (et dans ce cas seulement), il existe une seule *décomposition canonique* de L en une couche de surfaces réglées non-développables, qui sont transformées asymptotiquement par T^*.

5. Les notions qui viennent d'être introduites sont exploitées dans le travail Čech [8] pour une nouvelle étude détaillée de déformations projectives des congruences W. On peut spécialiser le repère d'une telle congruence de telle façon que l'on ait

$$\alpha_1 = \beta_1 = -\alpha_2 = -\beta_2 = 1 , \quad \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44} = 0 , \tag{7}$$

où le repère est déterminé aux irrationnalités près. L'élément projectif linéaire étant de la forme

$$\varphi = \varphi^* = -\omega_1\omega_2 , \quad F_1 = \frac{\omega_2^3}{\omega_1}, \quad F_2 = \frac{\omega_1^3}{\omega_2}, \quad \omega_1^2 - \omega_2^2 = 0 , \quad \omega_1^2 - \omega_2^2 = 0 , \tag{8}$$

une congruence L du type W est en déformation projective avec sa dualisation L^*. La déformation projective $L \to L^*$ est singulier seulement dans le cas où L appartient à un complexe linéaire fixe Ω (et alors $L \to L^*$ se réduit à une polarité par rapport à Ω). *Les congruences W à dualisation demi-singulière dépendent de quatre fonctions d'une variable.* Si aucun des cas précédents ne se présente, nous obtenons une décomposition canonique de la congruence L par rapport à la déformation projective $L \to L^*$; si nous écrivons, compte tenu de (7)

$$\omega_{11} - \omega_{33} = \omega_{22} - \omega_{44} = z_1\omega_1 + z_2\omega_2 ,$$
$$\omega_{11} - \omega_{22} = \omega_{33} - \omega_{44} = t_1\omega_1 + t_2\omega_2 ,$$

la décomposition canonique sera donnée par l'équation

$$t_1\omega_1 + t_2\omega_2 = 0 . \tag{9}$$

Nous dirons que L a une *dualisation asymptotique* (de 1ère ou de 2e espèce), si la décomposition canonique correspond à une des deux couches d'asymptotiques sur les surfaces focales ($\omega_1 - \omega_2 = 0$ ou $\omega_1 + \omega_2 = 0$); on a $t_1 - t_2 = 0$ ou bien $t_1 + t_2 = 0$ pour la 1ère ou la 2e espèce respectivement.

Un problème général est celui de trouver toutes les congruences W à l'élément projectif donné. En résolvant ce problème extrêmement compliqué on n'a trouvé que des résultats partiels (bien que très importants): *Toute congruence W admet au plus ∞^6 de déformations projectives qui n'appartiennent pas à un complexe linéaire et qui n'ont pas de dualisation asymptotique*; le maximum ∞^6 n'étant atteint que dans le cas de $z_1 = z_2 = 0$. On est conduit au même problème en cherchant les éléments projectifs linéaires, réalisables à la fois par deux congruences W à dualisations asymptotiques d'espèces opposées. Toutes les congruences de ce type sont mutuellement en déformation projective et une déformation projective de chacune d'entre elles est du même type. Dans le travail Čech [9], on montre ensuite, que, *ces congruences dont chacune est une déformation projective de la congruence des tangentes à une quadrique régulière qui appartiennent au complexe linéaire, coïncident avec les congruences D* qui réalisent une déformation projective de second ordre entre leurs surfaces focales.[4])

Toute congruence à dualisation asymptotique admet des déformations projectives qui ont des dualisations asymptotiques de la même espèce et qui dépendent d'une fonction d'une variable; a part cela elle admet encore une déformation appartenant au complexe linéaire. Les congruences de ce type ont, comme cela a été montré dans Čech [9], *des surfaces focales réglées*; si au contraire une congruence W a des surfaces focales réglées elle a aussi une dualisation asymptotique, ou bien elle appartient au complexe linéaire et est une déformation projective d'une congruence W à dualisation asymptotique. L'étude de ces congruences a été poursuivie par M. V. Horák, voir aussi notre paragraphe 8.

Dans son travail [8] M. Čech a donné explicitement toutes les formes ω_{ij} pour les *congruences R à dualisation asymptotique*:

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad & \omega_1 = f\,\mathrm{d}v\,, \quad \omega_2 = f\,\mathrm{d}u\,, \quad f = f(u+v) \neq 0\,,\\
& \omega_{31} = cf^3\,\mathrm{d}v - f\,.\,(\mathrm{d}u + 2\mathrm{d}v)\,, \quad \omega_{42} = cf^3\,\mathrm{d}u - f\,.\,(2\mathrm{d}u + \mathrm{d}v)\,,\\
& z_1 = z_2 = -f^{-2}f'\,, \quad t_1 = t_2 = \varphi(u+v)\,,\\
& \omega_{32} = (z_2 - t_2)\,\omega_1 + (z_1 - t_1)\,\omega_2\,,\\
& \omega_{41} = -(z_2 + t_2)\,\omega_1 - (z_1 + t_1)\,\omega_2\,.
\end{aligned}
$$

L'élément projectif linéaire dépend de $f = f(u + v)$ et *chaque congruence admet des déformations projectives dépendant d'une constante c et d'une fonction $\varphi(u + v)$*; en choisissant $t_1 = t_2 = 0$ nous obtenons ∞^1 déformations projectives appartenant au complexe linéaire. La fin du travail [9] de M. Čech montre que le problème de trouver les déformations projectives des congruences R se réduit à la résolution d'un système (en t) de la forme

$$(11)\qquad t_{uu} - t_{vv} - 2(\mu_u t_u - \mu_v t_v) = 0\,, \quad (t_u^2 - t_v^2)_{uv} = \Lambda\,;$$

[4]) Voir E. Čech, Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces, I + II (Rend. Acc. Lincei, *6* (*8*), 484—486 et 552—554, 1928); S. P. Finikov, Congruences dont les deux nappes de la surface focale sont projectivement applicables l'une sur l'autre par les points correspondants (Bull. Math., (*2*) *56*, 117—136, 1936), et Теория конгруэнций, chap. XI.

on y trouve les congruences R dont les surfaces focales ne sont pas réglées, mais que l'on peut déformer en congruences à surfaces focales réglées.

Dans son travail [5], M. Čech constate que le groupe continu des déformations projectives d'une congruence générale en elle-même a au plus deux paramètres et que, dans ce cas-là, l'élément projectif linéaire a une des formes

$$(12) \quad \varphi = c_1 x \, du \, dv , \quad \varphi^* = c_2 x \, du \, dv , \quad F_1 = c_3 x \frac{du^3}{dv} , \quad F_2 = c_4 x \frac{dv^3}{du} ,$$

où $x = 1$, ou $x = u^{-2}$, ou $x = (u + v)^{-2}$, et où c_i sont constantes.

6. Le même travail [5] de M. Čech contient certains résultats concernant la déformation projective des *congruences paraboliques*. Si la congruence L a une surface focale, alors le problème de trouver ses déformations projectives est identique au problème de trouver les *demi-déformations*[5]) *asymptotiques* de sa surface focale; *les déformations projectives de la congruence L dépendent donc de cinq fonctions d'une variable.* Le cas de déformations singulières et demi-singulières peut être transporté aisément au cas parabolique. *Les déformations singulières de la congruence L sont celles pour lesquelles la surface focale est déformée projectivement du type R_0* (et L est la congruence R_0 correspondante). *Les congruences demi-singulièrement déformables dépendent de huit fonctions d'une variable.*

7. Dans mon travail [13] je résous dans une certaine mesure le problème de trouver le *système de géométries intérieures* des congruences de droites, dont la conservation est équivalent à une déformation projective.[6]) Supposons que la congruence L soit *ponctullement normalisée*[7]) de telle façon qu'à chacune de ses droites p corresponde une droite q qui coupe les deux transformées de Laplace de la droite p; supposons ensuite que L soit normalisée planairement, c'est-à-dire que sa dualisation L^* soit normalisée ponctuellement (je parle alors de la normalisation de L). Soient maintenant L et L' deux congruences en correspondance développable T. On peut montrer que tout prolongement ponctuel T_b^* de la correspondance T (voir paragraphe 1) conduit à un seul prolongement T_r^* de la transformation développable induite entre L^* et L'^*. *Si l'on peut normaliser L et L' et qu'il existe des prolongements (T_b^*, T_r^*) tels que les deux connexions induites coïncident, alors T est une déformation projective*, et réciproquement. Si ce cas-là se présente, toute normalisation de la congruence L détermine d'une manière univoque la normalisation de L' et les deux prolongements (T_b^*, T_r^*) conduisant à la coïncidence des deux géométries intérieures.

---

[5]) Voir E. Čech, Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces (Rozpravy České akad., *38*, No 3, 1—38).

[6]) Ce problème a été posé par M. S. P. Finikov dans son livre Теория конгруэнций, p. 485.

[7]) La notion de normalisation a été introduite par E. Bortolotti dans Connessioni nelle varietà luogo di spazi (Rend. Sem. Univ. Cagliari, III, 1933) et dans Sulla geometria differenziale delle congruenze di rette (Atti Soc. Ital. per Progresso della Scienze, *XXII*. Riun.-Bari, Col. II, 185—187, 1933).

8. Dans son travail [1] M. V. Horák a envisagé en détail les congruences W aux surfaces focales réglées (*congruences de Segre*). C. Segre[8]) a trouvé le theorème suivant: Soient p, p' deux droites, correspondant l'une à l'autre, des surfaces focales d'une congruence de Segre L et en même temps leurs images sur l'hyperquadrique Q de Klein dans P_5, alors les droites (p, p') engendrent dans P_5 une surface développable. L'étude des congruences de Segre s'identifie donc à l'étude d'une courbe (prise comme arrête de rebroussement de la surface développable mentionnée) dans l'espace P_5, muni d'une hyperquadrique de même type que celle de Klein. La congruence L de Segre est décomposable en une couche de demi-quadriques, les demi-quadriques complémentaires déterminent la congruence de Segre *associée* L'. M. Horák considère six types de congruences de Segre L (entre paranthèses je donne la représentation dans l'espace P_5 de Klein): 1. L et L' générales (courbe dans P_5); 2. L est située dans un complexe linéaire non-singulier, L' est générale (cône dont le sommet n'est pas situé dans Q); 3. L est située dans le complexe linéaire singulier, L' est générale (cône au sommet dans Q); 4. L est générale, L' se trouve dans un complexe linéaire non-singulier (courbe dans l'hyperplan de l'espace P_5 qui n'est pas tangent à Q); 5. L générale, L' dans un complexe linéaire singulier (courbe dans l'hyperplan tangent à A); 6. L générale, située dans une congruence linéaire non-parabolique (courbe dans $P_3 \subset P_5$, P_3 n'est pas tangent à Q).

Regardons de plus près le cas 1. Soit $x \,.\, x = 0$ l'équation de Q, alors à chaque courbe $x_i = x_i(t)$ dans P_5 on peut associer un repère polaire ${}^iN$ tel que les *formules de Frenet* aient lieu

$$
\begin{aligned}
{}^1N' &= \pi_2 \,.\, {}^2N\,, \\
{}^2N' &= -\,\varepsilon_1\varepsilon_2\pi_2 \,.\, {}^1N + \varepsilon_1\pi_3K_1 \,.\, {}^3N\,, \\
{}^3N' &= -\,\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\pi_3K_1 \,.\, {}^2N + \varepsilon_2\pi_4K_2 \,.\, {}^4N\,, \\
{}^4N' &= -\,\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\pi_4K_2 \,.\, {}^3N + \varepsilon_3\pi_5K_3 \,.\, {}^5N\,, \\
{}^5N' &= -\,\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\pi_5K_3 \,.\, {}^4N + \varepsilon_4\pi_6K_4 \,.\, {}^6N\,, \\
{}^6N' &= -\,\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\pi_6K_4 \,.\, {}^5N\,; \quad {}^iN \,.\, {}^iN = \varepsilon_i
\end{aligned}
\tag{13}
$$

et que les points ${}^1N$, x coïncident géométriquement; π_i et ε_i sont des signes, dont trois (et seulement trois) ε_i sont positifs. Les fonctions $K_i > 0$ et les signes ε_i forment le système complet d'invariants unimodulaires. Les congruences de Segre ont été étudiées déjà auparavant par M. J. Klapka,[9]) on a pris pour base de leur théorie le système d'équations ((y, z) et $(\bar{y}, \bar{z})$ sont droites des surfaces focales, $y = y(v)$, etc.)

$$
y' = \left(Q + S - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right) y - Pz + \alpha\bar{y}\,, \quad z' = Ry + \left(S - Q - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right) z + \alpha\bar{z}\,,
\tag{14}
$$

---

[8]) C. Segre, Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate (Acc. R. Torino, *42*, 539—550, 1906—1907).

[9]) J. Klapka, O W-kongruencích s fokálními plochami přímkovými (Spisy přír. fak. Brno, No *69*, 1926).

$$\bar{y}' = -\left(Q + S + \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\bar{y} + P\bar{z} + \pi\alpha y\,, \quad \bar{z}' = -R\bar{y} + \left(Q - S - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\bar{z} + \pi\alpha z\,,$$

$$Q^2 - PR = \varepsilon\,; \quad (yzy'z') = (\overline{yzy'z'}) = \omega\,; \quad \pi^2 = \omega^2 = 1\,;$$

les expressions et les signes

$$(15) \qquad H = Q'^2 - P'R',\ \alpha \neq 0,\ S,\ K = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{vmatrix},\ \omega,\ \pi,\ \varepsilon$$

sont alors invariants unimodulaires. M. Horák a montré ensuite que la congruence (14) est représentée dans P_5 par la courbe

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\nu|\alpha|}[(yz) - \pi(\overline{yz})]\,, \quad \nu^2 = 1\,;$$

si l'on y introduit ensuite le paramètre t par la relation $2|S|\, dv = dt$, on obtient pour les invariants la représentation suivante:

$$(16) \qquad K_1 = |\alpha S^{-1}|\,, \quad K_2 = |S|^{-1}\,, \quad K_3 = \tfrac{1}{2}|S|^{-1}\sqrt{|H|}\,, \quad K_4 = \tfrac{1}{4}|K|\,.\,|SH|^{-1}\,,$$
$$\varepsilon_1 = -\pi\omega\,, \quad \varepsilon_2 = \pi\omega\,, \quad \varepsilon_3 = -\omega\,, \quad \varepsilon_4 = \omega\varepsilon\,,$$
$$\varepsilon_5 = \omega \operatorname{sgn} H\,, \quad \varepsilon_6 = -\omega\varepsilon \operatorname{sgn} H\,.$$

9. Passons enfin à résumer les résultats de MM. J. Klapka et J. Brejcha. E. J. Wilczynski[10]) a démontré que dans une correspondance entre les surfaces focales d'une congruence flecnodale L les *lignes flecnodales* des surfaces focales se correspondent si et seulement si L est située dans un complexe linéaire. M. Klapka a montré[9]) que le theorème subsiste pour n'importe quelle congruence de Segre; dans son travail [1] il a montré qu'il en va de même pour toute congruence W.

A. Terracini a introduit[11]) la notion de paires de courbes *conjuguées* et *biconjuguées* d'une surface réglée. Le problème principal du travail Klapka [3] est celui de trouver des conditions sous lesquelles deux courbes conjuguées le restent lors d'une transformation asymptotique de la surface réglée. Il n'est pas possible de donner tous les résultats sans signaler préalablement toute une série de notions qui ne sont guère courantes. Lors des applications à la théorie des congruences de droites on montre que dans une congruence L il existe cinq couches de surfaces réglées qui touchent les surfaces focales en courbes conjuguées mutuellement; ces couches donnent dans la représentation de Klein les *courbes principales de Segre*[12]) de la surface représentant L.

Dans son travail [2] M. Klapka détermine le système différentiel fondamental d'une surface π en S_3 dans un espace réglé de telle manière que l'on prend pour le repère local les points U_2, U_1, U, V, V_1, V_2 de la suite de Laplace, U et V étant les images des tangentes asymptotiques; il y déduit aussi l'équation de l'hyper-

[10]) E. J. Wilczynski, Proj. dif. geometry of curves and ruled surfaces (Leipzig 1910).

[11]) A. Terracini, Direttrici congiunte di una rigata (Rend. Sem. Mat. Univ. e Polit. Torino, *9*, 1949—50), et Nuove superficie particolare dello S_5... (ibid., *15*, 1955—56).

[12]) E. P. Lane, Proj. dif. geometry (Chicago 1942), p. 415.

quadrique de Klein en coordonées locales. En tant qu'application, M. Klapka démontre le theorème connu disant que l'enveloppe du système des quadriques de Lie de la surface π se compose de la surface π et des surfaces formées des sommets du quadrilatère de Demoulin. A ces travaux se joigne le travail [1] de M. Brejcha. Il trouve les coordonnées locales des images des *droites canoniques* et démontre à nouveau l'équivalence de la définition de Bompiani des directrices de Wilczynski.[13]) Il trouve ensuite des conditions pour que le complexe des droites canoniques d'une surface π de 1$^{\text{ère}}$ ou de 2$^{\text{e}}$ espèce ait pour son image de Klein des systèmes de droites L ou L' de caractère cinq. Les systèmes L ou L' pour les surfaces dont les courbes canoniques sont de Segre ont en même temps le caractère $m = 5$ ou $m < 5$.

II. THÉORIE DES CONGRUENCES DE DROITES DANS LES ESPACES PROJECTIFS À PLUSIEURS DIMENSIONS ET DANS LES ESPACES COURBÉS

10. La plupart des travaux sur la géométrie différentielle projective des congruences de droites dans les espaces à plusieurs dimensions traitent leurs transformées de Laplace et les questions qui s'y attachent. On n'a prété que très peu d'attention à la généralisation des résultats valables dans P_3 au cas général de P_n; ici on ne trouve pratiquement que les travaux de M. B. Segre et de M. F. Marcus.[14])

Dans mon travail [1], j'étudie les déformations projectives de second ordre des congruences de droites dans P_n. Dans le cas où $n \geqq 5$, *la déformation projective est équivalente à la déformation ponctuelle. Dans S_4 on peut choisir la congruence L, ses déformations projectives dépendent de huit fonctions d'une variable*; L et L' sont alors aussi en déformation ponctuelle. Soient L et L' en déformation ponctuelle T, le prolongement correspondant (voir paragraphe 1) soit formé d'homographies $\pi : p \to p'$. Les dualisations des congruences L, L' sont les surfaces L^*, L'^*, dont les „points" sont des espaces tangents des congruences L, L'. Il existe des homographies $K : S_4 \to S_4'$ tangentes à T et réalisant un contact analytique de premier ordre de L, L' et L^*, L'^*; elles induisent toutes une même homographie $\pi' : p \to p'$. Alors $\pi \equiv \pi'$ est la condition nécessaire et suffisante pour que T soit une déformation projective.

Les origines de la théorie systématique des congruences de droites dans les espaces P_{2n} de dimension *paire* sont étudiées dans mon travail [12]; cette théorie devient, après dualisation, équivalente à la théorie des surfaces à réseau conjugué dans P_{2n}. Si les équations fondamentales du repère mobile sont

[13]) Fubini-E. Čech, Geom. proi. dif. I, p. 147.

[14]) B. Segre, L'élément linéaire projectif d'une congruence quadratique de droites (Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. de Belgique, (*5*) *39*, 481—489, 1953); F. Marcus, Elementul liniar proiectiv al unei congruente de drepte din S_5 (Studii si Cercet. Acad. RPR, Iasi, *10*, 129—140, 1959).

$dA_i = \omega_{ij}A_j$ $(i, j = 1, \ldots, 2n + 1)$, il est possible de spécialiser les repères de telle sorte que l'on ait (je pose $\omega_{13} = \omega_1$, $\omega_{24} = \omega_2$)

$$
\begin{aligned}
(17) \quad & \omega_{2j-1,2j+2} = \omega_{2j,2j+1} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n - 1)\,, \\
& \omega_{2j-1,s} = \omega_{2j,s} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n - 1;\ s = 2j + 3, \ldots, 2n + 1)\,, \\
& \omega_{2j-1,2j+1} = \omega_1\,, \quad \omega_{2j,2j+2} = \omega_2 \quad (j = 2, \ldots, n - 1)\,, \\
& \omega_{12} = \alpha_1\omega_2\,, \quad \omega_{34} = \omega_{56} = \ldots = \omega_{2n-1,2n} = 0\,, \\
& \omega_{21} = \beta_1\omega_1\,, \quad \omega_{43} = \omega_{65} = \ldots = \omega_{2n,2n-1} = 0\,, \\
& \omega_{2n-1,2n+1} = \gamma_1\omega_1\,, \quad \omega_{2n,2n+1} = \gamma_2\omega_2\,.
\end{aligned}
$$

Les formes

$$
(18) \quad \varphi = \alpha_1\beta_1\omega_1\omega_2\,, \quad \varphi_1 = \alpha_1\,\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\,\frac{\omega_1^{n+1}}{\omega_1^n}\,, \quad \varphi_2 = \beta_1\,\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\,\frac{\omega_1^{n+1}}{\omega_2^n} \quad (\varphi = \varphi_1\varphi_2)
$$

sont alors invariantes; l'expression $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2$ est appelée élément projectif linéaire de L. *Pour Φ donné, les congruences correspondantes existent et dépendent de* 4*n fonctions d'une variable.* Etant données L et L' en transformation développable T, considérons les homographies $K_0 : P_{2n} \to P'_{2n}$ réalisant un contact géométrique d'ordre $n - 1$ des courbes des réseaux conjugués des deux surfaces focales qui ne touchent pas les droites correspondantes $p \in L$, $p' \in L'$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe K_0 réalisant un contact de premier ordre des i-èmes surfaces focales et des dualisations L^*, L'^* (ou bien un contact de premier ordre des deux surfaces focales et de L^*, L'^*), est $\varphi_i = \varphi'_i$ (ou bien $\Phi = \Phi'$, respectivement).

D'une manière analogue j'ai étudié dans mon travail [15] les congruences de droites dans P_{2n+1}. Le repère est particularisé de telle manière que l'on a

$$
\begin{aligned}
(19) \quad & \omega_{2a-1,2a+2} = \omega_{2a,2a+1} = 0 \quad (a = 1, \ldots, n)\,, \\
& \omega_{2a-1,b} = \omega_{2a,b} = 0 \quad (a = 1, \ldots, n - 1;\ b = 2a + 3, \ldots, 2n + 2)\,, \\
& \omega_{2a+1,2a+3} = \omega_1\,, \quad \omega_{2a+2,2a+4} = \omega_2 \quad (a = 1, \ldots, n - 1)\,, \\
& \omega_{12} = \alpha_1\omega_2\,, \quad \omega_{2n+1,2n+2} = -\,\alpha_2\omega_1\,, \quad \omega_{21} = \beta_1\omega_1\,, \quad \omega_{2n+2,2n+1} = -\,\beta_2\omega_2\,, \\
& \omega_{2a-1,2a} = \omega_{2a,2a-1} = 0 \quad (a = 2, \ldots, n)\,.
\end{aligned}
$$

Les formes (ponctuelle, hyperplanaire, focales et quasiasymptotiques de 1ère et de 2e espèce)

$$
\begin{aligned}
(20) \quad & \varphi = \alpha_1\beta_1\omega_1\omega_2\,, \quad \varphi^* = \alpha_2\beta_2\omega_1\omega_2\,, \quad F_1 = -\,\alpha_1\beta_2\,\frac{\omega_2^{n+2}}{\omega_1^n}\,, \\
& F_2 = -\,\beta_1\alpha_2\,\frac{\omega_1^{n+2}}{\omega_2^n}\,, \quad G_1 = -\,\frac{\alpha_1\omega_2^{n+1}}{\alpha_2\omega_1^{n+1}}\,, \quad G_2 = -\,\frac{\beta_1\omega_1^{n+1}}{\beta_2\omega_2^{n+1}}
\end{aligned}
$$

sont invariantes; $\Phi = \frac{1}{4}(\varphi + \varphi^* + F_1 + F_2)$ est l'*élément projectif linéaire* de la congruence L. *Les congruences dont les formes* (20) *sont liées par deux relations indépendantes existent et dépendent de* $4n + 2$ *fonctions d'une variable* (pour le theorème de M. Čech, valable pour $n = 1$, voir paragraphe 3). Dans mon travail [8] j'ai étudié dejà les congruences dans P_5, voir aussi Švec [9]. La notion banale de déformation projective est remplacée par la notion de *bidéformation* où l'on demande qu'il soit possible de réaliser par une seule homographie un contact analytique de second ordre des congruences L et L' ainsi que de leurs dualisations L^* et L'^* (la congruence duelle L^* est formée, dans l'espace duel P_5^*, des espaces tangents à la congruence L). Si L et L' soient en bidéformation, elles ont les mêmes formes (20) et réciproquement; une paire de congruences en bidéformation dépend d'une fonction de deux variables.

Mon article [5] généralise certains résultats de la théorie des congruences de droites dans P_3 au cas des *complexes de plans* dans P_5, dont les foyers dans chaque plan sont trois droites (ces complexes-là dépendent de six fonctions de deux variables). On y étudie leurs déformations ponctuelles. *Les complexes qui sont en déformation ponctuelle avec le complexe donné dépendent de 18 fonctions d'une variable*; une déformation ponctuelle donne six conditions simples, dont la signification géométrique est éclairée. Par cela, on a éclairci sur un exemple concret la situation décrite généralement par M. L. MURACCHINI.[15])

11. Une autre généralisation de la théorie des congruences de droites dans P_3 est la théorie des *congruences de droites à connexion projective*, établie dans mon travail [11]; les résultats ont été préalablement publiés dans l'article Švec [10]. La congruence de droites à connexion projective L est définie comme suit: Soit donné un domaine à deux dimensions Ω de paramètres, à chaque point $z \in \Omega$ j'associe un espace local $P_3(z)$ et dans lui une droite $p(z)$. Soit $z_1, z_2 \in \Omega$, alors à chaque arc $\gamma \subset \Omega$ qui joigne z_1 et z_2 on associe une homographie $K\gamma : P_3(z_1) \to \to P_3(z_2)$. Analytiquement, on peut procéder de telle manière qu'on choisit dans chaque $P_3(z)$ une base $A_1, \ldots, A_4$ telle que les points A_1, A_2 se trouvent sur $p(z)$ et que la connexion soit donnée par les équations

$$\nabla A_i = \omega_{ij} A_j \,, \quad \omega_{ij} = a_{ij}(u, v)\, \mathrm{d}u + b_{ij}(u, v)\, \mathrm{d}v \tag{21}$$

comme c'est usuel pour les espaces à connexion projective.[16]) On peut particulariser les repères locaux de telle sorte que les équations (21) deviennent

$$\begin{aligned} \nabla A_1 &= \omega_{11} A_1 + (h\, \mathrm{d}u + \alpha_1\, \mathrm{d}v)\, A_2 + \mathrm{d}u\, A_3 \,, \\ \nabla A_2 &= (\alpha_2\, \mathrm{d}u + h\, \mathrm{d}v)\, A_1 + \omega_{22} A_2 + \mathrm{d}v\, A_4 \,, \\ \nabla A_3 &= \omega_{31} A_1 + \omega_{32} A_2 + \omega_{33} A_3 + (\beta_2\, \mathrm{d}u + k\, \mathrm{d}v)\, A_4 \,, \\ \nabla A_4 &= \omega_{41} A_1 + \omega_{42} A_2 + (k\, \mathrm{d}u + \beta_1\, \mathrm{d}v)\, A_3 + \omega_{44} A_4 \,. \end{aligned} \tag{22}$$

Il est bien facile de définir les notions fondamentales: foyers, surfaces développables, dualisation, asymptotiques des surfaces focales, etc. Sont invariantes les formes élémentaires

$$i_1 = \frac{h\, \mathrm{d}u}{\alpha_1\, \mathrm{d}v} \,, \quad i_2 = \frac{k\, \mathrm{d}v}{\alpha_2\, \mathrm{d}u} \,, \quad i_1^* = \frac{k\, \mathrm{d}u}{\beta_1\, \mathrm{d}v} \,, \quad i_2^* = \frac{h\, \mathrm{d}v}{\beta_2\, \mathrm{d}u} \,, \tag{23}$$

[15]) L. MURACCHINI, Sulle trasformazioni puntuali inviluppi di omografie (Bull. UMI, *(3) 8*, 390—398, 1953).

[16]) Voir p. ex. E. CARTAN, Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective (Paris 1937), et Sur les variétés à connexion projective (Bull. Soc. Math. de France, *52*, 205—241, 1924).

les formes fondamentales (ponctuelle, planaire, focales de 1ère et de 2e espèce)

$$(24) \qquad \varphi = \alpha_1\alpha_2\, du\, dv\,, \quad \varphi^* = \beta_1\beta_2\, du\, dv\,, \quad F_1 = \alpha_1\beta_1 \frac{dv^3}{du}\,, \quad F_2 = \alpha_2\beta_2 \frac{du^3}{dv}$$

et les formes

$$(25) \qquad \psi_1 = (a_{22} - a_{44})\, du\,, \quad \psi_2 = (b_{11} - b_{33})\, dv\,.$$

Les asymptotiques des surfaces focales (A_1), (A_2) sont

$$(26) \quad \beta_2\, du^2 + 2h\, du\, dv + \alpha_1\, dv^2 = 0\,, \quad \alpha_2\, du^2 + 2k\, du\, dv + \beta_1\, dv^2 = 0\,;$$

les surfaces développables de la congruence L sont $du\, dv = 0$. L'égalité des formes (24) de deux congruences L, L' en correspondance développable T a la même signification que pour les congruences dans P_3.

La condition nécessaire et suffisante pour que L et L' soient en déformation projective est la coïncidence de leurs formes (24) *et* (25) *et des courbes*

$$(27) \qquad \beta_2\, du^2 + \alpha_1\, dv^2 = 0\,, \quad \alpha_2\, du^2 + \beta_1\, dv^2 = 0\,,$$

dont la signification géométrique est facile à trouver. Supposons que L et L' soient en déformation projective et que K, H, H^* soient des homographies réalisant des déformations projective, ponctuelle et planaire; K, H, H^* donnent la même homographie dans le faisceau des tangentes de la surface focale (A_1) si et seulement si K réalise un contact analytique de premier ordre des surfaces (A_1), (A_1'). Nous disons que L et L' sont en *déformation projective singulière* (*fortement singulière*) si K réalise un contact analytique de second (troisième) ordre des surfaces focales. Si L et L' sont en déformation singulière, les homographies K, H, H^* coïncident (la réciproque n'étant pas valable en général); *si K réalise un contact analytique de troisième ordre des premières surfaces focales, la déformation est fortement singulière et alors les deux congruences sont identiques.*

Dans mon travail [7], j'étudie des congruences de droites immergées dans un *espace réglé à connexion projective*, défini d'une manière analogue. Je montre qu'il existe dans l'espace donné des congruences dont les invariants

$$J = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}\,, \quad J_1 = \frac{h^2}{\alpha_1\beta_1}\,, \quad J_2 = \frac{k^2}{\alpha_2\beta_2}$$

sont liés par une ou deux relations et qui dépendent d'une fonction de deux variables ou encore de six fonctions d'une variable. La *déformation projective faible* est définie par l'égalité des formes (24) pour L et L'; des couples de congruences en telle déformation dépendent d'une fonction de deux variables.

D'une manière analogue au cas des congruences de droites à connexion projective, on peut définir les *congruences à connexion euclidienne*. Je me suis servi dans [14] de ces congruences pour étudier les *congruences de droites dans un espace euclidien de dimension arbitraire.* A une congruence L dans E_n on peut associer une congruence L^x à connexion euclidienne de la manière suivante: Les espaces locaux et les droites de la congruence L^x sont les espaces tangents et les droites de la congruence L, la connexion des espaces locaux infiniment proches est donnée par la projection dans le $(n - 3)$-sens orthogonal à l'espace tangent considéré. On montre dans ce travail qu'une interprétation convenable permet de transporter toute la théorie des congruences de droites dans E_3 (dans la forme donnée dans le livre[2])) aus cas de E_n, l'appareil de calcul restant pratiquement le même. On remarque que le degré de généralité des classes principales de congruences (p. ex. B, T, pseudosphériques, etc.) augmente de deux fonctions d'une variable lorsque la dimension augmente d'une unité.

12. M. Čech [2, VI] a construit pour le cas parabolique une théorie analogue à celle des congruences et des réseaux conjugués. Soit donnée dans P_n une congruence parabolique L, choisissons sur chaque droite $p \in L$ un point x; si les points x forment une surface π sur laquelle il existe des asymptotiques correspondant aux surfaces développables de la congruence L, nous disons que L et π sont *conjuguées.* Si L est formée des tangentes asymptotiques d'une surface verifiant l'équation $(*) x_{uu} = ax_u + bx_v + cx$, la surface conjugué générale sera $y = \mu x_u - \mu_u x$ où $\mu \neq 0$ est une solution arbitraire de l'équation (*). Supposons par contre qu'il soit donné une surface π (avec une couche d'asymptotiques) vérifiant l'équation $y_{uu} = a_1 y_u + b_1 y_v + c_1 y$; le foyer x de la congruence L conjuguée à π est déterminé par les équations $x_u = b_1 py$, $x_v = -(p_u + a_1 p)\, y + + py_u$ où p est une solution arbitraire de l'équation $p_{uu} = -(a_1 p)_u - (b_1 p)_v + + c_1 p$. M. Koubek a défini dans son travail [2] la notion de *congruence harmonique à une surface* π (contenant une couche d'asymptotiques): les droites de la congruence L sont situées dans les plans tangents à la surface π, et les surfaces développables de la congruence L correspondent aux asymptotiques de la surface π. Ensuite il a démontré les théorèmes que voici: *La condition nécessaire et suffisante pour que la congruence* (yy_u) *soit harmonique à la surface* (x) *est que la surface* (y) *soit conjuguée à la congruence* (xx_u). *Deux surfaces conjuguées (harmoniques) à une congruence sont harmoniques (conjuguées) à l'autre congruence. Deux congruences harmoniques (conjuguées) à une surface sont conjuguées (harmoniques) à l'autre surface. S'il existe une congruence L harmonique à* π_1 *et conjuguée à* π_2, *il en existe une infinité* ∞^1.

Dans son travail [1], M. Koubek a démontré ce théorème-ci: Si $n + 1$ solutions x^i de l'équation $x_{uu} = ax_u + bx_v + cx$ $(b \neq 0)$ vérifient la relation quadratique $\Sigma a_{ik} x^i x^k = 0$ $(a_{ik} = a_{ki} = \text{const})$ alors ces solutions sont linéairement dépendantes. Il en résulte que *dans* P_n *il n'existe pas de congruences quadratiques paraboliques.*

13. Les résultats les plus importants concernant les déformations projectives des surfaces à réseau conjugué sont ceux obtenus dans mon travail [15]. Sur une surface π à réseau conjugué dans P_{2n+1} il existe $n+1$ couches de *quasiasymptotiques* $\gamma_{n,n+1}$. Soit $\ldots, \pi_{-1}, \pi, \pi_1, \ldots$ la suite de Laplace engendrée par la surface π. La surface π sera appelée R si les congruences à surfaces focales π_{-1}, π ou π, π_1 sont W, c'est-à-dire si sur les surfaces π_{-1}, π, π_1 ce sont les quasiasymptotiques $\gamma_{n,n+1}$ qui sont en correspondance. La surface π est dite *isothermo-quasiasymptotique* si l'on peut sur elle choisir les paramètres u, v tels que $du\, dv = 0$ soit le réseau conjugué et que les quasiasymptotiques soient données par l'équation $du^{n+1} - dv^{n+1} = 0$. J'appelle surface R^0 chaque surface π dans P_{2n+1} dont les deux transformées de Laplace π_{-1}, π_1 dégénèrent et qui admet des déformations projectives C_{n+1}. On arrive à ces résultats-ci: *Si une surface π est R, alors toutes les surfaces de la suite de Laplace engendrée par π sont également R. Une surface R est isothermo-quasiasymptotique. Si deux surfaces consécutives de la suite laplacienne sont des surfaces isothermo-quasiasymptotiques, toute la suite est composée de surfaces R. Une surface R dans P_{2n+1} dépend de $4n+2$ fonctions d'une variable* (ce que l'on peut démontrer à l'aide du théorème d'existence pour les congruences de droites L dans P_{2n+1}, cité paragraphe 10, car les courbes $G_1 = -1$, $G_2 = -1$ sont justement les quasi-asymptotiques des surfaces focales de la congruence L). *Les surfaces à réseau conjugué dans P_{2n+1} qui admettent des déformations projectives C_{n+1} sont les surfaces R et elles seules, chaque telle surface admet* (dans le cas de $n \geqq 2$) ∞^1 *de telles déformations. La surface R^0 générale est donnée par un système complètement intégrable* ($U_i = U_i(u)$, $V_i = V_i(v)$, $k = \text{const}$)

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = 0\,, \quad \frac{\partial^{n+1} x}{\partial v^{n+1}} = kx + \sum_{i=1}^{n} U_i \frac{\partial^i x}{\partial u^i} + \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial^i x}{\partial v^i} + \frac{\partial^{n+1} x}{\partial u^{n+1}} \tag{28}$$

et dépend de $2n$ fonctions d'une variable. Une surface (28) *admet* ∞^1 *de déformations projectives C_{n+1} que l'on obtient en faisant varier k. Chaque transformée laplacienne d'une surface R^0 est située dans un sous-espace à n dimensions, les courbes d'une couche du réseau conjugué sont projectives entre elles et chacune d'elles se trouve dans un sous-espace à $n+1$ dimensions. Une surface R^0 peut être construite comme suit:*[17]) Soient donnés dans P_{2n+1} les sous-espaces P_n, P'_n, P_{n+1}, P'_{n-1}; soit $P_n \subset P_{n+1}$, $P'_n \subset P'_{n-1}$, $O \in P_{n+1} \cap P'_{n+1}$ et soient c, c' deux courbes pour lesquelles $O \in c \subset P_{n+1}$, $O \in c' \subset P'_{n+1}$. Soit $P \in c'$ le point variable, $Q_P = OP \cap P'_n$, c_P la projection de la courbe c du point Q_P sur l'espace $(P_{n+1})_P \equiv (P_n, P)$; la surface R^0 en question est formée des courbes c_P, $P \in c'$.

[17]) Cette construction représente une généralisation de la construction des surfaces R^0 dans P_3, donnée par M. B. Segre dans „Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili“ (Mem. Acc. Italia, *2*, No 3, 1931).

Dans mon travail [2] j'ai trouvé une nouvelle caractérisation géométrique des surfaces R^0 dans P_5. Mon article [3] contient une caractérisation géométrique, de nouveau dans P_5, des surfaces à réseau conjugué et admettant des déformations projectives C_3, même pour le cas où une ou toutes les deux transformées de Laplace dégénèrent. A l'aide de ces résultats j'ai établi dans [4] le degré de généralité des surfaces projectivement déformables dans P_5. Ces surfaces, dont une et une seule transformée de Laplace dégénère, dépendent de sept fonctions d'une variable.

Mon travail [16] concerne les généralisations des surfaces R^0. *Les variétés $x = x(u_1, \ldots, u_n)$ dans P_{2n-1} pour lesquelles $x_{ij} \equiv x_{u_i u_j} = 0$, $(i \neq j)$, et qui admettent des déformations projectives de second ordre, sont données par le système*

$$(29) \qquad x_{ij} = 0\,, \quad x_{nn} = kx + \sum_{i=1}^{n} U_i(u)\, x_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_{\alpha\alpha} \quad (k = \text{const})\,.$$

Ce variétés peuvent être construites, la construction étant une généralisation directe de celle des surfaces R^0 donnée ci-dessus.

14. Résumons enfin les travaux [1], [2] de M. K. Svoboda; ils traitent un sujet bien différent de celui des travaux précités. Ses résultats forment en principe une seule des recherches de M. O. Borůvka.[18]) Regardons d'abord son travail [1]. Soit S_n un espace à courbure c constante (euclidien E_n ou non-euclidien N_n), soit P_n son prolongement projectif et A sa quadrique absolue. Une surface sera appelée *surface M* si ses *indicatrices de courbure normale* d'ordre $1, .., m - 1$ en tout point x sont des circonférences ayant x pour centre. J'appelle *réseau conjugué* (U) dans P_n le réseau π dont les transformées de Laplace π_{-1}, π_1 sont des courbes qui sont situées avec leurs $(m - 1)^{\text{èmes}}$ espaces osculateurs sur une quadrique régulière $A' \subset P_{n-1} \subset P_n$. Le réseau conjugué π dans P_n sera dit (V) si les premières, $\ldots, m^{\text{èmes}}$ transformées de Laplace dans les deux directions se trouvent sur une hyperquadrique régulière A'' et de telle manière que π_{-r}, π_r (r quelconque) sont polairement conjuguées à $\pi_{-r+1}, \ldots, \pi_{r-1}$ par rapport à A''; de plus, nous supposons que $\ldots, \pi, \ldots$ ne se termine pas après m pas ou se termine dans une ou dans les deux directions après m pas de la manière de Goursat.

Le sujet principal du travail en question est le problème des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface π de l'espace projectif P_n puisse être prise pour une surface M de l'espace S_n qui provient de P_n par un choix convenable de la quadrique absolue A. *Les courbes minima d'une surface M dans E_n (ou bien N_n) forment un réseau conjugué (U) (ou bien (V) respectivement)*

[18]) O. Borůvka, Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante, I—III (Spisy přír. fak. Brno, I, *165*, 1932; II, *212*, 1935; III, *214*, 1935), O jistém typu minimálních ploch ve čtyřrozměrném prostoru o konstantní křivosti (Rozpravy České akad. věd a umění, tř. II, *37*, 1928); Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante (Spisy přír. fak. Brno, *106*, 1929).