ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE VĚD

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

4

85

NAKLADATELSTVÍ ČSAV

ČAS. PRO PĚST. MAT. • SV. 85 • Č. 4 • STR. 389—502 • PRAHA 3. XI. 1960

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
(*Dříve „Časopis pro pěstování matematiky a fysiky"*)
SVAZEK 85 (1960)

Vydává:
Matematický ústav Československé akademie věd

Redakce:
Matematický ústav Československé akademie věd
Praha II, Žitná 25

OBSAH

Články:

Úlohy a problémy:

Referáty:

Recense:

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 85 * PRAHA 3. XI. 1960 * ČÍSLO 4

CONTRIBUTION TCHÉCOSLOVAQUE À LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES CONGRUENCES DE DROITES ET DES SURFACES À RÉSEAU CONJUGUÉ

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 26 janvier 1960)

A l'occasion du quinzième anniversaire de la Libération de la Tchécoslovaquie

L'article passe en revue les résultats concernant les congruences de droites et leurs surfaces focales, publiés par les géomètres tchécoslovaques dans les années 1945—1959.

L'aperçu qui va suivre a pour but de contribuer du moins partiellement à la planification de notre travail scientifique en géométrie différentielle; je suppose, en effet, qu'un choix responsable des sujets d'activité de recherches nécessite comme point de départ: 1. une revue de notre activité dans le domain considéré; 2. un aperçu des résultats mondiaux; 3. une appréciation de nos résultats à la lumière de l'évolution mondiale.

Le présent article résume les principaux résultats des travaux cités; je signale néanmoins que j'ai, exprès, laissé de côté les résultats de M. E. ČECH des travaux [1], [2] sur les applications des congruences de droites dans la théorie des correspondances entre les espaces projectifs. Ces résultats-là seront résumés (brièvement) d'une part dans l'article en préparation sur la géométrie différentielle tchécoslovaque d'après guèrre; d'autre part dans un aperçu plus étendu des résultats mondiaux en géométrie différentielle locale des correspondances entre les espaces, qui est aussi en préparation. L'article A. ŠVEC [10], engendré par une série de conférences faites à l'Institut de Géométrie de l'Université de Bologne, contient un aperçu sommaire des travaux Čech [3], [5] et [8] et Švec [1]—[8], [11].

Passons maintenant au sujet propre de notre article. La plupart des résultats contenus dans l'aperçu suivant sont dus à M. E. Čech, ou bien leurs auteurs ont été inspirés par lui, soit directement, soit indirectement. M. Čech a créé une théorie systématique des transformations développables des congruences de droites en visant principalement une analyse détaillée de leurs déformations projectives; c'est en particulier dans la théorie des congruences W qu'on a obtenu des résultats remarquables. Il faut avouer cependant qu'une vue totale de ses résultats ne donne pas encore l'impression d'une théorie achevée et fixe, surtout à cause de lacunes désagréables. Certaines d'entre elles seront sûrement comblées au cours des années qui vont suivre, mais pour écarter d'autres lacunes il faudra résoudre des problèmes des plus difficiles.

Mes travaux sont dédiés surtout à la généralisation des résultats de M. Čech aux espaces à plusieurs dimensions. J'ai construit les fondements de la théorie des congruences de droites dans P_n; mes articles, à l'exception de quelques résultats concrets, sont plutôt remplies d'optimisme du à la connaissance du fait que la théorie générale dans P_n est maitrisable. Il faudra néanmoins encore un effort considérable pour arriver à l'état optimum où sera achevée une théorie cohérente dans P_n et dont le cas de $n = 3$ sera un cas particulier. Un peu meilleure est la situation dans la théorie des déformations projectives des surfaces à réseau conjugué, où j'ai généralisé tous les résultats principaux de la théorie classique dans P_3 aux espaces P_{2n+1}. Cependant, l'élargissement de cette théorie aux variétés à plusieurs dimensions parait être extrèmement difficile.

Les travaux des membres du centre de Brno ont été inspirés par M. J. Klapka; à part de cela il y a encore les travaux de M. K. Svoboda dans la théorie des surfaces dont les indicatrices de courbure normale sont des circonférences. Dans ces travaux, M. Svoboda apparaît comme un digne continuateur de M. O. Borůvka. M. Klapka avec M. J. Brejcha ont étudié les répresentations d'une surface et du complexe de ses droites canoniques dans l'espace réglé. D'une manière semblable, M. V. Horák a envisagé des congruences de droites W aux surfaces focales réglées.

Dans la suite, je m'abstiens de toute conclusion concernant la valeur scientifique des travaux en question, car il y a chez nous des chercheurs mieux qualifiés pour cela, et, d'autre part, il s'agit aussi en partie de mes propres travaux. Qu'il me soit permis néanmoins de dire ceci: Je pense que nos résultats atteignent le niveau mondial et qu'ils égalent, en quantité aussi bien qu'en qualité, compte tenu du nombre peu élevé de chercheurs qui s'en occupent, p. ex. les résultats de l'école de Moscou du M. S. P. Finikov. Pour les années qui vont suivre, je souhaite à notre géométrie différentielle l'élimination de toutes les lacunes (même des plus difficiles) mentionnées ci-dessus et surtout un développement continu en ampleur ainsi qu'en profondeur.

I. THÉORIE DES CONGRUENCES DE DROITES DANS L'ESPACE PROJECTIF À TROIS DIMENSIONS

1. M. E. Čech étudie dans son travail [3] les *systèmes généraux à deux paramètres de droites* L dans l'espace projectif P_n à n dimensions. Si L est formée des droites $p = (x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, alors nous appelons espace tangent à L le long de la droite p l'espace $\tau = (x, y, x_u, x_v, y_u, y_v)$. Dim $\tau = m$ est appelé caractère de L; on a $3 \leqq m \leqq 5$. Dans l'espace P'_n soit situé un autre système L' formé de droites $p' = p'(u, v)$ et qui est en correspondance T avec L. La correspondance T peut être prolongée en correspondance ponctuelle T^* entre les variétés V_3 et V'_3, formées des points des droites des systèmes L et L' de telle manière que nous choisissons une correspondance ponctuelle $\pi = \pi(u, v)$ entre chaque paire de droites p, p' en correspondance. Nous disons que T est une *déformation ponctuelle* s'il existe un prolongement T^* de T tel que pour chaque (u, v) il existe une homographie $K(u, v)$: $P_n \to P'_n$, qui soit homographie tangente à la correspondance $T^* : V_3 \to V'_3$ pour chaque paire de points $z, z' = \pi(u, v)\, z$; $z \in p(u, v)$; toutes les correspondances π sont alors nécessairement des projectivités. D'après leur caractère et les propriétés des variétés focales (c'est-à-dire des surfaces ou des courbes directrices) il est possible de distinguer dix types de systèmes L de droites, la déformation ponctuelle étant possible seulement entre deux systèmes du même type. On a résolu la question de savoir quand deux systèmes de même type sont en déformation ponctuelle et l'on a donné une construction des correspondances T et π.

2. Les travaux [5]—[9] de M. Čech sont dédiés à une étude détaillée des *correspondances développables* (qui font correspondre des surfaces développables) *entre des congruences de droites dans* P_3.

Dans P_3 soit située une congruence non-parabolique de droites, que l'on peut donc décomposer de deux manières en couches de surfaces développables. Associons à chaque droite un repère local de telle manière que A_1, A_2 soient les foyers et (A_1, A_3), (A_2, A_4) soient les transformées de Laplace de la droite p; les équations fondamentales peuvent alors être écrites sous la forme (les équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ donnent des surfaces développables)

$$(1)\qquad \begin{aligned} dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \alpha_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3\,, \\ dA_2 &= \alpha_2\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4\,, \\ dA_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \beta_2\omega_1A_4\,, \\ dA_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \beta_1\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4\,; \end{aligned}$$

on oriente la congruence L en déclarant A_1 pour le premier foyer. Les formes

$$(2)\qquad \varphi = \alpha_1\alpha_2\omega_1\omega_2\,,\quad \varphi^* = \beta_1\beta_2\omega_1\omega_2\,,\quad F_1 = \alpha_1\beta_1\frac{\omega_2^3}{\omega_1}\,,\quad F_2 = \alpha_2\beta_2\frac{\omega_1^3}{\omega_2}$$

appelées *forme ponctuelle, planaire, première forme focale et seconde forme focale*, liées par l'identité $\varphi\varphi^* = F_1F_2$ et les équations

$$(3)\qquad \beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_2^2 = 0\,,\quad \alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2 = 0$$

sont alors invariantes. A la différence de M. A. Terracini[1]) qui appelle *élément*

[1]) A. Terracini, Su alcuni elementi lineari proiettivi (Ann. R. Scuola Norm. Sup. Pisa, (2) 2, 401—428, 1933), et Osservazioni sulla geometria proiettiva delle congruenze di rette (Atti Ist. Veneto, 94, 75—86, 1934).

projective linéaire de la congruence L la forme $\frac{1}{4}(\varphi + \varphi^* + F_1 + F_2)$, M. Čech réserve ce nom à l'ensemble des formes et des équations (2) + (3).

Chaque droite p de la congruence L peut être considérée comme une droite p^* de l'espace duel P_3^*; l'ensemble des droites p^* engendre dans P_3^* une nouvelle congruence, appelée *dualisation* L^* de la congruence L. Si j'introduis de manière habituelle les repères duelles

$$E_1 = [A_2A_3A_4]\,,\quad E_2 = -\,[A_1A_3A_4]\,,\quad E_3 = [A_1A_2A_4]\,,\quad E_4 = -\,[A_1A_2A_3],$$

les équations fondamentales de la dualisation deviennent

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_3 &= -\,\omega_{33}E_3 - \beta_1\omega_2E_4 - \omega_1E_1\,, \\ \mathrm{d}E_4 &= -\,\beta_2\omega_1E_3 - \omega_{44}E_4 - \omega_2E_2\,, \\ \mathrm{d}E_1 &= -\,\omega_{31}E_3 - \omega_{41}E_4 - \omega_{11}E_1 - \alpha_2\omega_1E_2\,, \\ \mathrm{d}E_2 &= -\,\omega_{32}E_3 - \omega_{42}E_4 - \alpha_1\omega_2E_1 - \omega_{22}E_2\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Le changement d'orientation est donc donnée, dans l'expression analytique, par la substitution

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & \omega_1 & \omega_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ A_2 & A_1 & A_4 & A_3 & E_2 & E_1 & E_4 & E_3 & \omega_2 & \omega_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

et le passage à la dualisation par la substitution

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & \omega_1 & \omega_2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ E_3 & E_4 & E_1 & E_2 & A_3 & A_4 & A_1 & A_2 & -\omega_1 & -\omega_2 & \beta_1 & \beta_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

De cela on voit dejà que les congruences L et L^* sont en correspondance développable, et, en même temps, on peut constater de quelle manière change l'élément projectif linéaire lors d'un changement d'orientation ou bien lors du passage à la dualisation.

Dans la suite, nous supposons que $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0$, les congruences L et L^* ont alors chacune deux surfaces focales. On trouve la signification géométrique des formes (2); les équations (3) donnent les asymptotiques de la première ou de la seconde surface focale de la congruence L.

3. Soient données deux congruences L, L' (dans l'espace P_3) en correspondance T. Je dirai que T est une *déformation projective* de second ordre, si pour chaque paire de droites p, p' en correspondance il existe une homographie osculatrice $H : P_3 \to P_3$, réalisant un contact analytique de second ordre des congruences HL, L' le long de la droite p' (le contact étant compris au sens réglé où les deux congruences sont représentées de la manière bien connue par des surfaces de l'hyperquadrique de Klein dans P_5). *La condition nécessaire et suffisante pour que les congruences L et L' soient en déformation projective de second ordre est l'égalité de leurs éléments projectifs linéaires.* Cette condition est équivalente à la condition que L et L' soient en déformation ponctuelle, planaire, focale (de 1ère et de 2e espèce) et asymptotique (de 1ère et de 2e espèce); ici nous disons que L et L' en correspondance développable sont en *déformation ponctuelle* si leurs formes ponctuelles coïncident, etc. Il s'ensuit de la forme de l'élément projectif linéaire (2) + (3) que si L et L' sont en trois des six déformations mentionnées, elles sont aussi en déformation projective de second ordre. La signification géométrique des déformations asymptotiques est évidente; elle a été donnée déjà ci-dessus pour le cas d'une déformation ponctuelle (et donc aussi duellement pour une déformation planaire). On a $F_1 = F'_1$ si et seulement s'il existe pour chaque paire de droites p, p' une homographie $h : P_3 \to P_3$ réalisant un contact analytique des congruences L, L' et des surfaces (A_1), (A'_1) et (E_3), (E'_3); après un changement d'orientation on trouve la géométrisation de la condition $F_2 = F'_2$. Dans le travail [6] de Švec, on trouve une autre signification géométrique de ces déformations élémentaires à l'aide de l'étude de la correspondance existant entre les images de Klein de deux congruences.

Passons maintenant aux *problèmes d'existence*, voir Čech [5]—[7]. Auparavant, on savait seulement[2]) qu'une paire de congruences en déformation projective dépendait d'une fonction de deux variables, et on connaissait le résultat de Bam-Zelikovič: à chaque surface on peut construir une congruence déformable de tangentes, avec un choix arbitraire de sept fonctions d'une variable.

Les résultats de M. Čech sont les suivants (nous désignons par P, Π, F_1, F_2 A_1, A_2 les déformations ponctuelle, planaire, focale de 1ère et de 2e espèce, asymptotique de 1ère et de 2e espèce, respectivement): *On peut choisir la congruence L et les congruences L' qui sont en déformation $P, \ldots, A_2$ avec L dépendent d'une fonction de deux variables.* Dans le cas des déformations doubles, on ne trouve en principe que les types $P\Pi$, PA_1, A_1A_2, F_1F_2; *on peut choisir la congruence L, ses déformations dépendent alors de quatre fonctions d'une variable.* Ensuite, on a établi le résultat bien général que voici: *Les congruences pour lesquelles on s'est donné deux relations valables entre les formes* (2) (p. ex. de la forme $\varphi_i(\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_1, u, v) = 0$, où $du\, dv = 0$ sont les surfaces développables de L), *dépendent de six fonctions d'une variable.* Un cas spécial de ce théorème est constitué par théorème d'existence des congruences R, dû à Cartan; je montrerai celà au paragraphe 13.

4. Supposons que L et L' soient en déformation projective T de second ordre, elles sont alors aussi en déformation ponctuelle et planaire. Chacune de ces déformations est réalisée par une seule homographie, désignons-la par K, H, H^*, respectivement. *Si deux de ces homographies coïncident, il en va de même pour la troisième et T est une déformation projective singulière* dans ce sens que K réalise aussi un contact analytique de second ordre des surfaces focales de deux congruences.[3]) D'une manière générale, les homographies K, H, H^* ne coïnci-

[2]) С. П. Фиников, Теория конгруэнций. Москва-Ленинград, 1950, p. 493 et 499.
[3]) Voir E. Cartan, Sur le problème général de la déformation, CR Congres Strasbourg 1920, 397—406.

dent que pour les points de la droite $p \in L$, or, si elles coïncident encore pour d'autres points (sans qu'il s'agisse du cas singulier), alors elles coïncident pour les points d'une des plans focales; nous parlons alors d'une *déformation demi-singulière. Une paire de congruences en déformation demi-singulière dépend de neuf fonctions d'une variable.*

Une déformation projective T existant entre L et L' peut être prolongée en correspondance ponctuelle T^* de telle manière que les points des droites correspondantes p et p' se correspondent en homographie osculatrice H. Les déformations projectives T singulières sont caractérisées par le fait qu'elles sont *totalement asymptotiques*, c'est-à-dire que les asymptotiques de toute paire de surfaces non-développables des congruences L et L' sont en correspondance T^*, voir Čech [2, IV]. Dans le cas où T n'est pas demi-singulière (et dans ce cas seulement), il existe une seule *décomposition canonique* de L en une couche de surfaces réglées non-développables, qui sont transformées asymptotiquement par T^*.

5. Les notions qui viennent d'être introduites sont exploitées dans le travail Čech [8] pour une nouvelle étude détaillée de déformations projectives des congruences W. On peut spécialiser le repère d'une telle congruence de telle façon que l'on ait

$$(7) \qquad \alpha_1 = \beta_1 = -\alpha_2 = -\beta_2 = 1\,, \quad \omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33} + \omega_{44} = 0\,,$$

où le repère est déterminé aux irrationnalités près. L'élément projectif linéaire étant de la forme

$$(8)\ \varphi = \varphi^* = -\omega_1\omega_2\,,\quad F_1 = \frac{\omega_2^3}{\omega_1}\,,\quad F_2 = \frac{\omega_1^3}{\omega_2}\,,\quad \omega_1^2 - \omega_2^2 = 0\,,\quad \omega_1^2 - \omega_2^2 = 0\,,$$

une congruence L du type W est en déformation projective avec sa dualisation L^*. La déformation projective $L \to L^*$ est singulier seulement dans le cas où L appartient à un complexe linéaire fixe Ω (et alors $L \to L^*$ se réduit à une polarité par rapport à Ω). *Les congruences W à dualisation demi-singulière dépendent de quatre fonctions d'une variable.* Si aucun des cas précédents ne se présente, nous obtenons une décomposition canonique de la congruence L par rapport à la déformation projective $L \to L^*$; si nous écrivons, compte tenu de (7)

$$\omega_{11} - \omega_{33} = \omega_{22} - \omega_{44} = z_1\omega_1 + z_2\omega_2\,,$$
$$\omega_{11} - \omega_{22} = \omega_{33} - \omega_{44} = t_1\omega_1 + t_2\omega_2\,,$$

la décomposition canonique sera donnée par l'équation

$$(9) \qquad t_1\omega_1 + t_2\omega_2 = 0\,.$$

Nous dirons que L a une *dualisation asymptotique* (de 1ère ou de 2e espèce), si la décomposition canonique correspond à une des deux couches d'asymptotiques sur les surfaces focales ($\omega_1 - \omega_2 = 0$ ou $\omega_1 + \omega_2 = 0$); on a $t_1 - t_2 = 0$ ou bien $t_1 + t_2 = 0$ pour la 1ère ou la 2e espèce respectivement.

Un problème général est celui de trouver toutes les congruences W à l'élément projectif donné. En résolvant ce problème extrêmement compliqué on n'a trouvé que des résultats partiels (bien que très importants): *Toute congruence W admet au plus ∞^6 de déformations projectives qui n'appartiennent pas à un complexe linéaire et qui n'ont pas de dualisation asymptotique*; le maximum ∞^6 n'étant atteint que dans le cas de $z_1 = z_2 = 0$. On est conduit au même problème en cherchant les éléments projectifs linéaires, réalisables à la fois par deux congruences W à dualisations asymptotiques d'espèces opposées. Toutes les congruences de ce type sont mutuellement en déformation projective et une déformation projective de chacune d'entre elles est du même type. Dans le travail Čech [9], on montre ensuite, que, *ces congruences dont chacune est une déformation projective de la congruence des tangentes à une quadrique régulière qui appartiennent au complexe linéaire, coïncident avec les congruences D* qui réalisent une déformation projective de second ordre entre leurs surfaces focales.[4])

Toute congruence à dualisation asymptotique admet des déformations projectives qui ont des dualisations asymptotiques de la même espèce et qui dépendent d'une fonction d'une variable; a part cela elle admet encore une déformation appartenant au complexe linéaire. Les congruences de ce type ont, comme cela a été montré dans Čech [9], *des surfaces focales réglées*; si au contraire une congruence W a des surfaces focales réglées elle a aussi une dualisation asymptotique, ou bien elle appartient au complexe linéaire et est une déformation projective d'une congruence W à dualisation asymptotique. L'étude de ces congruences a été poursuivie par M. V. Horák, voir aussi notre paragraphe 8.

Dans son travail [8] M. Čech a donné explicitement toutes les formes ω_{ij} pour les *congruences R à dualisation asymptotique*:

$$
\begin{aligned}
(10) \qquad & \omega_1 = f\,\mathrm{d}v\,, \quad \omega_2 = f\,\mathrm{d}u\,, \quad f = f(u + v) \neq 0\,,\\
& \omega_{31} = cf^3\,\mathrm{d}v - f\,.\,(\mathrm{d}u + 2\mathrm{d}v)\,, \quad \omega_{42} = cf^3\,\mathrm{d}u - f\,.\,(2\mathrm{d}u + \mathrm{d}v)\,,\\
& z_1 = z_2 = -f^{-2}f'\,, \quad t_1 = t_2 = \varphi(u + v)\,,\\
& \omega_{32} = (z_2 - t_2)\,\omega_1 + (z_1 - t_1)\,\omega_2\,,\\
& \omega_{41} = -(z_2 + t_2)\,\omega_1 - (z_1 + t_1)\,\omega_2\,.
\end{aligned}
$$

L'élément projectif linéaire dépend de $f = f(u + v)$ et *chaque congruence admet des déformations projectives dépendant d'une constante c et d'une fonction $\varphi(u + v)$*; en choisissant $t_1 = t_2 = 0$ nous obtenons ∞^1 déformations projectives appartenant au complexe linéaire. La fin du travail [9] de M. Čech montre que le problème de trouver les déformations projectives des congruences R se réduit à la résolution d'un système (en t) de la forme

$$
(11) \qquad t_{uu} - t_{vv} - 2(\mu_u t_u - \mu_v t_v) = 0\,, \quad (t_u^2 - t_v^2)_{uv} = \Lambda\,;
$$

[4]) Voir E. Čech, Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces, I + II (Rend. Acc. Lincei, *6* (*8*), 484—486 et 552—554, 1928); S. P. Finikov, Congruences dont les deux nappes de la surface focale sont projectivement applicables l'une sur l'autre par les points correspondants (Bull. Math., (*2*) *56*, 117—136, 1936), et Теория конгруэнций, chap. XI.

on y trouve les congruences R dont les surfaces focales ne sont pas réglées, mais que l'on peut déformer en congruences à surfaces focales réglées.

Dans son travail [5], M. Čech constate que le groupe continu des déformations projectives d'une congruence générale en elle-même a au plus deux paramètres et que, dans ce cas-là, l'élément projectif linéaire a une des formes

$$(12)\quad \varphi = c_1 x\, du\, dv\,, \quad \varphi^* = c_2 x\, du\, dv\,, \quad F_1 = c_3 x \frac{du^3}{dv}\,, \quad F_2 = c_4 x \frac{dv^3}{du}\,,$$

où $x = 1$, ou $x = u^{-2}$, ou $x = (u + v)^{-2}$, et où c_i sont constantes.

6. Le même travail [5] de M. Čech contient certains résultats concernant la déformation projective des *congruences paraboliques*. Si la congruence L a une surface focale, alors le problème de trouver ses déformations projectives est identique au problème de trouver les *demi-déformations*[5]) *asymptotiques* de sa surface focale; *les déformations projectives de la congruence L dépendent donc de cinq fonctions d'une variable.* Le cas de déformations singulières et demi-singulières peut être transporté aisément au cas parabolique. *Les déformations singulières de la congruence L sont celles pour lesquelles la surface focale est déformée projectivement du type R_0* (et L est la congruence R_0 correspondante). *Les congruences demi-singulièrement déformables dépendent de huit fonctions d'une variable.*

7. Dans mon travail [13] je résous dans une certaine mesure le problème de trouver le *système de géométries intérieures* des congruences de droites, dont la conservation est équivalent à une déformation projective.[6]) Supposons que la congruence L soit *ponctullement normalisée*[7]) de telle façon qu'à chacune de ses droites p corresponde une droite q qui coupe les deux transformées de Laplace de la droite p; supposons ensuite que L soit normalisée planairement, c'est-à-dire que sa dualisation L^* soit normalisée ponctuellement (je parle alors de la normalisation de L). Soient maintenant L et L' deux congruences en correspondance développable T. On peut montrer que tout prolongement ponctuel T_b^* de la correspondance T (voir paragraphe 1) conduit à un seul prolongement T_r^* de la transformation développable induite entre L^* et L'^*. *Si l'on peut normaliser L et L' et qu'il existe des prolongements (T_b^*, T_r^*) tels que les deux connexions induites coïncident, alors T est une déformation projective*, et réciproquement. Si ce cas-là se présente, toute normalisation de la congruence L détermine d'une manière univoque la normalisation de L' et les deux prolongements (T_b^*, T_r^*) conduisant à la coïncidence des deux géométries intérieures.

[5]) Voir E. Čech, Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces (Rozpravy České akad., *38*, No 3, 1—38).

[6]) Ce problème a été posé par M. S. P. Finikov dans son livre Теория конгруэнций, p. 485.

[7]) La notion de normalisation a été introduite par E. Bortolotti dans Connessioni nelle varietà luogo di spazi (Rend. Sem. Univ. Cagliari, III, 1933) et dans Sulla geometria differenziale delle congruenze di rette (Atti Soc. Ital. per Progresso della Scienze, *XXII*. Riun.-Bari, Col. II, 185—187, 1933).

8. Dans son travail [1] M. V. Horák a envisagé en détail les congruences W aux surfaces focales réglées (*congruences de Segre*). C. Segre[8]) a trouvé le theorème suivant: Soient p, p' deux droites, correspondant l'une à l'autre, des surfaces focales d'une congruence de Segre L et en même temps leurs images sur l'hyperquadrique Q de Klein dans P_5, alors les droites (p, p') engendrent dans P_5 une surface développable. L'étude des congruences de Segre s'identifie donc à l'étude d'une courbe (prise comme arrête de rebroussement de la surface développable mentionnée) dans l'espace P_5, muni d'une hyperquadrique de même type que celle de Klein. La congruence L de Segre est décomposable en une couche de demi-quadriques, les demi-quadriques complémentaires déterminent la congruence de Segre *associée* L'. M. Horák considère six types de congruences de Segre L (entre paranthèses je donne la représentation dans l'espace P_5 de Klein): 1. L et L' générales (courbe dans P_5); 2. L est située dans un complexe linéaire non-singulier, L' est générale (cône dont le sommet n'est pas situé dans Q); 3. L est située dans le complexe linéaire singulier, L' est générale (cône au sommet dans Q); 4. L est générale, L' se trouve dans un complexe linéaire non-singulier (courbe dans l'hyperplan de l'espace P_5 qui n'est pas tangent à Q); 5. L générale, L' dans un complexe linéaire singulier (courbe dans l'hyperplan tangent à A); 6. L générale, située dans une congruence linéaire non-parabolique (courbe dans $P_3 \subset P_5$, P_3 n'est pas tangent à Q).

Regardons de plus près le cas 1. Soit $x \,.\, x = 0$ l'équation de Q, alors à chaque courbe $x_i = x_i(t)$ dans P_5 on peut associer un repère polaire ${}^iN$ tel que les *formules de Frenet* aient lieu

$$
\begin{aligned}
(13) \qquad {}^1N' &= \pi_2 \,.\, {}^2N \,, \\
{}^2N' &= -\, \varepsilon_1\varepsilon_2\pi_2 \,.\, {}^1N + \varepsilon_1\pi_3K_1 \,.\, {}^3N \,, \\
{}^3N' &= -\, \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\pi_3K_1 \,.\, {}^2N + \varepsilon_2\pi_4K_2 \,.\, {}^4N \,, \\
{}^4N' &= -\, \varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\pi_4K_2 \,.\, {}^3N + \varepsilon_3\pi_5K_3 \,.\, {}^5N \,, \\
{}^5N' &= -\, \varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\pi_5K_3 \,.\, {}^4N + \varepsilon_4\pi_6K_4 \,.\, {}^6N \,, \\
{}^6N' &= -\, \varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\pi_6K_4 \,.\, {}^5N \,; \quad {}^iN \,.\, {}^iN = \varepsilon_i
\end{aligned}
$$

et que les points ${}^1N$, x coïncident géométriquement; π_i et ε_i sont des signes, dont trois (et seulement trois) ε_i sont positifs. Les fonctions $K_i > 0$ et les signes ε_i forment le système complet d'invariants unimodulaires. Les congruences de Segre ont été étudiées déjà auparavant par M. J. Klapka,[9]) on a pris pour base de leur théorie le système d'équations ((y, z) et $(\bar{y}, \bar{z})$ sont droites des surfaces focales, $y = y(v)$, etc.)

$$(14) \quad y' = \left(Q + S - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right) y - Pz + \alpha\bar{y} \,, \quad z' = Ry + \left(S - Q - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right) z + \alpha\bar{z} \,,$$

[8]) C. Segre, Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate (Acc. R. Torino, *42*, 539—550, 1906—1907).

[9]) J. Klapka, O W-kongruencích s fokálními plochami přímkovými (Spisy přír. fak. Brno, No *69*, 1926).

$$\bar{y}' = -\left(Q + S + \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\bar{y} + P\bar{z} + \pi\alpha y\,, \quad \bar{z}' = -R\bar{y} + \left(Q - S - \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\alpha}\right)\bar{z} + \pi\alpha z\,,$$
$$Q^2 - PR = \varepsilon\,; \quad (yzy'z') = (\overline{yzy'z'}) = \omega\,; \quad \pi^2 = \omega^2 = 1\,;$$

les expressions et les signes

$$(15) \qquad H = Q'^2 - P'R',\ \alpha \neq 0,\ S,\ K = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{vmatrix},\ \omega,\ \pi,\ \varepsilon$$

sont alors invariants unimodulaires. M. Horák a montré ensuite que la congruence (14) est représentée dans P_5 par la courbe

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\nu|\alpha|[(yz) - \pi(\overline{yz})]\,, \quad \nu^2 = 1\,;$$

si l'on y introduit ensuite le paramètre t par la relation $2|S|\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}t$, on obtient pour les invariants la représentation suivante:

$$(16) \qquad K_1 = |\alpha S^{-1}|\,, \quad K_2 = |S|^{-1}\,, \quad K_3 = \tfrac{1}{2}|S|^{-1}\sqrt{|H|}\,, \quad K_4 = \tfrac{1}{4}|K|\,.\,|SH|^{-1}\,,$$
$$\varepsilon_1 = -\pi\omega\,, \quad \varepsilon_2 = \pi\omega\,, \quad \varepsilon_3 = -\omega\,, \quad \varepsilon_4 = \omega\varepsilon\,,$$
$$\varepsilon_5 = \omega \operatorname{sgn} H\,, \quad \varepsilon_6 = -\omega\varepsilon \operatorname{sgn} H\,.$$

9. Passons enfin à résumer les résultats de MM. J. Klapka et J. Brejcha. E. J. Wilczynski[10]) a démontré que dans une correspondance entre les surfaces focales d'une congruence flecnodale L les *lignes flecnodales* des surfaces focales se correspondent si et seulement si L est située dans un complexe linéaire. M. Klapka a montré[9]) que le theorème subsiste pour n'importe quelle congruence de Segre; dans son travail [1] il a montré qu'il en va de même pour toute congruence W.

A. Terracini a introduit[11]) la notion de paires de courbes *conjuguées* et *biconjuguées* d'une surface réglée. Le problème principal du travail Klapka [3] est celui de trouver des conditions sous lesquelles deux courbes conjuguées le restent lors d'une transformation asymptotique de la surface réglée. Il n'est pas possible de donner tous les résultats sans signaler préalablement toute une série de notions qui ne sont guère courantes. Lors des applications à la théorie des congruences de droites on montre que dans une congruence L il existe cinq couches de surfaces réglées qui touchent les surfaces focales en courbes conjuguées mutuellement; ces couches donnent dans la représentation de Klein les *courbes principales de Segre*[12]) de la surface représentant L.

Dans son travail [2] M. Klapka détermine le système différentiel fondamental d'une surface π en S_3 dans un espace réglé de telle manière que l'on prend pour le repère local les points U_2, U_1, U, V, V_1, V_2 de la suite de Laplace, U et V étant les images des tangentes asymptotiques; il y déduit aussi l'équation de l'hyper-

[10]) E. J. Wilczynski, Proj. dif. geometry of curves and ruled surfaces (Leipzig 1910).

[11]) A. Terracini, Direttrici congiunte di una rigata (Rend. Sem. Mat. Univ. e Polit. Torino, *9*, 1949—50), et Nuove superficie particolare dello S_5... (ibid., *15*, 1955—56).

[12]) E. P. Lane, Proj. dif. geometry (Chicago 1942), p. 415.

quadrique de Klein en coordonées locales. En tant qu'application, M. Klapka démontre le theorème connu disant que l'enveloppe du système des quadriques de Lie de la surface π se compose de la surface π et des surfaces formées des sommets du quadrilatère de Demoulin. A ces travaux se joigne le travail [1] de M. Brejcha. Il trouve les coordonnées locales des images des *droites canoniques* et démontre à nouveau l'équivalence de la définition de Bompiani des directrices de Wilczynski.[13]) Il trouve ensuite des conditions pour que le complexe des droites canoniques d'une surface π de 1ère ou de 2e espèce ait pour son image de Klein des systèmes de droites L ou L' de caractère cinq. Les systèmes L ou L' pour les surfaces dont les courbes canoniques sont de Segre ont en même temps le caractère $m = 5$ ou $m < 5$.

II. THÉORIE DES CONGRUENCES DE DROITES DANS LES ESPACES PROJECTIFS À PLUSIEURS DIMENSIONS ET DANS LES ESPACES COURBÉS

10. La plupart des travaux sur la géométrie différentielle projective des congruences de droites dans les espaces à plusieurs dimensions traitent leurs transformées de Laplace et les questions qui s'y attachent. On n'a prété que très peu d'attention à la généralisation des résultats valables dans P_3 au cas général de P_n; ici on ne trouve pratiquement que les travaux de M. B. Segre et de M. F. Marcus.[14])

Dans mon travail [1], j'étudie les déformations projectives de second ordre des congruences de droites dans P_n. Dans le cas où $n \geqq 5$, *la déformation projective est équivalente à la déformation ponctuelle. Dans S_4 on peut choisir la congruence L, ses déformations projectives dépendent de huit fonctions d'une variable*; L et L' sont alors aussi en déformation ponctuelle. Soient L et L' en déformation ponctuelle T, le prolongement correspondant (voir paragraphe 1) soit formé d'homographies $\pi : p \to p'$. Les dualisations des congruences L, L' sont les surfaces L^*, L'^*, dont les „points" sont des espaces tangents des congruences L, L'. Il existe des homographies $K : S_4 \to S_4'$ tangentes à T et réalisant un contact analytique de premier ordre de L, L' et L^*, L'^*; elles induisent toutes une même homographie $\pi' : p \to p'$. Alors $\pi \equiv \pi'$ est la condition nécessaire et suffisante pour que T soit une déformation projective.

Les origines de la théorie systématique des congruences de droites dans les espaces P_{2n} de dimension *paire* sont étudiées dans mon travail [12]; cette théorie devient, après dualisation, équivalente à la théorie des surfaces à réseau conjugué dans P_{2n}. Si les équations fondamentales du repère mobile sont

13) Fubini-E. Čech, Geom. proi. dif. I, p. 147.

14) B. Segre, L'élément linéaire projectif d'une congruence quadratique de droites (Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. de Belgique, (*5*) *39*, 481—489, 1953); F. Marcus, Elementul liniar proiectiv al unei congruente de drepte din S_5 (Studii si Cercet. Acad. RPR, Iasi, *10*, 129—140, 1959).

$dA_i = \omega_{ij}A_j$ $(i, j = 1, \ldots, 2n+1)$, il est possible de spécialiser les repères de telle sorte que l'on ait (je pose $\omega_{13} = \omega_1$, $\omega_{24} = \omega_2$)

$$
\begin{aligned}
(17) \qquad & \omega_{2j-1,2j+2} = \omega_{2j,2j+1} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n-1) , \\
& \omega_{2j-1,s} = \omega_{2j,s} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n-1;\ s = 2j+3, \ldots, 2n+1) , \\
& \omega_{2j-1,2j+1} = \omega_1 , \quad \omega_{2j,2j+2} = \omega_2 \quad (j = 2, \ldots, n-1) , \\
& \omega_{12} = \alpha_1\omega_2 , \quad \omega_{34} = \omega_{56} = \ldots = \omega_{2n-1,2n} = 0 , \\
& \omega_{21} = \beta_1\omega_1 , \quad \omega_{43} = \omega_{65} = \ldots = \omega_{2n,2n-1} = 0 , \\
& \omega_{2n-1,2n+1} = \gamma_1\omega_1 , \quad \omega_{2n,2n+1} = \gamma_2\omega_2 .
\end{aligned}
$$

Les formes

$$
(18) \qquad \varphi = \alpha_1\beta_1\omega_1\omega_2 , \quad \varphi_1 = \alpha_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\omega_1^{n+1}}{\omega_1^n} , \quad \varphi_2 = \beta_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \frac{\omega_1^{n+1}}{\omega_2^n} \quad (\varphi = \varphi_1\varphi_2)
$$

sont alors invariantes; l'expression $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2$ est appelée élément projectif linéaire de L. *Pour Φ donné, les congruences correspondantes existent et dépendent de* 4*n fonctions d'une variable.* Etant données L et L' en transformation développable T, considérons les homographies $K_0 : P_{2n} \to P'_{2n}$ réalisant un contact géométrique d'ordre $n - 1$ des courbes des réseaux conjugués des deux surfaces focales qui ne touchent pas les droites correspondantes $p \in L$, $p' \in L'$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe K_0 réalisant un contact de premier ordre des i-èmes surfaces focales et des dualisations L^*, L'^* (ou bien un contact de premier ordre des deux surfaces focales et de L^*, L'^*), est $\varphi_i = \varphi'_i$ (ou bien $\Phi = \Phi'$, respectivement).

D'une manière analogue j'ai étudié dans mon travail [15] les congruences de droites dans P_{2n+1}. Le repère est particularisé de telle manière que l'on a

$$
\begin{aligned}
(19) \qquad & \omega_{2a-1,2a+2} = \omega_{2a,2a+1} = 0 \quad (a = 1, \ldots, n) , \\
& \omega_{2a-1,b} = \omega_{2a,b} = 0 \quad (a = 1, \ldots, n-1;\ b = 2a+3, \ldots, 2n+2) , \\
& \omega_{2a+1,2a+3} = \omega_1 , \quad \omega_{2a+2,2a+4} = \omega_2 \quad (a = 1, \ldots, n-1) , \\
& \omega_{12} = \alpha_1\omega_2 , \quad \omega_{2n+1,2n+2} = -\alpha_2\omega_1 , \quad \omega_{21} = \beta_1\omega_1 , \quad \omega_{2n+2,2n+1} = -\beta_2\omega_2 , \\
& \omega_{2a-1,2a} = \omega_{2a,2a-1} = 0 \quad (a = 2, \ldots, n) .
\end{aligned}
$$

Les formes (ponctuelle, hyperplanaire, focales et quasiasymptotiques de 1ère et de 2e espèce)

$$
\begin{aligned}
(20) \qquad & \varphi = \alpha_1\beta_1\omega_1\omega_2 , \quad \varphi^* = \alpha_2\beta_2\omega_1\omega_2 , \quad F_1 = -\alpha_1\beta_2 \frac{\omega_2^{n+2}}{\omega_1^n} , \\
& F_2 = -\beta_1\alpha_2 \frac{\omega_1^{n+2}}{\omega_2^n} , \quad G_1 = -\frac{\alpha_1\omega_2^{n+1}}{\alpha_2\omega_1^{n+1}} , \quad G_2 = -\frac{\beta_1\omega_1^{n+1}}{\beta_2\omega_2^{n+1}}
\end{aligned}
$$

sont invariantes; $\Phi = \frac{1}{4}(\varphi + \varphi^* + F_1 + F_2)$ est l'*élément projectif linéaire* de la congruence L. *Les congruences dont les formes* (20) *sont liées par deux relations indépendantes existent et dépendent de* $4n + 2$ *fonctions d'une variable* (pour le theorème de M. Čech, valable pour $n = 1$, voir paragraphe 3). Dans mon travail [8] j'ai étudié dejà les congruences dans P_5, voir aussi Švec [9]. La notion banale de déformation projective est remplacée par la notion de *bidéformation* où l'on demande qu'il soit possible de réaliser par une seule homographie un contact analytique de second ordre des congruences L et L' ainsi que de leurs dualisations L^* et L'^* (la congruence duelle L^* est formée, dans l'espace duel P_5^*, des espaces tangents à la congruence L). Si L et L' soient en bidéformation, elles ont les mêmes formes (20) et réciproquement; une paire de congruences en bidéformation dépend d'une fonction de deux variables.

Mon article [5] généralise certains résultats de la théorie des congruences de droites dans P_3 au cas des *complexes de plans* dans P_5, dont les foyers dans chaque plan sont trois droites (ces complexes-là dépendent de six fonctions de deux variables). On y étudie leurs déformations ponctuelles. *Les complexes qui sont en déformation ponctuelle avec le complexe donné dépendent de 18 fonctions d'une variable*; une déformation ponctuelle donne six conditions simples, dont la signification géométrique est éclairée. Par cela, on a éclairci sur un exemple concret la situation décrite généralement par M. L. MURACCHINI.[15])

11. Une autre généralisation de la théorie des congruences de droites dans P_3 est la théorie des *congruences de droites à connexion projective*, établie dans mon travail [11]; les résultats ont été préalablement publiés dans l'article Švec [10]. La congruence de droites à connexion projective L est définie comme suit: Soit donné un domaine à deux dimensions Ω de paramètres, à chaque point $z \in \Omega$ j'associe un espace local $P_3(z)$ et dans lui une droite $p(z)$. Soit $z_1, z_2 \in \Omega$, alors à chaque arc $\gamma \subset \Omega$ qui joigne z_1 et z_2 on associe une homographie $K\gamma : P_3(z_1) \to P_3(z_2)$. Analytiquement, on peut procéder de telle manière qu'on choisit dans chaque $P_3(z)$ une base $A_1, \ldots, A_4$ telle que les points A_1, A_2 se trouvent sur $p(z)$ et que la connexion soit donnée par les équations

$$\nabla A_i = \omega_{ij} A_j \,, \quad \omega_{ij} = a_{ij}(u, v)\, \mathrm{d}u + b_{ij}(u, v)\, \mathrm{d}v \tag{21}$$

comme c'est usuel pour les espaces à connexion projective.[16]) On peut particulariser les repères locaux de telle sorte que les équations (21) deviennent

$$\begin{aligned} \nabla A_1 &= \omega_{11} A_1 + (h\, \mathrm{d}u + \alpha_1\, \mathrm{d}v)\, A_2 + \mathrm{d}u\, A_3 \,, \\ \nabla A_2 &= (\alpha_2\, \mathrm{d}u + h\, \mathrm{d}v)\, A_1 + \omega_{22} A_2 + \mathrm{d}v\, A_4 \,, \\ \nabla A_3 &= \omega_{31} A_1 + \omega_{32} A_2 + \omega_{33} A_3 + (\beta_2\, \mathrm{d}u + k\, \mathrm{d}v)\, A_4 \,, \\ \nabla A_4 &= \omega_{41} A_1 + \omega_{42} A_2 + (k\, \mathrm{d}u + \beta_1\, \mathrm{d}v)\, A_3 + \omega_{44} A_4 \,. \end{aligned} \tag{22}$$

Il est bien facile de définir les notions fondamentales: foyers, surfaces développables, dualisation, asymptotiques des surfaces focales, etc. Sont invariantes les formes élémentaires

$$i_1 = \frac{h\, \mathrm{d}u}{\alpha_1\, \mathrm{d}v} \,, \quad i_2 = \frac{k\, \mathrm{d}v}{\alpha_2\, \mathrm{d}u} \,, \quad i_1^* = \frac{k\, \mathrm{d}u}{\beta_1\, \mathrm{d}v} \,, \quad i_2^* = \frac{h\, \mathrm{d}v}{\beta_2\, \mathrm{d}u} \,, \tag{23}$$

[15]) L. MURACCHINI, Sulle trasformazioni puntuali inviluppi di omografie (Bull. UMI, (3) 8, 390—398, 1953).

[16]) Voir p. ex. E. CARTAN, Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective (Paris 1937), et Sur les variétés à connexion projective (Bull. Soc. Math. de France, 52, 205—241, 1924).

les formes fondamentales (ponctuelle, planaire, focales de 1ère et de 2e espèce)

$$(24) \qquad \varphi = \alpha_1\alpha_2\, du\, dv\,, \quad \varphi^* = \beta_1\beta_2\, du\, dv\,, \quad F_1 = \alpha_1\beta_1 \frac{dv^3}{du}\,, \quad F_2 = \alpha_2\beta_2 \frac{du^3}{dv}$$

et les formes

$$(25) \qquad \psi_1 = (a_{22} - a_{44})\, du\,, \quad \psi_2 = (b_{11} - b_{33})\, dv\,.$$

Les asymptotiques des surfaces focales (A_1), (A_2) sont

$$(26) \quad \beta_2\, du^2 + 2h\, du\, dv + \alpha_1\, dv^2 = 0\,, \quad \alpha_2\, du^2 + 2k\, du\, dv + \beta_1\, dv^2 = 0\,;$$

les surfaces développables de la congruence L sont $du\, dv = 0$. L'égalité des formes (24) de deux congruences L, L' en correspondance développable T a la même signification que pour les congruences dans P_3.

La condition nécessaire et suffisante pour que L et L' soient en déformation projective est la coïncidence de leurs formes (24) *et* (25) *et des courbes*

$$(27) \qquad \beta_2\, du^2 + \alpha_1\, dv^2 = 0\,, \quad \alpha_2\, du^2 + \beta_1\, dv^2 = 0\,,$$

dont la signification géométrique est facile à trouver. Supposons que L et L' soient en déformation projective et que K, H, H^* soient des homographies réalisant des déformations projective, ponctuelle et planaire; K, H, H^* donnent la même homographie dans le faisceau des tangentes de la surface focale (A_1) si et seulement si K réalise un contact analytique de premier ordre des surfaces (A_1), (A_1'). Nous disons que L et L' sont en *déformation projective singulière* (*fortement singulière*) si K réalise un contact analytique de second (troisième) ordre des surfaces focales. Si L et L' sont en déformation singulière, les homographies K, H, H^* coïncident (la réciproque n'étant pas valable en général); *si K réalise un contact analytique de troisième ordre des premières surfaces focales, la déformation est fortement singulière et alors les deux congruences sont identiques.*

Dans mon travail [7], j'étudie des congruences de droites immergées dans un *espace réglé à connexion projective*, défini d'une manière analogue. Je montre qu'il existe dans l'espace donné des congruences dont les invariants

$$J = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}\,, \quad J_1 = \frac{h^2}{\alpha_1\beta_1}\,, \quad J_2 = \frac{k^2}{\alpha_2\beta_2}$$

sont liés par une ou deux relations et qui dépendent d'une fonction de deux variables ou encore de six fonctions d'une variable. La *déformation projective faible* est définie par l'égalité des formes (24) pour L et L'; des couples de congruences en telle déformation dépendent d'une fonction de deux variables.

D'une manière analogue au cas des congruences de droites à connexion projective, on peut définir les *congruences à connexion euclidienne*. Je me suis servi dans [14] de ces congruences pour étudier les *congruences de droites dans un espace euclidien de dimension arbitraire.* A une congruence L dans E_n on peut associer une congruence L^x à connexion euclidienne de la manière suivante: Les espaces locaux et les droites de la congruence L^x sont les espaces tangents et les droites de la congruence L, la connexion des espaces locaux infiniment proches est donnée par la projection dans le $(n - 3)$-sens orthogonal à l'espace tangent considéré. On montre dans ce travail qu'une interprétation convenable permet de transporter toute la théorie des congruences de droites dans E_3 (dans la forme donnée dans le livre[2])) aus cas de E_n, l'appareil de calcul restant pratiquement le même. On remarque que le degré de généralité des classes principales de congruences (p. ex. B, T, pseudosphériques, etc.) augmente de deux fonctions d'une variable lorsque la dimension augmente d'une unité.

12. M. Čech [2, VI] a construit pour le cas parabolique une théorie analogue à celle des congruences et des réseaux conjugués. Soit donnée dans P_n une congruence parabolique L, choisissons sur chaque droite $p \in L$ un point x; si les points x forment une surface π sur laquelle il existe des asymptotiques correspondant aux surfaces développables de la congruence L, nous disons que L et π sont *conjuguées.* Si L est formée des tangentes asymptotiques d'une surface vérifiant l'équation $(*) x_{uu} = ax_u + bx_v + cx$, la surface conjugué générale sera $y = \mu x_u - \mu_u x$ où $\mu \neq 0$ est une solution arbitraire de l'équation (*). Supposons par contre qu'il soit donné une surface π (avec une couche d'asymptotiques) vérifiant l'équation $y_{uu} = a_1 y_u + b_1 y_v + c_1 y$; le foyer x de la congruence L conjuguée à π est déterminé par les équations $x_u = b_1 py$, $x_v = -(p_u + a_1 p) y + py_u$ où p est une solution arbitraire de l'équation $p_{uu} = -(a_1 p)_u - (b_1 p)_v + c_1 p$. M. Koubek a défini dans son travail [2] la notion de *congruence harmonique à une surface* π (contenant une couche d'asymptotiques): les droites de la congruence L sont situées dans les plans tangents à la surface π, et les surfaces développables de la congruence L correspondent aux asymptotiques de la surface π. Ensuite il a démontré les théorèmes que voici: *La condition nécessaire et suffisante pour que la congruence (yy_u) soit harmonique à la surface (x) est que la surface (y) soit conjuguée à la congruence (xx_u). Deux surfaces conjuguées (harmoniques) à une congruence sont harmoniques (conjuguées) à l'autre congruence. Deux congruences harmoniques (conjuguées) à une surface sont conjuguées (harmoniques) à l'autre surface. S'il existe une congruence L harmonique à π_1 et conjuguée à π_2, il en existe une infinité ∞^1.*

Dans son travail [1], M. Koubek a démontré ce théorème-ci: Si $n + 1$ solutions x^i de l'équation $x_{uu} = ax_u + bx_v + cx$ $(b \neq 0)$ vérifient la relation quadratique $\Sigma a_{ik} x^i x^k = 0$ $(a_{ik} = a_{ki} = \text{const})$ alors ces solutions sont linéairement dépendantes. Il en résulte que *dans P_n il n'existe pas de congruences quadratiques paraboliques.*

13. Les résultats les plus importants concernant les déformations projectives des surfaces à réseau conjugué sont ceux obtenus dans mon travail [15]. Sur une surface π à réseau conjugué dans P_{2n+1} il existe $n+1$ couches de *quasiasymptotiques* $\gamma_{n,n+1}$. Soit $\ldots, \pi_{-1}, \pi, \pi_1, \ldots$ la suite de Laplace engendrée par la surface π. La surface π sera appelée R si les congruences à surfaces focales π_{-1}, π ou π, π_1 sont W, c'est-à-dire si sur les surfaces π_{-1}, π, π_1 ce sont les quasiasymptotiques $\gamma_{n,n+1}$ qui sont en correspondance. La surface π est dite *isothermo-quasiasymptotique* si l'on peut sur elle choisir les paramètres u, v tels que $du\, dv = 0$ soit le réseau conjugué et que les quasiasymptotiques soient données par l'équation $du^{n+1} - dv^{n+1} = 0$. J'appelle surface R^0 chaque surface π dans P_{2n+1} dont les deux transformées de Laplace π_{-1}, π_1 dégénèrent et qui admet des déformations projectives C_{n+1}. On arrive à ces résultats-ci: *Si une surface π est R, alors toutes les surfaces de la suite de Laplace engendrée par π sont également R. Une surface R est isothermo-quasiasymptotique. Si deux surfaces consécutives de la suite laplacienne sont des surfaces isothermo-quasiasymptotiques, toute la suite est composée de surfaces R. Une surface R dans P_{2n+1} dépend de $4n+2$ fonctions d'une variable* (ce que l'on peut démontrer à l'aide du théorème d'existence pour les congruences de droites L dans P_{2n+1}, cité paragraphe 10, car les courbes $G_1 = -1$, $G_2 = -1$ sont justement les quasi-asymptotiques des surfaces focales de la congruence L). *Les surfaces à réseau conjugué dans P_{2n+1} qui admettent des déformations projectives C_{n+1} sont les surfaces R et elles seules, chaque telle surface admet* (dans le cas de $n \geqq 2$) ∞^1 *de telles déformations. La surface R^0 générale est donnée par un système complètement intégrable* ($U_i = U_i(u)$, $V_i = V_i(v)$, $k = \text{const}$)

$$(28) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = 0\,, \quad \frac{\partial^{n+1} x}{\partial v^{n+1}} = kx + \sum_{i=1}^{n} U_i \frac{\partial^i x}{\partial u^i} + \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial^i x}{\partial v^i} + \frac{\partial^{n+1} x}{\partial u^{n+1}}$$

et dépend de $2n$ fonctions d'une variable. Une surface (28) *admet ∞^1 de déformations projectives C_{n+1} que l'on obtient en faisant varier k. Chaque transformée laplacienne d'une surface R^0 est située dans un sous-espace à n dimensions, les courbes d'une couche du réseau conjugué sont projectives entre elles et chacune d'elles se trouve dans un sous-espace à $n+1$ dimensions. Une surface R^0 peut être construite comme suit:*[17]) Soient donnés dans P_{2n+1} les sous-espaces P_n, P'_n, P_{n+1}, P'_{n-1}; soit $P_n \subset P_{n+1}$, $P'_n \subset P'_{n-1}$, $O \in P_{n+1} \cap P'_{n+1}$ et soient c, c' deux courbes pour lesquelles $O \in c \subset P_{n+1}$, $O \in c' \subset P'_{n+1}$. Soit $P \in c'$ le point variable, $Q_P = OP \cap P'_n$, c_P la projection de la courbe c du point Q_P sur l'espace $(P_{n+1})_P \equiv (P_n, P)$; la surface R^0 en question est formée des courbes c_P, $P \in c'$.

[17]) Cette construction représente une généralisation de la construction des surfaces R^0 dans P_3, donnée par M. B. Segre dans „Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili" (Mem. Acc. Italia, *2*, No 3, 1931).

Dans mon travail [2] j'ai trouvé une nouvelle caractérisation géométrique des surfaces R^0 dans P_5. Mon article [3] contient une caractérisation géométrique, de nouveau dans P_5, des surfaces à réseau conjugué et admettant des déformations projectives C_3, même pour le cas où une ou toutes les deux transformées de Laplace dégénèrent. A l'aide de ces résultats j'ai établi dans [4] le degré de généralité des surfaces projectivement déformables dans P_5. Ces surfaces, dont une et une seule transformée de Laplace dégénère, dépendent de sept fonctions d'une variable.

Mon travail [16] concerne les généralisations des surfaces R^0. *Les variétés $x = x(u_1, \ldots, u_n)$ dans P_{2n-1} pour lesquelles $x_{ij} \equiv x_{u_i u_j} = 0$, $(i \neq j)$, et qui admettent des déformations projectives de second ordre, sont données par le système*

$$x_{ij} = 0\,, \quad x_{nn} = kx + \sum_{i=1}^{n} U_i(u)\, x_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_{\alpha\alpha} \quad (k = \text{const})\,. \tag{29}$$

Ce variétés peuvent être construites, la construction étant une généralisation directe de celle des surfaces R^0 donnée ci-dessus.

14. Résumons enfin les travaux [1], [2] de M. K. Svoboda; ils traitent un sujet bien différent de celui des travaux précités. Ses résultats forment en principe une seule des recherches de M. O. Borůvka.[18]) Regardons d'abord son travail [1]. Soit S_n un espace à courbure c constante (euclidien E_n ou non-euclidien N_n), soit P_n son prolongement projectif et A sa quadrique absolue. Une surface sera appelée *surface M* si ses *indicatrices de courbure normale* d'ordre $1, .., m - 1$ en tout point x sont des circonférences ayant x pour centre. J'appelle *réseau conjugué* (U) dans P_n le réseau π dont les transformées de Laplace π_{-1}, π_1 sont des courbes qui sont situées avec leurs $(m - 1)^{\text{èmes}}$ espaces osculateurs sur une quadrique régulière $A' \subset P_{n-1} \subset P_n$. Le réseau conjugué π dans P_n sera dit (V) si les premières, $\ldots, m^{\text{èmes}}$ transformées de Laplace dans les deux directions se trouvent sur une hyperquadrique régulière A'' et de telle manière que π_{-r}, π_r (r quelconque) sont polairement conjuguées à $\pi_{-r+1}, \ldots, \pi_{r-1}$ par rapport à A''; de plus, nous supposons que $\ldots, \pi, \ldots$ ne se termine pas après m pas ou se termine dans une ou dans les deux directions après m pas de la manière de Goursat.

Le sujet principal du travail en question est le problème des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface π de l'espace projectif P_n puisse être prise pour une surface M de l'espace S_n qui provient de P_n par un choix convenable de la quadrique absolue A. *Les courbes minima d'une surface M dans E_n (ou bien N_n) forment un réseau conjugué (U) (ou bien (V) respectivement)*

[18]) O. Borůvka, Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante, I—III (Spisy přír. fak. Brno, I, *165*, 1932; II, *212*, 1935; III, *214*, 1935), O jistém typu minimálních ploch ve čtyřrozměrném prostoru o konstantní křivosti (Rozpravy České akad. věd a umění, tř. II, *37*, 1928); Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à cinq dimensions à courbure constante (Spisy přír. fak. Brno, *106*, 1929).

aux invariants nuls (pareils); ici A' (ou A'') est la quadrique absolue A de l'espace S_n. *Une surface $\pi \subset P_n$ peut être prise pour une surface M dans E_n (ou bien N_n) si et seulement s'il existe sur elle un réseau (U) (ou bien un réseau (V))*; dans le cas de $n = 2m + 1$ la suite de Laplace engendrée par une surface M dans N_n est périodique de période $2(m + 1)$ et autopolaire par rapport à A ou bien elle se termine dans une direction après m pas de la manière de Goursat et dans l'autre direction après $m + 1$ pas de la manière de Laplace.

Le travail [2] de M. Svoboda généralise ensuite les résultats mentionnés. Nous appellerons *surface M* dans S_{n+1} toute surface π dont les indicatrices de courbure normale d'ordre k ($k = 1, \ldots, m - 1$) sont des circonférences, leur centre s_k étant situé pour $k = 1, \ldots, r$ ($r \geqq 1$) au pied de la normale abaissée du point $x \in \pi$ au plan de la circonférence, et $\overline{xs_k} = V_k = \text{const} \neq 0$; pour $k = r + 1, \ldots, m - 1$ on a $x \equiv s_k$. *Les surfaces M existent seulement pour $r = 1$, elles dépendent de $2(n - m - 1)$ fonctions d'une variable.* On peut distinguer deux types de surfaces M: non-euclidien ($V_1^2 + c \neq 0$) et euclidien ($V_1^2 + c = 0$). *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface $\pi \subset P_{2n+1}$ puisse être prise pour une surface M 1. du type euclidien, plongée dans N_{n+1}, est l'existence d'un point E sur la quadrique régulière $A \subset P_{n+1}$ et d'un tel réseau sur π que sa projection de E est un réseau $(U)_A$; 2. du type non-euclidien, plongée dans N_{n+1} (ou encore E_{n+1}), est l'existence d'un point E qui ne se trouve pas sur la quadrique régulière $A \subset P_{n+1}$ (ou encore n'est pas situé dans l'hyperplan de l'espace P_{n+1} où se trouve la quadrique régulière A) et d'un réseau sur π dont la projection de E est un réseau $(V)_A$.* Ici le réseau $(U)_A$, ou bien $(V)_A$, est défini comme dans ce qui précède avec la différence que la quadrique A', ou A'' respectivement, est remplacée par l'intersection de la quadrique A avec l'hyperplan tangent au point E, ou bien par le contour de la projection de la quadrique A du point E.

Dans les travaux précités on envisage encore d'autres propriétés importantes des surfaces M, mais leur enumération nécessiterait pratiquement un article entier.

Bibliographie

BREJCHA, J.:

[1] O Demoulinově čtyřstranu a o kanonických přímkách v bodě plochy prostoru S_3. Sborník VŠS Brno, vol. V, No. *87*, 41—47 (1956).

ČECH, E.:

[1] Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces I—III. Čas. pěst. mat., I : *74*, 32—46 (1949); II : *75*, 123—136 (1950); III : *75*, 137—158 (1950).

[2] Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами I—VIII. Чех. мат. ж., I : *2 (77)*, 91—107 (1952); II : *2 (77)*, 109—123 (1952);

III : *2* (*77*), 125—148 (1952); IV : *2* (*77*), 149—166 (1952); V : *2* (*77*), 167—188 (1952); VI : *2* (*77*), 297—331 (1952); *3* (*78*), 123—137 (1953); VIII : *4* (*79*), 143—174,(1954).
[3] О точечных изгибаниях конгруэнций прямых, Чех. мат. ж., *5* (*80*) 234—273 (1955).
[4] Deformazioni proiettive nel senso di Fubini e generalizzazioni. Conf. Sem. Mat. Univ. Bari, *9*, 1—12 (1955).
[5] Deformazioni di congruenze di rette. Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino, *14*, 55—66 (1954—55).
[6] Transformations développables des congruences des droites. Чех. мат. ж., *6* (*81*), 260—286 (1956).
[7] Deformazioni proiettive di congruenze e questioni connesse. CIME, 5° Ciclo (Geom. proi.-diff.), Pavia 26. sett.—5. ott. 1955; Ist. Mat. Univ. Roma (1956).
[8] Déformation projective des congruences *W*. Чех. мат. ж. *6* (*81*), 401—414 (1956).
[9] Compléments au Mémoire: Déformation projective des congruences W. Чех. мат. ж., *9* (*84*), 289—296 (1959).

Horák, V.:

[1] Theorie der Torsen des Kleinschen fünfdimensionalen projektiven Raumes und ihre Applikation auf Segresche W-Kongruenzen des dreidimensionalen projektiven Raumes. Чех. мат. ж., *9* (*84*), 590—628 (1959).

Klapka, J.:

[1] O kongruencích *W* obsažených v lineárním komplexu. Sborník VŠS Brno, vol. IV, No. *68*, 107—110 (1955).
[2] Godeauxova teorie ploch a lokální souřadnice v přímkovém prostoru. Sborník VŠS Brno, vol. V, No. *86*, 29—40 (1956).
[3] Über Paare von konjugierten Kurven einer Regelfläche. Publ. přír. fak. Brno, No. *393*, 161—188 (1958).

Koubek, L.:

[1] Об однам свойстве решений дифференциального уравнения с частными производными параболического типа. Чех. мат. ж., *5* (*80*), 91—98 (1955).
[2] Některé věty z theorie parabolických přímkových kongruencí. Čas. pěst. mat., *81*, 244—245 (1956).

Svoboda, K.:

[1] Projektivní vlastnosti minimálních ploch s kružnicemi normální křivosti. Čas. pěst mat., *83*, 287—316 (1958).
[2] Sur une classe de surfaces sphériques dans un espace à courbure constante. Чех. мат. ж., *8* (*83*), 399—447 (1958).

Švec, A.:

[1] Déformation projective des congruences de droites dans S_n. Чех. мат. ж., *5* (*80*), 546—558 (1955).
[2] Déformations projectives de certaines surfaces à réseau conjugué. Чех. мат. ж., *5* (*80*), 559—572 (1955).
[3] Déformations projectives des surfaces à réseau conjugué dans S_5. Чех. мат. ж., *6* (*81*), 118—124 (1956).
[4] Problèmes d'existence de la déformation projective des surfaces de S_5 possédant un réseau conjugué. Чех. мат. ж., *6* (*81*), 125—138 (1956).
[5] Certaines enveloppes des familles ∞^3 d'homographies dans S_5. Чех. мат. ж., *7* (*82*), 57—65 (1957).
[6] Remarques sur la théorie des déformations des congruences de droites. Чех мат ж., *7* (*82*), 66—72 (1957).

[7] Congruences de droites dans les espaces réglés à connexion projective. Чех. мат. ж., *7 (82)*, 96—114 (1957).
[8] Les congruences de droites dans S_5. Spisy přír. fak. Brno, No. *382*, 1—14 (1957).
[9] Projektive Deformation der Strahlenkongruenzen in mehrdimensionalen Räumen. Revue Math. Pur. Appl., *1*, 91—92 (1956).
[10] Sulla teoria delle congruenze di rette. Boll. UMI, *(3) 12*, 446—457 (1957).
[11] Congruences de droites à connexion projective. Ann. Polonici Math., *VIII, 3* (sous presse).
[12] Congruences de droites dans les espaces projectifs à dimension paire. Чех. мат. ж., *8 (83)*, 274—284 (1958).
[13] Géométrie intrinseque des congruences de droites et leurs déformations projectives. Чех. мат. ж., *8 (83)*, 395—398 (1958).
[14] Congruences de droites dans E_n. Чех. мат. ж., *8 (83)*, 552—562 (1958).
[15] Les surfaces R dans les espaces projectifs de dimension impaire. Чех. мат. ж., *9 (84)*, 243—264 (1959).
[16] Déformations projectives des systèmes n-conjugués dans S_{2n-1} dont toutes les transformées de Laplace sont dégénérées. Чех. мат. ж., *9 (84)*, 440—444 (1959).

Résumé

ČESKOSLOVENSKÝ PŘÍSPĚVEK K DIFERENCIÁLNÍ GEOMETRII KONGRUENCÍ PŘÍMEK A PLOCH S KONJUGOVANOU SÍTÍ

ALOIS ŠVEC, Praha

K patnáctému výročí osvobození ČSSR

V práci je podán přehled výsledků v uvedeném oboru, uveřejněných československými geometry v letech 1945—1959. Uveďme pouze stručné názvy a charakteristiky jednotlivých článků:

I. Teorie kongruencí přímek v projektivním trojdimensionálním prostoru. 1. Studium dvojparametrických systémů přímek v P_n a jejich bodových deformací (E. ČECH). 2. Projektivní lineární element kongruence přímek v P_3 (Čech). 3. Projektivní deformace kongruence přímek, její rozklad na jednotlivé jednoduché deformace, otázky existenční (Čech). 4. Singulární a polosingulární deformace (Čech). 5. Projektivní deformace kongruencí W (Čech). 6. Projektivní deformace parabolických kongruencí (Čech). 7. Vnitřní geometrie kongruence přímek (A. ŠVEC). 8. Kongruence W s přímkovými fokálními plochami a jejich representace v přímkovém prostoru (VL. HORÁK). 9. Práce J. KLAPKY a J. BREJCHY.

II. Teorie kongruencí přímek v projektivních vícedimensionálních a křivých prostorech. 10. Deformace kongruencí přímek v S_n, teorie kongruencí v S_{2n} a S_{2n+1} (Švec). 11. Kongruence přímek s projektivní konexí (Švec). 12. Analogie

harmonických resp. konjugovaných sítí a kongruencí v parabolickém případě (Čech, L. Koubek).

III. Teorie ploch s konjugovanou sítí. 13. Projektivní deformace těchto ploch v S_{2n+1} (Švec). 14. Teorie ploch, jejichž indikatrice normální křivosti jsou kružnice (K. Svoboda).

Резюме

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ ВКЛАД В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ С СОПРЯЖЕННОЙ СЕТЬЮ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

К пятнадцатилетию освобождения ЧССР

В работе дается обзор результатов в указанной области, опубликованных чехословацкими геометрами в 1945—1959 гг. Мы приведем лишь краткие названия и характеристики отдельных статей:

I. Теория прямолинейных конгруэнций в проективном трехмерном пространстве. 1. Исследование двупараметрических семейств прямых в P_n и их точечных изгибаний (Э. Чех). 2. Проективный линейный элемент конгруэнции прямых в P_3 (Э. Чех). 3. Проективное изгибание прямолинейной конгруэнции, его разложение на отдельные простые изгибания, вопросы существования (Э. Чех). 4. Особые и полуособые изгибания (Э. Чех). 5. Проективное изгибание конгруэнций W (Э. Чех). 6. Проективное изгибание параболических конгруэнций (Э. Чех). 7. Внутренняя геометрня прямолинейной конгруэнции (А. Швец). 8. Конгруэнции W с линейчатыми фокальными поверхностями и их представление в пространстве прямых (Вл. Горак). 9. Работы Й. Клапка и Й. Брейха.

II. Теория прямолинейных конгруэнций в проективных многомерных и кривых пространствах. 10. Изгибание прямолинейных конгруэнций в S_n, теория конгруэнций в S_{2n} и S_{2n+1} (А. Швец). 11. Конгруэнции прямых с проективной связностью (А. Швец). 12. Аналогии между гармоническими, соотв. сопряженными сетями, и конгруэнциями в параболическо случае (Э. Чех, Л. Коубек).

III. Теория поверхностей с сопряженной сетью. 13. Проективное изгибание этих поверхностей в S_{2n+1} (А. Швец). 14. Теория поверхностей, у которых индикатрисами нормалной кривизны являются окружности (К. Свобода).

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

BEMERKUNG ZU EINER HALBGRUPPE DER ENDOMORPHISMEN AUF EINER EINFACH GEORDNETEN MENGE

BEDŘICH PONDĚLÍČEK, Poděbrady

(Eingegangen am 3. August 1959)

Der vorliegende Artikel enthält die folgenden zwei Hauptergebnisse: Satz 1 ist eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes über einfach archimedisch geordnete Gruppen (1, XIV) auf eine Klasse der Halbgruppen; Satz 2 ist eine Anwendung dieses Satzes für eine Halbgruppe der Endomorphismen auf einer einfach geordneten Menge (vergleiche Satz 3, [2]).

In der Arbeit [2] wurde folgender Satz bewiesen: *Auf der Halbgruppe Γ der Endomorphismen auf $\mathfrak{M}$, welche die Eigenschaft* (γ) *hat, sind folgende Eigenschaften äquivalent*:

a) *Γ ist stark monozyklisch;*

b) *Γ ist monozyklisch und genügt der linksseitigen Kürzungsregel;*

c) *Γ ist von links archimedisch geordnet und divergent.* (Wir benützen die Begriffe und Symbole der angeführten Arbeit.)

Wir betrachten folgende Eigenschaft der Halbgruppe Γ:

d) *Γ ist monozyklisch und kommutativ.*

Nach Anmerkung 2 der Arbeit [2] folgt, dass $d \Rightarrow a, b, c$ gilt. Also entsteht hier die Frage, ob auch $a, b, c \Rightarrow d$ gilt. Positive Antwort auf diese Frage gibt der Satz 2 dieser Arbeit. Bevor wir zum Beweis dieses Satzes kommen, beweisen wir Satz 1, welcher eigentlich den bekannten Satz über eine einfach archimedisch geordnete Gruppe ([1], XIV) auf eine Klasse der Halbgruppen verallgemeinert.

Unter einer *Halbgruppe* verstehen wir ein assoziatives Gruppoid. Unter dem *Einserelemente* e des Gruppoides Γ verstehen wir so ein Element $e \in \Gamma$, für welches $ea = a = ae$ (für alle $a \in \Gamma$) gilt. Es ist offenbar, dass jedes Gruppoid höchstens ein Einserelement hat. Wir sagen, dass das Gruppoid der *rechts-(links-)seitigen Kürzungsregel* genügt, wenn

$$ac = bc \Rightarrow a = b\,, \quad (ca = cb \Rightarrow a = b)$$

gilt. Γ sei ein Gruppoid, wir definieren die Relation $\varrho(\Gamma) \subset \Gamma \times \Gamma$ folgendermassen: $(a, b) \in \varrho(\Gamma)$ gilt dann und nur dann, wenn ein solches $r \in \Gamma$ existiert, dass $a = rb$ oder $a = br$ oder $ra = b$ oder $ar = b$ gilt.

Unter einem *teilweise geordneten Gruppoid* verstehen wir so ein Gruppoid, welches teilweise geordnet ist und für das $a \leqq b \Rightarrow ac \leqq bc$, $ca \leqq cb$ gilt. Wir sagen, dass die einfach geordnete Halbgruppe (mit einem Einserelement e) *von rechts (links) archimedisch geordnet* ist, wenn für $a < b$, $c > e$, resp. $a < b$, $c < e$ ein solches $n \in N$ (N bedeutet in der ganzen Arbeit die Menge aller natürlichen Zahlen) resp. $m \in N$ existiert, dass $ac^n \geqq b$ $(c^n a \geqq b)$ resp. $a \geqq bc^m$ $(a \geqq c^m b)$ gilt.

Satz 1. *Γ sei eine von links archimedisch geordnete Halbgruppe (mit einem Einserelement e) und genüge der rechtsseitigen Kürzungsregel. Γ habe folgende Eigenschaft:*

(R) $$a, b \in \Gamma\,; \quad a, b < e(a, b > e) \Rightarrow (a, b) \in \varrho(\Gamma)\,.$$

Dann ist die Halbgruppe Γ kommutativ und in eine einfach geordnete additive Gruppe aller reellen Zahlen einbettbar.

Bevor wir den Beweis dieses Satzes bringen, beweisen wir einige Hilfssätze. In den Hilfssätzen 1—17 setzen wir voraus, dass die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllt sind.

Hilfssatz 1. $a < b \Rightarrow ac < bc$.

Beweis. $a < b \Rightarrow ac \leqq bc$. Wenn $ac = bc$ ist, dann ist $a = b$ (durch die rechtsseitige Kürzungsregel) und das ist ein Widerspruch.

Hilfssatz 2. $ac < bc \Rightarrow a < b$ $(ca < cb \Rightarrow a < b)$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist Γ einfach geordnet. Wir setzen voraus, dass $a \geqq b$ ist, dann ist $ac \geqq bc$ oder $ca \geqq cb$, und das ist ein Widerspruch.

Hilfssatz 3. $ab = e \Rightarrow ba = e$.

Beweis. $(ba)^2 = b(ab)\,a = bea = e(ba) \Rightarrow ba = e$.

Hilfssatz 4. $e < ab \Rightarrow e < ba$ $(e > ab \Rightarrow e > ba)$.

Beweis. Wenn $e < ab$ ist, dann ist nach Hilfssatz 1 $a < aba$, und nach Hilfssatz 2 $e < ba$.

Hilfssatz 5. $a < b \Rightarrow a^n < b^n$ $(n \in N)$.

Beweis. Wir werden die Induktion nach n beweisen. Offenbar gilt Hilfssatz 5 für $n = 1$. Wir setzen also voraus, dass Hilfssatz 5 für n gilt, dann ist (nach Hilfssatz 1) $a^n < b^n \Rightarrow a^{n+1} \leqq ab^n$; $a < b \Rightarrow ab^n < b^{n+1}$, und $a^{n+1} < < b^{n+1}$.

Hilfssatz 6. $a^n = b^n$ $(n \in N) \Rightarrow a = b$.

Der Beweis ergibt sich aus Hilfssatz 5 und aus der einfachen Anordnung der Halbgruppe Γ.

Hilfssatz 7. $a^n < b^n$ $(n \in N) \Rightarrow a < b$.

Beweis. Wir setzen voraus, dass $a \geqq b$ ist, dann ist nach Hilfssatz 5 $a^n \geqq b^n$, was in Widerspruch ist.

Hilfssatz 8. $ab = e \Rightarrow a^n b^n = a$ $(n \in N)$.

Der Beweis folgt leicht aus Hilfssatz 3.

Hilfssatz 9. $e < ab \Rightarrow e < a^n b^n$ $(n \in N)$
$(e > ab \Rightarrow e > a^n b^n$ $(n \in N))$.

Beweis. Wir beweisen die vollständige Induktion nach n. Offenbar gilt Hilfssatz 9 für $n = 1$. Wir setzen also voraus, dass Hilfssatz 9 für n gilt, dann ist $e < a^n b^n \Rightarrow ab \leqq a^{n+1} b^{n+1} \Rightarrow e < a^{n+1} b^{n+1}$.

Hilfssatz 10. $a^n b^n = e$ $(n \in N) \Rightarrow ab = e$.

Der Beweis folgt aus Hilfssatz 9 und aus der einfachen Anordnung der Halbgruppe Γ.

Hilfssatz 11. $e < a^n b^n$ $(n \in N) \Rightarrow e < ab$,
$(e > a^n b^n$ $(n \in N) \Rightarrow e > ab)$.

Der Beweis folgt aus den Hilfssätzen 8 und 9 und aus der einfachen Anordnung der Halbgruppe Γ.

Hilfssatz 12. $e < a$, $m \leqq n$ $(m, n \in N) \Rightarrow a^m \leqq a^n$.

Beweis. Wenn $m = n$ ist, dann ist $a^m = a^n$. Wenn $m < n$ ist, dann ist $n - m \in N$, und dann ist nach Hilfssatz 5 $e < a^{n-m}$, woraus nach Hilfssatz 1 $a^m < a^n$ folgt.

Hilfssatz 13. $e \neq a$, $a^n = a^m$ $(m, n \in N) \Rightarrow m = n$.

Der Beweis folgt aus der Gültigkeit der rechtsseitigen Kürzungsregel.

Hilfssatz 14. $ab \leqq ba \Rightarrow a^n b^n \leqq (ab)^n \leqq (ba)^n \leqq b^n a^n$ $(n \in N)$.

Beweis. Wir beweisen die Induktion nach n. Offenbar gilt Hilfssatz 14 für $n = 1$. Wir setzen also voraus, dass Hilfssatz 14 für n gilt, dann ist nach Hilfssatz 5 $(ab)^{n+1} \leqq (ba)^{n+1}$ und $a^{n+1} b^{n+1} = a(a^n b^n)\, b \leqq a(ba)^n b = (ab)^{n+1}$. Endlich ist

$$(ba)^{n+1} = b(ab)^n\, a \leqq b(b^n a^n)\, a = b^{n+1} a^{n+1} .$$

Hilfssatz 15. $ab = ba$, $h^n \leqq a$, $g^n \leqq b$ $(n \in N) \Rightarrow (hg)^n \leqq ab$ $(ab = ba$, $h^n \geqq a$, $g^n \geqq b$ $(n \in N) \Rightarrow (hg)^n \geqq ab)$.

Beweis. Wenn $hg \leqq gh$ ist, dann ist nach Hilfssatz 14 $(hg)^n \leqq g^n h^n \leqq ba = ab$. Wenn $gh \leqq hg$ ist, dann ist wieder nach Hilfssatz 14 $(hg)^n \leqq h^n g^n \leqq ab$.

Hilfssatz 16. $ab = ba$, $e \leqq h^n a$, $e \leqq g^n b$ $(n \in N) \Rightarrow e \leqq (hg)^n\, ab$ $(ab = ba$, $e \geqq h^n a$, $e \geqq g^n b$ $(n \in N) \Rightarrow e \geqq (hg)^n\, ab)$.

Beweis. Wenn $gh \leqq hg$ ist, dann ist nach Hilfssatz 14 $g^n h^n \leqq (hg)^n$, und $e \leqq h^n a \Rightarrow g^n \leqq g^n h^n a \Rightarrow g^n \leqq (hg)^n\, a \Rightarrow g^n b \leqq (hg)^n\, ab$, daher ist $e \leqq (hg)^n\, ab$.

Hilfssatz 17. $ab = ba,\ e \leqq h^n a,\ ab \leqq g^n\ (n \in N) \Rightarrow b \leqq (hg)^n\ (ab = ba,\ e \geqq \geqq h^n a,\ ab \geqq g^n\ (n \in N) \Rightarrow b \geqq (hg)^n)$.

Beweis. Wenn $hg \leqq gh$ ist, dann ist nach Hilfssatz 14 $h^n g^n \leqq (hg)^n$, und $e \leqq h^n a \Rightarrow b \leqq h^n ab \Rightarrow b \leqq h^n g^n \Rightarrow b \leqq (hg)^n$. Wenn $gh \leqq hg$ ist, dann ist wieder nach Hilfssatz 14 $g^n h^n \leqq (hg)^n$, und $e \leqq h^n a \Rightarrow g^n \leqq g^n h^n a \Rightarrow ba \leqq \leqq g^n h^n a \Rightarrow$ (nach Hilfssatz 2 und der rechtsseitigen Kürzungsregel) $b \leqq g^n h^n \Rightarrow \Rightarrow b \leqq (hg)^n$.

Der letzte Hilfssatz betrifft reelle Zahlen.

Hilfssatz 18. *α, β, γ seien reelle Zahlen. Die Gleichung $\gamma = \alpha + \beta$ gilt dann und nur dann, wenn $x_1 \leqq \alpha \leqq x_2,\ y_1 \leqq \beta \leqq y_2 \Rightarrow x_1 + y_1 \leqq \gamma \leqq x_2 + y_2$, wobei x_1, x_2, y_1, y_2 rationale Zahlen sind.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist offensichtlich. Es sei $\gamma < < \alpha + \beta$. Offenbar existiert eine rationale Zahl z so, dass $\gamma < z < \alpha + \beta$ ist, woraus $z - \beta < \alpha$ folgt. Also existiert eine rationale Zahl x_1 so, dass $z - \beta < < x_1 < \alpha$ ist, woraus $y_1 = z - x_1 < \beta$ folgt. Nach der Voraussetzung des Hilfssatzes 18 ist $\gamma < z = x_1 + y_1 \leqq \gamma$, was in Widerspruch ist. Ebenso kommen wir zu einem Widerspruch für $\alpha + \beta < \gamma$. Also gilt $\gamma = \alpha + \beta$.

Beweis des Satzes 1. Wenn $\Gamma = \{e\}$ ist, dann ist Γ offenbar kommutativ Wählen wir ein beliebiges aber festes Element $f \in \Gamma$, $f > e$. Wir definieren die Abbildung φ der Halbgruppe Γ auf die Menge aller reellen Zahlen: $\varphi(e) = 0$. Sei $h > e$ $(h \in \Gamma)$. Nach den Hilfssätzen 5, 6 und 7, können wir die Menge der positiven rationalen Zahlen P und L definieren

$$(m, n, r, s \in N;\ mn^{-1} \in P \Leftrightarrow h^n \leqq f^m,\ rs^{-1} \in L \Leftrightarrow h^s \geqq f^r)\,.$$

Aus der einfachen Anordnung der Halbgruppe Γ folgt, dass $L \cup P$ die Menge aller positiven rationalen Zahlen ist. Ist

$$mn^{-1}\,,\quad rs^{-1} \in L \cap P\ \ (m, n, r, s \in N)\,,$$

dann ist $h^n = f^m$ und $h^s = f^r$, und $f^{nr} = h^{ns} = f^{ms}$, woraus nach Hilfssatz 13 $nr = ms$ folgt. Die Menge P und L enthalten also höchstens ein gemeinsames Element. Wenn $rs^{-1} \geqq mn^{-1} \in P$ ist $(m, n, r, s \in N)$, dann ist $h^n \leqq f^m$ und $ms \leqq \leqq nr$, und nach Hilfssätzen 5 und 12 ist $h^{ns} \leqq f^{ms} \leqq f^{nr}$, woraus nach den Hilfssätzen 6 und 7 $h^s \leqq f^r$ folgt, ist $rs^{-1} \in P$. Wenn $rs^{-1} \leqq mn^{-1} \in L$ ist $(m, n, r, s \in N)$, dann stellt man auf gleiche Weise fest, dass $rs^{-1} \in L$ ist. Endlich beweisen wir, dass die Mengen P und L nicht leer sind. Sei $h < f$, dann existiert ein solches $r \in N$, dass $h^r \geqq f$ ist, und $r^{-1} \in L$ und $1 \in P$. Sei $h = f$, dann ist $1 \in P \cap L$. Sei $h > f$, dann existiert ein solches $r \in N$, dass $h \leqq f^r$ ist, dann ist $r \in P$ und $1 \in L$. Offenbar bildet das Paar (L, P) Dedekindschnitt auf der Menge aller positiven rationalen Zahlen und bestimmt so eine positive reelle Zahl welche wir mit $\varphi(h)$ bezeichnen.

Es sei $h < e$ $(h \in \Gamma)$. Nach den Hilfssätzen 8, 7, 9 und 10 können wir die Menge der negativen rationalen Zahlen P und L definieren $(m, n, r, s \in N;$ $-mn^{-1} \in P \Leftrightarrow e \geqq h^n f^m$, $-rs^{-1} \in L \Leftrightarrow e \leqq h^s f^r)$. Offenbar ist $L \cup P$ die Menge aller negativen rationalen Zahlen. Ist $-mn^{-1}$, $-rs^{-1} \in L \cap P$ $(m, n, r, s \in N)$, dann ist $e = h^n f^m$ und $e = h^s f^r$, und nach Hilfssatz 8 $h^{nr} f^{mr} = e = h^{ms} f^{mr}$, woraus $h^{nr} = h^{ms}$ folgt, daher ist $nr = ms$ (nach Hilfssatz 13). Die Mengen P und L enthalten also höchstens ein gemeinsames Element.

Wenn $-rs^{-1} \geqq -mn^{-1} \in P$ ist $(m, n, r, s \in N)$, dann ist $e \geqq h^n f^m$ und $ms \geqq \geqq nr$, und nach den Hilfssätzen 8, 9 und 12 ist $e \geqq h^{ns} f^{ms} \geqq h^{ns} f^{nr}$, woraus nach den Hilfssätzen 10 und 11 $e \geqq h^s f^r$ folgt, daher ist $-rs^{-1} \in P$. Wenn $-rs^{-1} \leqq -mn^{-1} \in L$ ist $(m, n, r, s \in N)$, dann stellt man auf gleiche Weise fest, dass $-rs^{-1} \in L$ ist. Es bleibt zu beweisen, dass die Mengen P und L nicht leer sind. Offenbar existieren solche $m, n \in N$, dass $e \geqq h^m f$ und $e \leqq f^n h$ gilt. Nach den Hilfssätzen 3 und 4 ist $e \leqq hf^n$, dann ist $-m^{-1} \in P$ und $-n \in L$. Offenbar bildet das Paar (L, P) den Dedekindschnitt auf der Menge aller negativen rationalen Zahlen, und bestimmt so eine negative reelle Zahl, welche wir wieder mit $\varphi(h)$ bezeichnen.

2. Wir beweisen die Richtigkeit der Behauptung

$$\varphi(hg) = \varphi(h) + \varphi(g) \quad (h, g \in \Gamma)\,. \tag{1}$$

Wenn $h = e$ oder $g = e$ ist, dann ist der Beweis trivial. Wenn $e < h, g$ ist, dann ist $h^n \geqq f^m$, $g^n \geqq f^r$ $(m, n, r \in N) \Rightarrow (hg)^n \geqq f^{m+r}$ (nach dem Hilfssatz 15), was eigentlich bedeutet, dass $mn^{-1} \in L_h$, $rn^{-1} \in L_g \Rightarrow mn^{-1} + rn^{-1} \in L_{hg}$. Weiter ist $h^n \leqq f^m$, $g^n \leqq f^r$ $(m, n, r \in N) \Rightarrow (hg)^n \leqq f^{m+r}$, was bedeutet, dass $mn^{-1} \in P_h$, $rn^{-1} \in P_g \Rightarrow mn^{-1} + rn^{-1} \in P_{hg}$. Die Richtigkeit der Behauptung (1) folgt aus Hilfssatz 18.

Wenn $h < e < g$ und $e < hg$ ist, dann ist $e \leqq h^n f^m$, $g^n \geqq f^r$, $r - m > 0$ $(m, n, r \in N) \Rightarrow (hg)^n \geqq f^{r-m}$ (nach Hilfssatz 17), was bedeutet, dass $-mn^{-1} \in \in L_h$, $rn^{-1} \in L_g$, $rn^{-1} - mn^{-1} > 0 \Rightarrow rn^{-1} - mn^{-1} \in L_{hg}$ gilt. Weiter gilt $-mn^{-1} \in P_h$, $rn^{-1} \in P_g$, $rn^{-1} - mn^{-1} > 0 \Rightarrow rn^{-1} - mn^{-1} \in P_{hg}$. Aus Hilfssatz 18 folgt die Behauptung (1).

Wenn $g < e < h$ und $e < hg$ ist, dann existiert so ein $n \in N$, dass $e < h^n g$ ist, und nach Hilfssatz 4 ist $e < gh^n$, woraus $e < hgh^n$ folgt. Aus der Behauptung $\varphi(hg) + \varphi(h^n) = \varphi(hgh^n) = \varphi(h) + \varphi(gh^n) = \varphi(h) + \varphi(g) + \varphi(h^n)$ folgt die Behauptung (1).

Wenn $e = hg$ ist, dann ist nach Hilfssatz 3 $hg = gh$. Wir können also voraussetzen, dass $e < g$ ist. Aus der Behauptung $g = hg^2$ folgt, dass $\varphi(g) = \varphi(h) + \varphi(g^2) = \varphi(h) + \varphi(g) + \varphi(g)$, und $\varphi(h) + \varphi(g) = 0$ ist.

Wenn $hg < e$ und $e < h$ ist, dann ist $g < e$. Offenbar existiert so ein $n \in N$, dass $e \leqq h^{n+1} g$ ist. Aus der Behauptung $\varphi(h^n) + \varphi(hg) = \varphi(h^{n+1}) = \varphi(h^{n+1}) + \varphi(g) = \varphi(h^n) + \varphi(h) + \varphi(g)$ folgt die Behauptung (1).

Wenn $hg < e$ und $h < e$ ist, dann existiert so ein $n \in N$, dass $e \leqq f^n hg$ und $e < f^n$ ist. Aus der Behauptung $\varphi(f^n) + \varphi(hg) = \varphi(f^n hg) = \varphi(f^n h) + \varphi(g) = \varphi(f^n) + \varphi(h) + \varphi(g)$ folgt die Behauptung (1).

3. Jetzt beweisen wir, dass die Abbildung φ umkehrbar eindeutig ist. Ist $\varphi(h) = \varphi(g)$ $(h, g \in \Gamma)$, dann ist entweder $h = e = g$ oder $e < h, g$, oder $h, g < e$. Aus der Eigenschaft (R) folgt, dass $(h, g) \in \varrho(\Gamma)$ ist. Aus (1) folgt, dass $\varphi(r) = 0$ ist, woraus $r = e$, also $h = g$ folgt.

4. Es sei $h, g \in \Gamma$. Aus der Behauptung $\varphi(hg) = \varphi(h) + \varphi(g) = \varphi(g) + \varphi(h) = \varphi(gh)$ folgt, dass $hg = gh$ ist. Die Halbgruppe Γ ist also kommutativ. Wenn die Halbgruppe Γ das Element $f > e$ nicht enthält, beweisen wir Satz 1 analog mit Hilfe irgend eines Elementes $f' < e$.

Anmerkung. Der Leser stellt fest, dass Satz 1 auch dann gilt, wenn Γ der linksseitigen (statt rechtsseitigen) Kürzungsregel genügt. Somit gilt Satz 1 auch dann, wenn wir voraussetzen, dass Γ von rechts (statt von links) archimedisch geordnet ist. Die Kürzungsregel und die Eigenschaft (R) der Halbgruppe Γ sind aber notwendige Voraussetzungen für Satz 1, wie folgende Bespiele zeigen:

Beispiel 1. Γ sei eine natürlich geordnete Menge der reellen Zahlen. $\Gamma = \langle 0, \infty) - (0, 1)$. Das Multiplizieren in Γ definieren wir auf folgende Weise:

$$xy = x + [y]\,, \quad x > 0\,; \quad xy = y\,, \quad x = 0$$

für $x, y \in \Gamma$, wo $[y]$ das grösste Ganze der reellen Zahl y ist. Offenbar ist 0 das Einserelement des Gruppoides Γ. Also genügt es das assoziative Gesetz nur für positive Zahlen zu beglaubigen. Es sei $x, y, z \geqq 1$, dann ist $(xy)\,z = (x + [y])\,z = x + [y] + [z] = x + [y + [z]] = x(y + [z]) = x(yz)$. Es sei $x \leqq y$; $x, y, z \in \Gamma$. Wenn $y = 0$ ist, dann ist $xz = z \leqq z = yz$. Wenn $x = 0$, $y \geqq 1$ ist, dann ist $xz = z \leqq y + [z] = yz$. Wenn $x, y \geqq 1$ ist, dann ist $xz = x + [z] \leqq y + [z] = yz$. Wenn $z = 0$ ist, dann ist $xz = x \leqq y = zy$. Wenn $z \geqq 1$ ist, dann ist $zx = z + [x] \leqq z + [y] = zy$. Γ ist also eine einfach geordnete Halbgruppe.

Es sei $x, y, z \in \Gamma$, $x < y$, $z \geqq 1$, dann ist $[z] \geqq 1$. Offenbar existiert ein $n \in N$, dass $n \times [z] + [x] \geqq y$ ist, dann ist $z^n x = z + (n - 1) \times [z] + [x] = z - [z] + n \times [z] + [x] \geqq n \times [z] + [x] \geqq y$. Γ ist also archimedisch von links geordnet.

Es sei $xz = yz$ $(x, y, z \in \Gamma)$. Wenn $x = 0$, $y \geqq 1$ ist, dann ist $z = xz = yz = y + [z]$ und $y = z - [z] < 1$, das ist jedoch ein Widerspruch. Offenbar ist $x = 0 \Rightarrow y = 0$, und daher ist $x = y$. Wenn $x, y \geqq 1$ ist, dann ist $x + [z] = xz = yz = y + [z]$, daher ist $x = y$. Also genügt in Γ der rechtsseitigen Kürzungsregel.

Wir stellen leicht fest, dass Γ nicht die Eigenschaft (R) hat, und auch nicht kommutativ ist. Zum Beispiel sind die Zahlen 1, $\frac{3}{2} \in \Gamma$ nicht vertauschbar und in der Relation $\varrho(\Gamma)$ enthalten.

Beispiel 2. Γ sei eine beliebige Menge mit drei Elementen. $\Gamma = (a, e, b)$. Das Multiplizieren in Γ definieren wir mit dem Multiplikationsschema

$$\begin{array}{c|ccc} & a & e & b \\ \hline a & a & a & a \\ e & a & e & b \\ b & b & b & b \end{array}$$

Die Menge Γ ordnen wir folgendermassen an: $a < e < b$. Wir stellen leicht fest, dass Γ eine einfach geordnete Halbgruppe mit dem Einserelement e ist.

Es sei $x < y$ $(x, y \in \Gamma)$. Offenbar ist $bx = b \geqq y$, $ay = a \leqq x$, dann ist Γ von links archimedisch geordnet. Die Halbgruppe Γ hat auch die Eigenschaft (R). Aus den Behauptungen $ea = aa$, $ab \neq ba$ folgt, dass Γ der rechtsseitigen Kürzungsregel nicht genügt und das Multiplizieren in Γ nicht kommutativ ist.

Satz 2. *Auf der Halbgruppe Γ der Endomorphismen auf $\mathfrak{M}$, welche die Eigenschaft* (γ) *hat, sind die Eigenschafen* a) *bis* d) *äquivalent.*

Beweis. Offenbar genügt zu beweisen, dass a, b, c $\Rightarrow$ d gilt. Soll also die Halbgruppe Γ die Eigenschaften a) bis c) haben. Γ ist monozyklisch, von links archimedisch geordnet genügt der rechtsseitigen Kürzungsregel ([2], Hilfssatz 1) und erfüllt die Eigenschaft (R) ([2], Definition 2). Also folgt aus Satz 1, dass Γ monozyklisch und kommutativ ist.

Literaturverzechnis

[1] *G. Birkhoff*: Lattice Theory, New York, rev. ed. 1948.

[2] *B. Pondělíček*: O jisté pologrupě endomorfismů na jednoduše uspořádané množině, I, Čas. pro pěstování matematiky, *84* (1959), 177–182.

Výtah

POZNÁMKA O JISTÉ POLOGRUPĚ ENDOMORFISMŮ NA JEDNODUŠE USPOŘÁDANÉ MNOŽINĚ

BEDŘICH PONDĚLÍČEK, Poděbrady

V článku se zobecňuje na jistou třídu jednoduše uspořádaných pologrup velmi známá a důležitá věta o komutativitě jednoduše archimedovsky uspořádaných grup ([1], XIV). Druhá věta práce je aplikací věty předešlé na jistou pologrupu endomorfismů na jednoduše uspořádané množině (srovnej s větou 3, [2]).

Věta 1. *Nechť Γ je zleva archimedovsky jednoduše uspořádaná pologrupa (s jednotkovým prvkem e), ve které platí pravidlo o krácení zprava. Nechť Γ má následující vlastnost:*

Jestliže $a, b \in \Gamma$; $a, b < e$ $(a, b > e)$, *potom existuje* $r \in \Gamma$, *takové, že* $a = rb$ *nebo* $a = br$ *nebo* $ra = b$ *nebo* $ar = b$. *Potom pologrupa Γ je komutativní a vnořitelná do jednoduše uspořádané aditivní grupy všech reálných čísel.*

Věta 2. *Na pologrupě Γ endomorfismů na jednoduše uspořádané množině $\mathfrak{M}$, která má vlastnost* (γ), *jsou ekvivalentní následující vlastnosti:*

a) *Γ je silně monocyklická*; b) *Γ je monocyklická a platí v ní pravidlo o krácení zleva*; c) *Γ je zleva archimedovsky uspořádaná a divergentní*; d) *Γ je monocyklická a komutativní.*

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕННОЙ ПОЛУГРУППЕ ЭНДОМОРФИЗМОВ НА ПРОСТО УПОРЯДОЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ

БЕДРЖИХ ПОНДЕЛИЧЕК (Bedřich Pondělíček), Подебрады

В статье обобщается для определенного класса просто упорядоченных полугрупп хорошо известная и важная теорема о коммутативности архимедовых просто упорядоченных групп ([1], XIV). Вторая теорема работы является применением предыдущей теоремы к определенной полугруппе эндоморфизмов на просто упорядоченном множестве (сравни с теоремой 3, [2]).

Теорема 1. *Пусть Γ — слева архимедова просто упорядоченная полугруппа (с единицей e), и пусть в ней имеет место правило о сокращении справа. Пусть Γ обладает следующим свойством:*

Если $a, b \in \Gamma$; $a, b < e$ $(a, b > e)$, то существует $r \in \Gamma$ так, чро $a = rb$ или $a = br$ или $ra = b$ или $ar = b$. Тогда полугруппа Γ является коммутативной и включительной в просто упорядоченную аддитивную группу всех действительных чисел.

Теорема 2. *На полугруппе Γ эндоморфизмов на просто упорядоченном множестве $\mathfrak{M}$, которая обладает свойством (γ), эквивалентны следующие свойства:*

а) Γ — сильно моноциклическая; б) Γ — моноциклическая, и в ней имеет место правило о сокращении слева; в) Γ — слева архимедова просто упорядоченная и дивергентная; г) Γ — моноциклическая и коммутативная.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

ZOBECNĚNÍ VĚT O KOŘENECH ANALYTICKÝCH FUNKCÍ

HANA ŠVECOVÁ, Praha

(Došlo dne 9. září 1959)

V článku je s pomocí kombinatoricko-topologických metod podáno zobecnění principu argumentu (věta 3,2), Rouchéovy věty (věta 3,3) a Hurwitzovy věty (věta 3,4) na funkce spojité a nenulové s výjimkou konečného počtu bodů. Dále jsou studovány nulové body a body nespojitosti funkce $\bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$, kde Φ, Ψ jsou meromorfní funkce.

I. ZÁKLADNÍ POJMY

1. POLYEDR

V této práci se omezíme na případ komplexní roviny E_2, jejíž prvky budeme nazývat čísly nebo body.

Definice 1,1. Buď $\Sigma \subset E_2$. Nechť existuje homeomorfní zobrazení F množiny Σ na uzavřenou úsečku. Potom množinu Σ nazveme *jednorozměrným simplexem* a vzory koncových bodů úsečky $F(\Sigma)$ při zobrazení F nazveme *vrcholy* simplexu Σ. Je-li $z \in E_2$, pak bod z nazveme *nulrozměrným* simplexem a zároveň vrcholem tohoto simplexu.

Buď K konečný systém jednorozměrných a nulrozměrných simplexů s vlastnostmi:

a) libovolné dva simplexy Σ_1, Σ_2 systému K jsou buď disjunktní, nebo jejich průnik je vrcholem obou simplexů Σ_1, Σ_2;

b) je-li $\Sigma \in K$, σ vrchol simplexu Σ, pak je $\sigma \in K$.

Nechť dále systém K obsahuje alespoň jeden jednorozměrný simplex. Potom systém K nazveme (jednorozměrným) *komplexem*.

Sjednocení všech simplexů komplexu nazveme (jednorozměrným) *polyedrem*. Je-li polyedr P sjednocením všech simplexů komplexu K, říkáme, že K je *simpliciální rozklad* polyedru P.

Říkáme, že simpliciální rozklad K_1 polyedru P je *zjemněním* simpliciálního rozkladu K polyedru P, jestliže každý simplex komplexu K_1 jako bodová množina je částí některého simplexu komplexu K.

V dalším budeme běžně používat tohoto tvrzení (důkaz je snadný): *Každá Jordanova křivka je polyedr. Je-li Γ Jordanova křivka, pak ke každému kladnému ε existuje simpliciální rozklad křivky Γ, jehož každý simplex má průměr menší než ε.*

2. ORIENTACE UZAVŘENÉ JORDANOVY KŘIVKY

Definice 1,2. *Orientací* jednorozměrného simplexu nazveme funkci $t(z_{i_1}, z_{i_2})$, definovanou na množině všech uspořádaných dvojic vrcholů daného simplexu a nabývající hodnot ± 1 tak, že je $t(z_1, z_2) = - t(z_2, z_1)$.

Buď S jednotková kružnice, ε jedno z čísel $+1$, -1. Definujme orientaci libovolného jednorozměrného simplexu libovolného simpliciálního rozkladu kružnice S takto: Je-li $\Sigma \subset S$ jednorozměrný simplex s vrcholy $z_1 = e^{i\zeta_1}$, $z_2 = e^{i\zeta_2}$, kde $\zeta_1, \zeta_2 \in (-\pi, \pi\rangle$, $\zeta_1 < \zeta_2$, přiřaďme simplexu Σ orientaci t_Σ tak, aby platilo:

$$t_\Sigma(z_1, z_2) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{není-li } e^{i\pi} \text{ vnitřním bodem simplexu}, \\ -\varepsilon, & \text{je-li } e^{i\pi} \text{ vnitřním bodem simplexu}. \end{cases}$$

Potom říkáme, že je dána orientace t kružnice S a kružnici S nazýváme orientovanou.

Buď Γ uzavřená Jordanova křivka, F homeomorfní zobrazení orientované jednotkové kružnice S na Γ. Přiřaďme každému jednorozměrnému simplexu $\Sigma' \subset \Sigma$ s vrcholy z'_1, z'_2 orientaci $t'_{\Sigma'}$:

$$t'_{\Sigma'}(z'_1, z'_2) = t_\Sigma(F^{-1}(z'_1), F^{-1}(z'_2)),$$

kde t je orientace kružnice S a Σ je vzor simplexu Σ' při zobrazení F. Potom říkáme, že je dána *orientace křivky* Γ a křivku Γ nazýváme orientovanou.

Z definice 1,2 plyne **věta:**

Uzavřená Jordanova křivka může mít právě dvě různé orientace.

3. NUMERACE

Definice 1,3. Nechť každému vrcholu jednorozměrného simplexu Σ je přiřazeno některé přirozené číslo. Dvojici čísel odpovídajících vrcholům simplexu Σ budeme psát v neklesajícím pořadí a nazývat *numerací* simplexu Σ. Číslo odpovídající při této numeraci vrcholu z simplexu budeme nazývat numerací vrcholu z.

Jestliže při dané numeraci jednorozměrného simplexu oběma vrcholům odpovídá totéž číslo, pak tuto numeraci nazýváme *degenerovanou*. Numeraci, jež není degenerovaná, nazýváme nedegenerovanou.

Je-li každému vrcholu komplexu K přiřazeno přirozené číslo, říkáme, že je dána numerace komplexu K.

Buď z bod simplexu Σ v komplexu K. Není-li z vrcholem simplexu Σ, pak nosičem bodu z nazýváme simplex Σ. Je-li z vrcholem simplexu Σ, pak nosičem bodu z nazýváme bod z.

Buď K_1 zjemnění simpliciálního rozkladu K polyedru P. Numeraci N_1 komplexu K_1 nazýváme *pokračováním numerace* N komplexu K, jestliže každému vrcholu komplexu K_1 je v numeraci N_1 přiřazeno jedno z čísel numerace jeho nosiče v numeraci N.

V části II budeme potřebovat následující lemma, jež je speciálním případem Spernerova lemmatu (důkaz viz [1], str. 90).

Lemma 1,1. *Buď Σ jednorozměrný simplex s numerací* 1, 2. *Při každém pokračování této numerace na libovolný simpliciální rozklad K simplexu Σ má lichý počet jednorozměrných simplexů komplexu K numeraci* 1, 2.

Zaveďme toto označení: $a_k = 2k - 1$, $b_k = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Definice 1,4. Numeraci simplexu nazveme *přípustnou*, jestliže z každé dvojice a_k, b_k $(k = 1, 2, \ldots)$ se v ní vyskytuje nejvýše jedno číslo. Numeraci komplexu nazveme přípustnou, jestliže vytváří přípustné numerace na všech simplexech komplexu.

4. STUPEŇ NUMERACE

Mějme dánu uzavřenou Jordanovu křivku Γ s orientací t. Buď K simpliciální rozklad polyedru Γ, N přípustná numerace komplexu K čísly $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 3$, $b_2 = 4$. Buď Σ jednorozměrný simplex komplexu K s nedegenerovanou numerací. Označme z_k $(k = 1, 2)$ vrchol simplexu Σ, jemuž odpovídá číslo a_k nebo b_k. Označme β_Σ počet vrcholů simplexu Σ, kterým v numeraci N odpovídají sudá čísla. Přiřaďme simplexu Σ číslo γ_Σ:

$$\gamma_\Sigma = (-1)^{\beta_\Sigma} \cdot t_\Sigma(z_1, z_2) . \tag{1}$$

Definice 1,5. Číslo γ_Σ definované vztahem (1) nazveme *vahou* simplexu Σ.

Buď c_1 jedno z čísel 1, 2, c_2 jedno z čísel 3, 4. Označme $s(c_1, c_2)$ počet simplexů komplexu K s numerací c_1, c_2 a kladnou vahou, $p(c_1, c_2)$ počet simplexů komplexu K s touž numerací a zápornou vahou. V [1], str. 93, je dokázána tato věta:

Rozdíl $s(c_1, c_2) - p(c_1, c_2)$ nezávisí na výběru čísel c_1, c_2.

Definice 1,6. Číslo $\gamma_N = s(c_1, c_2) - p(c_1, c_2)$ nazveme *stupněm numerace* N.

5. ROTACE SPOJITÉ FUNKCE

Buď $\varphi(x + iy) = \varphi_1(x, y) + i\,\varphi_2(x, y)$ spojitá komplexní funkce definovaná a nenulová v bodech uzavřené Jordanovy křivky Γ. Funkce φ_1, φ_2 jsou spojité reálné funkce.

φ_i jsou stejnoměrně spojité na Γ, a tedy existují čísla $\alpha > 0$, $\delta > 0$ tak, že v okolí (ležícím na Γ) poloměru 2δ libovolného bodu z křivky Γ má alespoň jedna z funkcí φ_1, φ_2 stálé znamení a je v absolutní hodnotě větší než α. Označme (pro $i = 1, 2$) F_i množinu všech $z = x + iy \in \Gamma$, pro něž je $\varphi_i(x, y) \geqq \alpha$. Podobně označme G_i $(i = 1, 2)$ množinu všech $z = x + iy \in \Gamma$, pro něž je $\varphi_i(x, y) \leqq -\alpha$. Množiny F_i, G_i zřejmě pokrývají Γ. Označme dále δ_1 menší ze vzdáleností množin F_i, G_i $(i = 1, 2)$. Buď $\delta_0 = \min(\delta, \delta_1)$.

Definice 1,7. *Hvězdou* vrcholu z v komplexu K nazveme množinu bodů všech simplexů komplexu K, jejichž vrcholem je bod z.

Definice 1,8. Buď K simpliciální rozklad křivky Γ, jehož každý simplex má průměr nejvýše δ_0. Očíslujme vrcholy komplexu K tak, že každému vrcholu přiřadíme buď jedno z čísel a_k, kde k jsou indexy těch funkcí φ_i, které jsou v daném vrcholu kladné a na celé jeho hvězdě nezáporné, nebo jedno z čísel b_j, kde j jsou indexy těch funkcí φ_i, které jsou v daném vrcholu záporné a na celé jeho hvězdě nekladné. O numeraci N, konstruované tímto způsobem, budeme říkat, že *je vytvořena funkcí* φ.

Poznámka. Speciálně můžeme každému vrcholu přiřadit buď jedno z čísel a_k, kde k jsou indexy těch F_i, které pokrývají hvězdu daného vrcholu, nebo jedno z čísel b_j, kde j jsou indexy těch G_i, které pokrývají tuto hvězdu. V důkazech budeme používat výhradně této numerace, a to pod názvem *speciální numerace*.

Numerace N z definice 1,8 je zřejmě přípustná. Je tedy definován její stupeň.

Věta. *Stupeň numerace vytvořené funkcí φ nezávisí na výběru simpliciálního rozkladu polyedru Γ a numerace N.* (Důkaz viz [1], str. 95.)

Definice 1,9. Stupeň numerace N vytvořené funkcí φ nazveme *rotací funkce* φ na Γ.

Poznámka. Z definice rotace je vidět, že při změně orientace křivky Γ změní rotace znaménko, nikoliv absolutní hodnotu.

6. HOMOTOPIE

Definice 1,10. Říkáme, že komplexní funkce φ, ψ jsou *homotopní* na křivce Γ, jestliže existuje funkce $X(z, t)$ s hodnotami v E_2, definovaná, spojitá a nenulová na množině $\Gamma \times \langle 0, 1 \rangle$ a splňující podmínky

$$X(z, 0) = \varphi(z)\,, \quad X(z, 1) = \psi(z)$$

pro $z \in \Gamma$.

Věta 1,1. *Jsou-li funkce φ, ψ homotopní na orientované uzavřené Jordanově křivce Γ, pak mají na Γ touž rotaci.*

Důkaz. Z definice 1,8 a 1,9 plyne toto: Je-li Φ_0 spojitá komplexní funkce nenulová na Γ, pak existuje ν tak, že platí: je-li Φ_1 komplexní funkce spojitá a nenulová na Γ a je-li $|\Phi_0(z) - \Phi_1(z)| < \nu$ pro všechna $z \in \Gamma$, potom existuje společná numerace vytvořená funkcí Φ_0 a Φ_1, a tedy obě funkce mají na Γ touž rotaci. Odtud plyne tvrzení věty.

7. INDEX FUNKCE V NULOVÉM BODĚ

Označení. Buď $S_\varrho(z_0)$ kružnice o středu z_0 a poloměru ϱ. Zobrazení $F(z) = \frac{z - z_0}{\varrho}$ zobrazuje homeomorfně kružnici $S_\varrho(z_0)$ na jednotkovou kružnici S. Položme v definici 1,2 $\varepsilon = 1$ a přiřaďme kružnici S příslušnou orientaci t. Označme t^* tu orientaci kružnice $S_\varrho(z_0)$, jež simplexu $\Sigma^0 \subset S_\varrho(z_0)$ s vrcholy z_1^0, z_2^0 přiřazuje orientaci

$$t^*_{\Sigma^0}(z_1^0, z_2^0) = t_{F(\Sigma^0)}(F(z_1^0), F(z_2^0)) .$$

Úmluva. Od tohoto místa až do konce této práce budeme pod názvem orientace kružnice vždy rozumět orientaci t^*; při tom každou kružnici budeme automaticky pokládat za orientovanou.

Buď Γ orientovaná uzavřená Jordanova křivka, G její vnitřek. Buď Φ spojitá komplexní funkce definovaná na $\overline{G}$; nechť Φ má v G jen isolované nulové body, z nichž žádný neleží na Γ; označme je $z_1, z_2, \ldots, z_r$. Kolem každého nulového bodu z_k opišme kružnici S_k^ε o poloměru ε, jejž volíme tak malý, aby všechny uzavřené kruhy T_k^ε s hranicemi S_k^ε ležely v G a neprotínaly se navzájem. Na každé kružnici S_k^ε je definována funkce Φ_k^ε předpisem: $\Phi_k^\varepsilon(z) = \Phi(z)$ pro $z \in S_k^\varepsilon$. Nechť čísla $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ vyhovují podmínkám kladeným na ε. Středová projekce o středu z_k určuje topologické zobrazení F kružnice $S_k^{\varepsilon_1}$ na $S_k^{\varepsilon_2}$ ($F(z) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} z$ pro $z \in S_k^{\varepsilon_1}$). Označme $\Psi_k^{\varepsilon_1}(z) = \Phi(F(z))$ pro $z \in S_k^\varepsilon$. Rotace funkce $\Psi_k^{\varepsilon_1}$ na $S_k^{\varepsilon_1}$ je zřejmě rovna rotaci funkce $\Phi_k^{\varepsilon_2}$ na $S_k^{\varepsilon_2}$. Funkce $\Psi_k^{\varepsilon_1}$, $\Phi_k^{\varepsilon_1}$ jsou na $S_k^{\varepsilon_1}$ homotopní, a tedy (v důsledku věty 1,1) je rotace funkce $\Phi_k^{\varepsilon_1}$ na $S_k^{\varepsilon_1}$ rovna rotaci funkce $\Phi_k^{\varepsilon_2}$ na $S_k^{\varepsilon_2}$. Označme ji γ_k.

Definice 1,11. Číslo γ_k nazveme *indexem* funkce Φ v bodě z_k. Číslo $\sum_{k=1}^{r} \gamma_k$ nazveme *algebraickým počtem* nulových bodů funkce Φ uvnitř křivky Γ.

Věta 1,2. *Algebraický počet nulových bodů funkce Φ uvnitř Γ je v absolutní hodnotě roven absolutní hodnotě rotace funkce Φ na Γ.* (Důkaz viz [1], str. 98.)

II. POMOCNÉ DEFINICE A VĚTY

1. POMOCNÁ FUNKCE A_f

Buď Γ uzavřená Jordanova křivka ($\Gamma \subset E_2$), t její orientace. Zvolme bod $z_0 \in \Gamma$. Buď F homeomorfní zobrazení jednotkové kružnice S ($S \subset E_2$) na křivku

Γ takové, že je $F^{-1}(z_0) = e^{i\pi}$. Buď G zobrazení intervalu $(-\pi, \pi\rangle$ na kružnici S takové, že pro $\zeta \in (-\pi, \pi\rangle$ je $G(\zeta) = e^{i\zeta}$. Parciální zobrazení $G^* = G_{(-\pi,\pi)}$, které převádí interval $(-\pi, \pi)$ na množinu $S \dot{-} e^{i\pi}$, je zřejmě homeomorfní.

Nechť z_1, z_2 jsou dva body křivky Γ, různé od z_0. Potom existuje právě jeden simplex $\Sigma \subset \Gamma$ s vrcholy z_1, z_2, který neobsahuje bod z_0. (Je to simplex $\Sigma = F[G^*(\langle\zeta_1, \zeta_2\rangle)]$, kde $\zeta_i = G^{-1}(F^{-1}(z_i))$ $(i = 1, 2)$.) Uspořádejme body křivky Γ tímto způsobem: pišme $z_1 \prec z_2$, jestliže $t_\Sigma(z_1, z_2) = +1$ (t_Σ je orientace simplexu Σ), $r_0 \prec z$ pro všechna $z \neq z_0$, $z \in \Gamma$. Tato relace zřejmě splňuje axiomy uspořádání. Dále budeme používat těchto označení:

$z \to z^*_-$, jestliže $z \to z^*$, $z \prec z^*$;

$z \to z^*_+$, jestliže $z \to z^*$, $z^* \prec z$;

$z \to z_{0-}$, jestliže $z \to z_0$, $z^1 \prec z$ pro některé $z^1 \in \Gamma$, $z^1 \neq z_0$;

$z \to z_{0+}$, jestliže $z \to z_0$, $z \prec z^1$ pro některé $z^1 \in \Gamma$;

$z^* = \min\limits_{z \in \mathfrak{A} \subset \Gamma} z$, jestliže $z^* \in \mathfrak{A}$ a pro každé $z \in \mathfrak{A}$, $z \neq z^*$ je $z^* \prec z$;

$z^* = \max\limits_{z \in \mathfrak{A} \subset \Gamma} z$, jestliže $z^* \in \mathfrak{A}$ a pro každé $z \in \mathfrak{A}$, $z \neq z^*$ je $z \prec z^*$.

Konečně intervalem (z', z'') (resp. $\langle z', z''\rangle$) nazveme množinu všech $z \in \Gamma$ takových, že platí $z' \prec z \prec z''$ (resp. $z' \preceq z \preceq z''$); intervalem (z_1, z_0) nazveme množinu všech $z \in \Gamma$ takových, že platí $z_1 \prec z$.

Buď f komplexní funkce komplexní proměnné, spojitá a nenulová na Γ. Znakem $\arg f(z)$ (resp. $\arg' f(z)$) budeme značit číslo $\alpha(z)$ (resp. $\alpha'(z)$), pro které platí $f(z) = |f(z)| \,.\, e^{i\alpha(z)}$, $\alpha(z) \in (-\pi, \pi\rangle$ (resp. $f(z) = |f(z)| \,.\, e^{i\alpha'(z)}$, $\alpha'(z) \in \langle 0, 2\pi)$).

Buď $\mathfrak{M}$ množina všech $z \in \Gamma$, pro která je $\arg f(z) = \pi$. Jestliže je množina $\mathfrak{M}$ neprázdná, můžeme sestrojit posloupnost $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$ bodů křivky Γ tímto způsobem:

$$u_1 = \min_{z \in \mathfrak{M}} z\,;$$

$$v_n = \min_{z \in \mathfrak{N}_n} z\,,$$

kde $\mathfrak{N}_n$ je množina všech $z \in \Gamma$ takových, že $u_n \prec z$, $\arg f(z) = 0$;

$$u_{n+1} = \min_{z \in \mathfrak{M}_n} z\,,$$

kde $\mathfrak{M}_n$ je množina všech $z \in \Gamma$ takových, že $v_n \prec z$, $\arg f(z) = \pi$. $(n = 1, 2, \ldots)$.

Věta. *Nechť $\mathfrak{A}$ je uzavřená množina, $\emptyset \neq \mathfrak{A} \subset \Gamma$. Potom existuje bod $\tilde{z} = \min\limits_{z \in \mathfrak{A}} z$. Jestliže pro některý bod $z_1 \in \Gamma$ platí $\mathfrak{A} \subset \langle z_0, z_1\rangle$, pak existuje bod $\tilde{\tilde{z}} = \max\limits_{z \in \mathfrak{A}} z$.*

Důkaz. Z definice orientace plyne, že existuje takové homeomorfní zobrazení H intervalu $(-\pi, \pi)$ na $\Gamma \dot{-} z_0$, že pro $\zeta_1, \zeta_2 \in (-\pi, \pi)$, $\zeta_1 < \zeta_2$ je $H(\zeta_1) \prec H(\zeta_2)$. Buď $z' \in \mathfrak{A}$. Položme $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap \langle z_0, z'\rangle$. Množina $H^{-1}(\mathfrak{B})$ je kompaktní číselná množina, a tedy existuje její minimum $\tilde{\zeta}$. Protože pro $z \in \mathfrak{A}$, $z \operatorname{non} \in \mathfrak{B}$ je $H(\tilde{\zeta}) \prec z$, platí $H(\tilde{\zeta}) = \min\limits_{z \in \mathfrak{A}} z$. Jestliže je $\mathfrak{A} \subset \langle z_0, z_1\rangle$, pak $H^{-1}(\mathfrak{A})$ je rovněž kompaktní číselná množina, a tedy existuje její maximum $\tilde{\tilde{\zeta}}$ a platí $H(\tilde{\tilde{\zeta}}) = \max_{z \in \mathfrak{A}} z$.

Věta. *Buď $\mathfrak{A}$ jedna z množin $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_n$, $\mathfrak{A}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Je-li $\mathfrak{A}$ neprázdná, pak existuje bod $\tilde{z} = \min_{z \in \mathfrak{A}} z$.*

Důkaz. Množina $\mathfrak{A}$ je uzavřená v důsledku spojitosti a nenulovosti funkce f. Věta tedy plyne z předchozí věty.

Věta. *Bodů u_n, a tedy i bodů v_n, je možno sestrojit jen konečný počet.*

Důkaz. Předpokládejme, že bodů u_n existuje nekonečně mnoho. Protože množina Γ je kompaktní, můžeme z nich vybrat posloupnost konvergentní k bodu $u^* \in \Gamma$. Jsou-li u_{n_1}, u_{n_2} dva body z této posloupnosti, $n_1 < n_2$, existuje podle definice bodů u_n, v_n bod v_{n_1} takový, že je $\arg f(v_{n_1}) = 0$, $u_{n_1} \prec v_{n_1} \prec u_{n_2}$. Je tedy $\lim_{k \to \infty} u_{n_k} = u^* = \lim_{k \to \infty} v_{n_k}$, $\arg f(u_{n_k}) = \pi$, $\arg f(v_{n_k}) = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$. Odtud plyne $f(u^*) = 0$, což odporuje předpokladu. Věta je dokázána.

Označme $w_{2m-1} = u_m$, $w_{2m} = v_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Nechť bodů w_n existuje právě r.

Definice 2,1. *Označme A_f funkci definovanou na Γ s těmito vlastnostmi:*

Je-li $\mathfrak{M} = \emptyset$, je $A_f(z) = \arg f(z)$ *pro všechna* $z \in \Gamma$.

Je-li $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, *je*

$$
\begin{aligned}
A_f(z_0) &= \arg f(z_0)\,; \\
A_f(z) &= \arg f(z) \quad \textit{pro} \quad z_0 \prec z \prec w_1\,, \quad \textit{je-li} \quad z_0 \neq w\,; \\
A_f(w_1) &= \lim_{z \to w_1 -} A_f(z)\,, \quad \textit{je-li} \quad z_0 \neq w_1\,; \\
A_f(z) &= \arg' f(z) + 2k_n\pi \quad \textit{pro} \quad w_n \prec z \prec w_{n+1} \quad \textit{při lichém } n\,; \\
A_f(z) &= \arg f(z) + 2k_n\pi \quad \textit{pro} \quad w_n \prec z \prec w_{n+1} \quad \textit{při sudém } n\,; \\
A_f(w_{n+1}) &= \lim_{z \to w_{n+1} -} A_f(z) \quad (n = 1, \ldots, r-1)\,; \\
A_f(z) &= \arg' f(z) + 2k_r\pi \quad \textit{pro} \quad w_r \prec z \quad \textit{při lichém } r\,; \\
A_f(z) &= \arg f(z) + 2k_r\pi \quad \textit{pro} \quad w_r \prec z \quad \textit{při sudém } r\,.
\end{aligned}
$$

Při tom k_n $(n = 1, \ldots, r)$ je voleno tak, aby platilo $\lim_{z \to w_n +} A_f(z) = A_f(w_n)$.

Bod z_0 nazveme výchozím bodem funkce A_f.

Poznámka. Z definice 2,1 je ihned vidět, že A_f je spojitou funkcí z ve všech bodech křivky Γ kromě bodu z_0, kde je spojitá zprava. Funkce A_f obecně závisí na volbě bodu z_0.

Z definice 2,1 ihned plyne tato věta:

Věta. *Nechť hodnota funkce B_f, spojité na $\Gamma \dot{-} z_0$ a spojité zprava v bodě z_0, se liší v každém bodě $z \in \Gamma$ od hodnoty $\arg f(z)$ o celistvý násobek 2π; nechť platí $B_f(z_0) = \arg f(z_0)$, kde z_0 je výchozí bod funkce A_f. Potom je $B_f(z) = A_f(z)$ pro všechna $z \in \Gamma$.*

Definice 2,2. Rozdíl $\lim\limits_{z\to z_{0-}} A_f(z) - A_f(z_0)$ budeme nazývat *změnou funkce A_f na Γ.*

Věta. *Změna funkce A_f nezávisí na volbě výchozího bodu.*

Důkaz. Buď z_0 výchozí bod funkce A_f; příslušné uspořádání značme $\prec$. Buď $\tilde{z}_0$ výchozí bod funkce $\tilde{A}_f$, příslušné uspořádání značme $<$. Snadno se nahlédne, že význam symbolů $z \to z^*_-$, $z \to z^*_+$ je při obou uspořádáních týž. Nechť platí

(2) $$\tilde{A}_f(z_0) = A_f(z_0) + 2k\pi\,.$$

Funkce $\tilde{A}_f(z) - A_f(z)$ je spojitá pro $z_0 \prec z \prec \tilde{z}_0$ a nabývá tam jen hodnot, které jsou celými násobky 2π, dále je spojitá zprava v bodě z_0. Je tedy

(3) $$\begin{aligned} \tilde{A}_f(z) - A_f(z) &= 2k\pi \quad \text{pro} \quad z_0 \preceq z < \tilde{z}_0\,,\\ \lim_{z\to\tilde{z}_{0-}} A_f(z) &= A_f(\tilde{z}_0) + 2k\pi\,. \end{aligned}$$

Nechť změna funkce $\tilde{A}_f$ při výchozím bodě $\tilde{z}_0$ je rovna c, tj.

(4) $$\lim_{z\to\tilde{z}_{0-}} \tilde{A}_f(z) - \tilde{A}_f(\tilde{z}_0) = c\,.$$

Potom podle (3) je

$$\tilde{A}_f(\tilde{z}_0) = A_f(\tilde{z}_0) + 2k\pi - c\,.$$

Funkce $\tilde{A}_f(z) - A_f(z)$ je spojitá pro $\tilde{z}_0 \prec z$ a spojitá zprava v bodě $\tilde{z}_0$. Je tedy

$$\begin{aligned} \tilde{A}_f(z) - A_f(z) &= 2k\pi - c \quad \text{pro} \quad \tilde{z}_0 \prec z\,,\\ \lim_{z\to z_{0-}} A_f(z) &= \tilde{A}_f(z_0) - 2k\pi + c\,, \end{aligned}$$

a tedy vzhledem k (2) a (4)

$$\lim_{z\to z_{0-}} A_f(z) - A_f(z_0) = c = \lim_{z\to\tilde{z}_{0-}} \tilde{A}_f(z) - \tilde{A}_f(z_0)\,.$$

Věta je dokázána.

2. SOUVISLOST FUNKCE A_f S ROTACÍ FUNKCE f

Věta 2,1. *Buď f komplexní funkce komplexní proměnné, spojitá a nenulová na orientované uzavřené Jordanově křivce Γ. Potom rotace funkce f na Γ je rovna změně funkce A_f na Γ, dělené 2π.*

Důkaz. Zaveďme funkci φ definovanou na Γ předpisem $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{|f(z)|}$. Zřejmě je $A_f(z) = A_\varphi(z)$. Z vlastností funkce

$$X(z, t) = t\,f(z) + (1 - t)\,f(z)\,\frac{f(z)}{|f(z)|}$$

plyne, že funkce f, φ jsou na Γ homotopní. Podle věty 1,1 nám tedy stačí vyšetřovat rotaci spojité funkce φ, $|\varphi(z)| = 1$ pro $z \in \Gamma$. Nechť $\varphi(x + iy) = \varphi_1(x, y) + i\,\varphi_2(x, y)$.

Zvolme $\alpha > 0$, $\delta > 0$ tak, aby v okolí poloměru 2δ libovolného bodu $z \in \Gamma$ alespoň jedna z funkcí φ_1, φ_2 měla absolutní hodnotu větší než α a aby bylo $\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Buď K dostatečně jemný simpliciální rozklad křivky Γ (všechny jeho simplexy mají průměr menší než δ_0 z odstavce 5 části I) a N jeho speciální numerace vytvořená funkcí φ (viz pozn. za definicí 1,8). Budeme předpokládat (bez újmy obecnosti), že K obsahuje lichý počet jednorozměrných simplexů.

Nechť simplex $\Sigma \in K$ má numeraci 1, 3. Označme z_1 vrchol simplexu Σ s numerací 1, z_2 vrchol s numerací 3. Je tedy $\varphi_i(z_j) \geqq \alpha$ pro $i, j = 1, 2$.

Označme $A = a_1 + ia_2$, $B = b_1 + ib_2$ čísla s vlastnostmi:

$$|A| = |B| = 1\,; \quad a_1 > 0,\ a_2 = \alpha\,; \quad b_1 = \alpha,\ b_2 = a_1\,.$$

Čísla A, B jsou tím jednoznačně určena a je $\alpha < a_1$ (neboť jinak by bylo $\alpha \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$). Označme $\beta = \arg A = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{a_1}$. Protože pro $j = 1, 2$ je $\frac{\alpha}{a_1} \leqq \frac{\varphi_2(z_j)}{\varphi_1(z_j)} \leqq \frac{a_1}{\alpha}$, platí

$$\beta \leqq \arg \varphi(z_j) = \operatorname{arctg} \frac{\varphi_2(z_j)}{\varphi_1(z_j)} \leqq \frac{\pi}{2} - \beta \quad (j = 1, 2)\,. \tag{5}$$

Naopak platí: Jestliže z_j je vrcholem v komplexu K a platí (5), pak je

$$\frac{\alpha}{a_1} \leqq \frac{\varphi_2(z_j)}{\varphi_1(z_j)} \leqq \frac{a_1}{\alpha}\,,$$

a tedy $\varphi_1(z_j) \geqq \alpha$, $\varphi_2(z_j) \geqq \alpha$; to znamená, že vrchol z_j má numeraci 1 nebo 3.

Dokázali jsme tedy tato dvě tvrzení:

Tvrzení 1. Jestliže simplex $\Sigma \in K$ má numeraci 1, 3, pak pro jeho vrcholy z_1, z_2 platí (5).

Tvrzení 2. Jestliže pro vrchol z_j v komplexu K platí (5), pak vrchol z_j má numeraci 1 nebo 3.

Podobně lze dokázat další dvě tvrzení:

Tvrzení 3. Nechť pro vrchol $z \in K$ platí $|\arg \varphi(z)| < \beta$. Pak z má numeraci 1.

Tvrzení 4. Nechť pro vrchol $z \in K$ platí $\frac{\pi}{2} - \beta < \arg \varphi(z) < \frac{\pi}{2} + \beta$. Pak z má numeraci 3.

V dalším budeme předpokládat, že numerace N má tuto vlastnost: Je-li z_i vrchol některého simplexu komplexu K, $\beta \leqq \arg \varphi(z_i) \leqq \frac{\pi}{2} - \beta$, pak vrchol z_i má numeraci 1, jestliže na celé hvězdě vrcholu z_i je $\varphi_1(z) \geqq \alpha$, a 3, jestliže tomu tak není. (Z věty následující za def. 1,8 plyne, že splněním tohoto speciálního požadavku se nemění hodnota rotace funkce φ.)

Jestliže simplex Σ s vrcholy z_1, z_2 má numeraci 1, 3, pak (podle tvrzení 1) platí $\beta \leqq \arg \varphi(z_i) \leqq \frac{\pi}{2} - \beta$ $(i = 1, 2)$. Nechť vrchol z_1 má numeraci 1, vrchol z_2 numeraci 3. Je-li z_3 druhý vrchol patřící k hvězdě vrcholu z_2, pak je (vzhledem k volbě numerace N)

$$\frac{\pi}{2} - \beta < \arg \varphi(z_3) < \frac{\pi}{2} + \beta$$

a vrchol z_3 má numeraci 3. Zvolme výchozí bod $z_0 \in \Gamma$ tak, aby neležel v žádném simplexu s numerací 1, 3. (To je možné, neboť všech simplexů je lichý počet, a tedy alespoň jeden z nich nemá numeraci 1, 3.)

Buď $\mathfrak{N}$ množina všech vrcholů simplexů s numerací 1,3 ležících na Γ (resp. v intervalu $J \subset \Gamma$). Vrchol $z^1 = \min\limits_{z \in \mathfrak{N}} z$ je vrcholem právě jednoho simplexu Σ^1 s numerací 1, 3, ležícího na Γ (resp. v J); podobně vrchol $z^2 = \max\limits_{z \in \mathfrak{N}} z$ je vrcholem právě jednoho simplexu Σ^2 s numerací 1, 3. Nazvěme Σ^1 prvním a Σ^2 posledním simplexem s numerací 1, 3 na Γ (resp. v J).

Buďte Σ', Σ'' dva simplexy komplexu K s numerací 1, 3. Označme jejich vrcholy z^1, z^2, z^3, z^4 tak, aby bylo $z^1 \prec z^2 \preceq z^3 \prec z^4$. Jestliže v intervalu $\langle z^2, z^3 \rangle$ neleží žádný simplex s numerací 1, 3, pak budeme říkat, že simplexy Σ', Σ'' následují za sebou nebo že simplex s vrcholy z^3, z^4 následuje za simplexem s vrcholy z^1, z^2.

Tvrzení 5. Nechť pro žádné $z \in \Gamma$ není $\arg \varphi(z) = \pi$. Potom je rotace funkce φ i změna funkce A_φ na Γ rovna nule.

Důkaz. Jestliže na Γ neexistuje simplex s numerací 1, 3, je tvrzení zřejmé. Nechť tedy existuje simplex s numerací 1, 3. Dokážeme nyní:

Jestliže dva simplexy s numerací 1, 3 následují za sebou, pak jejich váhy mají různá znamení.

Předpokládejme, že tomu tak není, tj. že např. simplex Σ^* s vrcholy z_1^*, z_2^* a kladnou vahou následuje za simplexem Σ s vrcholy z_1, z_2, který má rovněž kladnou váhu. Označení vrcholů volme tak, aby vrcholy s indexem 1 měly numeraci 1 a vrcholy s indexem 2 numeraci 3. Je tedy $z_1 \prec z_2 \prec z_1^* \prec z_2^*$. Buď z_3 druhý vrchol patřící k hvězdě vrcholu z_2. Vrchol z_3 má numeraci 3 a platí

$z_3 \prec z_1^*$, $\frac{\pi}{2} - \beta < \arg \varphi(z_3) < \frac{\pi}{2} + \beta$, $\beta \leqq \arg \varphi(z_1^*) \leqq \frac{\pi}{2} - \beta$.

Buď $\mathfrak{A}$ množina všech $z \in \langle z_3, z_1^* \rangle$, jež jsou vrcholy simplexů komplexu K a mají numeraci 3; buď $\tilde{z} = \max\limits_{z \in \mathfrak{A}} z$. Je $z_3 \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ konečná, a tedy $\tilde{z}$ existuje a je $z_2 \prec \tilde{z} \prec z_1^*$. Buď $\tilde{\tilde{z}}$ ten vrchol patřící k hvězdě vrcholu $\tilde{z}$, pro nějž je $\tilde{z} \prec \tilde{\tilde{z}}$. Numerace vrcholu $\tilde{\tilde{z}}$ není rovna 3, neboť $\tilde{\tilde{z}}$ non $\in \mathfrak{A}$; není rovna 4, neboť pak by numerace N nebyla přípustná. Kdyby numerace vrcholu $\tilde{\tilde{z}}$ byla rovna 2, platilo by $\arg \varphi(\tilde{\tilde{z}}) > \frac{\pi}{2} + \beta$ (neboť je $\varphi_2(\tilde{\tilde{z}}) \geqq \alpha$) a v intervalu $(\tilde{\tilde{z}}, z_1^*)$ by vzhledem ke spojitosti funkce arg φ existoval bod ζ, pro nějž by platilo arg $\varphi(\zeta) = \frac{\pi}{2}$, a tedy by v intervalu $(\tilde{\tilde{z}}, z_1^*)$ existoval vrchol s numerací 3, což je ve sporu s volbou bodu $\tilde{z}$. Má tedy bod $\tilde{\tilde{z}}$ numeraci 1 a v intervalu $\langle z_2, z_1^* \rangle$ leží simplex s numerací 1, 3, což je ve sporu s předpokladem, že simplexy Σ, Σ^* následují za sebou. Analogicky dojdeme ke sporu, předpokládáme-li, že oba za sebou následující simplexy mají zápornou váhu.

Nechť první simplex s numerací 1, 3 na Γ má kladnou váhu. Je tedy $-\pi < \arg \varphi(z_0) \leqq \frac{\pi}{2} - \beta$ (jinak by v důsledku spojitosti funkce arg $\varphi(z)$ měl první simplex s numerací 1, 3 zápornou váhu). Protože funkce arg φ nenabývá hodnoty π, musí mít poslední simplex s numerací 1, 3 zápornou váhu. Rotace funkce φ na Γ je tedy nulová.

Změna funkce A_φ na Γ je zřejmě nulová, a tedy je tvrzení 5 dokázáno.

Tvrzení 6. Nechť existuje z^0 tak, že je $\arg \varphi(z_0) = \pi$. Potom rotace funkce φ na Γ je rovna změně funkce A_φ na Γ, dělené 2π.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že jsme zvolili $z_0 = z^0$. Nechť w_n $(n = 1, \ldots, r)$ jsou body z definice 2,1. Platí tedy $w_1 = z_0$. Budeme používat tohoto tvrzení:

Buď $1 \leqq n \leqq r$. Symbolem (w_r, w_{r+1}) značme interval (w_r, z_0). Jestliže dva simplexy s numerací 1, 3, ležící v intervalu (w_n, w_{n+1}), za sebou následují, pak jejich váhy mají různá znamení. (Důkaz je zcela analogický důkazu obdobného tvrzení v důkazu tvrzení 5.)

Buď n liché, $1 \leqq n \leqq r - 1$. Je tedy

$$\arg \varphi(w_n) = \arg' \varphi(w_n) = \pi\,, \quad \arg \varphi(w_{n+1}) = \arg' \varphi(w_{n+1}) = 0\,.$$

Nechť platí

$$A_\varphi(w_n) = \arg \varphi(w_n) + 2k_n\pi\,.$$

Jestliže v intervalu (w_n, w_{n+1}) neleží žádný simplex s numerací 1, 3, pak ze spojitosti funkce $\arg' \varphi(z)$ plyne

$$\lim_{z \to w_{n+1}-} \arg' \varphi(z) = 2\pi\,,$$

a tedy

$$A_\varphi(w_{n+1}) = \lim_{z \to w_{n+1}} \arg' \varphi(z) + 2k_n\pi = \arg \varphi(w_{n+1}) + 2(k_n + 1)\,\pi\,. \tag{6}$$

Předpokládejme nyní, že v intervalu (w_n, w_{n+1}) existuje simplex s numerací 1, 3. První simplex tohoto intervalu s numerací 1, 3 musí mít zápornou váhu. Označíme-li tedy s_n (resp. p_n) počet simplexů s numerací 1, 3 a kladnou (resp. zápornou) vahou v intervalu (w_n, w_{n+1}), je

$$A_\varphi(w_{n+1}) = \begin{cases} \arg \varphi(w_{n+1}) + 2(k_n + 1)\,\pi\,, & \text{je-li } s_n - p_n = 0\,, \\ \arg \varphi(w_{n+1}) + 2k_n\pi\,, & \text{je-li } s_n - p_n = -1\,. \end{cases} \tag{7}$$

Položíme-li $A_\varphi(w_{r+1}) = \lim\limits_{z \to z_0 -} A_\varphi(z)$, $(w_r, w_{r+1}) = (w_r, z_0)$, můžeme postupovat analogicky dále: Nechť je

$$A_\varphi(w_{n+1}) = \arg \varphi(w_{n+1}) + 2l_n\pi .$$

Neexistuje-li v intervalu (w_{n+1}, w_{n+2}) simplex s numerací 1, 3, pak je

$$\lim_{z \to w_{n+2}-} \arg \varphi(z) = -\pi = \arg \varphi(z) - 2\pi ,$$

a tedy

$$A_\varphi(w_{n+2}) = \arg \varphi(w_{n+2}) + 2(l_n - 1)\pi . \tag{8}$$

Jestliže v intervalu (w_{n+1}, w_{n+2}) existuje simplex s numerací 1, 3, pak první simplex s numerací 1, 3 má kladnou váhu. Je tedy

$$A_\varphi(w_{n+2}) = \begin{cases} \arg \varphi(w_{n+2}) + 2l_n\pi , & \text{je-li } s_{n+1} - p_{n+1} = 1 , \\ \arg \varphi(w_{n+2}) + 2(l_n - 1)\pi , & \text{je-li } s_{n+1} - p_{n+1} = 0 . \end{cases} \tag{9}$$

Shrneme-li výsledky (6), (7), (8), (9), dostáváme pro liché n, $1 \leqq n \leqq r - 1$

$$A_\varphi(w_{n+2}) = \begin{cases} A_\varphi(w_n) + 2\pi , & \text{je-li } (s_n + s_{n+1}) - (p_n + p_{n+1}) = 1 , \\ A_\varphi(w_n) , & \text{je-li } (s_n + s_{n+1}) - (p_n + p_{n+1}) = 0 , \\ A_\varphi(w_n) - 2\pi , & \text{je-li } (s_n + s_{n+1}) - (p_n + p_{n+1}) = -1 . \end{cases} \tag{10}$$

Označme $s = \sum\limits_{n=1}^{r} s_n$, $p = \sum\limits_{n=1}^{r} p_n$. Je-li r sudé, dává (10) tento výsledek:

$$\lim_{z \to z_0 -} A_\varphi(z) = A_\varphi(z_0) + 2k\pi ,$$

kde $k = s - p$ je rotace funkce φ na Γ.

Nechť je nyní r liché. Je tedy $\arg \varphi(w_r) = \arg' \varphi(w_r) = \pi$. Funkce $\arg' \varphi(z)$ je spojitá v intervalu (w_r, z_0) a nenabývá tam hodnoty 0. První simplex intervalu (w_r, z_0) s numerací 1, 3 má zápornou váhu, poslední simplex má kladnou váhu. Je tedy $s_r - p_r = 0$, $\lim\limits_{z \to z_0 -} A_\varphi(z) = A_\varphi(w_r)$. Platí tedy i v tomto případě

$$\lim_{z \to z_0 -} A_\varphi(z) - A_\varphi(z_0) = 2k\pi ,$$

kde $k = s - p$ je rotace funkce φ na Γ. Tvrzení 6 je dokázáno.

Věta 2,1 je zřejmým důsledkem dokázaných tvrzení.

3. ZMĚNA ARGUMENTU A ROTACE SPOJITÉ FUNKCE

Označení. Symbolem $\gamma_\varphi(z_0)$ budeme značit index funkce φ v bodě z_0.

Lemma 2,1. *$\varphi(z)$, $\psi(z)$ buďte komplexní funkce, spojité a nenulové na Γ. Potom změna funkce $A_{\varphi.\psi}$ na Γ je rovna součtu změny funkce A_φ a změny funkce A_ψ na Γ.*

Důkaz. Označme $\chi(z) = \varphi(z) . \psi(z)$ pro $z \in \Gamma$. z_0 buď výchozí bod funkcí

A_χ, A_φ, A_ψ. Funkce $A_\chi(z)$, $A_\varphi(z) + A_\psi(z)$ jsou spojité pro každé $z \in \Gamma$, $z \neq z_0$, a spojité zprava v bodě z_0. Je-li $z \in \Gamma$, pak existuje celé číslo $l(z)$ tak, že

$$\omega(z) = A_\chi(z) - A_\varphi(z) - A_\psi(z) = 2l(z)\,\pi\,.$$

Funkce ω je spojitá na každé souvislé podmnožině křivky Γ neobsahující z_0, a tedy je tam konstantní. Na druhé straně ke každé dvojici bodů $z_1, z_2 \in \Gamma$, $z_1 \neq z_0 \neq z_2$, existuje souvislá podmnožina (simplex) křivky Γ, která obsahuje body z_1, z_2 a neobsahuje bod z_0. Je tedy $l(z) = l$ pro všechna $z \neq z_0$. Dále je

$$\omega(z_0) = \lim_{z \to z_0+} \omega(z) = 2l\pi\,, \quad \lim_{z \to z_0-} \omega(z) = 2l\pi\,,$$

a proto platí

$$\lim_{z \to z_0-} \omega(z) - \omega(z_0) =$$
$$= (\lim_{z \to z_0-} A_\chi(z) - A_\chi(z_0)) - (\lim_{z \to z_0-} A_\varphi(z) - A_\varphi(z_0) + \lim_{z \to z_0-} A_\psi(z) - A_\psi(z_0)) = 0\,.$$

Lemma je dokázáno.

Z věty 2,1 plyne, že lemma 2,1 je možno formulovat ve tvaru:

Lemma 2,1'. *$\varphi(z)$, $\psi(z)$ buďte komplexní funkce, spojité a nenulové na Γ. Potom rotace funkce $\varphi\,.\,\psi$ na Γ je rovna součtu rotace funkce φ a rotace funkce ψ na Γ.*

Věta 2,2. *Buď z_0 k-násobný nulový bod holomorfní funkce φ. Potom index funkce φ v bodě z_0 je roven k.*

Důkaz. Nechť $\varphi(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ v oblasti G obsahující bod z_0. Je $k \geqq 0$, $a_k \neq 0$. Můžeme tedy psát

$$\varphi(z) = (z - z_0)^k\,.\,\psi(z)\,,$$

kde $\psi(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-k}$. Je $\psi(z_0) = a_k \neq 0$, a tedy z věty 1,2 plyne $\gamma_\psi(z_0) = 0$.

Buď S_ε kružnice o středu z_0 a poloměru ε; položme $\chi(z) = z - z_0$. Změna funkce A_χ na S_ε je zřejmě rovna jedné, a tedy $\gamma_\chi(z_0) = 1$. Podle lemmatu 2,1' je $\gamma_\varphi(z_0) = k\,.\,\gamma_\chi(z_0) + \gamma_\psi(z_0) = k$. Věta je dokázána.

Buď z_0 bod vnitřku křivky Γ, $\varphi(z) = z - z_0$. Funkce φ má uvnitř Γ právě jeden nulový bod z_0 a index funkce φ v bodě z_0 je roven jedné. Podle věty 1,2 je tedy rotace funkce φ na Γ v absolutní hodnotě rovna jedné. Při tom hodnota rotace funkce φ na Γ nezávisí na výběru bodu z_0, neboť platí toto tvrzení:

Tvrzení. Nechť z_0, z_1 jsou dva body ležící uvnitř křivky Γ. Potom funkce $\varphi(z) = z - z_0$ a $\psi(z) = z - z_1$ jsou na Γ homotopní.

Důkaz. Buď G vnitřek Γ. G je souvislá množina, a tedy lze body z_0, z_1 spojit lomenou čarou L ležící v G. Buď F homeomorfní zobrazení intervalu $\langle 0, 1\rangle$ na L takové, že je $F(0) = z_0$, $F(1) = z_1$. Funkce $X(z, t) = z - F(t)$ je spojitá a nenulová na $\Gamma \times \langle 0, 1\rangle$ a je $X(z, 0) = z - z_0$, $X(z, 1) = z - z_1$.

Tvrzení je tedy dokázáno.

Označení. Buď z_0 bod vnitřku křivky Γ. Označme t^* tu orientaci křivky Γ, při níž je rotace funkce $\varphi(z) = z - z_0$ na Γ rovna jedné.

Úmluva. Od tohoto místa budeme pod názvem *orientace uzavřené Jordanovy křivky* vždy rozumět orientaci t^*; při tom každou uzavřenou Jordanovu křivku budeme automaticky pokládat za orientovanou.

Definice 2,3. Za předpokladu orientace t^* křivky Γ budeme změnu funkce A_f na Γ nazývat *změnou argumentu* funkce f na Γ.

Nyní, když máme určitým způsobem definovánu orientaci křivky Γ, můžeme formulovat tuto větu:

Věta 2,3. *Buď φ spojitá funkce definovaná na uzávěru oblasti, jejíž hranicí je uzavřená Jordanova křivka Γ. Nechť je $\varphi(z) \neq 0$ pro $z \in \Gamma$. Potom algebraický počet nulových bodů funkce φ uvnitř Γ je roven rotaci funkce φ na Γ.*

Důkaz věty 2,3 je proveden v [1], str. 98. Součástí tohoto důkazu je důkaz tvrzení, obsaženého v následujícím lemmatu.

Lemma 2,2. *Buď T uzávěr oblasti, jejíž hranici tvoří uzavřená Jordanova křivka Γ; $z_1, z_2, \ldots, z_r$ nechť jsou body této oblasti. S_k^ε $(k = 1, 2, \ldots, r)$ buď kružnice o středu z_k a poloměru ε takovém, že platí:*

a) *je-li T_k^ε uzavřený kruh, jehož hranicí je kružnice S_k^ε, pak je $T_k^\varepsilon \subset T$;*

b) *pro $i \neq k$ je $T_i^\varepsilon \cap T_k^\varepsilon = \emptyset$.*

Nechť funkce Φ, definovaná na množině $T_1 = \overline{T - \bigcup_{k=1}^{r} T_k^\varepsilon}$ je na T_1 spojitá a nenulová. Označme γ rotaci funkce Φ na Γ, γ_k rotaci funkce Φ na S_k^ε. Potom platí $\gamma = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k$.

Poznámka. Z vět 2,1, 2,2 a 2,3 plyne přímo princip argumentu pro holomorfní funkce, a to s vynecháním předpokladu, že křivka Γ je rektifikace schopná.

III. ZOBECNĚNÍ VĚT Z TEORIE ANALYTICKÝCH FUNKCÍ

1. ZOBECNĚNÍ PRINCIPU ARGUMENTU A ROUCHÉOVY A HURWITZOVY VĚTY

Rozšíříme nyní pojem indexu funkce v bodě na libovolný bod, v jehož okolí (neobsahujícím daný bod) je uvažovaná funkce spojitá a nenulová.

Nechť funkce φ je definována v kruhovém okolí G bodu z_0. Nechť φ je spojitá a nenulová na množině $G \dot{-} z_0$. Buď S_ε kružnice o středu z_0 a poloměru ε takovém, že je $S_\varepsilon \subset G$. Rotace funkce φ na S_ε nezávisí na ε (viz 7. odst. I. části). Označme ji $\gamma_\varphi(z_0)$.

Definice 3,1. Číslo $\gamma_\varphi(z_0)$ nazveme *indexem funkce φ v bodě z_0*. Jestliže funkce φ má uvnitř křivky Γ jen isolované nulové body a body nespojitosti, pak součet indexů funkce φ ve všech nulových bodech a bodech nespojitosti uvnitř křivky Γ nazveme *algebraickým počtem nulových bodů a bodů nespojitosti* funkce φ uvnitř Γ.

Věta 3,1. *Buď z_0 k-násobný pól funkce φ. Potom index funkce φ v bodě z_0 je roven $-k$.*

Důkaz je analogický důkazu věty 2,2.

Věta 3,2. *Nechť funkce f má v $\overline{G}$ jen konečný počet nulových bodů a bodů nespojitosti a je spojitá a nenulová na Γ. Potom algebraický počet nulových bodů a bodů nespojitosti funkce f, ležících uvnitř Γ, je roven změně argumentu funkce f na Γ.*

Důkaz. Označme $z_1, \ldots, z_r$ všechny nulové body a body nespojitosti funkce f ležící uvnitř Γ. Opišme kolem každého bodu z_k kružnici S_k^ε o poloměru ε takovém, že uzavřený kruh T_k^ε s hranicí S_k^ε leží celý v G a žádné dva z těchto kruhů nemají společný bod. Funkce f je na množině $G - \bigcup_{k=1}^{r} T_k^\varepsilon$ spojitá a nenulová. Podle lemmatu 2,2 je rotace funkce f na Γ rovna součtu rotací funkce f na S_k^ε, a tedy (viz věta 2,1) věta platí.

Věta 3,3. *Nechť funkce f, φ mají v $\overline{G}$ jen konečný počet bodů nespojitosti a jsou spojité na Γ. Nechť funkce f, $f + \varphi$ mají v G jen konečný počet nulových bodů. Nechť pro $z \in \Gamma$ platí $|f(z)| > |\varphi(z)|$. Potom algebraický počet nulových bodů a bodů nespojitosti funkce $f(z) + \varphi(z)$ uvnitř Γ je týž jako u funkce f.*

Důkaz. Podle předpokladu je $|f(z)| > |\varphi(z)| \geqq 0$, a tedy $f(z) \neq 0$ na Γ. Nechť $X(z, t) = f(z) + t\,\varphi(z)$. Funkce X je spojitá na $\Gamma \times \langle 0, 1\rangle$ a je

$$|X(z, t)| = |f(z) + t\,\varphi(z)| \geqq |f(z)| - t|\varphi(z)| > 0\,.$$

Platí $X(z, 0) = f(z)$, $X(z, 1) = f(z) + \varphi(z)$. Funkce $f(z) + \varphi(z)$, $f(z)$ jsou tedy homotopní na Γ a věta plyne z věty 3,1.

Věta 3,4. *Nechť funkce $f, f_1, f_2, f_3, \ldots$ mají v $\overline{G}$ jen konečný počet nulových bodů a bodů nespojitosti a jsou spojité na Γ. Nechť funkce f je nenulová na Γ a $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ stejnoměrně na Γ. Potom existuje číslo $\nu \geqq 0$ tak, že pro $n > \nu$ má funkce f_n uvnitř Γ stejný algebraický počet nulových bodů a bodů nespojitosti jako funkce f.*

Důkaz. Označme pro $z \in \Gamma$ $\chi_n(z) = f_n(z) - f(z)$. Buď $\varrho = \min_{z\in\Gamma} |f(z)|$. Podle předpokladu je $\varrho > 0$. Ze stejnoměrné konvergence funkcí f_n plyne, že existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $|\chi_n(z)| < \varrho$ pro $z \in \Gamma$. Protože je $\varrho \leqq |f(z)|$, platí pro $n > n_0$ $|\chi_n(z)| < |f(z)|$ a podle věty 3,2 má funkce $f(z) + \chi_n(z) = f_n(z)$ uvnitř Γ stejný algebraický počet nulových bodů a pólů jako $f(z)$. Stačí tedy položit $\nu = n_0$.

Poznámka. Z těchto vět a z věty 3,1 ihned vyplývá Rouchéova a Hurwitzova věta pro funkce holomorfní až na póly.

2. ZÁVISLOST INDEXU FUNKCE $\bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$ NA TVARU FUNKCÍ Φ, Ψ

Vyšetřujme nyní funkce tvaru $f(z) = \bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$, kde Φ, Ψ jsou holomorfní (resp. meromorfní). Nulové body těchto funkcí na rozdíl od funkcí holomorfních nemusí být isolované, mohou tvořit celé čáry. V dalším si budeme všímat pouze isolovaných nulových bodů. Zjistili jsme, že index holomorfní funkce v daném bodě se lehce určí z koeficientů Taylorova rozvoje této funkce. Rozvineme nyní funkci $f = \bar{z}\Phi + \Psi$ v řadu analogickou řadě Taylorově, z jejíchž koeficientů lze určit index této funkce v isolovaném nulovém bodě (resp. bodě nespojitosti).

Věta 3,5. *Buďte Φ, Ψ funkce holomorfní v okolí bodu z_0, který je nulovým bodem funkce $f(z) = \bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$. Pišme funkce Φ, Ψ ve tvaru*

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n\,, \quad \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n\,.$$

Buď k celé číslo, $k \geqq 1$. Nechť platí

1. $a_i = b_i = 0$ *pro* $0 \leqq i \leqq k - 2$,
2. $a_{k-1}\bar{z}_0 + b_{k-1} = 0$,
3. *alespoň jedno z čísel* $|a_{k-1}|$, $|a_k\bar{z}_0 + b_k|$ *je různé od nuly.*

Potom platí: Jestliže je $|a_{k-1}| \neq |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, pak z_0 je isolovaným nulovým bodem funkce f; v případě, že $|a_{k-1}| < |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, je $\gamma_f(z_0) = k$, a v případě, že $|a_{k-1}| > |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, je $\gamma_f(z_0) = k - 2$. Je-li $|a_{k-1}| = |a_k\bar{z}_0 + b_k|$ a je-li z_0 isolovaným nulovým bodem funkce f, potom platí $k - 2 \leqq \gamma_f(z_0) \leqq k$. (Přesnější kritérium pro poslední případ je obsaženo v důkazu.)

Důkaz. Všimněme si, že věta 3,5 neklade na holomorfní funkce Φ, Ψ žádné omezující podmínky kromě předpokladu pro případ $|a_{k-1}| = |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, že nulový bod z_0 je isolovaný. Jsou-li Φ, Ψ holomorfní funkce, pak existuje k tak, že platí 1 a 3. Můžeme tedy psát $f(z) = (z - z_0)^{k-1} \,.\, A(z)$, kde $A(z) = \sum_{n=k-1}^{\infty} (a_n\bar{z} + b_n)(z - z_0)^{n-k+1}$. Je-li $A(z_0) = a_{k-1}\bar{z}_0 + b_{k-1} = 0$, je splněna i podmínka 2. V případě, že $A(z_0) \neq 0$, jsou splněny podmínky 1, 2, 3, dosadíme-li za k číslo $k - 1$.

Označme $u = z - z_0$; nechť Φ, Ψ jsou holomorfní a nenulové pro $|u| \leqq r_1$. Uvažujme body $u \in S_r$, kde S_r je kružnice se středem v počátku a poloměrem $r \leqq r_1$. Potom je

$$\begin{aligned}(11) \qquad f(z) = f(u + z_0) = f^*(u) &= \sum_{n=0}^{\infty}[(a_n\bar{z}_0 + b_n)\, u^n + a_n r^2 u^{n-1}] = \\ &= [c_k u^k + c_{k+1}u^{k+1} + \ldots] + [a_{k-1}r^2u^{k-2} + a_k r^2 u^{k-1} + \ldots]\,,\end{aligned}$$

kde $c_n = a_n\bar{z}_0 + b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Protože je $f^*(0) = 0$, platí $c_0 = 0$.

Nechť nejdříve platí $|a_{k-1}| \neq |a_k\bar{z}_0 + b_k|$. Předpokládejme, že je $k \geqq 2$. Z předpokladu vyplývá, že pro $0 < |u| = r \leqq r_1$ je $a_{k-1}r^2u^{k-2} + c_ku^k \neq 0$. Dokážeme, že existuje r_2 tak, že funkce $a_{k-1}r^2u^{k-2} + c_ku^k$ je pro $r < r_2$ homotopní s f^* na S_r.

Definujme pro všechna $z \in E_2$ funkce

$$f_1(u) = a_{k-1}r^2u^{k-2}\,, \quad f_2(u) = c_ku^k\,.$$

Funkce $f_1(u) + f_2(u)$ nemá uvnitř S_{r_1} nulový bod různý od nuly. Zřejmě existuje r_2 tak, že pro $r \leqq r_2$ platí

$$||c_k| - |a_{k-1}|| > r\,\{[|a_k| + |a_{k+1}|\,r_1 + |a_{k+2}|\,r_1^2 + \ldots] + \\ + [|c_{k+1}| + |c_{k+2}|\,r_1 + \ldots]\}\,.$$

Ale odtud plyne pro $|u| = r \leqq r_2$

$$|f_1(u) + f_2(u)| = r^k \left|a_{k-1} + c_k\frac{u^2}{r^2}\right| \geqq ||c_k| - |a_{k-1}||\,r^k >$$
$$> r^{k+1}\{[|a_k| + |a_{k+1}|\,r_1 + \ldots] + [|c_{k+1}| + |c_{k+2}|\,r_1 + \ldots]\} \geqq$$
$$\geqq r^{k+1}\left|[a_k + a_{k+1}u + \ldots] + \left[c_{k+1}\frac{u^2}{r^2} + c_{k+2}\frac{u^3}{r^2} + \ldots\right]\right| =$$
$$= |[a_kr^2u^{k-1} + a_{k+1}r^2u^k + \ldots] + [c_{k+1}u^{k+1} + c_{k+2}u^{k+2} + \ldots]| =$$
$$= |f^*(u) - (f_1(u) + f_2(u))|\,.$$

Buď $\varepsilon \leqq r_2$. Definujme pro $|u| \leqq r_2$ holomorfní funkce

$$\varphi_1(u) = a_{k-1}\varepsilon^2u^{k-2}\,, \quad \varphi(u) = \sum_{n=k+1}^{\infty} c_nu^n + \sum_{n=k}^{\infty} a_n\varepsilon^2u^{n-1}\,.$$

Pro $u \in S_\varepsilon$ je

$$|\varphi_1(u) + f_2(u)| = |f_1(u) + f_2(u)| > |f^*(u) - (f_1(u) + f_2(u))| = |\varphi(u)|\,,$$

a tedy z Rouchéovy věty plyne, že funkce $f_1 + f_2$, f^* mají touž rotaci na S_ε. Je-li $|a_{k-1}| < |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, je podle Rouchéovy věty a podle věty 2,2 rotace funkce $f_1 + f_2$ na S_ε rovna k, je-li $|a_{k-1}| > |a_k\bar{z}_0 + b_k|$, je rotace funkce $f_1 + f_2$ na S_ε rovna $k - 2$. Z definice funkce f^* plyne, že rotace funkce f^* na S_ε je rovna indexu funkce f v bodě z_0.

Je-li $k = 1$, pak pro $u \neq 0$ je $f^*(u) = \frac{1}{u}\,.\,g(u)$, kde $g(u) = [c_1u^2 + c_2u^3 + \ldots] + [a_0r^2 + a_1r^2u + a_2r^2u^2 + \ldots]$. Z předešlé části důkazu plyne, že pro $|a_0| < |c_1|$ je rotace funkce g na S_ε rovna 2, a tedy (viz lemma 2,1') $\gamma_f(z_0) = 1$. Podobně pro $|a_0| > |c_1|$ je $\gamma_f(z_0) = -1$.

Nechť nyní $|a_{k-1}| = |a_k\bar{z}_0 + b_k|$. Položme

$$\lambda = \frac{1}{k}\arg\frac{c_k}{a_{k-1}}\,, \quad u = v\,.\,e^{-i\lambda}\,.$$

Místo funkce f zkoumejme funkci proměnné v

$$\tilde{f}(v) = \frac{f^*(u)}{a_{k-1}},$$

kterou je možno zapsat (s použitím předpokladu, že je $\left|\frac{c_k}{a_{k-1}}\right| = 1$) ve tvaru

$$\tilde{f}(v) = v^{k-2}\{[v^2 + \alpha_{k+1}v^3 + \alpha_{k+2}v^4 + \ldots] + [r^2 + \beta_k r^2 v + \beta_{k+1} r^2 v^2 + \ldots]\},$$

kde $\alpha_n = \frac{c_n}{a_{k-1}} e^{-in\lambda}$, $\beta_n = \frac{a_n}{a_{k-1}} e^{-i(n-1)\lambda}$.

Nechť pro $0 < |u| \leqq \varrho_1$ je $f^*(u) \neq 0$. Funkce $\tilde{f}, f^*$ jsou zřejmě homotopní na kružnici S_r pro $r \leqq \varrho$.

Píšeme-li $v = x + iy$, pak platí $v^2 + r^2 = v(v + \bar{v}) = v \cdot 2x$. Má-li funkce $\tilde{f}$ na kružnici S_r rotaci l, pak funkce

$$F(v) = \frac{\tilde{f}(v)}{v^{k-1}}$$

má na S_r rotaci $l - k + 1$ a platí

$$F(v) = 2x + r^2 \left\{\left[\alpha_{k+1} \frac{v^2}{r^2} + \alpha_{k+2} \frac{v^3}{r^2} + \ldots\right] + [\beta_k + \beta_{k+1} v + \beta_{k+2} v^2 + \ldots]\right\}.$$

Označme

$$J = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right).$$

Snadno se dokáže, že existuje číslo $\varrho_2 \leqq \varrho_1$ tak, že pro $r \leqq \varrho_2$, $\arg v$ non $\in J$ je

$$|2x| > |\mathrm{Re}\,(F(v) - 2x)|,$$

a tedy

(12) $$\operatorname{sgn} \mathrm{Re}\,(F(v)) = \operatorname{sgn} x \quad \text{pro} \quad r \leqq \varrho_2, \quad \arg v \text{ non} \in J.$$

Zaveďme označení (při značení $v = x + iy$):

$$g_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k+n} v^{n+1}, \quad g_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_k,$$

$$G(x, y) = \mathrm{Re}\,(F(v)) = 2x + \mathrm{Re}\,(g_1(x, y)) + (x^2 + y^2)\,\mathrm{Re}\,(g_2(x, y)).$$

g_1, g_2 jsou analytické funkce, proto jejich reálné části mají spojité parciální derivace. Odtud plyne existence a spojitost parciálních derivací funkce G. Dále je $\frac{\partial G}{\partial x}(0, 0) = 2 \neq 0$. Rovnicí $G(x, y) = 0$ je tedy v jistém okolí počátku definováno x implicitně jako funkce proměnné y se spojitou derivací.

Můžeme tedy zvolit $r \leqq \varrho_2$ tak, že na kružnici S_r leží právě dva nulové body funkce G. Označme je v_1, v_2, a to tak, aby bylo $\mathrm{Im}(v_1) > 0$ (je tedy vzhledem k (12) $\mathrm{Im}(v_2) < 0$).

Nyní se již z definice rotace lehce dokáže, že platí:

Jestliže je $\mathrm{Im}(F(v_1)) < 0$, $\mathrm{Im}(F(v_2)) > 0$, pak $\gamma_F(0) = -1$.

Jestliže je $\operatorname{sgn} \mathrm{Im}(F(v_1)) = \operatorname{sgn} \mathrm{Im}(F(v_2))$, pak $\gamma_F(0) = 0$.

Jestliže je $\mathrm{Im}(F(v_1)) > 0$, $\mathrm{Im}(F(v_2)) < 0$, pak $\gamma_F(0) = 1$.

Věta plyne ze vztahu $\gamma_f(z_0) = \gamma_F(0) + k - 1$.

Věta 3,6. *Buďte Φ, Ψ holomorfní funkce, z isolovaný nulový bod funkce $f(z) = \bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$. Potom platí $\gamma_f(z_0) \geqq -1$.*

Důkaz. Buď S_ε kružnice se středem z_0 a poloměrem ε takovým, že uvnitř S_ε a na S_ε je $f(z) \neq 0$. Pro $z \in S_\varepsilon$ platí

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n ,$$

kde $\alpha_{-1} = a_0\varepsilon^2$, $\alpha_0 = a_1\varepsilon^2$, $\alpha_n = a_n\bar{z}_0 + b_n + a_{n-1}\varepsilon^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Položíme-li $\beta_n = \alpha_{n-1}$, je

$$f(z) = (z - z_0)^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^n .$$

Definujme pro všechna $z \in S_\varepsilon$ funkci

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z - z_0)^n$$

(ε je stále pevné).

g je holomorfní funkce, a tedy je uvnitř S_ε spojitá a má tam pouze isolované nulové body. Dále je $g(z) \neq 0$ pro $z \in S_\varepsilon$. Protože rotace funkce g na S_ε je rovna součtu indexů funkce g v nulových bodech uvnitř S_ε, je rotace funkce g na S_ε nezáporná. Funkce $(z - z_0)^{-1} \cdot g(z)$ je na S_ε homotopní s f, a tedy je $\gamma_f(z_0) \geqq -1$. Věta je dokázána.

Nechť nyní funkce Φ, Ψ jsou holomorfní v oblasti G až na póly; funkce $f(z) = \bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$ nechť má v G jen isolované nulové body. Je-li z_0 bodem nespojitosti funkce f, pak z_0 je nutně pólem alespoň jedné z funkcí Φ, Ψ. Body nespojitosti funkce f budeme pro stručnost nazývat póly funkce f.

Buď z_0 s-násobný pól funkce Φ a t-násobný pól funkce Ψ ($s = 0$, příp. $t = 0$ značí, že z_0 není pólem funkce Φ, příp. Ψ). Označme $r = \max(s, t)$. Je tedy možno psát

$$\Phi(z) = (z - z_0)^{-r} \cdot \Phi_1(z) , \quad \Psi(z) = (z - z_0)^{-r} \cdot \Psi_1(z) ,$$
$$f(z) = (z - z_0)^{-r} (\bar{z}\,\Phi_1(z) + \Psi_1(z)) = (z - z_0)^{-r} \cdot g(z) ,$$

kde Φ_1, Ψ_1 jsou holomorfní v bodě z_0. Je-li $g(z_0) \neq 0$, pak je $\gamma_g(z_0) = 0$, $\gamma_f(z_0) = -r$. Je-li $g(z_0) = 0$, pak podle lemmatu 2,1' a věty 3,1 platí $\gamma_f(z_0) = \gamma_g(z_0) - r$. Na funkci g lze aplikovat větu 3,5.

IV. ZÁVĚR

Vět dokázaných v tomto článku lze s úspěchem užít při řešení problémů rovinné pružnosti. Naznačíme příklad jejich *praktického použití.*

Při zjišťování napětí fotoelasticimetrickou metodou se usuzuje na průběh napětí v tělese ze systému čar zvaných isokliny. Při tom je třeba určit průsečíky jednotlivých isoklin, tzv. singulární body. To je v praxi ztíženo tím, že isokliny se nejeví jako křivky, ale jako širší pruhy, a singulární bod je často možno zaměnit za bod, v jehož okolí se isokliny zhušťují, ale neprotínají. Věty tohoto článku vedou na jednoduchou metodu, kterou lze určit existenci singulárního bodu ze známého průběhu isoklin v jisté vzdálenosti od tohoto bodu, kde již bývají isokliny zřetelnější.

Poznámka. Užití vyložené teorie vyjde v časopise „Aplikace matematiky" v článku „Poznámka k vyšetřování singulárních bodů ve fotoelasticimetrii" ([2]).

Literatura

[1] *M. A. Красносельский:* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Москва 1956.

[2] *H. Švecová*: Poznámka k vyšetřování singulárních bodů ve fotoelasticimetrii, Aplikace matematiky 5 (1960), 401—411.

Резюме

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМ О КОРНЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ГАНА ШВЕЦОВА, Прага

В этой работе доказывается сила известных теорем теории аналитических функций — принципа аргумента, теоремы Гурвица и теоремы Руше — для функций с конечным количеством разрывов и нулев внутри замкнутой кривой Жордана. В качестве обобщения понятия кратности нуля голоморфной функции здесь принимается комбинаторно-топологическое понятие индекса функции в точке (определение для нулевых точек находится под названием „индекс неподвижной точки" в [1]). В работе доказывается что индекс комплексной функции в точке z_0 комплексной плоскости равен изменению аргумента этой функции при обходе достаточно малой окружности с центром в точке z_0, деленному на 2π.

В дальнейшем изучаются изолированные нули (соответственно разрывы) функции $f(z) = \bar{z}\Phi(z) + \Psi(z)$, где Φ, Ψ голоморфные (соответственно голо-

морфные за исключением полюсов) функции. Показывается, каким образом возможно определить значение индекса функции f в нулевой точке (соответственно в точке разрыва) при помощи коэффициентов разложения функции f в окрестности точки z_0 в ряд аналогичный ряду Тейлора.

Доказанные в этой работе теоремы удобны для применения в плоской теории упругости; при их помощи напр. получается ([2]) практически эффективный метод обнаружения существования изолированной особой точки в фотоупрулости по графику изоклинных линий.

Zusammenfassung

EINE VERALLGEMEINERUNG DER SÄTZE ÜBER NULLSTELLEN ANALYTISCHER FUNKTIONEN

HANA ŠVECOVÁ, Praha

In dieser Arbeit wird die Gültigkeit der bekannten Sätze der Theorie der analytischen Funktionen — des Prinzips des Argumentes, des Hurwitzschen Satzes und des Satzes von Rouché — für Funktionen mit endlicher Anzahl von Unstetigkeitsstellen und Nullstellen innerhalb einer geschlossenen Jordanschen Kurve bewiesen. Als Verallgemeinerung des Begriffes der Multiplizität der Nullstelle einer holomorphen Funktion wird hier der kombinatorisch-topologische Begriff des Indexes einer Funktion im Punkte (für Nullpunkte in [1] definiert) angenommen, von dem in der Arbeit bewiesen wurde, dass er (in der komplexen Ebene) der durch die Zahl 2π dividierten Veränderung des Argumentes der gegebenen Funktion auf einer genügend kleinen Kreislinie mit dem Mittelpunkt in dem untersuchten Punkte äquivalent ist.

Ferner werden die isolierten Nullstellen (bzw. die Unstetigkeitsstellen) der Funktion $f(z) = \bar{z}\,\Phi(z) + \Psi(z)$, wo Φ, Ψ holomorph sind (bzw. holomorph bis auf die Pole), untersucht. Es wird eine Methode angegeben, welche ermöglicht, den Index der Funktion f in der Nullstelle (bzw. in der Unstetigkeitsstelle) aus den Koeffizienten einer mit der Taylorschen Reihe analogischen Entwicklung der Funktion f in der Umgebung des Punktes zu bestimmen.

Die bewiesenen Sätze kann man mit Vorteil in der mathematischen Theorie der ebenen Elastizität verwenden; sie führen z. B. auf eine praktische Methode zur Bestimmung der Existenz eines isolierten Singulärpunktes aus dem Graphikon der Isoklinen bei der photoelastizimetrischen Bestimmung des Spannungverlaufes.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

O ROZKLADU SINGULÁRNÍCH LINEÁRNÍCH TRANSFORMACÍ

VÁCLAV HAVEL, Brno

(Došlo dne 18. září 1959)

Prof. dr. Jiřímu Klapkovi k šedesátinám

Článek obsahuje algebraické i geometrické podmínky k tomu, aby existoval rozklad dané singulární lineární transformace n-rozměrného eukleidovského prostoru v podobnost (shodnost) a projekci.

1. Předmětem vyšetřování bude nejprve n-rozměrný (reálný eukleidovský) prostor $\mathbf{E}$. Dokážeme větu, která zobecňuje, resp. prohlubuje dřívější výsledky E. STIEFELA, H. HADWIGERA a H. NAUMANNA; viz [2], str. 213—214, [3], str. 97 a [6], str. 78.

Věta 1. *Nechť $\mathfrak{A}$ je soustava vektorů $\mathfrak{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}, \ldots, \mathfrak{a}_n = \overrightarrow{OA_n}$, vytvářejících v $\mathbf{E}$ m-rovinu; $2 \leqq m < n$. Označme $g_1, \ldots, g_n$ podle velikosti uspořádaná charakteristická čísla Gramovy matice soustavy $\mathfrak{A}$. Soustavu $\mathfrak{A}$ lze pokládat za paralelní průmět určité soustavy nenulových vektorů navzájem kolmých a stejně dlouhých tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka: Jsou-li čísla $g_{n-m+1}, \ldots, g_m$ nenulová, pak se navzájem rovnají. O ortogonální průmět jde přitom právě v tom případě, když všecka nenulová charakteristická čísla se navzájem rovnají.*

Podotkněme, že Gramova matice dané soustavy vektorů $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_n$ je tvaru

$$\left\| \begin{array}{l} \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_1,\ \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_n \\ \mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_1,\ \mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{w}_n\mathfrak{w}_1,\ \mathfrak{w}_n\mathfrak{w}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{w}_n\mathfrak{w}_n \end{array} \right\|,$$

kde $\mathfrak{w}_i\mathfrak{w}_j$ znamená vnitřní (skalární) součin vektorů $\mathfrak{w}_i$, $\mathfrak{w}_j$.

Charakteristická čísla této Gramovy matice jsou kořeny $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ rovnice

$$\left| \begin{array}{llll} \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_1 - \lambda, & \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_2, & \ldots, & \mathfrak{w}_1\mathfrak{w}_n \\ \mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_1, & \mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_2 - \lambda, & \ldots, & \mathfrak{w}_2\mathfrak{w}_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \mathfrak{w}_n\mathfrak{w}_1, & \mathfrak{w}_n\mathfrak{w}_2, & \ldots, & \mathfrak{w}_n\mathfrak{w}_n - \lambda \end{array} \right| = 0\,.$$

K účelům důkazu rozdělme tvrzení věty 1 na dvě části:

a) Nechť $n \geqq 2m - 1$. Pak soustava $\mathfrak{A}$ je v **E** vždy paralelním průmětem soustavy nenulových vektorů navzájem kolmých a stejně dlouhých.

b) Nechť $n < 2m - 1$. Pak soustava $\mathfrak{A}$ je v **E** paralelním průmětem soustavy nenulových vektorů navzájem kolmých a stejně dlouhých právě tehdy, když platí relace

$$(1) \qquad g_1 \geqq \ldots \geqq g_{n-m} \geqq g_{n-m+1} = \ldots = g_m > g_{m+1} = \ldots = g_n = 0 .$$

Tvrzení o ortogonální projekci je ovšem pro oba případy společné: O ortogonální projekci běží právě v případě

$$(2) \qquad g_1 = \ldots = g_m < g_{m+1} = \ldots = g_n = 0 .$$

Nechť $\mathfrak{A}$ je pevná soustava vektorů $\mathfrak{a}_1 = \overrightarrow{OA}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n = \overrightarrow{OA}_n$, vytvářejících v **E** m-rovinu **A**, přičemž $2 \leqq m < n$. K zjednodušení formulace nazveme e-reperem kteroukoliv soustavu vektorů $\overrightarrow{OE}_1, \ldots, \overrightarrow{OE}_n$ navzájem kolmých, majících společnou délku $e > 0$. V **E** zvolme pravoúhlý souřadnicový systém o počátku O a označme v něm $a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}$ složky vektoru $\mathfrak{a}_i$; $i = 1, \ldots, n$.

A) Nechť soustava $\mathfrak{A}$ je v **E** paralelním průmětem e-reperu $\mathfrak{E} = \{\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n\}$ při směru promítání **S**. Zvolme jiný e-reper $\mathfrak{E}' = \{\mathfrak{e}_1', \ldots, \mathfrak{e}_n'\}$. Potom platí rovnice

$$\mathfrak{e}_i' = t_{i,1}\mathfrak{e}_1 + \ldots + t_{i,n}\mathfrak{e}_n \quad (i = 1, \ldots, n) ,$$

kde matice $\boldsymbol{T} = \|t_{i,j}\|$ n-tého řádu je ortogonální.

Nechť soustava $\mathfrak{A}'$ tvořená n vektory $\mathfrak{a}_i' = (a_{i,1}', \ldots, a_{i,n}')$ je paralelním průmětem e-reperu $\mathfrak{E}'$ při promítání směrem **S** do **A**. Potom platí rovnice

$$\mathfrak{a}_i' = t_{i,1}\mathfrak{a}_1 + \ldots + t_{i,n}\mathfrak{a}_n \quad (i = 1, \ldots, n) ,$$

anebo v maticovém zápisu $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{TA}$, kde $\boldsymbol{A} = \|a_{i,j}\|$, $\boldsymbol{A}' = \|a_{i,j}'\|$. Označme τ tu ortogonální transformaci prostoru **E**, při níž je vektoru $\mathfrak{e}_i$ přiřazen vektor $\mathfrak{e}_i'$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$; obdobně označme $\tilde{\tau}$ tu afinní transformaci m-roviny **A**, při níž je vektoru $\mathfrak{a}_i$ přiřazen vektor $\mathfrak{a}_i'$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Jako závěr vyslovíme pak

Tvrzení 1. *Je-li soustava $\mathfrak{A}$ paralelním průmětem e-reperu $\mathfrak{E}$ při promítání směrem* **S** *a je-li τ ortogonální transformace (neměnící počátek O), pak soustava $\tilde{\tau}\mathfrak{A}$ je paralelním průmětem e-reperu $\tau\mathfrak{E}$ rovněž při směru promítání* **S**.

B) Gramova matice soustavy $\mathfrak{A}$, tj. matice $\boldsymbol{AA}^* = \|\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j\|$ je symetrická a lze ji tedy uvést na diagonální tvar prostřednictvím vhodné ortogonální matice $\boldsymbol{M}$ řádu n-tého:[1])

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{AA}^*)\,\boldsymbol{M}^* = (\boldsymbol{MA})(\boldsymbol{MA})^* .$$

Označme dále $\mathfrak{A}$ soustavu řádkových vektorů $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_n$ matice $\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{MA}$. Bez omezení obecnosti předpokládejme, že jde o takové pořadí, při němž $|\mathfrak{a}_1| \geqq$

[1]) Hvězdičkou značíme matici transponovanou.

$\geqq \ldots \geqq |\mathfrak{a}_n|$. Z diagonálního tvaru matice $\bar{\mathbf{A}}$ pak vyplývá, že vektory $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_n$ jsou navzájem kolmé a právě posledních $n - m$ z nich je nulových.

Dokážeme

Tvrzení 2. *Je-li $n \geqq 2m - 1$, pak existuje soustava vektorů $\bar{\mathfrak{e}}_1 = \overrightarrow{O\bar{E}_1}, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_m = \overrightarrow{O\bar{E}_m}$ navzájem kolmých a stejně dlouhých, které jsou v* $\mathbf{E}$ *kolmými průměty soustavy vektorů $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_m$ při projekci do m-roviny $O\bar{E}_1 \ldots \bar{E}_m$.*

Důkaz. Mějme soustavu vektorů $\bar{\bar{\mathfrak{e}}}_1 = (d, 0, \ldots, 0)$, $\bar{\bar{\mathfrak{e}}}_2 = (0, d, 0, \ldots, 0), \ldots, \bar{\bar{\mathfrak{e}}}_m = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{m-1}, d, 0, \ldots, 0)$, kde $0 < d < |\bar{\mathfrak{a}}_m|$. Položme $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_j = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, d, \underbrace{0, \ldots,}_{m-j}$ $0, d_{j,1}, \ldots, d_{j,n}0_m)$, $\mathfrak{d}_j = (d_{j,1}, \ldots, d_{j,n-m})$; $j = 1, \ldots, m$.

Je-li $n \geqq 2m$, pak lze vždy sestrojit navzájem kolmé vektory $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_m$ tak, že $d^2 + \mathfrak{d}_1^2 = \bar{\mathfrak{a}}_1^2, \ldots, d^2 + \mathfrak{d}_m^2 = \bar{\mathfrak{a}}_m^2$. Vyplývá to z toho, že počet m vektorů $\mathfrak{d}_j$ není větší než počet $n - m$ jejich složek. Je-li $n = 2m - 1$, pak zvolme $d = |\bar{\mathfrak{a}}_m|$, vektor $\mathfrak{d}_m$ prohlašme za nulový a sestrojme vektory $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_{m-1}$ tak, aby $d^2 + \mathfrak{d}_1^2 = \bar{\mathfrak{a}}_1^2, \ldots, d^2 + \mathfrak{d}_{m-1}^2 = \bar{\mathfrak{a}}_{m-1}^2$. Takové vektory lze vždy sestrojit, neboť jejich počet $m - 1$ rovná se počtu jejich složek. Soustava $\bar{\bar{\mathfrak{a}}}_1, \ldots, \bar{\bar{\mathfrak{a}}}_m$ je shodná se soustavou $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_m$ a její kolmou projekcí do m-roviny prvních m souřadnicových os je právě soustava $\bar{\bar{\mathfrak{e}}}_1, \ldots, \bar{\bar{\mathfrak{e}}}_m$. Odtud důkaz.

C) Navažme na předchozí odstavec a doplňme vektory $\bar{\mathfrak{e}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_m$ v d-reper $\bar{\mathfrak{E}} = \{\bar{\mathfrak{e}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_n\}$. Pak soustava $\bar{\mathfrak{A}}$ je paralelním průmětem reperu $\bar{\mathfrak{E}}$ při určitém směru promítání $\mathbf{S}$, takže podle tvrzení 1 je též soustava $\mathfrak{A}$ paralelním průmětem některého d-reperu při témže směru promítání $\mathbf{S}$.

Je známo, že charakteristická čísla Gramovy matice $\mathbf{AA}^*$ rovnají se charakteristickým číslům Gramovy matice $\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{A}}^*$ (matice $\bar{\mathbf{A}}$ je definována v části B)), tj. číslům $\bar{\mathfrak{a}}_1^2, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_n^2$. Platí-li $\bar{\mathfrak{a}}_1^2 = \ldots = \bar{\mathfrak{a}}_m^2$, lze položit $\bar{\mathfrak{e}}_1 = \bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_m = \bar{\mathfrak{a}}_m$ a vektory $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ doplnit v $|\mathfrak{a}_1|$-reper. Protože soustava $\bar{\mathfrak{A}}$ je ortogonálním průmětem tohoto reperu (směr $\mathbf{S}$ je nyní kolmý k $\mathbf{A}$), je podle tvrzení 1 též soustava $\mathfrak{A}$ ortogonálním průmětem určitého $|\mathfrak{a}_1|$-reperu. Mají-li aspoň dva z vektorů $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_m$ různé délky, pak směr $\mathbf{S}$ již nemůže být kolmý k $\mathbf{A}$. Část a) věty 1 je tím dokázána.

D) Nechť platí podmínka $n < 2m - 1$. Reper $\mathfrak{E}'$ z části A) zvolme speciálně tak, aby jeho prvních $n - m$ vektorů bylo kolmých k $\mathbf{A}$; tyto vektory označme $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_{n-m}$. Zbývající vektory z $\mathfrak{E}'$ leží pak v $\mathbf{A}$ a náleží též soustavě $\mathfrak{A}' = \tilde{\tau}\mathfrak{A}$ (viz část A)). Označme tedy $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-m}$ prvních $n - m$ vektorů z $\mathfrak{A}'$. Pak směr promítání $\mathbf{S}$ je současně rovnoběžný s vektory $\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{n}_m - \mathfrak{y}_m$. Speciálně pro směr $\mathbf{S}$ kolmý k $\mathbf{A}$ jsou vektory $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_m$ nulové. Položme $a_{i,m+1} = \ldots = a_{i,n} = 0$ a užijme označení zavedené v části A). Budeme vyšetřovat matice $\dot{\mathbf{A}} = \|a_{i,j}\|$, $\dot{\mathbf{A}}' = \|a'_{i,j}\|$; $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$. Jest $\dot{\mathbf{A}}' = \mathbf{T}\dot{\mathbf{A}}$ a matici $\dot{\mathbf{A}}'$ lze psát ve tvaru $\dot{\mathbf{A}}' = \left\|\begin{matrix}\dot{\mathbf{P}}\\ \dot{\mathbf{B}}\end{matrix}\right\|$ s tímto významem matic $\dot{\mathbf{P}}, \dot{\mathbf{B}} : \dot{\mathbf{P}}$

je matice, jejíž řádkové vektory vzniknou z $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-m}$ vynecháním posledních $n - m$ složek. $\dot{\mathbf{B}}$ je matice, jejíž řádkové vektory vzniknou z posledních m vektorů soustavy $\mathfrak{A}'$ vynecháním posledních $n - m$ složek; řádkové vektory matice $\mathbf{B}$ jsou navzájem kolmé a mají společnou délku e. Platí tedy $\dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{B}}^* = \dot{\mathbf{B}}^*\dot{\mathbf{B}} = e^2\mathbf{J}$, kde $\mathbf{J}$ je diagonální jednotková matice m-tého řádu. Dále platí relace $(\mathbf{T}\dot{\mathbf{A}})^*(\mathbf{T}\dot{\mathbf{A}}) = \dot{\mathbf{A}}^*\mathbf{T}^*\mathbf{T}\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}^*\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{P}}^*\dot{\mathbf{P}} + \dot{\mathbf{B}}^*\dot{\mathbf{B}}$, a z toho dále $\dot{\mathbf{A}}^*\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{P}}^*\dot{\mathbf{P}} + e^2\dot{\mathbf{J}}$.

Charakteristická čísla matice $\dot{\mathbf{A}}^*\dot{\mathbf{A}}$ vzniknou tedy z charakteristických čísel matice $\dot{\mathbf{P}}^*\dot{\mathbf{P}}$ vždy přičtením čísla e^2. Seřaďme charakteristická čísla matice $\dot{\mathbf{P}}^*\dot{\mathbf{P}}$ podle velikosti; pak prvních $n - m$ z nich je nenulových a zbývající jsou nulové.[2]) Tedy charakteristická čísla matice $\dot{\mathbf{A}}^*\dot{\mathbf{A}}$ jsou

$$c_1 + e^2 \geqq \ldots \geqq c_{n-m} + e^2 \geqq \underbrace{e^2 = \ldots = e^2}_{m} .$$

Avšak nenulová charakteristická čísla matic $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ se po řadě rovnají, takže pro charakteristická čísla $g_1 \geqq \ldots \geqq g_n$ matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ platí relace (1), jak bylo dokázat. Jde-li o promítání ortogonální, pak vektory $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{n-m}$ jsou nulové a platí $c_1 = \ldots = c_{n-m} = 0$, takže platí relace (2). Nejde-li o promítání ortogonální, pak relace (2) neplatí.

Protože charakteristická čísla Gramovy matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ nejsou závislá na volbě pravoúhlého souřadnicového systému v $\mathbf{E}$, nebyla ani volba $a_{i,m+1} = \ldots = a_{i,n} = 0$ na úkor obecnosti.

E) Nechť platí $n < 2m - 1$. Pro charakteristická čísla Gramovy matice dané soustavy $\mathfrak{A}$ nechť je splněna podmínka (1). Podle B) stanovíme soustavu vektorů $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_n$. Při vhodném pořadí platí pak $g_1 = \bar{\mathfrak{a}}_1^2, \ldots, g_n = \bar{\mathfrak{a}}_n^2$, takže relaci (1) lze přepsat do tvaru

$$|\mathfrak{a}_1| \geqq \ldots \geqq |\mathfrak{a}_{n-m}| \geqq |\mathfrak{a}_{n-m+1}| = \ldots = |\mathfrak{a}_m| > |\mathfrak{a}_{m+1}| = \ldots = |\mathfrak{a}_n| = 0 .$$

Položme $\bar{\mathfrak{e}}_{n-m+1} = \bar{\mathfrak{a}}_{n-m+1}, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_m = \bar{\mathfrak{a}}_m$ a společnou délku těchto vektorů označme d. Užijme větu 1, kde za n, m položíme hodnoty $2n - 2m, n - m$. Potom plyne v případě $n - m > 1$ tento závěr (který je pro $n - m = 1$ snadno patrný): V $(2n - 2m)$-rovině $\mathbf{R}$ kolmé současně k vektorům $\bar{\mathfrak{e}}_{n-m+1}, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_m$ lze sestrojit soustavu vektorů $\bar{\mathfrak{e}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_{n-m}$ navzájem kolmých a o společné délce d tak, že při směru $\mathbf{S}$ (určeném v $\mathbf{R}$ $(n - m)$-rovinou současně kolmou k vektorům $\bar{\mathfrak{e}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_{n-m}$) se vektory $\bar{\mathfrak{e}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_m$ promítají do vektorů $\bar{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_{n-m}$. Pak soustava $\bar{\mathfrak{A}}$ je při směru $\mathbf{S}$ průmětem d-reperu $\bar{\mathfrak{E}} = \{\mathfrak{e}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_n\}$. Je-li navíc splněna podmínka $|\bar{\mathfrak{a}}_1| = \ldots = |\bar{\mathfrak{a}}_m|$, pak směr $\mathbf{S}$ je kolmý k $\mathbf{A}$; jinak nikoliv. Část b) věty 1 je dokázána.

2. Následující větu lze snadno dokázat jako bezprostřední důsledek věty 1:

[2]) Jsou-li $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ matice téhož řádu, pak maticím $\mathbf{MN}, \mathbf{NM}$ náleží po řadě táž charakteristická čísla. Doplníme tedy $\dot{\mathbf{P}}$ nulovými sloupci na matici $\mathbf{P}$ řádu m a užijeme známého faktu, že charakteristická čísla Gramovy matice $\mathbf{PP}^*$ jsou nezáporná.

Věta 2. *Afinní transformaci α prostoru $\mathbf{E}$ na m-rovinu $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$ $(2 \leqq m < n)$ lze rozložit v podobnost a paralelní projekci tehdy a jen tehdy, jestliže při libovolném výběru vektorů $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_n$ navzájem kolmých, nenulových a stejně dlouhých splňují charakteristická čísla $g_1 \geqq \ldots \geqq g_n$ Gramovy matice soustavy $\alpha\mathfrak{w}_1, \ldots, \alpha\mathfrak{w}_n$ podmínku z věty 1. O projekci kolmou jde přitom právě v případě, kdy všecka nenulová charakteristická čísla se navzájem rovnají.*

F) Nechť α je afinní transformace prostoru $\mathbf{E}$ na m-rovinu $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$, přičemž $2 \leqq m < n$. Zvolme v $\mathbf{A}$ $(m - 1)$-rozměrnou sféru k a stanovme jí příslušnou válcovou nadplochu $\alpha^{-1}k$. Dále zvolme v $\mathbf{A}$ bod B a stanovme k němu příslušnou $(n - m)$-rovinu $\mathbf{C} = \alpha^{-1}B$. Nakonec zvolme m-rovinu $\mathbf{R}$ kolmou k $\mathbf{C}$. Pak $h = \mathbf{R} \cap \alpha^{-1}k$ je $(m - 1)$-rozměrný elipsoid v $\mathbf{R}$. Nalezneme nutnou i postačující podmínku k tomu, aby elipsoid h byl v $\mathbf{E}$ ortogonálním průmětem $(m - 1)$-rozměrné sféry k (ležící v některé m-rovině $\mathbf{K}$). Protože parciální zobrazení $\alpha_{\mathbf{K}}$ je pak podobností, je z toho vidět, že jde též o nutnou a postačující podmínku k tomu, aby existoval žádaný rozklad transformace α. Nejprve odvodíme pomocnou větu.

Věta 3. *Nechť je dán $(m - 1)$-rozměrný elipsoid a nechť $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_m$ je soustava jeho hlavních poloměrů,*[3]) *přičemž*

$$|\mathfrak{r}_1| = \ldots = |\mathfrak{r}_s| > |\mathfrak{r}_{s+1}| \geqq \ldots \geqq |\mathfrak{r}_m| \quad (1 \leqq s \leqq m) . \tag{3}$$

Tento elipsoid lze pokládat za ortogonální průmět určité $(m - 1)$-rozměrné sféry tehdy a jen tehdy, když platí podmínka

$$n \geqq 2m - s . \tag{4}$$

Důkaz. Položme $\mathfrak{r}_j = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{j-1}, |\mathfrak{r}_j|, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-j})$, $\mathfrak{e}_j = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{j-1}, |\mathfrak{r}_j|, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m-j},$ $h_{j,1}, \ldots, h_{j,n-m})$, $\mathfrak{h}_j = (h_{j,1}, \ldots, h_{j,n-m})$; $j = 1, \ldots, m$. Vektory $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_m$ jsou navzájem kolmé a mají společnou délku $|\mathfrak{r}_1|$ tehdy a jen tehdy, když vektory $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_m$ jsou navzájem kolmé, přičemž $\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{h}_1^2 = \mathfrak{r}_1^2, \ldots, \mathfrak{r}_m^2 + \mathfrak{h}_m^2 = \mathfrak{r}_m^2$. Avšak existence vektorů $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_m$ závisí právě na počtu $m - s$ nenulových z nich a počtu $n - m$ složek: Vektory $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_m$ existují právě tehdy, když $m - s \leqq$ $\leqq n - m$. Odtud důkaz.

K větě 3 připojíme ještě větu, jejíž důkaz je zcela analogický.

Věta 3'. *Nechť je dán $(m - 1)$-rozměrný elipsoid s hlavními poloměry $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_m$, přičemž*

$$|\mathfrak{r}_1| \geqq \ldots \geqq |\mathfrak{r}_{m-t}| > |\mathfrak{r}_{m-t+1}| = \ldots = |\mathfrak{r}_m| \quad (1 \leqq t \leqq m) .$$

Podmínka $n \geqq 2m - t$ je pak nutná i stačí k tomu, aby existovala $(m - 1)$-rozměrná sféra, která je ortogonálním průmětem daného elipsoidu.

Větu 3' však potřebovat nebudeme. Vrátíme se k větě 3; z ní a z F) plyne tento důležitý výsledek:

[3]) Hlavní poloměry (jakožto vektory) jsou sdružené a navzájem kolmé.

Věta 4. *Nechť α je afinní transformace prostoru* **E** *na m-rovinu* $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}$, *přičemž* $2 \leqq m < n$; *nechť* **V**, *resp. v jsou úplné vzory bodu, resp.* $(m-1)$-*rozměrné sféry z* **A**; $(m-1)$-*rozměrný elipsoid, který je průnikem nadplochy v s m-rovinou* **R** *kolmou k* **V**, *nechť má hlavní poloměry* $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_m$, *uspořádané tak že platí* (3). *Rozklad transformace α v podobnost a paralelní projekci existuje potom právě tehdy, platí-li podmínka* (4).

3. Obraťme pozornost k rozšířenému n-rozměrnému prostoru $\mathbf{E}^+ \supset \mathbf{E}$. Mějme dánu neafinní lineární transformaci λ prostoru $\mathbf{E}^+$ na vlastní m-rovinu $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}^+$; $2 \leqq m < n$. Označme **S** singulární $(n-m-1)$-rovinu vzhledem k λ. Dále definujme nadrovinu **N** jako úplný vzor nevlastní $(m-1)$-roviny $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ při λ. Nalezneme nutnou a postačující podmínku k tomu, aby se transformace λ dala rozložit v centrální projekci a shodnost.

G) Případ $m = n - 1$ vede k jednoduchému závěru. Nadrovina **N** má pak tuto vlastnost: Je-li **L** libovolná vlastní nadrovina neprocházející bodem **S**, pak parciální zobrazení λ_L nadroviny **L** na **A** je afinní transformací právě tehdy, když nadroviny **L**, **N** jsou rovnoběžné. Probíhá-li $\mathbf{L} \neq \mathbf{N}$ nadroviny rovnoběžné s **N**, pak se parciální zobrazení λ_L od sebe liší pouze homotetiemi o středu **S**. Z toho již vyplývá věta, kterou nyní vyslovíme.

Věta 5a. *Nechť λ je neafinní lineární transformace prostoru* $\mathbf{E}^+$ *na vlastní nadrovinu* $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}^+$. *Tuto transformaci lze rozložit v centrální projekci a shodnost tehdy a jen tehdy, platí-li podmínka:* 1. *Existuje nadrovina* **L**, *která indukuje afinní parciální zobrazení* λ_L.

Lze ukázat, že podmínku 1 lze vyjádřit ještě dvěma dalšími způsoby: 2. Transformace λ převádí absolutní polaritu prostoru $\mathbf{E}^+$ ve sférickou antipolaritu m-roviny **A**. 3. Převádí-li transformace λ dvojici perspektivních $(n-1)$-simplexů $\{A_i\}_1^n$, $\{B_i\}_1^n$ opět ve dvojici perspektivních $(n-1)$-simplexů $\{A'_i\}_1^n$, $\{B'_i\}_1^n$ a jsou-li $\{C_i\}_1^n$, $\{D'_i\}_1^n$ úběžníkové simplexy s vrcholy $C_i \in A_iB_i$, resp. $D'_i \in A'_iB'_i$, pak simplexy $\{C_i\}_1^n$, $\{D'_i\}_1^n$ jsou podobné.[4])

Pro $n = 3$ stanovil podmínku 2 L. Hofmann a podmínku 3 E. A. Mčedlišvili; viz [1], str. 40 a [4], str. 167—168.

H) Nechť $m < n - 1$. Pak má nadrovina **N** tuto vlastnost: Je-li **L** libovolná vlastní m-rovina disjunktní s **S**, pak parciální zobrazení λ_L je afinní právě tehdy, když **L** je rovnoběžno s **N**. Speciálně vedou k podobnostem λ_L nejvýš ty m-roviny **L**, které jsou rovnoběžné s **N** (a ovšem disjunktní s **N**). Zvolme tedy kteroukoliv $(m-1)$-rozměrnou sféru k v **A** a kteroukoliv nadrovinu $\mathbf{M} \neq \mathbf{N}$ rovnoběžnou s **N**. Položme $v = \lambda^{-1}k \cap \mathbf{M}$; útvar v je válcovou varietou, je to lineární obal nevlastní $(n-m-2)$-roviny $\mathbf{S}' = \mathbf{S} \cap \mathbf{M}$ s libovolným z $(m-1)$-rozměrných elipsoidů v **M**, jemuž odpovídá v transformaci λ sféra k. Konečně zvolme v **M** některou m-rovinu **R** kolmou v **M** k **S** a označme h

[4]) Jde o simplexy s vlastními vrcholy, perspektivní podle vlastního středu. Úběžníkem rozumí se vzor anebo obraz nevlastního bodu při λ.

$(m - 1)$-rozměrný elipsoid splňující podmínky $h \subset \mathbf{R}$, $\lambda h = k$. Nechť $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_m$ jsou hlavní poloměry elipsoidu h uspořádané tak, že platí (3). Podle věty 3a (kde n nahradíme hodnotou $n - 1$) je h v $\mathbf{M}$ kolmým průmětem některé $(m - 1)$-rozměrné sféry v $\mathbf{M}$ tehdy a jen tehdy, platí-li podmínka

$$n - 1 \geqq 2m - s \,. \tag{5}$$

Existují-li podobnosti λ_L, pak existuje mezi nimi též shodnost; získáme ji při vhodné volbě nadroviny $\mathbf{M}$. Z našich úvah vyplývá tento výsledek:

Věta 5b. *Nechť λ je neafinní lineární transformace prostoru $\mathbf{E}^+$ na vlastní m-rovinu $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}^+$; $2 \leqq m < n - 1$. Pak transformaci λ lze rozložit v centrální projekci a shodnost právě tehdy, platí-li* (5); *význam hodnoty s je stanoven v předchozím.*

I. Případ $m < n - 1$ vyšetříme ještě druhým způsobem. Zvolme ortogonální zobrazení ω převádějící m-rovinu $\mathbf{A}$ v m-rovinu $\mathbf{A}'$ ležící v nadrovině $\mathbf{M} \nparallel \mathbf{N}$ rovnoběžné s $\mathbf{N}$. Parciální zobrazení $(\lambda\omega)_M = \lambda'$ je afinní transformací nadroviny M na m-rovinu $\mathbf{A}'$ se singulární nevlastní $(n - m - 2)$-rovinou $\mathbf{S}' = \mathbf{S} \cap \mathbf{M}$. Žádaný rozklad transformace λ ve shodnost a centrální projekci existuje pak právě tehdy, lze-li transformaci λ' rozložit v podobnost a paralelní projekci. Platí tedy tato věta:

Věta 5b'. *Nechť λ je neafinní lineární transformace prostoru $\mathbf{E}^+$ na m-rovinu $\mathbf{A} \subset \mathbf{E}^+$; $2 \leqq m < n - 1$. Je-li $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_{n-1}$ libovolná soustava nenulových vektorů navzájem kolmých a stejně dlouhých v nadrovině $\mathbf{M}$ a jsou-li $g_1 \geqq \geqq \ldots \geqq g_{n-1}$ charakteristická čísla Gramovy matice soustavy $\lambda'\mathfrak{w}_1, \ldots, \lambda'\mathfrak{w}_{n-1}$, pak transformaci λ lze rozložit ve shodnost a centrální projekci právě tehdy, když platí tato podmínka: Jsou-li čísla $g_{n-m}, \ldots, g_m$ nenulová, pak se navzájem rovnají. Význam $\mathbf{M}$ a λ' stanoven před zněním věty.*

4. Afinní transformaci prostoru $\mathbf{E}$ na přímku a lze vždy rozložit v podobnost a paralelní projekci. Rovněž tak neafinní lineární transformaci prostoru $\mathbf{E}^+$ na vlastní přímku lze vždy rozložit ve shodnost a centrální projekci. Jednoduchý důkaz obou tvrzení zde neuvádíme.

Problematiku tohoto článku lze rozšířit na pseudoeukleidovské prostory, v nichž je definována metrika $\varrho(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (x_i - y_i)^2}$; $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\varepsilon_i = \pm 1$; viz např. [5].

Na závěr uveďme neřešený problém rozkladu nesingulární afinní transformace prostoru $\mathbf{E}$ v podobnost a afinní m-transformaci, resp. problém rozkladu nesingulární afinní lineární transformace prostoru $\mathbf{E}^+$ ve shodnost a lineární m-transformaci.[5]) Dosud je známo řešení pouze pro speciální hodnoty m.

[5]) Lineární m-transformace má dva maximální podprostory samodružných bodů, a to m-rovinu a $(n - m - 1)$-rovinu; u afinní m-transformace je zmíněná $(n - m - 1)$-rovina nevlastní.

Literatura

[1] *L. Hofmann*: Die achsonometrischen Sätze von Kruppa und Pohlke's Satz im nichteuklidschen Raume. Sitzber. Ak. Wiss. Wien, Math.-nat. Kl., IIa, 135 (1926), 33—60.

[2] *E. Stiefel*: Zum Satz von Pohlke. Comm. Math. Helv. *10* (1937/38), 208—225.

[3] *H. Hadwiger*: Über ausgezeichnete Vektorsterne und reguläre Polytope. Comm. Math. Helv. *13* (1940—41), 90—107.

[4] *Е. А. Мчедлишвили:* Проективные основания начертательной геометрии. Труды Груз. полит. инст. Тбилиси *19* (1949), 115—190.

[5] *R. Steinbeck*: Note on the theorem of Hadwiger. Pac. Journ. of Math. *6* (1956), 775—777.

[6] *H. Naumann*: Über Vektorsterne und Parallelprojektionen regulärer Polytope. Math. Zeitschr. *67* (1957), 75—82.

Резюме

О РАЗЛОЖЕНИИ ОСОБЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Брно

В статье доказываются следующие теоремы для n-мерного евклидова пространства:

Аффинное преобразование α данного пространства на его m-плоскость можно разложить на подобие и параллельное проектирование если и только если для любого выбора n векторов $\mathfrak{w}_i$, перпендикулярных друг другу и одинаковой (ненулевой) длины, характеристические числа $g_1 \geqq \ldots \geqq g_n$ матрицы Грама системы $\alpha\mathfrak{w}_i$ выполняют следующее условие: Если значения $g_{n-m+1}, \ldots, g_m$ — ненулевые, то они равны между собой. Притом с ортогональным проектированием мы имеем дело тогда и только тогда, если все ненулевые характеристические числа равны между собой.

Пусть α-аффинное преобразование данного пространства на его m-плоскость, пусть притом $\mathbf{V}$, *соотв. v-полные прообразы точки, соотв. $(m-1)$-мерной сферы из данной m-плоскости; пусть $(m-1)$-мерный эллипсоид, являющийся пересечением гиперповерхности* $\mathbf{V}$ *с m-плоскостью* $\mathbf{R}$, *перпендикулярной к* $\mathbf{V}$, *имеет главные радиусы $\mathfrak{r}_j$; $|\mathfrak{r}_1| = \ldots = |\mathfrak{r}_s| > |\mathfrak{r}_{s+1}| \geqq \ldots \geqq |\mathfrak{r}_m|$, $1 \leqq s \leqq m$. Тогда разложение преобразования α на подобие и параллельное проектирование существует если и только если $n \geqq 2m - s$.*

На основании этих результатов далее выводятся также необходимые и достаточные условия того, чтобы данное особенное линейное преобразование расширенного пространства можно было разложить на тождество и проектирование.

Проблематика статьи непосредственно примыкает к некоторым проблемам московского геометрического семинара проф. Н. Ф. Четверухина.

Zusammenfassung

ÜBER DIE ZERLEGUNG DER SINGULÄREN LINEAREN TRANSFORMATIONEN

VÁCLAV HAVEL, Brno

In diesem Artikel werden folgende Sätze für den n-dimensionalen euklidischen Raum bewiesen:

Eine (singuläre) Affinität α des gegebenen Raumes auf seine m-Ebene lässt sich gerade dann in eine Ähnlichkeit und Parallelprojektion zerlegen, wenn ein beliebiges n-Bein von gleichlangen orthogonalen Vektoren $\mathfrak{w}_i$ folgende Bedingung erfüllt: Sind $g_1 \geqq \ldots \geqq g_n$ die Eigenwerte der Gramschen Matrix von $\alpha\mathfrak{w}_1, \ldots, \alpha\mathfrak{w}_n$ und sind $g_{n-m+1}, \ldots, g_m$ von Null verschieden, so ist $g_{n-m+1} = \ldots = g_m$. Um die Orthogonalprojektion handelt es sich dabei gerade im Falle der Gleichheit aller nichtverschwinden Eigenwerte.

Es sei α eine (singuläre) Affinität des gegebenen Raumes auf seine m-Ebene, dabei seien $\mathbf{V}$ bzw. v volle Urbilde eines Punktes bzw. einer $(m - 1)$-dimensionalen Sphäre aus der gegebenen m-Ebene; endlich seien $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_m$ mit $|\mathfrak{r}_1| = \ldots = |\mathfrak{r}_s| > > |\mathfrak{r}_{s+1}| \geqq \ldots \geqq |\mathfrak{r}_m|$ $(1 \leqq s \leqq m)$ die Halbachsen eines solchen $(m - 1)$-dimensionalen Ellipsoides, das als Durchschnitt von v mit einer m-Ebene $\mathbf{R} \perp \mathbf{V}$ ensteht. Dann kann man α in eine Ähnlichkeit und Parallelprojektion gerade im Falle $n \geqq 2m - s$ zerlegen.

Auf Grund dieser Resultate sind weiter auch die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer entsprechenden Zerlegung (auf Ähnlichkeit und Projektion) der gegebenen singulären Kollineation des n-dimensionalen projektiven Raumes gewonnen.

Der Gegenstand des Artikles hängt eng mit einigen Problemen des geometrischen Seminars von Prof. N. F. Četveruchin (Moskva) zusammen.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВНУТРИ ГРУПП СОСТОЯНИЙ ОДНОРОДНОГО ПРОЦЕССА МАРКОВА

ПЕТР МАНДЛ (Petr Mandl), Прага

(Поступило в редакцию 12/X 1959 г.)

В статье исследуется предельное поведение распределения вероятностей в множестве состояний однородного процесса Маркова с конечным числом состояний при предложении, что пребывание системы в данном множестве не нарушалось.

Настоящая работа непосредственно примыкает к статье [3]. В ней выводятся для однородных процессов Маркова с конечным числом состояний результаты, полученные в работе [3] для цепей.

Пусть задана матрица $Q = \|q_{ij}\|$ плотностей вероятности перехода такого процесса. Возьмем какое-либо множество T состояний процесса и начальное распределение вероятностей, данное вектором p и сосредоточенное целиком на состояния множества T. Предметом наших исследований будет предельное поведение величин $P_j(t|T)$, обозначающих вероятность того, что система будет в момент времени t находиться в состоянии j, при условии, что до момента t система пребывала непрерывно в состояниях, принадлежащих классу T. Вектор этих величин мы овозначим через $\boldsymbol{P}(t|T)$.

Прежде всего мы будем исследовать величины $P_{ij}(t; T)$ для $i \in T$, $j \in T$, обозначающие вероятность того, что система, находящаяся в момент времени 0 в состоянии i, будет по крайней мере до момента t непрерывно пребывать в классе T и в момент t будет находиться в состоянии j. Матрицу величин $P_{ij}(t; T)$ мы будем обозначать через $\boldsymbol{P}(t; T)$. Положим

$$^{(0)}P_{ij}(t; T) = \delta_{ij} e^{q_{ii}t} ,$$

$$^{(n+1)}P_{ij}(t; T) = \int_0^t e^{q_{ii}(t-s)} \sum_{\substack{k \neq i \\ k \in T}} q_{ik}\, {}^{(n)}P_{kj}(s; T)\, \mathrm{d}s .$$

Сразу же видно, что $^{(n)}P_{ij}(t; T)$ означает вероятность того явления, что система, которая была в момент 0 в состоянии i, будет в момент t в состоянии j, изменит свое состояние в точности n раз и не выйдет притом из класса T. (См. также подробное обсуждение таких представлений в [2]). Итак, мы имеем $P_{ij}(t; T) = \sum_{n=0}^{\infty} {}^{(n)}P_{ij}(t; T)$. Пусть Q_T — подматрица матрицы Q, образованная из плотностей вероятности перехода между состояниями класса T. Легко убедиться, что $\boldsymbol{P}(t; T)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{P}(t; T) = Q_T \boldsymbol{P}(t; T) ,$$

и ввиду начального условия $\boldsymbol{P}(0; T) = E$ получаем $P(t; T) = \exp Q_T t$.

Определение. Множество S состояний однородного процесса Маркова назовем *регулярным*, если матрица Q_S плотностей вероятности перехода между состояниями множества S неразложима.

Теорема 1. *В случае, когда T регулярно, для каждого $j \in T$ существует предел*

$$\lim_{t \to \infty} P_j(t/T) = P_j(T) > 0 ,$$

не зависящий от начального распределения вероятностнй.

Доказательство. В случае, когда множество T регулярно, матрице Q_T соответствует характеристическое число ϱ, имеющее наибольшую действительную часть. Такое число — действительное, простое, причем $\varrho \leqq 0$. Этому характеристическому числу соответствует характеристический вектор, имеющий сплошь положительные компоненты. В этом мы убедимся следующим образом: пусть $q > \max_{i \in T} |q_{ii}|$. Матрица $R = qE + Q_T$ имеет сплошь неотрицательные элементы и диагональ состоит из положительных элементов. Поэтому она — ациклическая, и так как матрица Q_T была неразложима, то и R неразложима. Итак, существует (напр., согласно [3], доказательство теоремы 1) положительный, простой и действительный характеристический корень λ_0 матрицы $R = \|r_{ij}\|$, наибольший по абсолютной величине из всех корней. Имеем для $i \in T$ $\sum_{j \in T} q_{ij} \leqq 0$, откуда $\sum_j r_{ij} \leqq$ $\leqq q$. Из этого видно, что $\lambda_0 \leqq q$. Если $\{\lambda_j\}$ — система характеристических чисел матрицы R, то $\{\lambda_j - q\}$ — система характеристических чисел матрицы Q_T. Теперь уже легко видеть, что $\varrho = \lambda_0 - q$ является характеристическим числом матрицы Q_T, имеющим требуемые свойства.

Характеристическому корню λ_0 соответствует (см. также [3]) характеристический вектор k, имеющий сплошь положительные компоненты. Из соотношения $0 = (\lambda_0 E - R)\, k = (\varrho E - Q_T)\, k$ видно, что k — характеристический вектор матрицы Q_T, соответствующий характеристическому числу ϱ. Воспользовавшись каким-либо представлением матрицы $\exp Q_T t$, известным из теории систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см. напр. [1]), мы видим, что при наших условиях можно написать

$$\exp Q_T t = e^{t\varrho} kc + o(e^{t\varrho'}) = e^{t\varrho} A_T + o(e^{t\varrho'}) .$$

Здесь $\varrho' < \varrho$, и c есть ненулевой строчный вектор. Итак, A_T — матрица, столбцы которой являются кратными характеристического вектора k. $o(e^{t\varrho'})$ есть матрица, элементы которой суть бесконечно малые величины высшего порядка по сравнению с $e^{t\varrho'}$.

Все элементы матрицы $\exp Q_T t$ положительны для $t > 0$. Это следует из представления элементов этой матрицы при помощи величин ${}^{(n)}P_{ij}(t; T)$, так как из неразложимости Q_T следует, что для каждой пары i, j существует m так, что ${}^{(m)}P_{ij}(t; T) > 0$. Отсюда также вытекает, что элементы матрицы $A_T = \lim\limits_{t\to\infty} e^{-t\varrho} \exp Q_T t$ неотрицательны. Пусть $s > 0$. Из соотношения

$$A_T = \lim_{t\to\infty} e^{-(t+s)\varrho} \exp Q_T(t+s) = A_T e^{-s\varrho} \exp Q_T s$$

видно, что вектор c удовлетворяет соотношению

$$c = c e^{-s\varrho} \exp Q_T s \quad \text{т. е.} \quad \frac{(e^{s\varrho} - 1)}{s} c = c \frac{(\exp Q_T s - E)}{s},$$

откуда, переходя к пределу для $s \to 0$, получаем $\varrho c = c Q_T$. Итак, c есть характеристический вектор матрицы Q_T^*, транспонированной по отношению к матрице Q_T. Так как для матрицы Q_T^* справедливы те же рассуждения, как и для Q_T, мы видим, что все компоненты вектора c положительны и что он определяется вплоть до мультипликативной постоянной.

Если дан строчный вектор p начального распределения вероятностей и если e — вектор с единичными координатами, то мы имеем

$$\boldsymbol{P}(t|T) = (p\boldsymbol{P}(t; T)\, e)^{-1}\, p\boldsymbol{P}(t; T) = \frac{e^{t\varrho} pkc + o(e^{t\varrho'})}{e^{t\varrho} pkce + o(e^{t\varrho'})} .$$

Отсюда легко следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{P}(t|T) = (ce)^{-1} c$. Из свойств вектора c мы получим утверждение теоремы.

Определение. Если класс T состояний процесса регулярен, то характеристическое число ϱ матрицы Q_T обладающее среди всех характеристических чисел наибольшей действительной частью, мы назовем *характеристическим числом класса* T.

Рассмотрим общего вида подмножество T состояний процесса. Мы скажем, что состояние $j \in T$ следует за состоянием $i \in T$ внутри T, если существует последовательность $i_1, i_2, \ldots, i_s$ состояний подмножества T такая, что плотности $q_{ii_1}, \ldots, q_{i_n i_{n+1}}, \ldots, q_{i_s j}$ положительны. Если состояние j следует за состоянием i внутри T, а также i следует за j внутри T, то мы их назовем состояниями взаимно сообщающимися внутри T. Каждое состояние мы называем сообщающимся само с собой. Множество T распадется на классы T_j состояний взаимно сообщающихся внутри T. Классы T_j регулярны. Мы будем говорить, что класс $T_m \neq T_n$ следует за классом T_n, если состояния класса T_m следуют за состояниями класса T_n. Переставляя строки и столбцы матрицы Q_T так, чтобы индексы состояний, принадлежащих одному и тому же классу, были рядом и чтобы индексы состояний каждого класса были ниже, чем индексы состояний следующих классов, мы приведем матрицу Q_T к виду

$$Q_T = \begin{pmatrix} Q_{11}, & Q_{12}, & \ldots, & Q_{1s} \\ 0, & Q_{22}, & \ldots, & Q_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, & Q_{ss} \end{pmatrix}.$$

Подразделению матрицы соответствует подразделение состояний на отдельные классы. Если подразделить и матрицу $\boldsymbol{P}(t;\,T)$ на соответствующие блоки $\boldsymbol{P}_{kj}(t;\,T)$, то систему уравнений $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}(t;\,T) = Q_T\boldsymbol{P}(t;\,T)$ можно представить при помощи блочных матриц в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_{ij}(t;\,T) = \sum_k Q_{ik}\boldsymbol{P}_{kj}(t;\,T) = \sum_{k \geqq i} Q_{ik}\boldsymbol{P}_{kj}(t;\,T)\,.$$

Положим $i = s$. Имеем $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_{sj}(t;\,T) = Q_{ss}\boldsymbol{P}_{sj}(t;\,T)$. Принимая во внимание, что начальное условие имеет вид $\boldsymbol{P}_{sj}(0;\,T) = 0$ для $s \neq j$, мы видим, что $\boldsymbol{P}_{sj}(t;\,T) \equiv 0$ для $s > j$. Для $i = s-1,\ s-2$ и т. д. мы последовательно убедимся таким же способом, что $\boldsymbol{P}_{ij}(t;\,T) \equiv 0$ для $i > j$. Итак, мы получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_{ij}(t;\,T) = \sum_{i \leqq k \leqq j} Q_{ik}\boldsymbol{P}_{kj}(t;\,T)\,.$$

В частности, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_{ii}(t;\,T) = Q_{ii}\boldsymbol{P}_{ii}(t;\,T)$ и в силу начального условия $\boldsymbol{P}_{ii}(0;\,T) = E$ будет $\boldsymbol{P}_{ii}(t;\,T) = \exp Q_{ii}t$.

Решение $y(t)$ неоднородной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами $y'(t) = Ay(t) + b(t)$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид

$$y(t) = \int_0^t \exp\{A(t-\tau)\}\, b(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Пусть теперь $i < j$. Применяя это представление к уравнению

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{P}_{ij}(t;\,T) = Q_{ii}\boldsymbol{P}_{ij}(t;\,T) + \sum_{i < k \leqq j} Q_{ik}\boldsymbol{P}_{kj}(t;\,T)\,,$$

мы получим

$$\boldsymbol{P}_{ij}(t;T) = \sum_{i<k\leqq j} \int_0^t \boldsymbol{P}_{ii}(t-\tau;T)\, Q_{ik}\boldsymbol{P}_{kj}(\tau;T)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Введем для двух непрерывных матричных функций $A(t)$ и $B(t)$, A — типа (n, m) и B — типа (m, r), обозначение

$$A * B = \int_0^t A(t-\tau)\, B(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Тогда будет $\boldsymbol{P}_{ij} = \sum_{i<k\leqq j} \boldsymbol{P}_{ii}Q_{ik} * \boldsymbol{P}_{kj}$. Выражая $\boldsymbol{P}_{kj}$ аналогичным образом, мы увидим, что справедливо представление

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_r} \boldsymbol{P}_{ii}Q_{ik_1} * \boldsymbol{P}_{k_1k_1}Q_{k_1k_2} * \ldots * \boldsymbol{P}_{k_rk_r}Q_{k_rj} * \boldsymbol{P}_{jj}\,.$$

При суммировании используются, разумеется, лишь такие последовательности $(i, k_1, k_2, \ldots, k_r, j)$ индексов классов, для которых все матрицы $Q_{ik_1}, \ldots, Q_{k_nk_{n+1}}, \ldots, Q_{k_rj}$ — ненулевые. При формулировке следующей леммы мы назовем такие последовательности индексов допустимыми.

Лемма. *В случае, когда последовательность* $(j_1, j_2, \ldots, j_r)$ *допустима, имеет место равенство*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-n+1}e^{-\varrho t}\boldsymbol{P}_{j_1j_1}Q_{j_1j_2} * \boldsymbol{P}_{j_2j_2}Q_{j_2j_3} * \ldots * \boldsymbol{P}_{j_{r-1}j_{r-1}}Q_{j_{r-1}j_r} * \boldsymbol{P}_{j_rj_r} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\, A_{j_1}Q_{j_1j_2}A_{j_2}Q_{j_2j_3}\ldots A_{j_{r-1}}Q_{j_{r-1}j_r}A_{j_r}\,,$$

где $\varrho = \max \varrho_m$, *а* ϱ_m *— характеристическое число класса* T_{j_m}, n *— число, показывающее, сколько раз число* ϱ *встречается среди чисел* ϱ_m. *Если* $\varrho_m < \varrho$, *то* $A_{j_m} = (\varrho E - Q_{j_mj_m})^{-1}$, *а если* $\varrho_m = \varrho$, *то* A_{j_m} *является коэффициентом* $e^{t\varrho}$ *в представлении матрицы* $\exp Q_{j_mj_m}t$. *Все элементы предельной матрицы положительны.*

Доказательство. Обозначим $I = \boldsymbol{P}_{j_1j_1}Q_{j_1j_2} * \ldots * \boldsymbol{P}_{j_{r-1}j_{r-1}}Q_{j_{r-1}j_r}\boldsymbol{P}_{j_rj_r}$. Воспользуемся теперь представлением матриц $\boldsymbol{P}_{j_mj_m}$, соответствующих классам с характеристическим числом ϱ, которое было указано в доказательстве теоремы 1, т. е. $\boldsymbol{P}_{j_mj_m}(t;T) = e^{\varrho t}A_{j_m} + o(e^{\varrho' t})$. В сокращенном виде получим

$$I = \int_A \!\!\ldots \int \boldsymbol{P}_{j_1j_1}(t_1;T)\, Q_{j_1j_2}\boldsymbol{P}_{j_2j_2}(t_2;T)\ldots \boldsymbol{P}_{j_rj_r}(t - \textstyle\sum t_j;T)\,\mathrm{d}t_1, \ldots, \mathrm{d}t_{r-1} =$$

$$= \int_A \!\!\ldots \int \ldots e^{\varrho t_m}A_{j_m}Q_{j_mj_{m+1}}\ldots \boldsymbol{P}_{j_ej_e}(t_e;T)\, Q_{j_ej_{e+1}}\ldots \mathrm{d}t_1\ldots \mathrm{d}t_{r-1} +$$

$$+ o(t^{n-1}e^{\varrho t}), \quad A = \{t_1 + t_2 + \ldots t_{r-1} < t,\ t_m \geqq 0\}\,.$$

Оценку остатка можно получить, приняв во внимание, что матрицы $\boldsymbol{P}_{j_mj_m}$, соответствующие классам с характеристическим числом, меньшим чем ϱ, равны $o(e^{t\varrho'})$ для подходящего $\varrho' < \varrho$, и пользуясь соотношениями

$$t^ke^{\varrho t} * e^{\varrho t} = (k+1)^{-1}\, t^{k+1}e^{\varrho t} \quad \text{и} \quad t^ke^{\varrho t} * t^se^{\varrho' t} = O(t^ke^{\varrho t})\,.$$

Интегрируя по переменным t_m, соответствующим классам с характеристическим числом ϱ, мы получим, обозначив переменные, соответствующие классам с меньшим характеристическим числом через $s_1, \ldots, s_k$, $k = r - n$,

$$I = \frac{1}{(n-1)!} \int_B \cdots \int (t - \sum s_j)^{n-1} e^{\varrho(t - \Sigma s_j)} \ldots A_{j_m} Q_{j_m j_{m+1}} \ldots \boldsymbol{P}_{j_e j_{e+1}}(s_q; T)\, Q_{j_e j_{e+1}} \ldots$$

$$\ldots ds_1 \ldots ds_k + o(t^{n-1} e^{\varrho t}) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\varrho t} \int_B \cdots \int e^{-\varrho \Sigma s_j} \ldots A_{j_m} Q_{j_m j_{m+1}} \ldots$$

$$\ldots \boldsymbol{P}_{j_e j_{e+1}}(s_q; T)\, Q_{j_e j_{e+1}} \ldots ds_1 \ldots ds_k + o(t^{n-1} e^{\varrho t}),$$

$$B = \{s_1 + s_2 + \ldots + s_k < t,\ s_q \geqq 0\}.$$

Итак,

$$t^{-n+1} e^{-\varrho t} I = \frac{1}{(n-1)!} \int_B \cdots \int \ldots A_{j_m} Q_{j_m j_{m+1}} \ldots e^{-\varrho s_q} \boldsymbol{P}_{j_e j_e}(s_q; T) Q_{j_e j_{e+1}} \ldots$$

$$\ldots ds_1 \ldots ds_k + o(1),$$

что для $t \to \infty$ стремится к

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \ldots A_{j_m} Q_{j_m j_{m+1}} \ldots e^{-\varrho s_q} \boldsymbol{P}_{j_e j_e}(s_q; T) \ldots ds_1 \ldots ds_k =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \ldots A_{j_m} Q_{j_m j_{m+1}} \ldots \int_0^\infty e^{-\varrho s_q} \boldsymbol{P}_{j_e j_e}(s_q; T)\, ds_q\, Q_{j_e j_{e+1}} \ldots$$

Интегрируя по частям, мы получаем

$$\int_0^\infty e^{-\varrho s} \boldsymbol{P}_{j_e j_e}(s; T)\, ds = \frac{1}{\varrho} E + \frac{1}{\varrho} Q_{j_e j_e} \int_0^\infty e^{-\varrho s} \boldsymbol{P}_{j_e j_e}(s; T)\, ds.$$

Итак,

$$\int_0^\infty e^{-\varrho s} \boldsymbol{P}_{j_e j_e}(s; T)\, ds = (\varrho E - Q_{j_e j_e})^{-1} = A_{j_e}$$

Остается доказать, что все элементы предельной матрицы положительны. В случае, когда A_{j_m} соответствует классу с характеристическим числом ϱ, это следует из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 1. Если же характеристическое число соответствующего класса меньше ϱ, то

$$A_{j_m} = \int_0^\infty e^{-\varrho t} \boldsymbol{P}_{j_m j_m}(t; T)\, dt.$$

Имеем $\boldsymbol{P}_{j_m j_m}(t; T) = \exp Q_{j_m j_m} t$; при доказательстве теоремы 1 мы убедились, что в случае неразложимой матрицы Q все элементы $\exp Qt$ положительны для $t > 0$. Следовательно, то же имеет место и для A_{j_m}. В том, что элементы предельной матрицы положительны, можно убедиться, используя то обстоятельство, что умножение ненулевой матрицы с неотрицательными элементами справа и слева на матрицы со сплошь положительными элементами приводит к матрице со сплошь положительными элементами.

Следующие теоремы можно в общем легко доказать, если воспользоваться леммой и представлением

$$\boldsymbol{P}_{ij} = \sum \boldsymbol{P}_{ii} Q_{ik_1} * \boldsymbol{P}_{k_1k_1} Q_{k_1k_2} * \ldots * \boldsymbol{P}_{k_rk_r} Q_{k_rj} * \boldsymbol{P}_{jj} .$$

Мы их приведем без доказательства; в работе [3] можно найти доказательства тех же теорем для однородных цепей. Через $P_T(t)$ мы обозначим вероятность того, что система пребывала непрерывно в состояниях множества T с начала по крайней мере до момента t. То обстоятельство, что класс T_m следует за классом T_n, мы будем обозначать через $T_n \prec T_m$. На начальное распределение вероятностей p мы будем помимо предположения, что оно полностью сосредоточено в состояниях множества T, накладывать еще условие, что имеется положительная вероятность того, что в момент времени нуль система находится в таких классах T_k, для которых не существует $T_j \precsim T_k$ (Условие A).

Теорема 2. *Пусть* $\varrho = \max\limits_{T_j} \varrho_j$ *и пусть* k *— наибольшее число такое, что существуют классы* $T_{\alpha_1} \prec T_{\alpha_2} \prec \ldots \prec T_{\alpha_k}$, *для которых* $\varrho_{\alpha_1} = \varrho_{\alpha_2} = \ldots = \varrho_{\alpha_k} = \varrho$. *Тогда при выполнении условия A существует*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-k+1} e^{-\varrho t} P_T(t) > 0 .$$

Пусть p_k означает ту часть вектора начального распределения вероятностей, которая соответствует состояниям, входящим в класс T_k. Пусть e_m — столбцевой вектор, у которого на месте, соответствующем состоянию m, стоит единица, а на всех остальных местах — нули.

Теорема 3. *При тех же условиях, как и в теореме 2, имеет место: для каждого* $m \in T$ *существует* $\lim\limits_{t\to\infty} P_m(t|T) = P_m(T)$; *этот предел положителен, если и только если* m *входит в такой класс* T_j, *для которого существуют* $T_{s_1} \prec T_{s_2} \prec \ldots \prec T_{s_k} \precsim T_j$, *характеристические числа которых равны* ϱ. *В этом случае*

$$P_m(T) = C \sum{}^* p_{r_1} A_{r_1} Q_{r_1 r_2} A_{r_2} \ldots A_j e_m .$$

C есть независимая от j постоянная, а $\sum^*$ *означает, что суммирование производится по всем последовательностям классов* $T_{r_1} \prec T_{r_2} \prec \ldots \prec T_j$, *среди характеристических чисел которых число* ϱ *встречается* k *раз.*

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы 2; пусть существует одна-единственная k-членная последовательность классов* $T_{s_1} \prec T_{s_2} \prec \ldots$ $\ldots \prec T_{s_k}$ *с характеристическими числами* ϱ; *тогда вероятность* $P_m(T)$ *будет одинаковой для всех начальных распределений, выполняющих условие* A.

Литература

[1] *Coddington E. A., Levinson N.*: Theory of ordinary differential equations. New York 1955.

[2] *Doob J. L.*: Stochastic processes. New York 1953.

[3] *Мандл П.* (*Mandl P.*): Об асимптотическом поведении вероятностей в группах состояний однородной цепи Маркова. Čas. pro pěst. mat. *84* (1959), 140—149.

Výtah

O ASYMPTOTICKÉM CHOVÁNÍ PRAVDĚPODOBNOSTÍ UVNITŘ SKUPIN STAVŮ HOMOGENNÍHO MARKOVOVA PROCESU

PETR MANDL, Praha

Cílem práce je odvoditi pro homogenní Markovovy procesy s konečným počtem stavů výsledky, které pro Markovovy řetězce jsou uvedeny v dřívější práci autorově [3]. Je studováno limitní chování pravděpodobností $P_j(t/T)$, že systém se bude vyskytovati v okamžiku t ve stavu j, patřícím množině stavů T za podmínky, že se vyskytoval ve stavech T bez přerušení aspoň do doby t.

Množina T je nazvána *regulární*, jestliže matice, utvořená z intensit pravděpodobnosti přechodu mezi stavy T je nerozložitelná. Charakteristické číslo této matice, které má největší reálnou část, se nazývá *charakteristickým číslem* množiny T.

Jestliže T je regulární, limity $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t/T)$ existují a jsou kladné a nezávislé na počátečním rozložení pravděpodobností. Obecná množina T může být rozložena ve více tříd stavů sousledných. Řekneme, že $T_j \prec T_k$, jestliže existuje stav množiny T_j, který má kladnou intensitu přechodu do stavů množiny T_k. Třídy T_j jsou regulární. Charakteristická čísla tříd T_j a struktura množiny tříd T_j daná vztahem $T_j \prec T_k$ určují, jakého řádu jsou pravděpodobnosti, že se systém bude vyskytovati v T bez přerušení aspoň do doby t a určují také, pro které stavy j limity $\lim\limits_{t\to\infty} P_j(t/T)$ jsou kladné.

Résumé

SUR LE COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES PROBABILITÉS DANS LES ENSEMBLES DES ÉTATS D'UN PROCESSUS DE MARKOV HOMOGÈNE

PETR MANDL, Praha

Le but de l'article présent est établir pour les processus de Markov homogènes avec un nombre fini d'états les résultats obtenus pour les chaînes de Markov dans un travail antérieur [3] de l'auteur. On étudie le comportement limite des probabilités $P_j(t/T)$ que le système se trouvera à l'instant t dans un état j appartenant à l'ensemble T des états, sous la condition qu'il se trouvait sans cesse dans les états de T au moins jusqu'au temps t.

L'ensemble T est dit *régulier*, si la matrice formée des intensités de probabilité de transition entre les états de T est indecomposable. La racine caractéristique de cette matrice avec la plus grande partie réelle est nomée *racine caractéristique* de l'ensemble T.

Si T est régulier, les limites $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t/T)$ existent et sont positives et indépendantes de la lois de probabilité initiale. L'ensemble T général peut être décomposé en plusieurs classes d'états communicants. On dit que $T_j \prec T_k$ s'il existe un état de T_j qui a l'intensité de transition dans les états de T_k positive. Les classes T_j sont régulières. Les racines caractéristiques des T_j et la structure de l'ensemble des T_j donnée par la relation $T_j \prec T_k$ determinent l'ordre de grandeur des probabilités que le système se trouve dans T sans cesse au moins jusqu'au temps t et determinent aussi pour quels états j les limites $\lim\limits_{t\to\infty} P_j(t/T)$ sont positives.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

АБСОЛЮТНЫЙ РАНГ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

КАРЕЛ ЧУЛИК (Karel Čulík), Брно

(Поступило в редакцию 27/X 1959 г.)

Две матрицы одного и того же типа называются родственными, если их нулевые элементы расположены на тех же местах. Исследуется вопрос, как изменяется ранг матрицы при переходе к родственной матрице, т. е. при изменении ее ненулевых элементов, если не допускать, чтобы из них получились нули. Выводится несколько необходимых и достаточных условий для того, чтобы наименьший из рангов всех матриц, родственных квадратной матрице (т. наз. абсолютный ранг) порядка n, был также n. Далее выводятся некоторые результаты, касающиеся абсолютного ранга матриц.

В дальнейшем мы всюду предполагаем (поскольку не будет оговорено иное), что элементы матрицы взяты из любого поля, содержащего хотя бы три элемента. Элементы нулевой, единичный и обратный к единичному мы обозначаем в каждом таком поле, как обычно, через 0, 1, —1.

Матрицы $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$ одного и того же типа m/n мы называем *родственными*, если для любого i, $1 \leqq i \leqq m$ и любого j, $1 \leqq j \leqq n$

$$a_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_{ij} = 0 \,. \tag{1}$$

Отношение родственности является, очевидно, эквивалентностью на множестве всех матриц над данным полем.

Рассмотрим прежде всего квадратную матрицу A с n строками, удовлетворяющую следующему условию:

(2) *существует n ненулевых элементов матрицы A, из которых никакие два не стоят в одной и той же строке или в одном и том же столбце.*

Лемма 1. *Если квадратная матрица удовлетворяет условию (2), то существует родственная ей матрица, являющаяся неособенной. Для матриц над полем с двумя элементами это утверждение не обязательно справедливо.*

Доказательство. Пусть квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$ с n строками удовлетворяет условию (2). Для $n = 1$ лемма, очевидно, справедлива. Допустим, что она справедлива и для $n - 1 \geqq 1$. Если a_{rs} — один из элементов, удовлетворяющих условию (2), то символом A_{rs} обозначим подматрицу матрицы A, получающуюся путем вычеркивания r-й строки и s-го столбца. Тогда A_{rs} также удовлетворяет условию (2) и по предположению индукции существует неособенная матрица A'_{rs}, родственная матрице A_{rs}. Пусть матрица $B = \|b_{ij}\|$ получается из A таким образом, что подматрица A_{rs} заменяется матрицей A'_{rs}. Тогда, конечно, B — матрица, родственная A, и согласно лапласовскому разложению определителя $|B|$ по элементам r-й строки будет

$$(3) \qquad |B| = b_{rs}|B_{rs}|(-1)^{r+s} + c\,, \quad \text{где} \quad c = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq s}}^{n} b_{ri}|B_{ri}|(-1)^{r+i}\,,$$

причем $b_{rs}|B_{rs}| \neq 0$.

Если $|B| \neq 0$, то уже B будет искомой матрицей, а если $|B| = 0$, то $c \neq 0$, и мы подберем b'_{rs} так, чтобы $0 \neq b'_{rs} \neq b_{rs}$, что всегда возможно, если поле, над которым построены матрицы, содержит хотя бы три элемента. Тогда матрица B', полученная из B заменой элемента b_{rs} на b'_{rs}, будет искомой матрицей.

Наконец ясно, чот хотя квадратная матрица с $n > 1$ строками над полем с двумя элементами, все элементы которой равны 1, и выполняет условие (2), однако каждая родственная ей матрица над этим полем равна ей самой, т. е. является особенной.

Лемма 2. *Пусть M — матрица типа $n/n+1$ ($n+1/n$) и пусть M_i означает квадратную подматрицу, полученную путем вычеркивания i-го столбца (i-й строки) матрицы M. Если существуют подматрицы M_i и M_k $i \neq j$, каждая из которых удовлетворяет условию* (2), *то существует такая матрица M', родственная M, что обе подматрицы M'_i и M'_j — неособенные.*

Доказательство. Для $n = 1$ утверждение, очевидно, справедливо, и допустим, что оно справедливо и для $n - 1 \geqq 1$. Пусть $M = \|a_{ij}\|$ будет типа $n/n+1$ и пусть для ее подматриц M_i и M_j выполняются условия леммы. Тогда среди элементов, о которых говорится в условии (2), имеется элемент a_{hj} из M_i и элемент a_{ki} из M_j (если сохранить овозначения элементов в M). Обозначим через N подматрицу матрицы M, полученную путем вычеркивания ее i-го и j-го столбцов, так что N будет типа $n/n-1$. Тогда матрицы N_h и N_k (полученные путем вычеркивания h-й и k-й строк из N) будут обе подматрицами как матрицы M_i, так и матрицы M_j, и будут обе удовлетворять условию (2). Далее мы вудем различать два случая:

1. $h \neq k$. Тогда по предположению индукции существует матрица N', родственная N, причем обе ее подматрицы N'_h и N'_k — неособенные. Пусть матрица P возникает из матрицы M заменой подматрицы N матрицей N'. Тогда, по аналогии с (3), согласно лапласовскому разложению определи-

теля $|P_i|$ по элементам j-го столбца (при обозначениях матрицы M) и определителя $|P_j|$ по элементам i-го столбца, имеют место соотношения

$$(4) \qquad |P_i| = a_{hj}|N'_h|(-1)^p + c\,, \quad |P_j| = a_{ki}|N'_k|(-1)^q + d\,,$$

где p и q — надлежащим образом подобранные четные или нечетные натуральные числа, а c и d — остаточные члены разложений. Из (4) непосредственно следует, что элементы a_{hj} и a_{ki} можно заменить подходящими элементами a'_{hj} и a'_{ki} так, чтобы $a'_{hj} \neq 0 \neq a'_{ki}$ и чтобы в полученной таким образом матрице M' обе ее подматрицы M'_i и M'_j были неособенными. Притом, конечно, и здесь M' родственна матрице M.

2. $h = k$. Тогда $N_h = N_k$, и по лемме 1 существует матрица N'_h, родственная N_h и неособенная. Пусть матрица P образована из M так, что подматрица N_h заменяется подматрицей N'_h. Тогда для подматриц P_i и P_j опять-таки имеет место (4), и далее мы поступаем так же, как и в случае 1. Этим и завершается доказательство.

Абсолютным рангом матрицы A называем наименьшей из рангов всех матриц, родственных матрице A, и обозначаем его через $h[A]$. Матрицу A (квадратную) называем *абсолютно неособенной*, соотв. *особенной*, если каждая родственная ей матрица является неособенной, соотв. особенной.

Если матрица A родственна матрице B, то $h[A] = h[B]$. Если матрица B получается из матрицы A путем замены некоторых строк между собой и некоторых столбцов между собой, то $h[B] = h[A]$. Если A' — матрица, транспонированная по отношению к матрице A, то опять $h[A'] = h[A]$.

Теорема 1. *Для квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ с n строками следующие условия являются эквивалентными:*

а) *A — абсолютно неособенная матрица.*

б) *В каждой строке и в каждом столбце существует точно один такой элемент, напр. a_{rs}, что $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$, причем это имеет место для любой матрицы, родственной A. Более того, для этих элементов $0 \neq a_{rs}|A_{rs}| \,.\, (-1^{s+r}) = |A|$.*

в) *Существует в точности одна n-ка элементов, которая удовлетворяет (2). Если это элементы $a_{i\alpha_i}$, $1 \leqq i \leqq n$, то $\prod_{i=1}^{n} a_{i\alpha_i} = \pm |A|$.*

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б) Если A — абсолютно неособенная матрица, то она также является неособенной, и согласно лапласовскому разложению определителя $|A|$ по какому-либо столбцу или строке, в каждой строке и в каждом столбце должен существовать элемент, напр. a_{rs}, для которого $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$. Если бы, однако, для одного из таких элементов имело место $0 \neq a_{rs}|A_{rs}|(-1)^{r+s} \neq |A|$, то можно было бы определить матрицу $B = \|B_{ij}\|$ так: $b_{rs} = (a_{rs}|A_{rs}|(-1)^{r+s} - |A|)/(|A_{rs}|(-1)^{r+s})$ и $b_{ij} = a_{ij}$, если или $i \neq r$ или $j \neq s$. Однако, B — матрица родственная A и притом — неособенная, что невозможно. Остаются поэтому следующие возможности: для каждого элемента a_{ij} имеет место или $a_{ij}|A_{ij}|(-1)^{i+j} = |A|$ или $a_{ij}|A_{ij}| = 0$. Отсюда уже, согласно лапласовскому разложению определителя $|A|$, следует б), конечно, и для любой матрицы, родственной матрице A.

б) $\Rightarrow$ в) Пусть справедливо б), так что в первой строке матрицы A имеется элемент $a_{1\alpha_1}$, для которого $0 \neq a_{1\alpha_1}|A_{1\alpha_1}|(-1)^{1+\alpha_1} = |A|$. Тогда, конечно, $|A_{1\alpha_1}| \neq 0$ и, очевидно, существует перестановка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, для которой будет $\prod_{i=1}^{n} a_{i\alpha_i} \neq 0$ т. е. выполняется условие (2). Далее применим доказательство от противного. Допустим, что и для перестановки $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \neq (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$ имеет место $\prod_{i=1}^{n} a_{i\beta_i} \neq 0$, т. е. что не справедливо в). Прежде всего существует индекс r такой, что $\alpha_r \neq \beta_r$. Для подматрицы $A_{r\alpha_r}$ и $A_{r\beta_r}$, очевидно, выполняется условие (2), значит, для подматрицы M, образованной из матрицы A вычеркиванием ее r-й строки, выполняются условия леммы 2. Поэтому существует матрица M', родственная M, и обе соответствующие подматрицы $A'_{r\alpha_r}$ и $A'_{r\beta_r}$ — неособенные. Пусть A' возникает из A заменой подматрицы M матрицей M' Тогда A' родственна A и, кроме того, $a_{r\alpha_r}|A'_{r\alpha_r}| \neq 0 \neq a_{r\beta_r}|, A'_{r\beta_r}$ что противоречит условию б).

в) $\Rightarrow$ а) ясно без доказательства.

Теорема 2. *Квадратная матрица с n строками является абсолютно особенной, если и только если она не удовлетворяет условию* (2).

Доказательство. Если данная матрица выполняет условие (2), то по лемме 1 существует родственная ет матрица, являющаяся неособенной, так что данная матрица не будет абсолютно особенной. Достаточность указанного условия очевидна.

Следствие 1. *Абсолютно неособенную квадратную матрицу можно заменой ее строк или столбцов привести к такому виду, в котором все главные миноры являются определителями абсолютно неособенных главных подматриц.*

Доказательство. По теореме 1 в абсолютно неособенной квадратной матрице $A = \|a_{ij}\|$ с n строками существует точно одна перестановка $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, для которой $\prod_{i=1}^{n} a_{i\alpha_i} \neq 0$. Тогда можно поменять местами столбцы так, чтобы элемент $a_{i\alpha_i}$ перешел в i-й столбец для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом получится некоторая матрица $B = \|b_{ij}\|$, являющаяся также абсолютно неособенной, причем $b_{ii} = a_{i\alpha_i}$ для $1 \leqq i \leqq n$.

Пусть $|M|$ — главный минор порядка m, $1 \leqq m \leqq n$ матрицы B; предположим для простоты, что квадратная подматрица M образована вычеркиванием i-й строки и i-го столбца для $i = m + 1, \ldots, n$. Тогда подматрица M выполняет условие (2) для элементов $\prod_{i=1}^{m} b_{ii} \neq 0$, так что по теореме 2 она не будет абсолютно особенной. Но если бы она была, с другой стороны, абсолютно неособенной, то по теореме 1 существовала бы перестановка $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ чисел $1, 2, \ldots, m$, отличная от основной перестановки $(1, 2, \ldots, m)$ и должно было бы иметь место неравенство $\prod_{i=1}^{m} b_{i\beta_i} \cdot \prod_{i=m+1}^{n} b_{ii} \neq 0$, что невозможно.

Теорема 3. *Квадратная матрица с n строками является абсолютно неособенной, если и только если ее можно заменой ее строк или столбцов привести к таковому виду $A = \|a_{ij}\|$, что*

1. *все главные миноры порядка $m < n$ матрицы A являются определителями абсолютно неособенных матриц и*

2. *если $|M|$ есть минор матрицы A, не являющийся главным, а $|M^*|$ — его дополнение, то $|M| \,.\, |M^*| = 0$; это справедливо и для всех матриц, родственных матрице A.*

Доказательство. Если данная матрица — абсолютно неособенная, то согласно следствию 1 ее можно заменой строк или столбцов привести к такому виду $A = \|a_{ij}\|$, что справедливо 1. Пусть $|M|$ — минор порядка m, не являющийся главным, а $|M^*|$ — его дополнение в определителе $|A|$, и пусть $|M| \,.\, |M^*| \neq 0$. Тогда, конечно, матрицы M и M^* выполняют (2) и, далее, для каждой m-ки элементов $a_{j_i\alpha_i}$, $1 \leqq i \leqq m$ из M и для каждой $(n - m)$-ки элементов $a_{j_i\alpha_i}$, $m + 1 \leqq i \leqq n$ из M^*, которые удовлетворяют (2), $\prod_{i=1}^{n} a_{j_i\alpha_i} \neq 0$ и, следовательно, согласно теореме 1, все элементы должны быть взяты из главной диагонали матрицы A, т. е. минор M должен быть главным, что невозможно. Итак, A, так же как и каждая родственная ей матрица, выполняют условие (2).

Если данная матрица не является абсолютно неособенной, но заменой ее строк или столбцов ее можно привести к виду $A = \|a_{ij}\|$, удовлетворяющему 1 и 2, то и матрица A не будет абсолютно неособенной и, следовательно, существует особенная матрица $B = \|b_{ij}\|$, родственная A. Притом, однако, матрица B выполняет условие 1, поэтому неравенство $b_{ii}|B_{ii}| \neq 0$ справедливо для любого $i = 1, 2, \ldots, n$. Из лапласовского разложения определителя $|B|$ по любой i-й строке (или по любому i-му столбцу) и из $|B| = 0$ следует существование элемента b_{ik}, $k \neq i$ для которого было бы $b_{ik}|B_{ik}| \neq 0$, что невозможно для 2.

Тогда как по условию в) из теоремы 1 вопрос о том, является ли данная квадратная матрица абсолютно неособенной, можно решить только на основании свойств самой матрицы, по условию б) необходимо исследовать не только данную матрицу, но и все родственные ей матривы. В случае матрицы над бесконечным полем этот критерий нужно поэтому считать неэффективным. В подобном же положении находится и условие 2 из теоремы 3. Весьма вероятно, однако, что теорема 1 и теорема 3 останутся в силе, если в них условия б) и 2 заменить более слабыми условиями, т. е. условиями

б′) *В каждой строке и в каждом столбце квадратной матрицы* $A = \|a_{ij}\|$ *имеется в точности один элемент, напр.,* a_{rs}, *такой, что* $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$.

2′. *Если* $|M|$ — *минор матрицы* A, *не являющийся главным, и если* $|M^*|$ — *его дополнение в* A, *то* $|M| \,.\, |M^*| = 0$.

Ни одно из этих двух условий пока не удалось доказать. Оба условия тесно связаны между собой и их можно сформулировать также в виде такого вопроса:

Пусть квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$ *с* n *строками выполняет условия* 1 *и* 2′. *Можно ли утверждать, что тогда не существует перестановка* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *чисел* $1, 2, \ldots, n$, *отличная от основной перестановки* $(1, 2, \ldots, \ldots, n)$] *для которой имеет место* $\prod_{i=1}^{n} a_{i\beta_i} \neq 0$?

Матрица A — неособенная, и при доказательстве от противного нет необходимости рассматривать такие перестановки $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, которые не удовлетворяют условию

$$\beta_i \neq i \text{ для любого } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Действительно, если бы было, напр., $\beta_j = j$, то подматрица $A_{j\beta_j}$ не была бы по теореме 1 абсолютно неособенной, что противоречит условию 1.

Перестановками, удовлетворяющими условию (5), в частности определением их числа, занимался целый ряд математиков, напр. Л. Эйлер, Й. Й. Сильвестер и др. (см. E. Netto: Lehrbuch der Combinatorik, Лейпциг 1901, стр. 66—74).

Výtah

ABSOLUTNÍ HODNOST ČTVERCOVÉ MATICE

Karel Čulík, Brno

Matice $A = \|a_{ij}\|$ a $B = \|b_{ij}\|$ téhož typu m/n se nazývají *příbuzné*, jestliže pro každé i, $1 \leqq i \leqq m$ a každé j, $1 \leqq j \leqq n$ platí: $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_{ij} = 0$. *Absolutní hodností* matice se rozumí nejmenší z hodností všech matic příbuzných s maticí danou. Zejména čtvercová matice se nazývá *absolutně regulární* příp. *singulární*, jestliže každá s ní příbuzná matice je regulární příp. singulární. Jsou-li prvky uvažovaných matic z tělesa obsahujícího alespoň tři prvky a označujeme-li nulový, jednotkový a opačný k jednotkovému obvyklým způsobem 0, $+1$ a -1, platí:

Věta 1. *Pro čtvercovou matici $A = \|a_{ij}\|$ o n řádcích jsou ekvivalentní podmínky:*

a) *A je absolutně regulární.*

b) *V každém řádku a v každém sloupci matice A existuje právě jeden prvek, např. a_{rs}, takový, že $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$ a totéž platí pro každou matici příbuznou s A. Pro tyto prvky dokonce platí $0 \neq a_{rs}|A_{rs}|(-1)^{r+s} = |A|$, když $|A_{rs}|$ je doplněk prvku a_{rs} v determinantu $|A|$.*

c) *Existuje právě jedna n-tice nenulových prvků z A, z nichž žádné dva nepatří do téhož řádku ani do téhož sloupce. Jsou-li to prvky $a_{i\alpha_i}$, $1 \leqq i \leqq n$, platí zřejmě $\prod_{i=1}^{n} a_{i\alpha_i} = \pm |A|$.*

Věta 3. *Čtvercová matice o n řádcích je absolutně regulární právě tehdy, když ji lze výměnou jejích řádků nebo sloupců uvést na takový tvar $A = \|a_{ij}\|$, že platí:*

1. *Všechny hlavní podmatice řádu $m < n$ matice A jsou absolutně regulární a*

2. *Jestliže $|M|$ je minor matice A, který není hlavní, a jestliže $|M^*|$ je jeho doplněk, pak $|M| \,.\, |M^*| = 0$ a totéž platí pro každou matici příbuznou s A.*

Nepodařilo se však dokázat tyto věty v případě, že v nich zeslabíme podmínky b) příp. 2 vypuštěním dovětku „*a totéž platí pro každou matici příbuznou s A*". Zejména lze pro čtvercovou matici $A = \|a_{ij}\|$ o n řádcích, která splňuje podmínku 1 a příslušně zeslabenou podmínku 2, položit tuto otázku:

Může existovat permutace $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ čísel $1, 2, \ldots, n$, která je různá od permutace základní $(1, 2, \ldots, n)$ a pro niž platí $\prod_{i=1}^{n} a_{i\beta_i} \neq 0$?

Snadno se nahlédne, že takovéto permutace mohou být jenom mezi těmi, které splňují podmínku $\beta_i \neq i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

Summary

ABSOLUTE RANK OF SQUARE MATRICES

Karel Čulík, Brno

Matrices $A = \|a_{ij}\|$ and $B = \|b_{ij}\|$ of the same type m/n are said to be related, if $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow b_{ij} = 0$ for all i, j $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$. The *absolute rank* of a matrix is the minimum of ranks of all matrices related to the given matrix. A square matrix is said to be *absolute regular* resp. *singular*, if every matrix

related to it is regular resp. singular. If the elements of matrices belong to a field containing at least three elements and if zero, the unit and its opposite are denoted by 0, 1 and -1, then there hold the following theorems:

Theorem 1. *For a square matrix $A = \|a_{ij}\|$ with n rows the following conditions are equivalent:*

a) A is absolute regular.

b) In every row and in every column of A there exists just one element, e. g. a_{rs} such that $a_{rs}|A_{rs}| \neq 0$ and the same is valid for every matrix related to A.

c) There exists just one n-uple of non-zero elements of A such that no two of these elements belong to the same row or column.

Theorem 3. *A square matrix with n rows is absolute regular if and only if it is possible by a permutation of its rows or columns to obtain a matrix $A = \|a_{ij}\|$ such that*

1. *all the main submatrices of degree $m < n$ of A are absolute regular and*

2. *if $|M|$ is a minor of A which is not main, and if $|M^*|$ is its complementary minor, then $|M| \,.\, |M^*| = 0$ and the same is valid for every matrix related to A.*

There remains unsolved the problem, whether the phrase "and the same is valid for every matrix related to A" can be omitted in these theorems (in conditions b) and 2). Namely for a square matrix $A = \|a_{ij}\|$ with n rows satisfying the condition 1 and the weaker (in the previous sense) condition 2, there arises the following question:

Does there exist a permutation $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ of integers $1, 2, \ldots, n$ different from $(1, 2, \ldots, n)$ such that $\prod_{i=1}^{n} a_{i\beta_i} \neq 0$?

Such a permutation must satisfy the condition $\beta_i \neq i$ for all $i = 1, 2, \ldots, n$.

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

ÚLOHY A PROBLÉMY

3. Určete počet vnitřních bodů pravidelného n-úhelníka, z nichž každý leží alespoň na třech úhlopříčkách tohoto n-úhelníka.

4. Budiž dáno přirozené číslo n; uvažujme množinu $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$ a definujme zobrazení f množiny N na N takto: pro sudé $x \in N$ je $f(x) = \frac{1}{2}x$, pro liché $x \in N$ je $f(x) = n - \frac{1}{2}(x - 1)$.

Zřejmě existuje přirozené číslo k tak, že platí $f^k(1) = 1$. Rozhodněte, zda zobrazení f^k je identické.

Jiří Sedláček, Praha

5. Řekneme, že grupa má vlastnost (V), jestliže *každý její systém generátorů obsahuje ireducibilní systém generátorů* (celé grupy).

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

Nechť Abelova grupa G je konečným direktním součtem p-primárních elementárních grup G_p (tj. řád každého nenulového prvku z G_p je roven p). *Potom G má vlastnost* (V).

Poznámka. Platí, že primární Abelova grupa má vlastnost (V) právě tehdy, jestliže řády jejích prvků jsou stejnoměrně omezeny.

Vlastimil Dlab, Chartúm

Poznámka k úloze 2. K 2. úloze uveřejněné v tomto časopise, sv. *85* (1960), čís. 1, str. 92, poznamenává prof. W. Sierpiński, Varšava, v dopise poslaném autorovi úlohy J. Sedláčkovi toto:

Tentýž problém je uveden jako otevřená otázka v knize W. Sierpińského „Teoria liczb II.“, Warszawa 1959, str. 201.

Jiří Sedláček, Praha

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

REFERÁTY

ROZŠÍŘENÍ ADITIVNÍCH A ISOTONNÍCH FUNKCIONÁLŮ NA ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH GRUPÁCH

(Referát přednesený v „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" dne 4. dubna 1960 v Brně)

Je-li $(G \leqq)$ abelovská částečně uspořádaná grupa (stručně: *po*-grupa; pod grupou budeme dále rozumět abelovskou grupu), pak pod funkcionálem F na G budeme rozumět reálnou funkci, definovanou na množině G. F je aditivní na G, platí-li $a, b \in G \Rightarrow F(a + b) = F(a) + F(b)$ a isotonní na $(G \leqq)$, je-li $F(a) \geqq 0$ pro všechna $a \in G$, $a \geqq 0$. Pod $(G \prec)$ budeme rozumět *po*-grupu, jejíž částečné uspořádání $\prec$ je jemnější než částečné uspořádání $\leqq$, tj. pro něž platí $a \in G$, $a \geqq 0 \Rightarrow a \succ 0$. Je-li H podgrupa *po*-grupy $(G \leqq)$, f aditivní a isotonní funkcionál (*ai*-funkcionál) na $(H \leqq)$, pak *ai*-funkcionál F na $(G \leqq)$ nazveme aditivním a isotonním rozšířením (*ai*-rozšířením) na $(G \leqq)$ funkcionálu f, jestliže platí $F(a) = f(a)$ pro všechna $a \in H$.

Cílem práce je řešení následující otázky: Je-li $y \in G$, Φ množina všech *ai*-rozšíření na $(G \leqq)$ *ai*-funkcionálu f, jest nalézti množinu hodnot $F(y)$ všech $F \in \Phi$, a řešení několika otázek příbuzných, týkajících se jednoznačnosti *ai*-rozšíření. Otázky podobného druhu pro částečně uspořádané vektorové prostory byly řešeny v práci W. NEF, *Über die Fortsetzung monotoner Linearformen*, Math. Zeitschr. *66* (1956), 129—142.

Všude v dalším používáme zavedených označení a předpokladu $f \neq 0$.

Věta. *Tehdy a jen tehdy existuje ai-rozšíření na $(G \leqq)$ funkcionálu f, jestliže na G existuje částečné uspořádání $\prec$ jemnější než $\leqq$ s vlastnostmi: 1. f je isotonní na $(H \prec)$, 2. pro libovolné $y \in G$ existují prvky $x, z \in H$ a přirozené číslo n tak, že platí $x \succ ny \succ z$.*

Množinu všech částečných uspořádání $\prec$, splňujících podmínky předešlé věty označíme Q. Je-li $y \in G$, $\prec$ částečné uspořádání grupy G, rozumějme pod $R(y, \prec)$ resp. $S(y, \prec)$ množinu všech reálných čísel ϱ resp. σ takových, že platí $\varrho \geqq \frac{1}{n} f(x)$ resp. $\sigma \leqq \frac{1}{n} f(x)$ pro vhodně zvolený prvek $x \in H$ a pro vhodně zvolené přirozené číslo n s vlastností $x \succ ny$ resp. $x \prec ny$. Označme $r(y, \prec) = \inf R(y, \prec)$, $s(y, \prec) = \sup S(y, \prec)$. Označme dále $r(y) = \sup\limits_{\prec \in Q} r(y, \prec)$, $s(y) = \inf\limits_{\prec \in Q} s(y, \prec)$.

Věta. *Budiž $Q \neq \emptyset$. Pro libovolné $y \in G$ a libovolné ai-rozšíření F na $(G \leqq)$ funkcionálu f platí $s(y) \leqq F(y) \leqq r(y)$.*

Pro libovolné $y \in G$ a libovolné (konečné) reálné číslo η, $s(y) < \eta < r(y)$, existuje ai-rozšíření F na $(G \leqq)$ funkcionálu f tak, že platí $F(y) = \eta$.

Věta. *Je-li $Q \neq \emptyset$, pak množina M všech prvků $y \in G$, pro něž platí $-\infty < s(y) = r(y) < \infty$, je podgrupa v G, $H \subset M \subset G$. Funkcionál F, definovaný na M rovnicí $F(y) = s(y)$, je jednoznačně určené ai-rozšíření na $(M \leqq)$ funkcionálu f. K libovolnému prvku $z \in G$, z non $\in M$, existují ai-rozšíření F_1, F_2 na $(G \leqq)$ funkcionálu f taková, že platí $F_1(z) \neq F_2(z)$.*

Věta. *Tehdy a jen tehdy existuje přesně jedno ai-rozšíření na* $(G \leqq)$ *ai-funkcionálu* f, *když existuje částečné uspořádání* $\prec$ *na* G, *jemnější než* $\leqq$, *když* f *je isotonní na* $(H \prec)$ *a když k libovolnému takovému částečnému uspořádání a k libovolnému reálnému číslu* $\varepsilon > 0$ *existují prvky* $x, z \in H$ *a přirozené číslo* n *tak, že platí* $x \succ ny \succ z, f(x) - f(z) < n\varepsilon$.

Prvek $y \in G$ nazveme jednoznačně ohodnocený nad (H, f), jestliže existuje přesně jedno *ai*-rozšíření na $(\{H, y\} \leqq)$ funkcionálu f (kde $\{H, y\}$ je podgrupa v G, vytvořená podgrupou H a prvkem y).

Věta. *Prvek* $y \in G$ *je jednoznačně ohodnocený nad* (H, f), *když a jen když platí* $-\infty < s(y, \leqq) = r(y, \leqq) < \infty$.

Věta. 1. *Prvky jednoznačně ohodnocené nad* (H, f) *tvoří podgrupu* N, $H \subset N \subset G$.

2. *Na* N *definovaná funkce* $F(y) = s(y, \leqq)$ *je ai-rozšíření na* $(N \leqq)$ *funkcionálu* f.

3. *Je-li* F *(jednoznačně určené) ai-rozšíření na* $(N \leqq)$ *funkcionálu* f *a prvek* $y \in G$ *jednoznačně ohodnocen nad* (N, F), *pak platí* $y \in N$.

F. Šik, Brno

RECENSE

Jiří Klapka: ANALYTICKÁ GEOMETRIE. Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1960, 1. vydání, 380 stran, 151 obrázků, 2200 výtisků, cena Kčs 41,—.

Kniha je schválena ministerstvem školství a kultury jako učebnice analytické geometrie a vektorové algebry pro studium na fakultách inženýrského stavitelství, architektury a pozemního stavitelství a ostatních fakultách technického směru. Dělí se na šest částí; obsah a koncepce jednotlivých částí knihy se jeví v hlavních rysech takto:

První část je věnována vázanému a volnému geometrickému vektoru, součtu konečného počtu vektorů, součinu čísla a vektoru, dalším pravidlům pro počítání s vektory, vektoru obecnému a aritmetickému, afinním (rovnoběžkovým) souřadnicím bodu a vektoru na přímce, v rovině a prostoru, orientaci přímky, roviny a prostoru. Výchozími, základními pojmy jsou přitom pojem orientované úsečky čili vázaného vektoru a pojem soustavy všech navzájem rovných vázaných vektorů čili volného vektoru.

Druhá část, věnovaná rovinné a prostorové afinní geometrii lineárních útvarů, studuje parametrické rovnice přímky v rovině a prostoru, dělicí poměr, rovnice přímky v rovině, dvojice přímek v rovině, svazky a osnovy přímek v rovině, parametrické rovnice roviny, rovnice roviny v prostoru, dvojice rovin, svazky a osnovy rovin, trojice rovin, trsy přímek a rovin. Při výkladu se vychází zpravidla od vektorového vyjádření; rozepsáním ve složky dostanou se potom výrazy klasické.

Třetí část pojednává vlastně o analytické geometrii lineárních útvarů eukleidovského prostoru. Ke studiu metrických vlastností geometrických útvarů užívá přitom součinů vektorů. Hlavní body výkladu a tím i jeho postup můžeme stručně zachytit hesly: skalární součin vektorů, kartézské souřadnice vektoru a bodu, vzdálenosti bodů a úhly vektorů, rovnice přímky a roviny v kartézských souřadnicích, vzdálenost bodu od přímky (roviny), vektorový součin, součiny tří nebo čtyř vektorů, objem rovnoběžnostěnu, transformace kartézských souřadnic, polární souřadnice v rovině, semipolární a polární (sférické) souřadnice v prostoru, základní věty sférické trigonometrie.

Ve čtvrté části se probírají především kuželosečky, dále pak některé algebraické křivky vyšších stupňů a některé křivky transcendentní. Výklad o kuželosečkách se začíná odvozením normálních rovnic kuželoseček (z elementárních definic kuželoseček) a vrcholí rozborem rovnice druhého stupně ve dvou proměnných a jejím uvedením na normální tvary (užitím transformací souřadnic). Z algebraických křivek vyšších stupňů a křivek transcendentních jsou probírány jednak technicky důležité křivky jako Bernoulliho lemniskáta, kubická a semikubická parabola, cyklické křivky, spirály, jednak křivky užívané při aplikacích diferenciálního a integrálního počtu jako Descartesův list, kruhová evolventa atd.

Část pátá se zabývá plochami druhého stupně, plochami rotačními a některými důležitými plochami přímkovými (speciálně konoidy). Regulární kvadriky se přitom studují na základě normálních tvarů svých rovnic (neprovádí se úplný rozbor rovnice druhého stupně ve třech proměnných). U kuželových a válcových ploch (i nekvadratických) se naproti tomu odvozují rovnice jak pro polohy obecné, tak pro polohy zvláštní. Totéž lze říci o rovnicích ploch rotačních a uvedených ploch přímkových.

Šestá část jedná o determinantech, maticích a jejich užití při řešení soustavy lineárních rovnic (homogenních i nehomogenních). Je míněna jako nutný (stručný) doplněk pro ty čtenáře, kteří neslyšeli výklady o algebře, uváděné v přednáškách na technických fakultách.

Při hodnocení Klapkovy knihy dívejme se na ni: 1. s hlediska požadavků kladených na učebnici určenou pro fakulty technického směru, 2. s hlediska koncepce a metody, 3. s hlediska zařazení mezi knihami o analytické geometrii.

Ad 1: Výklad, promyšleně se zříkaje axiomatického pojetí, navazuje na vědomosti získané na jedenáctiletce. Názornost, srozumitelnost a aplikabilita vyložené látky je plánovitě posilována přehlednými obrázky, celou řadou v textu řešených příkladů a mnoha vhodně a rozmanitě volenými cvičeními s udanými výsledky resp. pokyny k řešení. Metodika výkladu je pečlivě promýšlena se zřetelem k udržení zájmu studenta-technika o matematiku, se zřetelem k vyučování technickým disciplinám a se zřetelem k řešení technických problémů. (Viz např. na vhodných místech uvedené příklady z fysiky, technicky i jinak důležité křivky v části čtvrté, plochy rotační a některé důležité plochy přímkové v části páté, základní věty sférické trigonometrie v části třetí apod.) Při označování bodů, vektorů a jejich souřadnic, zavádění nových názvů apod. jsou správně respektovány zvyklosti vžité ve vyučování jiným předmětům na technických fakultách.

Ad 2: Koncepce knihy, vyrůstající vhodně z výsledků synthetické geometrie (známých ze střední školy), vrcholí v promyšleném a přiměřeným způsobem prováděném seznamování s novými myšlenkami obsaženými v moderní literatuře o analytické geometrii. (Viz např. partie jednající o vektorových prostorech, orientaci base vektorového prostoru, determinantu přechodu apod.) Po stránce metodické užívá kniha podstatně, s důslednou domyšleností a geometrickou názorností prostředků vektorové algebry.

Ad 3: Skutečnosti uvedené v 1 a 2 charakterisují jasně Klapkovu knihu jako velmi dobrou a mnohostranně užitečnou vysokoškolskou učebnici, která bezesporu zaujme významné místo mezi učebnicemi analytické geometrie psanými pro technické fakulty.

Závěrem je třeba se zmínit o názorných obrázcích a pečlivém vydání knihy Státním nakladatelstvím technické literatury v Praze.

Zdeněk Vančura, Praha

M. Miller: VARIATIONSRECHNUNG. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1959, 133 stran, 23 obr.

Knížka Millerova je elementárním úvodem do variačního počtu v rozsahu potřebném pro pracovníky v exaktních a technických vědách, kteří používají matematiky jako pomocného aparátu ve své problematice. Metoda výkladu a způsob odvozování jednotlivých poznatků je volen tak, aby čtenář, který je obeznámen se základními poznatky z diferenciálního a integrálního počtu a s elementární teorií diferenciálních rovnic, mohl bez obtíží sledovat text i výpočet. Klasickými obvyklými metodami vykládá autor teorii a postup výpočtů pro nejběžnější kategorie variačních problémů ve snaze podat teorii ve srozumitelné stručné formě s dodržováním matematické exaktnosti; vykládá především metodu výpočtu pro různé typy variačních úloh. Velká řada do konce propočtených příkladů učí čtenáře bezprostřední aplikaci odvozených teoretických výsledků. To je právě velká výhoda této elementární učebnice variačního počtu, která je určena těm, kteří se ve své vlastní problematice setkávají s konkrétními variačními problémy.

Způsob a výklad problematiky je obdobný postupu jiných učebnic elementárních metod variačního počtu.

Prvá kapitola zasvěcuje čtenáře do problematiky variačního počtu. Velmi stručně seznamuje se tu čtenář s pojmem funkcionálu a extrému funkcionálu v porovnání s pojmem funkce a jejího extrému. Tato úvodní kapitola obsahuje též základní pomocnou větu elementárního variačního počtu, která je velmi důležitá při odvozování rovnic extrémál při jednotlivých typech variačních úloh.

Na začátku kapitoly druhé je ve stručnosti odvozena Eulerova diferenciální rovnice pro nejjednodušší případ funkcionálu s pevnými a volnými konci a odvozeny podmínky transversality. Vhodně volené jednoduché i obtížnější příklady (podrobně propočtené) objasňují nejen předchozí teorii, ale upozorňují též čtenáře na různé detaily, které se mohou vyskytnout v konkrétních případech a které nejsou teorií podchyceny. Pojem totální a prvé variace nejjednoduššího funkcionálu je zde vysvětlen se stručností postačující pouze k porozumění dalšího textu teorie. Po objasnění pojmů slabých a silných extrémů jsou diskutovány nutné a postačující podmínky pro extrém nejjednoduššího funkcionálu. Tak, jak je obvyklé v jiných učebnicích, jsou v dalším uvedeny nutné podmínky pro extrém funkcionálu závislého na vyšších derivacích hledané funkce a je odvozena Euler-Poissonova rovnice. Po stručné teorii variačních problémů s více proměnnými a vícedimensionálních variačních problémů je zařazen obsáhlejší text o variačních úlohách v parametrickém tvaru pro případ křivek rovinných a prostorových. Také zde jsou ve stručnosti odvozeny podmínky transversality. Stať o Hamiltonově principu uzavírá pak druhou kapitolu, která je nasycena cennými instruktivními příklady za každým typem variační úlohy.

V kapitole třetí je formulován isoperimetrický problém a ve stručnosti vysvětlena a zdůvodněna metoda jeho řešení. Na deseti vhodně volených a úplně propočtených příkladech je postup výpočtu tohoto problému čtenáři velmi přiblížen. Velmi málo pozornosti je zde věnováno variačnímu problému s vedlejšími holonomními podmínkami. Kapitolu třetí uzavírá rozbor pojmu geodetických čar plochy s hlediska variačního počtu.

Přímé metody řešení variačních úloh (Eulerova, Ritzova a řešení pomocí Fourierových řad) jsou stručně vysvětleny v kapitole čtvrté a předvedeny na příkladech. Konečně poslední kapitola pátá orientuje čtenáře jen o tom, jak lze v některých případech převést okrajové problémy z diferenciálních rovnic na problémy variační.

Při hodnocení této knížky o elementárním variačním počtu je třeba vyjít z faktu, že byla sepsána pro nematematiky, kteří užívají klasických početních metod nebo budou jich užívat při tvořivé práci ve svém oboru. Více než polovina knížky je zaplněna propočtenými příklady. Je tedy s tohoto hlediska knížka elementární učebnicí klasických variačních metod a dobře poslouží těm, kterým je určena. Knížka je též vhodná pro studenty těch technických oborů, které vyžadují širší matematické vzdělání. Matematik a teoretický fysik musí být shovívavý při jejím posuzování: autor ve snaze po velké stručnosti nepodává ucelenou teorii. Jasně však formuluje předpoklady a závěry. Bohužel je tato snaha po stručnosti mnohdy na úkor porozumění — především v důkazech jednotlivých tvrzení. Řada formulí by měla být přece jen blíže zdůvodněna. Také některé tiskové chyby ve formulích mohou čtenáře zmást.

Vcelku je možno říci, že knížka splní dobře ten účel, za kterým byla sepsána, tj. je vhodnou pomůckou pro ty, kdo mají přání brzy a dobře se seznámit s početními metodami při řešení klasických variačních úloh.

František Nožička, Praha

L. Rédei: ALGEBRA, I. díl. Lipsko, Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.-G., 1959, XV, 797 str. Přepracovaný a rozšířený překlad z maďarštiny pořízený autorem. Originál vyšel r. 1954.

Jak říká autor v předmluvě, nevyžadují se ke studiu knihy žádné zvláštní předběžné vědomosti až na znalost přirozených čísel a k tomu jisté obratnosti v matematickém myšlení, kterou má posluchač matematiky již v druhém semestru studia na vysoké škole. Radil bych však, aby posluchači matematiky přistoupili ke studiu knihy k doplnění svých vědomostí z algebry až po prostudování elementárnějších učebnic, jako je např. Algebra Kořínkova nebo Kurošova. Autor je senior úspěšné algebraické školy maďarské. Při zpracování látky užil prací svých i prací svých žáků, takže i pokročilému čtenáři může kniha poskytnout dobré služby. Vedle věcí zcela nových najde v ní zajímavý výklad i věcí již známých.

Na konci mnohých paragrafů jsou připojeny příklady a úlohy, namnoze velmi sugestivní, a také uvedeny některé neřešené problémy. Dosti příkladů je obsaženo i v textu, aby sloužily k lepšímu porozumění látce.

Co je algebra, vysvětluje autor v předmluvě: Algebra začala početními výkony, které lze provádět v množině přirozených čísel. V dalším rozvoji vznikly i jiné příklady výkonů, ještě dříve než vzniklo uvědomění, že je lze pojímat z jednotného hlediska a značně je zobecnit. V každé množině lze výkony definovat tak, že každé dvojici prvků z množiny přiřadíme prvek z ní a množinu s těmito výkony nazveme pak strukturou. Algebra se zabývá zkoumáním takových struktur.

Toto vymezení oboru bádání algebry vyžaduje však dvojího omezení. Jedno z nich záleží v tom, že se zkoumají ze všech myslitelných výkonů pouze výkony důležité pro praxi. Těmi jsou především výkony asociativní, na něž se tudíž kniha omezuje, jako ostatně většina učebnic algebry. Neasociativní výkony se budou vyskytovat jen jako pojmy pomocné.

Principiální význam má však ta modifikace pojmu algebry, která vznikne z poznatku, že není třeba přihlížet k podstatě prvků struktur. Přesnou formulaci tohoto pojmu vděčíme geniu Ernsta Steinitze, který svou prací „Algebraische Theorie der Körper“ (1910) vytyčil směr algebraickému bádání tím, že zavedl „princip izomorfismu“, podle kterého se považují izomorfní struktury za v podstatě rovné. Tak vytvořil v algebře cosi podobného jako Felix Klein v geometrii svým „Erlangským programem“.

Proberu nyní obsah knihy, ovšem jen v heslech, a to tak, že budu upozorňovat hlavně na věci, které se nevyskytují v jiných algebrách.

Kapitola I. *Úvod do teorie množin.* Jedná se tu také o zobrazeních, o rozděleních v třídy a o ekvivalenci, o množinách uspořádaných a dobře uspořádaných. Při této příležitosti nazývá autor větu známou pod jménem Zornovo lema lematem Kuratowského-Zornovým, poněvadž ji K. Kuratowski dříve uveřejnil. Ovšem na význam této věty v algebře upozornil M. Zorn.

Kapitola II. *Struktury* (u Bourbakiho algebraické struktury). Nejprve jsou definovány výkony a operátory v množině, pak probrány nejdůležitější struktury: pologrupy, grupy, moduly, okruhy, kosotělesa, tělesa (a na konci kapitoly svazy). Následuje definice podstruktury a nadstruktury (rozšíření struktury), pak vytčeny některé důležité podstruktury, jako např. podstruktury Frattiniho. O komplexech se jedná jako o zobecnění podstruktur. Pak jsou uvedeny definice izomorfismu a homomorfismu a pojmů z nich odvozených. Také se tu mluví o různých způsobech konstrukce struktur, nejprve jako nadstruktur k dané struktuře. To jsou např. podílové struktury. Z více struktur jsou např. sestrojeny součiny struktur a jejich nejdůležitější použití, direktní součiny a součty. Vždy se zdůrazňuje analogie mezi různými strukturami. Aby se analogie mezi grupami a okruhy co nejvíce rozšířila, zavádějí se dvojice zobrazení okruhu v sebe, tzv. dvojné homotetismy. V této kapitole se také jedná o volných strukturách a o strukturách definovaných rovnicemi, o reprezentaci grup pomocí grup permutačních a o grupě alternující. Je tu také umístěna věta Schreierova a věta Jordanova-Hölderova. Lema Zassenhausovo přitom užívané je doplněno explicitním udáním izomorfismů, které se v něm vyskytují.

Kapitola III. *Operátorové struktury.* Po obecných úvahách se uvažuje o operátorových grupách, modulech a okruzích. Je uvedena věta Remakova-Krullova-Schmidtova. Pak je promluveno o vektorových prostorech, dvojných vektorových prostorech, o algebrách a dvojných algebrách. Jako příklady jsou uvedeny křížové součiny (u E. Noetherové „Verschränkte Produkte", zde však obecněji) a monomiální okruhy. Dále se mluví o polynomových okruzích, lineárních zobrazeních, maticových okruzích, lineárních grupách a alternujících okruzích, které slouží k definici determinantů a odvození jejich vlastností. Cramerovo pravidlo je vyřčeno i pro komutativní okruhy s jednotkou, v nichž mohou být i dělitelé nuly. Je definován charakteristický mnohočlen matice, normy a stopy algeber. Konečně je promluveno o komplexních a kvaternionových okruzích.

Kapitola IV. *Dělitelnost v okruzích.* V předešlých dvou kapitolách se jednalo o různých strukturách z obecného hlediska. Nyní se autor začne zabývat zvláštními vlastnostmi struktur. Při otázkách dělitelnosti se neomezuje jen na komutativní okruhy. Pojednává o okruzích s hlavními ideály a o euklidovských okruzích. Je uvedena věta Szendreiova o možnosti rozšíření okruhu bez dělitelů nuly na podobný okruh s jednotkovým prvkem. Dále se tu mluví o polynomových okruzích nad kosotělesy. Konečně je obšírně pojednáno o okruzích celých kvaternionů.

Kapitola V. *Konečné Abelovy grupy.* Jsou uvedeny hlavní věty o nich a o jejich charakterech a je vyslovena věta Hajósova a její zpřesnění. Dále následuje rozšíření Möbiova vzorce na Abelovy grupy a jako zobecnění vzorec Möbiův-Delsarteův. Pojednáno je o zavedení zetafunkcí pro konečné Abelovy grupy. Kapitola končí statí o grupě zbytkových tříd mod m nesoudělných s m a o primitivních číslech mod m.

Kapitola VI. *Operátorové moduly.* Tato teorie se obvykle nazývá lineární algebrou. Jsou uvedeny nejprve základní věty o determinantních a elementárních dělitelích. Následuje důkaz hlavní věty o Abelových grupách s konečným počtem vytvořujících prvků. V dalších paragrafech se mluví o lineární závislosti v kosotělesech, ve vektorových prostorech a o lineárních soustavách rovnic v nich. Tu je uvedena Kroneckerova věta o hodnosti, Schurovo lema, Chevalleyova-Jacobsonova věta o hustotě a konečně strukturové věty Wedderburnovy-Artinovy.

Kapitola VII. *Nekomutativní okruhy mnohočlenové.* Tato kapitola obsahuje řadu známých vět o mnohočlenech, vzorce Newtonovy a Waringovy, pro něž je podáno nové odvození, a Hilbertovu větu o bázi. Dále jsou uvedeny dvě věty, Szekeresova a Kroneckerova-Henselova, poskytující efektivní určení všech ideálů z $R[x]$, kde R je okruh s hlavními ideály. Konečně následují paragrafy jednající o Tschirnhausových transformacích ideálů a o okruzích, které lze vytvořit jedním prvkem.

Kapitola VIII. *Teorie těles.* V této kapitole je vyvinuta Steinitzova klasická teorie těles. Je odvozena determinantní věta Königova-Radosova o počtu různých kořenů mnohočlenu nad konečným tělesem, věta Wedderburnova o konečných kosotělesech, několik vět o mnohočlenech cyklotomických, platných i pro prvočíselnou charakteristiku. Dále je pojednáno o Oreových mnohočlenových okruzích. Konečně je pak dokázána existence normální báze pro konečná tělesa.

Kapitola IX. *Uspořádané struktury.* V tělese racionálních čísel je možno zavést pořádkovou relaci $<$ ryze algebraicky, tj. pomocí výkonů platných v tomto tělese. Rozšířením je věta Artinova-Schreierova a věty Szeleho a Johnsonova pro kosotělesa resp. okruhy. Na konec je tu promluveno o uspořádáních archimedovských a nearchimedovských a o absolutní hodnotě v uspořádaných strukturách.

Kapitola X. *Ohodnocená tělesa.* J. Kürschák (1913), veden Henselovou teorií p-adických čísel, rozšířil pojem absolutní hodnoty a dal tak vznik teorii ohodnocení pro tělesa, což je velmi důležitá kapitola algebry s širokou možností použití. Autor nejprve definuje ohodnocení tělesa, takže hodnoty jsou prvky z uspořádaného tělesa („tělesa hodnot"), definuje pokračování ohodnocení, konvergentní posloupnosti a limity, jakož i pojem perfektního[1]) tělesa, a podává sestrojení perfektního[1]) obalu ohodnoceného tělesa. V této souvislosti je sestrojeno těleso čísel reálných a pak i komplexních. V dalším se předpokládá, že těleso hodnot je tělesem čísel reálných a zavedeno pak ohodnocení exponentové, diskretní a $\mathfrak{p}$-adické. Jsou uvedeny obě věty Ostrowského, a jako příprava pro další, lema Henselovo. Dále je tu podáno pokračování reálných perfektních ohodnocení nejprve při rozšíření konečného stupně, pak při algebraickém rozšíření. Konečně se uvažuje o reálných ohodnoceních číselných těles konečného stupně a o reálných ohodnoceních jednoduchých transcendentních rozšířeních těles.

Kapitola XI. *Teorie Galoisova.* Nejprve je dokázána základní věta této teorie. Následuje důkaz věty Stickelbergovy pro konečná tělesa; té je pak užito k důkazu zákona reciprocity (podle Mirimanova a Hensela). Pak je pojednáno o tělesech cyklotomických a cyklických, o rovnicích řešitelných (odmocninami) a o neřešitelnosti (odmocninami) obecných rovnic stupně $\geqq 5$. Zde jsou odvozeny vzorce pro řešení rovnic druhého, třetího a čtvrtého stupně a u rovnic třetího a čtvrtého stupně nad konečným tělesem K stanoveny podmínky, kdy mají kořeny v K a jejich počet v K. V obvyklém rozsahu se pojednává o sestrojitelnosti kořenů pravítkem a kružítkem, po čemž následuje zajímavý paragraf o význačných bodech v trojúhelníku. Konečně se uvažuje o určení Galoisovy grupy k dané rovnici a o normálních bázích.

Kapitola XII. *Konečné jednostupňové nekomutativní struktury.* Jednostupňové nekomutativní struktury jsou struktury, u nichž všechny vlastní podstruktnry jsou komutativní. Je tu podána teorie takových struktur pro případ konečných grup, okruhů a pologrup, pocházející od autora knihy.

Karel Rychlík, Praha

Wacław Sierpiński: O STU PROSTYCH, ALE TRUDNYCH ZAGADNIENIACH ARYTMETYKI. — Z POGRANICZA GEOMETRII I ARYTMETYKI. S dodatkem *A. Mąkowského*: Przypisy do Stu prostych, ale trudnych zagadnień arytmetyki. Vydavatel Państwowe zakłady wydawnictw szkolnych, Warszawa 1959, 80 stran, 4 obr., cena zl. 9,—.

Novou knížku W. Sierpińského je možno rozdělit do tří zhruba stejně rozsáhlých částí:

Část první má název „O stu prostych, ale trudnych zagadnieniach arytmetyki". Autor sem zařadil sto aritmetických úloh, které je možno formulovat přístupně i pro naprostého laika, z nichž většina však dosud čeká na své řešení. Nerozřešené problémy třídí Sierpiński do dvou skupin. Do první se řadí ty úlohy, pro něž je (teoreticky) známa metoda řešení; mohli bychom je např. rozřešit složitými výpočty, ale tyto výpočty jsou tak pracné a zdlouhavé, že je dosud neumíme provést ani s použitím nejmodernějších počítacích strojů. Do druhé skupiny spadají ty nerozřešené aritmetické problémy, pro něž není známa žádná metoda, která by (třebas i po velmi dlouhých výpočtech dnešní technikou nezvládnutelných) vedla k jejich řešení. Příkladem úlohy patřící do první skupiny je otázka najít rozklad v prvočinitele čísla $2^{101} - 1$. Do druhé skupiny patřil do nedávna např. problém J. Cullena, zda pro každé přirozené číslo $n > 1$ je číslo $n \cdot 2^n + 1$ složené. Tato otázka byla zodpověděna teprve nedávno zjištěním, že číslo $141 \cdot 2^{141} + 1$ je prvočíslem.

Stovka problémů, s kterou zde Sierpiński seznamuje své čtenáře, je popsána velmi přístupně a předběžné znalosti potřebné pro četbu této části spisku jsou minimální (tak např. i pojem faktoriálu je tu definován). Náplň problémů je dosti různorodá: Čtenář se

[1]) Podle terminologie obvyklé v topologii by bylo lépe užít slova úplný (vollständig).

seznámí s čísly Fermatovými[1]) a Mersenneovými, s prvočíselnými dvojčaty, se slavnou větou Dirichletovou o prvočíslech v aritmetické posloupnosti, s dokonalými čísly, s Waringovým problémem apod., je ovšem věnována pozornost také novější číselněteoretické problematice a některým výsledkům, k nimž dospěli v poslední době polští matematikové. Tak např. byla položena tato otázka:

Sestavíme-li (při daném přirozeném čísle $n > 1$) čísla $1, 2, 3, \ldots, n^2$ do tabulky

$$\begin{array}{lll} 1, & 2, & 3, \ldots, n, \\ n+1, & n+2, \ldots & \ldots, 2n, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ n^2-n+1, & \ldots\ldots\ldots, & n^2, \end{array}$$

máme rozhodnout, zda každý z n řádků tohoto schématu obsahuje alespoň jedno prvočíslo. Polský matematik A. Schinzel zjistil, že pro všechna $n \leqq 3000$ je uvedené tvrzení správné. Důkazy a literární odkazy v této části knížky nejsou uvedeny; těm je věnována závěrečná část knihy, jejímž autorem je A. Mąkowski.

Druhá část knihy má název „Z pogranicza geometrii i arytmetyki". Množina mřížových bodů v rovině byla studována již mnoha autory, zde se však seznamujeme zejména s novější problematikou tohoto zajímavého oboru matematiky. H. Steinhaus položil před časem otázku, zda ke každému přirozenému číslu n existuje v dané rovině s mřížovými body kružnice, jejíž vnitřek obsahuje právě n mřížových bodů. Odpověď na otázku je kladná a elementární důkaz, který Sierpiński ve své knížce uvádí, plyne snadno z tohoto lemmatu: *Každá kružnice o středu v bodě* $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$ *prochází nejvýše jedním mřížovým bodem.*

Z obdobné tematiky, kterou zde autor dále popisuje, uveďme ještě alespoň tuto větu (dokázanou A. Schinzelem): Ke každému přirozenému číslu n existuje v rovině kružnice, která prochází právě n mřížovými body. Informativním způsobem (většinou bez důkazů) si druhá část publikace všímá též množiny všech bodů v rovině, jejichž obě souřadnice jsou racionální čísla.

Na dvaceti stránkách závěrečné třetí části uvádí A. Mąkowski některé literární odkazy k první části knížky, místy s obšírnějším komentářem a s elementárními důkazy některých tvrzení.

V knížce není výslovně uvedeno, komu je spis určen; z celkového zpracování je však patrné, že tuto publikaci může číst velmi široký okruh čtenářů. Okolnost, že se A. Mąkowski ve své části zmiňuje o Matematické olympiádě, ukazuje též, že nejvíce čtenářů najde tato zajímavá kniha patrně mezi mládeží.

Jiří Sedláček, Praha

DALŠÍ VYDANÉ KNIHY

Jiří Hořejší: SBÍRKA ÚLOH Z DYNAMIKY. Státní nakladatelství technické literatury, Praha 1960, 244 stran, 170 obr., cena Kčs 24,30.

Tato sbírka úloh navazuje na knihu akademika V. Daška „Dynamika"; je určena především posluchačům fakult inženýrského stavitelství a strojního oboru a pak také konstruktérům v projektových závodech.

Podrobné zhodnocení knihy najde čtenář v některém z příštích čísel časopisu Aplikace matematiky.

*

[1]) Je zde uvedeno 35 hodnot n, pro něž je $2^{2^n} + 1$ číslem složeným. V této souvislosti stojí za zmínku poznámka v Kořínkových „Základech algebry" z r. 1953, kde se na str. 463 praví: Dosud není známo, zda vůbec pro nějaká $h > 6$ číslo tvaru $p = 2^{2^h} + 1$ je nebo není prvočíslem.

Alois Bura: MATEMATICKO-STATISTICKÉ VÝRAZY POUŽÍVANÉ V ZEMĚDĚLSKÉM VÝZKUMNICTVÍ. Československá akademie zemědělských věd, Praha 1958; cyklostyl. výtisk, 61 stran.

Knížka obsahuje šestijazyčný slovníček (rusko-český, polsko-český, anglicko-český, německo-český, francouzsko-český) odborných statistických termínů a je určena jednak pracovníkům v zemědělském výzkumu jako pomůcka při studiu cizí literatury, jednak překladatelům cizojazyčných děl příslušného oboru. Zájemci mohou slovníček obdržet zdarma přímo v Československé akademii zemědělských věd, Praha 12, Slezská 7.

*

Alois Urban: TRIGONOMETRIE, 3. vydání. Nakladatelství ČSAV, 1960, str. 200, obr. 104, cena brož. výt. Kčs 13,10.

Kniha seznamuje čtenáře s vlastnostmi goniometrických funkcí a jejich užitím na řešení rovinných trojúhelníků s praktickým zaměřením. Proti předchozím vydání je tu připojen odstavec o jednoduchých goniometrických rovnicích. Kniha je určena absolventům osmiletých středních škol, kteří chtějí dále studovat už bez učitele.

Recensi 2. vydání této knihy najde čtenář v Časopise pro pěstování matematiky *79*, 1954, 176—177.

*

SBORNÍK VYSOKÉ ŠKOLY DOPRAVNÍ — FAKULTA PROVOZU A EKONOMIKY DOPRAVY, II. Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1960, stran 242, cena brož. výtisku Kčs 17,20.

Vydaný sborník obsahuje práce z oboru matematiky a fysiky sepsané učiteli Vysoké školy dopravní. Každý článek je doprovázen třemi cizojazyčnými résumé.

Obsah: *Milada Antropiusová,* Osvětlení v cylindrické perspektivě (10 obrazů). — *Josef Brabec,* Kvantový zákon souhlasných stavů (3 obrazy). — *Jaroslav Hylán,* Konstrukce společných tečen kružnice a soustředné elipsy nebo hyperboly (2 obrazy). — *Josef Korous,* O jistém zobecnění Hermitových polynomů. — *Rudolf Langhammer,* O funkcích, kterých lze užít při interpolaci na mnohoúhelníkových sítích (6 obrazů). — *Jaroslav Růžička,* O přerovnávání řad (1 obraz). — *Emilie Ryšanová,* Poznámka k eliptickému pohybu (8 obrazů). — *Ladislav Špaček* a *Miloslava Špačková,* Příspěvek k teorii magnetických domén povrchových vrstev a pokus o řešení variačního problému energie labyrintové struktury (20 obrazů).

*

K. Otto, S. Woyna-Pantschenko: SBÍRKA MATEMATICKÝCH ÚLOH ZE STAVEBNICTVÍ. Z německého originálu přeložil inž. *Z. Režný.* Stát. nakladatelství technické literatury, Praha 1960, stran 308, obr. 204, cena Kčs 26,—.

Kniha obsahuje matematické úlohy s výsledky, zaměřené na stavební technickou praxi. Je určena jako doplněk k učebnicím matematiky pro studující průmyslových škol a technické pracovníky ve stavebnictví.

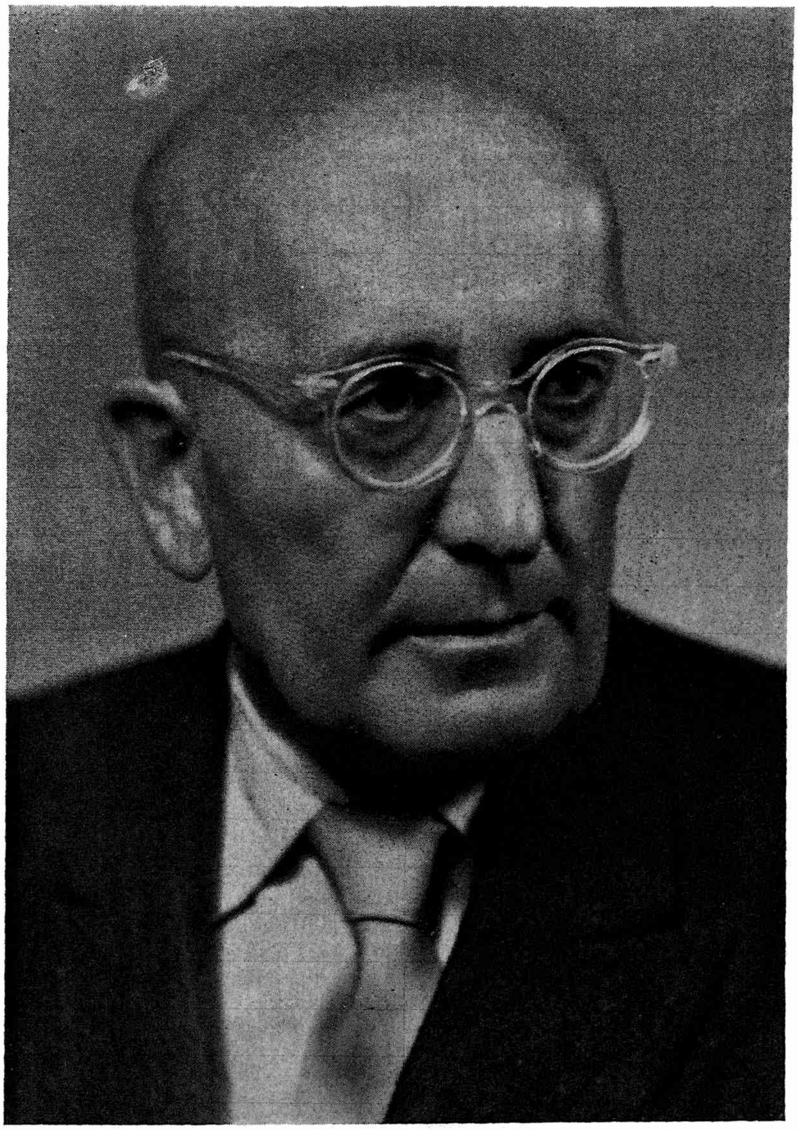
*

Karel Havlíček a kolektiv: CESTY MODERNÍ MATEMATIKY. Vyd. Orbis Praha 1960 jako 15. svazek „Malé moderní encyklopedie"; stran 182, obrázků 27, cena brož. výt. Kčs 8,—.

Knížka obsahuje úvod a 12 kapitol: Úvod. Matematika a život (*K. Havlíček*), 1. Pracovní metody matematiky (*L. Koubek*), 2. Základy teorie množin (*L. Koubek*), 3. O moderní algebře (*K. Drbohlav*), 4. O algebraických rovnicích (*K. Drbohlav*), 5. Vícerozměrné prostory (*K. Havlíček*), 6. O geometrii v zakřivených prostorech (*K. Havlíček*), 7. O neeuklidovské geometrii (*K. Havlíček*), 8. Z teorie pravděpodobnosti (*F. Fabian*), 9. Matematická statistika (*F. Fabian*), 10. O logaritmech a logaritmických tabulkách (*J. Sedláček*), 11. Nerovnosti a jejich důležitost v dnešní matematice (*J. Sedláček*), 12. Matematika včera a dnes (*L. Nový*). Je dále připojeno encyklopedické heslo: Matematika (*K. Havlíček*), dodatek o autorech, literatura a rejstřík.

V knížce je podán výklad některých problémů dnešní matematiky pro čtenáře, kteří nejsou odborníky a přece chtějí nebo potřebují se s těmito problémy seznámit.

Redakce



Akademik Eduard Čech
(*29. 6. 1893, †15. 3. 1960)

ZPRÁVY

AKADEMIK EDUARD ČECH

(*29. VI. 1893, †15. III. 1960)

MIROSLAV KATĚTOV, JOSEF NOVÁK a ALOIS ŠVEC, Praha

15. března 1960 zemřel v Praze ve věku 67 let vynikající československý matematik EDUARD ČECH. Truchlíme nad skonem vědce světového formátu, který nám byl učitelem, rádcem a vzorem pilné a vytrvalé práce, již miloval a konal s nadšením. V akademiku E. Čechovi ztrácíme jednoho z nejvýznamnějších světových představitelů oboru diferenciální geometrie a topologie, v nichž obohatil matematickou literaturu díly průkopnického významu.

E. Čech se narodil 29. června 1893 ve Stračově v severovýchodních Čechách. Studoval na gymnasiu v Hradci Králové. Jeho oblíbeným předmětem byla především matematika, v níž daleko vynikal nad ostatními studenty. V roce 1912 vstoupil na Karlovu universitu v Praze, aby na její filosofické fakultě studoval matematiku. Tehdy působili na fakultě dva profesoři matematiky. V té době získával E. Čech matematické vzdělání hlavně studiem odborných knih, které četl v knihovně Jednoty českých matematiků a fysiků. Za dobu pěti semestrů prostudoval množství matematické literatury, kterou vybíral podle svého vlastního uvážení a záliby. Tak získával znalosti z mnoha oborů matematiky bez jakéhokoliv odborného vedení. Do rukou se mu dostala i některá pojednání z elementární matematiky, v jejichž větách i důkazech se vyskytovaly logické mezery; se zvláštní oblibou je opravoval a doplňoval. To byl počátek jeho zájmu o didaktické otázky v matematice. Jelikož v té době nestačil jen jeden předmět k aprobaci na středních školách, zvolil si za druhý předmět studia deskriptivní geometrii a soustředil se pak více na studium elementární, deskriptivní a projektivní geometrie.

Na Karlově universitě studoval E. Čech jen prvních pět semestrů. V roce 1915 byl odveden a musil narukovat na vojnu. Svého nuceného pobytu na vojně užil ke studiu cizích jazyků; naučil se rusky, německy a italsky. Po první světové válce zakončil vysokoškolské studium státními zkouškami a krátkou dobu učil matematice na reálce v Praze-Holešovicích.

V roce 1920 předložil disertační práci z matematiky na thema „O křivkovém a plošném elementu třetího řádu“; byl prohlášen doktorem filosofie. Od té doby se E. Čech vážně zajímá o vědeckou práci. Začal se zabývat soustavným studiem diferenciálních projektivních vlastností geometrických útvarů. Prostudoval pojednání vynikajícího italského geometra G. FUBINIHO, a když dostal malou studijní podporu, strávil školní rok 1921—22 v Turině. Profesor Fubini poznal mimořádné matematické nadání mladého Čecha a nabídl mu spoluautorství knihy, kterou hodlal napsat. Oba autoři společně pak napsali dvě knihy: dvoudílnou „Geometria proiettiva differenziale", jež vyšla v Bologni v r. 1926 a 1927, a „Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces", která byla vydaná v Paříži v r. 1931. Tyto knihy proslavily oba vědce na celém světě.

V roce 1922 se E. Čech habilitoval na přírodovědecké fakultě v Praze. Jeho habilitační práce se týkala projektivní diferenciální geometrie. Za rok na to, v necelých třiceti letech svého života, byl E. Čech jmenován mimořádným profesorem na přírodovědecké fakultě university v Brně, kde se tehdy uvolnilo místo po profesoru MATYÁŠI LERCHOVI. Jelikož na této fakultě geometrii přednášel profesor LADISLAV SEIFERT, bylo uloženo profesoru Čechovi přednášet partie z matematické analysy a algebry. Proto začal intensivně studovat také tyto matematické discipliny. Prostudoval v krátké době příslušnou literaturu a pak po dvanáct let přednášel úspěšně na vysoké škole v Brně analysu a algebru.

V roce 1928 byl jmenován řádným profesorem. V té době projevil hluboký zájem o topologii. Zdrojem jeho studia byla především pojednání uveřejněná v „Fundamenta Mathematicae", hlavně články K. KURATOVSKÉHO, W. SIERPIŃSKÉHO, B. KNASTERA, S. MAZURKIEWICZE, později K. BORSUKA a S. EILENBERGA. Sledoval také topologickou literaturu i v jiných časopisech, zejména práce E. H. MOOREA a jeho žáků a práce P. S. ALEXANDROVA a S. LEFSCHETZE, týkající se kombinatorické topologie. Od r. 1931 přestal E. Čech publikovat pojednání z diferenciální geometrie a věnoval se výhradně bádání v množinové i kombinatorické topologii. Byly to zejména dvě průkopnické práce z r. 1932, jedna o obecné teorii homologie v libovolných prostorech a druhá o obecné teorii variet a teorémech duality; jimi se zařadil mezi nejlepší znalce kombinatorické topologie, takže např. ve velké učebnici amerického matematika S. Lefschetze „Algebraic Topology" z r. 1942 je nejvíce citován po samém autoru. V září r. 1935 byl pozván E. Čech na speciální konferenci o kombinatorické topologii do Moskvy, na které byl přítomen jen omezený počet nejlepších odborníků evropských i amerických. E. Čech informoval členy konference o svých výsledcích, což vzbudilo takovou pozornost, že dostal pozvání k přednáškám do střediska matematického bádání v Americe „Institute for Advanced Study" v Princetonu. Přednášky o pseudovarietách, které tam potom konal, byly publikovány anglicky a byly přeloženy do španělštiny.

Po svém návratu z Ameriky r. 1936 začal E. Čech organisovat v Brně matematickou školu. Soustředil kolem sebe mladé pracovníky nadšené pro vědeckou práci a založil zde topologický seminář, v němž byly z počátku systematicky diskutovány práce sovětských matematiků P. S. ALEXANDROVA a P. URYSOHNA. Pracovní prostředí a osobnost Čechova, plná podnětů, působily zdárně na všechny členy semináře. Bylo tu řešeno mnoho problémů, jež formuloval E. Čech, a za dobu tří let vzniklo v semináři 26 vědeckých pojednání, mezi nimiž i Čechova práce o bikompaktních prostorech. V ní definoval E. Čech nový typ topologických prostorů, jenž vzbudil značnou pozornost mezi zahraničními matematiky a jenž byl na jeho počest nazván *Čechův bikompaktní obal* (viz např. P. S. Alexandrov, Uspechi matem. nauk 1960, sv. *15*, seš. 2 (92), 25—95) a který je také znám pod názvem Stone-Čechův kompaktní obal (viz J. KELLEY, „General Topology", 1955, str. 298). Topologický seminář trval až do r. 1939, kdy byly po okupaci našich zemí uzavřeny české vysoké školy. Ale i po uzavření semináře vytvořil E. Čech se svými nejbližšími spolupracovníky B. POSPÍŠILEM a J. NOVÁKEM pracovní skupinu, jež se scházela v Pospíšilově bytě pravidelně každý týden až do zatčení Pospíšila gestapem v r. 1941. Čechův topologický seminář má v historii naší matematiky důležitý význam; Čech zavedl u nás novou pokrokovou organisační formu matematického bádání, totiž systematickou kolektivní spolupráci.

Po dvaadvacetiletém učitelském a vědeckém působení v Brně odešel profesor Čech v r. 1945 na přírodovědeckou fakultu Karlovy university do Prahy. Na novém působišti vyvinul úsilí o organisaci československé matematiky. V roce 1947 se stal vedoucím Badatelského ústavu matematického při České akademii věd a umění, který vedl až do roku 1950, kdy byl zřízen Ústřední ústav matematický; jeho prvním ředitelem byl opět profesor Čech. V roce 1952 byla ustavena Československá akademie věd a E. Čech byl jmenován jejím členem mezi prvními akademiky. Byl pak pověřen vedením Matematického ústavu ČSAV. Vytýčil pracovní, vědecký a výzkumný program tohoto ústavu a dbal toho, aby se naše matematika nerozvíjela jen v oblasti teoretické, ale také v aplikacích, zejména technických. V roce 1954 přešel na matematicko-fysikální fakultu, kde budoval Matematický ústav Karlovy university. V té době a až do své smrti intensivně pracoval v oboru diferenciální geometrie a publikoval celkem 17 prací. Vedle jiných knih a publikací vydal též knihu „Topologické prostory" (Nakladatelství ČSAV, Praha 1959), kde shrnul dosavadní poznatky a rozšířil je o poznatky získané v brněnském topologickém semináři.

Vědecká, učitelská a organisační činnost akademika Čecha přispěla k rozvoji matematiky v našich zemích. Vedle této bohaté práce projevoval akademik Čech nemalý zájem o otázky výuky matematiky. Náležel mezi ty naše vědce-matematiky, kteří pochopili, že učitelská práce na vysoké škole se musí konat v těsné souvislosti s prací učitelů škol nižších stupňů. Proto těsně před válkou a za okupace psal učebnice matematiky pro nižší třídy bývalých gymnasií; tyto učebnice byly od r. 1945 upraveny a používány i na bývalých školách měšťanských, a později od r. 1948 v nižších třídách jednotné střední školy, kde vykonaly velkou službu především mezi učitelstvem, a do značné míry po-mohly zaplnit řadu mezer v připravenosti učitelů bývalých měšťanských škol na úkoly, jež před ně postavila jednotná škola. Byl to právě E. Čech, který soustavně poukazoval na hříchy, jichž se první republika dopustila na učitelstvu těchto škol tím, že se o jejich vysokoškolské vzdělání nestarala, ale přímo byla proti němu. Nemalou péči věnoval E. Čech ve svých učebnicích vytváření matematických pojmů v mysli studentů, rozvoji abstrakce a schopnosti logicky uvažovat.

Problémům školské matematiky věnoval E. Čech mnoho času a energie v řadě přednášek o středoškolské matematice, konaných od r. 1938 v Brně. Po r. 1945 konal pak semináře o elementární matematice v Praze a po několik let v Brně; některé z těchto seminářů byly určeny přímo pro učitele v činné službě. Rovněž v celé řadě vysokoškolských přednášek, skript a jiných prací a článků věnoval E. Čech pozornost elementární a speciálně školské matematice.

V úzké souvislosti s problematikou elementární a školské matematiky byla i Čechova práce v otázkách ideologických. Jako uvědomělý člen Komunistické strany Československa se snažil v pojetí školské matematiky zdůraznit ty partie, které přispívají k formování vědeckého světového názoru naší mladé generace. Byl to právě E. Čech, který seznamoval naši učitelskou matematickou obec a školské orgány s názory sovětskými.

V profesoru E. Čechovi vyrostl přední vědec světového formátu v oboru matematiky. Účastnil se řady mezinárodních matematických kongresů, kde skvěle representoval československou matematickou vědu. Přednášel jako host na četných zahraničních universitách, ve Varšavě, Lvově, Moskvě, Vídni, v Princetonu, Ann Arboru, v New Yorku, na Harvardské universitě aj. Stal se členem učených společností a akademií a to České akademie věd a umění, Královské české společnosti nauk, Moravské přírodovědecké společnosti, čestným členem Jednoty československých matematiků a fysiků, dále členem zahraničních vědeckých institucí, čestným doktorem university ve Varšavě, řádným členem Polské akademie věd, členem společnosti „Towarzystwo Naukowe“ ve Vratislavi, čestným doktorem university v Bologni aj. Jeho vědecká činnost zahrnuje 94 vědeckých prací a 9 vědeckých knih. Kromě toho napsal 7 středoškolských učebnic. Profesor Čech měl značný vliv na řadu našich matematiků. Vychoval mnoho žáků a vytvořil matematickou školu jednak v topologii, jednak v diferenciální geometrii. Četní vědci na celém světě byli ovlivněni jeho podnětnými myšlenkami a navázali na jeho práci. Jeho vědecká činnost byla po zásluze vysoce oceněna udělením čestného titulu laureáta státní ceny v r. 1951 a 1954. Akademik Čech stál vždy na straně pokroku a připravoval naši vědu na budovatelské úkoly v socialistické společnosti. Za vědecké i budovatelské zásluhy byl mu udělen Řád republiky.

V ě d e c k á č i n n o s t profesora Čecha byla velmi bohatá. Již kolem r. 1928 se jeho zájem začíná obracet k topologii — obecné i algebraické — (užší spojení těchto dvou směrů bylo ostatně podstatnou součástí programu, který si položil) a v r. 1930 vychází jeho první topologická práce. Publikoval pak do r. 1938 asi 30 prací z topologie. Později — po jisté přestávce v publikaci původních výsledků — se jeho vlastní práce znova soustředila na diferenciální geometrii. I v tomto období se však stále zajímal o rozvoj topologie a kromě jednoho článku z r. 1947 (společně s J. Novákem) publikoval v r. 1959 knihu „Topologické prostory".

E. Čech napsal 12 prací z oboru obecné topologie (lépe řečeno, topologických prací nepoužívajících algebraických metod; jeho práce z algebraické topologie se totiž většinou také vztahují na velmi obecné prostory a to je také jedním z jejich charakteristických rysů). Z nich patří na přední místo článek [72] o kompaktních prostorech (používáme zde místo původního termínu „bikompaktní" názvu „kompaktní", který je nyní obvyklejší). Je v něm poprvé soustavně zkoumán tzv. maximální kompaktní obal βS úplně regulárního prostoru S, tj. kompaktní prostor, obsahující S jako hustou část a takový, že každá omezená spojitá funkce na S se dá rozšířit na βS. Existenci takového prostoru dokázal vlastně již A. N. Tichonov v r. 1930; některé vlastnosti prostoru βS zkoumal z poněkud jiného hlediska M. H. Stone, avšak teprve Čechova práce ukázala význam tohoto prostoru a možnosti jeho použití. Kompaktní obal βS, v literatuře běžně zvaný Čechův nebo Stone-Čechův obal, se pak stal a je i nyní jedním z velmi důležitých nástrojů obecné topologie i některých oborů funkcionální analysy. V teorii β-obalu mají také svůj původ četné další důležité pojmy obecné topologie (Hewittův obal, Q-prostory aj.); jeden z takových pojmů, totiž absolutní G_δ-prostory, studoval (pod názvem topologicky úplné prostory) již E. Čech ve zmíněné práci [72]. Svým celkovým rázem souvisí s touto prací články [70], [73], [74]. Článek „Topologické prostory" [70] vznikl z Čechových přednášek v brněnském topologickém semináři; obsahuje základní pojmy teorie topologických prostorů v originálním velmi obecném pojetí, přinášejícím řadu nových podnětů. Práce [73] (společná s B. Pospíšilem) se týká různých otázek z obecné topologie, zejména charakterů bodů v prostorech spojitých funkcí a počtu neporovnatelných L-topologií (s jistými dalšími vlastnostmi). V práci [74] (společně s J. Novákem) jsou podrobně rozebrány některé pojmy souvisící s Wallmanovým obalem (jenž se pro normální prostor shoduje s Čechovým obalem).

Teorie dimense se týkají (vedle předběžného sdělení [45]) práce [48] a [53]. V první z nich je studován pojem, nazývaný nyní běžně „velkou" induktivní dimensí (nynější označení: Ind); pro dokonale normální je prostory dokázána tzv. adiční věta (zmíněná dimense sjednocení spočetně mnoha uzavřených množin se rovná supremu jejich dimensí), věta o monotonii a věta o rozkladu (z níž plyne nerovnost dim $\leqq$ Ind). V druhé práci je studována dimense, definovaná pomocí pokrytí (označení dim); je dokázána zejména adiční věta (pro normální prostory).

Další Čechovy práce z obecné topologie se týkají souvislých prostorů. V článku [46] je studována (pro libovolné topologické prostory) ireducibilní souvislost mezi několika body a zobecněný pojem tzv. „stromu". Krátký článek [47] pojednává o kontinuích, které lze spojitě zobrazit na úsečku tak, že vzory bodů jsou konečné množiny; práce [60], navazující na výsledky Mengerovy a Nöbelingovy, se týká spojování množin (v lokálně souvislém kontinuu) několika oblouky. Konečně, článek [40], chronologicky první Čechova topologická práce, obsahuje nový důkaz Jordanovy věty.

Velký význam pro československou matematiku měla kniha E. Čecha „Bodové množiny I" (s dodatkem od V. Jarníka). Vyšla v r. 1936, byla avantgardní knihou v české matematické literatuře a podnes nezastarala. Její první polovina je věnována především topologii metrických prostorů, zejména úplnosti a kompaktnosti; látka — nyní většinou již standardní — je v ní podána vynikajícím způsobem s velkou precisností a v metodicky původním pojetí. Poslední Čechova kniha „Topologické prostory" (s dodatkem od J. Nováka a M. Katětova) vyšla v r. 1959; byla však v podstatě připravena již před léty. Teorie topologických prostorů je v ní podána v pojetí podstatně obecnějším než je to běžné; zvýšená pozornost je pochopitelně věnována otázkám, jimiž se zabýval autor, příp. jeho žáci. Z charakteristických obsahových rysů této knihy psané Čechovým obvyklým precisním a náročným způsobem, uvedeme jen namátkou (neboť o knize byla podrobná recense v Časopise pro pěstování matematiky, *84* (1959), 474—481): Podle možnosti se nepředpokládá uzavřenost uzávěrů; podrobně se probírají takové vlastnosti zobrazení jako přesná spojitost, uzavřenost, inversní spojitost atd.; některé otázky teorie souvislosti a lokální souvislosti jsou podány zcela novým způsobem (který zčásti navazuje na některé Čechovy publikované práce).

Čechovy práce z algebraické (kombinatorické) topologie se týkají především teorie homologie a obecných variet. Šlo mu, jak sám naznačuje mj. v úvodní části referátu [62], o spojení metod a způsobu uvažování množinové topologie a klasické topologie kombinatorické nebo, lépe řečeno, o odkrytí obecného jádra klasické teorie homologie, teorie variet, atd. a jeho organické zařazení do obecné teorie topologických prostorů; přitom bylo pochopitelně žádoucí vyloučit takové prostředky jako např. polyedry. Lze říci, že E. Čech podstatně přispěl k uskutečnění tohoto programu, v jehož duchu se ostatně rozvíjí značná část soudobé algebraické topologie.

V základní práci [49] vybudoval E. Čech podrobně pro zcela obecné prostory teorii homologie založenou na konečných otevřených pokrytích. Vlastně ani nepředpokládá (aspoň zpočátku), že jde o topologický prostor; fakticky se jedná (v nynější terminologii) o projektivní limity homologických útvarů na konečných komplexech. Výsledky této práce se staly asi nejznámějšími (vedle kompaktního obalu) z celého Čechova díla v topologii. Teorie vybudovaná v [49] patří do „základního fondu" současné algebraické topologie (přičemž se ukázalo, že je vhodná hlavně pro kompaktní prostory) a je v literatuře běžně označována Čechovým jménem. Je ovšem třeba poznamenat, že myšlenka tzv. projekční posloupnosti komplexů (a to nervů konečných otevřených pokrytí kompaktního prostoru) se objevila u P. S. Alexandrova již v r. 1925 a byla jím podrobně rozvedena v práci z r. 1929.

Na práci [49], jejíž obsah — podobně jak je tomu i u jiných prací — zde nemůžeme podrobněji popisovat, navazuje článek [56], v němž jsou jednak rozvedeny nebo zlepšeny některé výsledky z [49], jednak je zahájeno studium lokálních Bettiových čísel (zavedených nezávisle též P. S. Alexandrovem v pracích z r. 1934) a některých jiných pojmů, zkoumaných pak též v [61] a [63]. V druhé z těchto prací je podrobně studována lokální souvislost (neboli lokální acykličnost) vyšších řádů, definovaná pomocí teorie homologie (lokální souvislost v tomto smyslu se vyskytla již v r. 1929 rovněž u P. S. Alexandrova, nebyla však před Čechovou prací podrobněji prozkoumána). V práci [58], která rovněž navazuje na základní pojednání [49], se též zkoumají v různých souvislostech lokální Bettiova čísla a lokální acykličnost; metodickou novinkou, souvisící s pracemi o varietách, je odvození řady vět o kouli apod. bez triangulace (na základě jisté věty o vztahu mezi homotopickými a homologickými pojmy). Konečně, v práci [52] se studuje vztah mezi unikoherencí (definovanou množinově) a prvním Bettiovým číslem, přičemž se používá prostředků z práce [49].

Varietám (ve smyslu v různých pracích poněkud různém) jsou věnovány práce [50], [55], [57], [59], [61], [65], [67], [71]. Základním cílem těchto prací, jejichž souhrn tvoří význačnou kapitolu algebraické topologie a je jedním z nejvýznamnějších úspěchů československé matematiky, je zavedení obecného pojmu variety takovým způsobem, aby zahrnoval souvislé prostory lokálně homeomorfní s E_n a aby byl definován pouze pomocí jednak obecných topologických vlastností, jednak předpokladů, vyjádřených v pojmech obecné teorie homologie; přitom je ovšem žádoucí, aby pro tyto obecné variety platily s potřebnými obměnami věty o dualitě. Tohoto cíle bylo skutečně v Čechových pracích dosaženo (k obdobným výsledkům v odlišném pojetí dospěl nezávisle a přibližně současně též S. Lefschetz); přitom četné Čechovy věty byly nové i pro klasický případ duality pro množiny v E_n, příp. S_n. Později navázal na Čechovy výsledky R. Wilder i jiní autoři, přičemž se podařilo použitím nových prostředků tyto výsledky do značné míry zjednodušit; zdá se však, že teorie obecných variet v Čechově smyslu není ještě zdaleka uzavřena.

Se zmíněnými hlavními směry Čechovy práce v algebraické topologii souvisí jen volně práce [44], [64], [68]. Ve významném článku [68] jsou zkoumány kohomologické pojmy (v tehdejší terminologii duální cykly apod.), a to krátce po tom, co je v r. 1935 výslovně formulovali J. W. Alexander a A. N. Kolmogorov; zejména je zde účelným způsobem zavedeno násobení kocyklů, příp. cyklu a kocyklu. V práci [64] jsou pro nekonečné komplexy dokázány věty, týkající se jednoznačného určení Bettiových grup s libovolnými koeficienty pomocí obyčejných Bettiových grup. Článek [44] je první Čechovou prací z algebraické topologie. Obsahuje značně obecné věty, týkající se mj. roztínání prostoru mezi dvěma body; zcela speciálním případem těchto vět jsou některé klasické věty topologie roviny.

Uveďme ještě jen zmínkou dvě práce, obsahující pouze výsledky bez důkazů: [67] o Bettiových grupách kompaktních prostorů (jde obecně též o spojité grupy), [69] o přístupnosti bodů uzavřené množiny v E_n. Konečně, na mezinárodním matematickém kongresu v Curychu 1932 měl E. Čech sdělení o vyšších grupách homotopie. K této tématice se bohužel pak již nevrátil a ve zprávách kongresu je jeho sdělení — viz [51] — zachyceno jen velmi kusým a ne zcela jasným způsobem; avšak W. HUREWICZ, jenž vytvořil v publikacích z r. 1935 a pozdějších vynikajícím způsobem soustavnou teorii vyšších grup homotopie, uvádí v jedné ze svých prací (Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. *38* (1935), str. 521), že Čechova definice těchto grup je ekvivalentní s jeho definicí.

Čechovy práce z matematické analysy souvisí do značné míry s jeho učitelskou činností na universitě a mají spíše charakter drobnějších poznámek. V práci [20] se zabýval algebraickými formami a koeficienty závislými na jedné reálně proměnné; v [28] odvodil původní metodou vlastnosti funkcí x^s, e^x, log x, sin x, cos x; v článku [35] zobecnil na případ funkcí s konečnou variací jednu elementární Petrovu metodu vyšetřování Fourierových řad; v článcích [38], [39] podal jednoduchý důkaz Cauchyovy věty a Gaussovy formule. S pracemi z obecné topologie metodicky souvisí článek [42] o spojitých funkcích na intervalu, které nejsou konstantní na žádné nekonečné množině. Do oboru matematické analysy náleží také druhá polovina knihy „Bodové množiny, I", která pojednává o míře a integrálu; metodický přístup se v této knize vyznačuje značnou původností a také některé jednotlivé výsledky byly patrně nové v době, kdy kniha vyšla.

Práce akademika Čecha z diferenciální geometrie vznikají ve dvou obdobích: v letech 1921 až 1930 a v letech poválečných. E. Čech je jedním ze spoluzakladatelů projektivní diferenciální geometrie a jeho dílo vedle mnoha cenných výsledků podstatným způsobem ovlivnilo celý vývoj této disciplíny. Na jeho práce bylo přímo navazováno hlavně v Itálii, Rumunsku, Německu a samozřejmě i u nás; značnou pozornost vzbudily tyto práce i v SSSR. Čechovi se podařilo najít tři základní principy, které se zřetelně projevují v jeho díle a mají zásadní význam pro práci v diferenciální geometrii: soustavná pozornost věnovaná styku variet, studium korespondencí (na rozdíl od studia isolovaných variet) a soustavné užívání duality v projektivních prostorech. Zhodnotit přínos Čechových prací by bylo možno jen napsáním dějin projektivní diferenciální geometrie; v tomto článku se ovšem omezíme jen na vylíčení jeho konkrétních výsledků.

První práce E. Čecha [1], [2] se zabývají přiřazováním jistých geometrických útvarů a korespondencí elementům nízkých řádů křivky a plochy v trojrozměrném projektivním prostoru; jde tu vlastně o geometrické určení těchto elementů minimálním počtem objektů. Obdobnou problematikou se zabývá i práce [5], jež zkoumá element čtvrtého řádu plochy, a [6], kde jsou předchozí výsledky aplikovány na plochy zborcené a je uvažováno okolí celé vytvořující přímky. V práci [11] se E. Čech zabývá kolineacemi a korelacemi projektivního prostoru na sebe, jež zachovávají element třetího řádu plochy. Na základě těchto úvah dospěl v poválečných letech (v nepublikované práci) k jednotné definici kanonických přímek plochy. Práce [13] je shrnutím výsledků právě uvedených prací, práce [29] se zabývá geometrickým významem indexu Darbouxových kvadrik.

V práci [3] ukázal E. Čech mimo jiné, že oskulační roviny tří Segreho křivek, procházejících bodem plochy, mají společnou kanonickou přímku, práce [8] (s předběžným sdělením [7]) nalézá všechny plochy, pro něž tyto přímky procházejí pevným bodem, čili pro něž Segreho křivky jsou rovinné; práce [9] pak určuje plochy s rovinnými Darbouxovými křivkami. Je nutno podotknouti, že tyto výpočty vyžadovaly velmi obtížnou integraci systému parciálních diferenciálních rovnic.

Je známo, že studium plochy v eukleidovském trojrozměrném prostoru se převádí na analytické studium dvou základních diferenciálních forem plochy, jež ji úplně určují. Vůdčí ideou G. Fubiniho bylo vytvořiti obdobný proces pro plochu a nadplochu v projektivním prostoru, kde užil jedné kvadratické a jedné kubické formy. K této teorii přispěl Čech v pracích [10], [12], [14], [18], [19], [21], [32]. Nalezl geometrický význam různých normalisací homogenních souřadnic bodů plochy, geometrický význam projektivního lineárního elementu (majícího obdobnou úlohu jako ds^2 v geometrii eukleidovské) a úplný systém jeho invariantů, dále studoval jeho extremály (tzv. projektivní geodetiky).

Teorii korespondencí mezi plochami jsou věnovány práce [3], [4], [24], [30], [33], [34], [41] a [43]. E. Čech v nich významným způsobem přispívá k teorii projektivní deformace ploch v trojrozměrných prostorech. Podává novou charakterisaci projektivní deformace pomocí oskulačních rovin odpovídajících si křivek a dále studuje různá zobecnění projektivní deformace a obecnou asymptotickou nebo poloasymptotickou korespondenci mezi plochami; vyřešil hlavní existenční otázky pro různé typy těchto asymptotických korespondencí. Předchozích úvah užil konečně ke studiu a nalezení kongruencí přímek, jejichž fokální plochy jsou v projektivní deformaci nebo na nichž si odpovídají Darbouxovy křivky. O něco později zabýval se jinými metodami týmž problémem S. P. Finikov. Velký význam pro teorii projektivních deformací má dále nalezení ploch, připouštějících ∞^1 projektivních deformací v sebe nebo na nichž existuje ∞^1 sítí R, z nichž jedna má stejné invarianty.

V pracích [17], [22], [23] je zavedena nová metoda studia přímkových ploch, aplikovatelná hlavně na projektivní prostory liché dimense. Na tyto výsledky navázali především českoslovenští autoři, kteří prokázali výhodnost Čechova postupu.

Základní význam mají práce [27] a [37], zabývající se stykem dvou křivek v projektivních prostorech libovolné dimense a možností zvýšení tohoto styku po promítnutí z vhodně voleného centra. Pokračováním je Čechova poslední práce [94], kde jsou studovány obdobné problémy pro dvě variety. Tyto práce vedle fundamentálně důležitých konkrétních výsledků byly v podstatě východiskem pro vybudování Čechovy teorie korespondencí, o níž bude řeč později.

Práce [15], [16], [25] a [26] se zabývají studiem pruhů elementů různých řádů na ploše v trojrozměrném projektivním nebo afinním prostoru, tj. soustavou plošných elementů v bodech křivky, ležící na zkoumané ploše. Speciálně jsou zkoumány dvojice ploch, mající podél celé křivky styk určitého řádu, a jsou studovány podmínky pro to, aby tato křivka byla na obou plochách současně Darbouxova nebo Segreho, a další otázky tohoto druhu. Akademik E. Čech velmi zdůrazňoval význam svého postupu, když zkoumá místo křivky celý pruh elementů (což v eukleidovské geometrii — aniž bychom si to uvědomovali — prakticky děláme); na jeho práce však nebylo dosud navázáno.

Projektivní diferenciální geometrii rovinných sítí jsou konečně věnovány práce [31] a [36].

Práce tohoto prvního období Čechova aktivního zájmu o diferenciální geometrii vrcholí publikováním tří knih [1], [2], [3], z nichž poslední dvě napsal s G. Fubinim. Je nutno podotknouti, že knihy [2] a [3] jsou prvními soustavnými učebnicemi projektivní diferenciální geometrie. Obě knihy vznikaly v dlouhých písemných diskusích o pojetí celé látky a odborník může celkem snadno vystopovati podíl obou autorů na celém díle hlavně podle Čechovy geometrické průzračnosti, spojované s nesmírně komplikovanými výpočty. Z Čechovy iniciativy byla do francouzské knihy zařazena kapitola o užití Cartanových metod; dnes jasně vidíme, že na tehdejší dobu — a možno říci na tehdejší názory — to byl čin velmi prozíravý. Česká kniha [1] je pak ve světové literatuře ojedinělým dílem; jsou v ní dokonale přesným a značně formálním způsobem probírány jednoparametrické útvary a je tedy ukázkou toho, že diferenciální geometrii je možno vyložiti zcela exaktně.

Po druhé světové válce se E. Čech opět intensivně zabýval dnes již klasickou diferenciální geometrií a dosáhl výsledků, jež ve světovém měřítku zaujímají nejpřednější místo. Jeho práce je možno v podstatě rozděliti do tří skupin.

Série prací [75], [76] a [78] vytváří soustavnou teorii korespondencí mezi projektivními prostory, studovaných z hlediska možnosti jejich co nejvýhodnější aproximace pomocí tečných kolineací. Tím jest udána přirozená klasifikace speciálních typů korespondencí, jež jsou buď přímo geometricky zkonstruovány nebo alespoň udána jejich obecnost. Velmi podrobně jsou studovány projektivní deformace vrstvy nadploch. E. Čech nalezl mnoho vedlejších výsledků (z hlediska teorie korespondencí), jež však hrají velikou roli v partiích jim příslušných. Tak např. byly nalezeny všechny asymptotické transformace kongruence přímek L (tj. ty transformace $S_3 \to S'_3$, pro něž každá přímková plocha v L přechází asymptoticky do přímkové plochy odpovídající kongruence L'), a dále bylo zjištěno, že tento problém je v podstatě ekvivalentní s klasickým problémem Fubiniho, týkajícím se nalezení projektivních deformací plochy. Čechova teorie měla velký ohlas v cizině a podstatným způsobem ovlivnila zvláště skupinu italských geometrů v Bologni, kteří se pod vedením profesora M. Villy již dříve geometrií korespondencí intensivně zabývali.

Celkem automaticky se ukázalo, že v teorii korespondencí hrají prvořadou úlohu kongruence přímek. Je proto přirozené, že E. Čech se jimi začal později systematicky zabývati; výsledky publikoval v pracích [79], [82], [83], [84], [85], [91]. Začal soustavně studovati korespondence mezi kongruencemi, jež v sebe převádějí jejich rozvinutelné plochy, a podrobně analysovati problém jejich projektivní deformace, kde vynikajících výsledků dosáhl zvláště pro kongruence W. V tomto oboru, jimž se zabývá také S. P. Finikov a jeho moskevská škola, patří existenční otázky a geometrické konstrukce Čechem rozřešené mezi dosud nejlepší výsledky; novým přístupem k celé problematice otevřely nové možnosti zkoumání. Naši geometři docílili těmito metodami řady velmi hlubokých a někde i definitivních výsledků v teorii Segreho kongruencí a kongruencí a ploch s konjugovanou sítí ve vícerozměrných prostorech.

Práce [87], [88], [89], [92] a [93] se zabývají celkem odlišnou tématikou: jsou studovány vztahy mezi diferenciálními třídami bodů křivky a k ní přiřazených objektů (Frenetův n-hran a oskulační kružnice a koule v eukleidovském prostoru dimense tři nebo čtyři). Tyto výsledky jsou částečně definitivní a dosti překvapující. Bude však nutno vynaložiti ještě mnoho úsilí k vytvoření systematické teorie z této nové partie diferenciální geometrie křivek a k případnému nalezení efektivnějších metod zkoumání.

Závěrem připomeňme práci [90], týkající se projektivních deformací rozvinutelných ploch, a práce [80], [81], jež jsou spíše souhrnnými referáty o teorii korespondencí a o některých základních otázkách diferenciální geometrie.

Předchozí výčet Čechovy práce v diferenciální geometrii je ovšem značně neúplný nejen proto, že je velmi krátký a tedy i dosti povrchní, ale také z toho důvodu, že mnoho Čechových myšlenek a metod bylo zpracováno v pracích jeho přímých i nepřímých žáků. V jeho pozůstalosti byla dále nalezena řada rukopisů (často velmi neúplných) nových prací. Jejich zpracování si však vyžádá dosti značnou dobu a o jejich obsahu není možno nyní referovat.

Smrt akademika Čecha je těžkou ranou pro československou matematiku. Je naší samozřejmou povinností pokračovati v jeho díle. Jeho bezvýhradná oddanost vědě a myšlenkám pokroku bude nám vždy zářivým příkladem.

SEZNAM PRACÍ AKADEMIKA E. ČECHA

Značky:

Čas.	= Časopis pro pěstování matematiky a fysiky.
Čmž.	= Чехословацкий математический журнал.
Rozpr.	= Rozpravy II. třídy České akademie věd a umění.
Sp. B.	= Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou university v Brně.
Linc.	= Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei.
A. di M.	= Annali di Matematica.
C. R.	= Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris.
Jahresb.	= Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung.
F. M.	= Fundamenta Mathematicae.
Erg. Koll.	= Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums.
A. of M.	= Annals of Mathematics.

A. PŮVODNÍ POJEDNÁNÍ VĚDECKÁ

[1] O křivkovém a plošném elementu třetího řádu projektivního prostoru. *Čas.*, 50, 1921, 219—249, 305—306.

[2] K diferenciální geometrii prostorových křivek. *Rozpr.*, 30, 1921, 15, 16 stran.

[3] O trilineárních systémech čar na ploše a o projektivní aplikaci ploch. *Rozpr.*, 30, 1921, 23, 6 stran.

[4] O obecné příbuznosti mezi dvěma plochami. *Rozpr.*, 30, 1921, 36, 4 str.

[5] Moutardovy kvadriky. *Sp. B.*, 3, 1921, 17 str.

[6] Projektivní geometrie pěti soumezných mimoběžek. *Sp. B.*, 4, 1921, 37 str.

[7] Sur les surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes. *Linc.*, (5) 30_2, 1921, 491—492.

[8] Sur les surfaces dont toutes les courbes de Segre sont planes. *Sp. B.*, 11, 1922, 35 str.

[9] Sur les surfaces dont toutes les courbes de Darboux sont planes. *Linc.*, (5) 31_1, 1922, 154—156.

[10] Sur les formes différentielles de M. Fubini. *Linc.*, (5) 31_1, 1922, 350—352.

[11] Sulle omografie e correlazioni che conservano l'elemento del terzo ordine di una superficie in S_3. *Linc.*, (5) 31_1, 1922, 496—498.

[12] Sur la géométrie d'une surface et sur le facteur arbitraire des coordonnées homogènes. *Linc.*, (5) 31_2, 1922, 475—478.

[13] L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proietivo. *A. di M.*, (3), 31, 1922, 191—206.

[14] I fondamenti della geometria proiettiva differenziale secondo il metodo di Fubini. *A. di M.*, (3), 31, 1922, 251—278.

[15] Nouvelles formules de la géométrie affine. *Linc.*, (5) 32_1, 1923, 311—315.

[16] Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine. *Sp. B.*, 28, 1923, 47 str.

[17] O jedné třídě ploch zborcených. *Čas.*, 52, 1923, 18—24.

[18] Sur les invariants de l'élément linéaire projectif d'une surface. *Linc.*, (5) 32_2, 1923, 335—338.

[19] Sur les géodésiques projectives. *Linc.*, (5) 33_1, 1924, 15—16.

[20] Algebraické formy o proměnných koeficientech. *Rozpr.*, 33, 1924, 9, 2 str.

[21] Étude analytique de l'élément linéaire projectif d'une surface. *Sp. B.*, 36, 1924, 24 str.

[22] Projektivní geometrie přímkových ploch v prostorech o jakémkoli počtu dimensí, I. *Rozpr.*, 33, 1924, 13, 9 str.

[23] Nová methoda projektivní geometrie zborcených ploch. *Čas.*, 53, 1924, 31—37.
[24] Sur les surfaces qui admettent ∞^1 déformations projectives en elles mêmes. *Sp. B.*, 1924, 40, 47 str.
[25] Courbes tracées sur une surface dans l'espace projectif. I. *Sp. B.*, 46, 1924, 35 str.
[26] Géométrie projective des bandes d'éléments de contact de troisième ordre. *Linc.*, (6) 1, 1925, 200—204.
[27] Propriétés projectives du contact, I. *Sp. B.*, 91, 1928, 36 str.
[28] O funkcích x^s, e^x, $\log x$, $\cos x$, $\sin x$. *Čas.*, 57, 1928, 208—216.
[29] Osservazioni sulle quadriche di Darboux. *Linc.*, (6) 8, 1928, 371—372.
[30] Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces. *Linc.*, (6) 8, 1928, 484—486; 552—554.
[31] Déformation projective de réseaux plans. *C. R.*, 188, 1929, 291—292.
[32] Quelques remarques relatives à la géométrie différentielle projective des surfaces. *C. R.*, 188, 1929, 1331—1333.
[33] Sur les correspondances asymptotiques entre deux surfaces. *Rozpr.*, 38, 1929, 3, 38 str.
[34] Sur une propriété caractéristique des surfaces F de M. Fubini. *Linc.*, (6) 9, 1929, 975—977.
[35] Petrova elementární methoda vyšetřování Fourierových řad. *Čas.*, 59, 1930, 145 až 150.
[36] Projektive Differentialgeometrie der Kurvennetze in der Ebene. *Jahresb.*, 39, 1930, 31—34.
[37] Propriétés projectives du contact, II. *Sp. B.*, 121, 1930, 21 str.
[38] Une démonstration du théorème de Cauchy et de la formule de Gauss. *Linc.*, (6) 11, 1930, 884—887.
[39] Encore sur le théorème de Cauchy. *Linc.*, (6) 12, 1930, 286—289.
[40] Une démonstration du théorème de Jordan. *Linc.*, (6) 12, 1930, 386—388.
[41] Una generalizzazione della deformazione proiettiva. *Atti del Congr. int. dei Matem. Bologna*, 1928, t. 4, Bologna 1931, 299—300.
[42] Sur les fonctions continues qui prennent chaque leur valeur un nombre fini de fois. *F. M.*, 17, 1931, 32—39.
[43] Réseau R à invariants égaux. *Sp. B.*, 143, 1931, 29 str.
[44] Trois théorèmes sur l'homologie. *Sp. B.*, 144, 1931, 21 str.
[45] Sur la théorie de la dimension. *C. R.*, 193, 1931, 976—977.
[46] Množství irreducibilně souvislá mezi n body. *Čas.*, 61, 1931, 109—129.
[47] Une nouvelle classe de continus. *F. M.*, 18, 1931, 85—87.
[48] Dimense dokonale normálních prostorů. *Rozpr.*, 42, 1932, 13, 22 str.
[49] Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque. *F. M.*, 19, 1932, 149 až 183.
[50] La notion de variété et les théorèmes de dualité. *Verhandlungen des int. Kongr. Zürich*, 1932, 2, 194.
[51] Höherdimensionale Homotopiegruppen. *Verh. des int. Kongr. Zürich*, 1932, 2, 203.
[52] Sur les continus Péaniens unicohérents. *F. M.*, 20, 1933, 232—243.
[53] Příspěvek k theorii dimense. *Čas.*, 62, 1933, 277—291.
[54] Über einen kurventheoretischen Satz von Ayres. *Erg. Koll.*, 5, 1933, 24—25.
[55] Eine Verallgemeinerung des Jordan-Brouwerschen Satzes. *Erg. Koll.*, 5, 1933, 29—31.
[56] Úvod do theorie homologie. *Sp. B.*, 184, 1933, 36 str.
[57] Théorie générale des variétés et de leurs théorèmes de dualité. *A. of M.*, (2) 34, 1933, 621—730.

[58] Užití theorie homologie na theorii souvislosti, I. *Sp. B.*, 188, 1933, 40 str.
[59] Sur la décomposition d'une pseudovariété par un sous-ensemble fermé. *C. R.*, 198, 1934, 1342—1345.
[60] Sur les arcs indépendants dans un continu localement connexe, *Sp. B.*, 193, 1934, 10 str.
[61] Sur les nombres de Betti locaux. *A. of M.*, (2) 35, 1934, 678—701.
[62] Les théorèmes de dualité en topologie. *C. R. Congrès Praha*, 1934, 17—25.
[63] Sur la connexité locale d'ordre supérieur. *Compositio Mathematica*, 2, 1935, 1—25.
[64] Les groupes de Betti d'un complexe infini. *F. M.*, 25, 1935, 33—44.
[65] On general manifolds. *Proc. of the Nat. Acad. Sci.*, 22, 1936, 110—111.
[66] On pseudomanifolds. *Lectures at the Inst. Adv. St., Princeton*, 1935, mimeographed, 17 str.
[67] Über die Bettischen Gruppen kompakter Räume. *Erg. Koll.*, 7, 1936, 47—50.
[68] Multiplication on a complex. *A. of M.*, 37, 1936, 681—697.
[69] Accessibility and homology. Математический сборник, 1 (43), 1936, 661.
[70] Topologické prostory. *Čas.*, 66, 1937, D 225—D 264.
[71] Sobre les seudovariedades. *Revista Mat. Hisp. Am.*, 11_2, 1936, 7—10.
[72] On bicompact spaces. *A. of M.*, 38, 1937, 823—844.
[73] I. Sur les espaces compacts. II. Sur les caractères des points dans les espaces $\mathfrak{L}$. Spolu s B. Pospíšilem. *Sp. B.*, 1938, 258, 14 str.
[74] On regular and combinatorial imbedding. Spolu s J. Novákem. *Čas.*, 72, 1947, 7—16.
[75] Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces. I. *Čas.*, 74, 1949, 32—46. II. *Čas.*, 75, 1950, 123—136. III. *Čas.*, 75, 1950, 137—158.
[76] Проективная дифференциальная геометрия соотвествий между двумя пространствами. I. *Čmž.*, 2 (77) 1952, 91—107. II. *Čmž.*, 2 (77) 1952, 109—123. III. *Čmž.*, 2 (77) 1952, 125—148. IV. *Čmž.*, 2 (77) 1952, 149—166. V. *Čmž.*, 2 (77) 1952, 167—188. VI. *Čmž.*, 2 (77) 1952, 297—331. VII. *Čmž.*, 3 (78) 1953, 123—137. VIII. *Čmž.*, 4 (79) 1954, 143—174.
[77] Quadriques osculatrices à centre donné et leur signification projective. *C. R. de la Soc. des Sci. et des Lettr. Wroclaw*, 7, 1952, 9 str.
[78] Deformazione proiettiva di strati d'ipersuperficie. *Convegno int. di geom. diff., Italia*, 20.—26. sett. 1953. *Ediz. Cremonese, Roma*, 1954, 266—273.
[79] О точечных изтбаниях конгруэнций прямых. *Čmž.*, 5 (80) 1955, 234—273.
[80] Remarques au sujet de la géométrie différentielle projective. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 5, 1954, 137—144.
[81] Deformazioni proiettive nel senso di Fubini e generalizzazioni. *Conf. Sem. Mat. Univ. Bari*, 1955, 1—12.
[82] Deformazioni di congruenze di rette. *Rend. Sem. Mat. Univ. Polit. Torino*, 14, 1954/55, 55—66.
[83] Transformations développables des congruences des droites. *Čmž.*, 6 (81), 1956, 260—286.
[84] Deformazioni proiettive di congruenze e questioni connesse. *Ist. Mat. Univ. Roma*, 1956, 44 str.
[85] Déformation projective des congruences W. *Čmž.*, 6 (81), 1956, 401—414.
[86] Zur projektiven Differentialgeometrie. *Schriftenreihe des Inst. für Math., Deutsch. Akad. Wissensch., Berlin*, 1, 1957, 138—142.
[87] Détermination du type différentiel d'une courbe de l'espace à deux, trois ou quatre dimensions. *Čmž.*, 7 (82), 1957, 599—631.

[88] Classe différentielle des courbes. Sections et projections, *Revue de math. pures et appl.*, 2, 1957, 151—159.
[89] Sur le type différentiel anallagmatique d'une courbe plane ou gauche. *Coll. Math.*, 6, 1958, 141—143.
[90] Sur la déformation projective des surfaces développables. *Izv. na mat. inst. Sofija*, 3, 1959, 81—97.
[91] Compléments au Mémoire: Déformation projective des congruences *W. Čmž.*, 9 (84) 1959, 289—296.
[92] Sulla differenziabilità del triedro di Frenet. *A. di M.*, 49, 91—96.
[93] Classe différentielle des courbes. Circles osculateurs et sphères osculatrices. *Bul. Inst. Polit. Iassy*, 5 (9), 1959, 1—4.
[94] Propriétés projectives du contact, III. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 1, 1960, 1—19.

B. KNIHY

[1] Projektivní diferenciální geometrie. *Praha, JČMF*, 1926, 406 stran.
[2] Geometria proiettiva differenziale. Spolu s G. Fubinim. *Bologna, Zanichelli*; I, 1926; II, 1927; 794 stran.
[3] Introduction à la géométrie différentielle projective des surfaces. Spolu s G. Fubinim. *Paris, Gauthier-Villars*, 1931, 290 stran.
[4] Bodové množiny I. *Praha, JČMF*, 1936, 275 stran.
[5] Co je a nač je vyšší matematika. *Praha, JČMF*, 1942, 124 str.
[6] Elementární funkce. *Praha, JČMF*, 1944, 86 stran.
[7] Základy analytické geometrie. *Praha, Přírodovědecké vydavatelství*; I. 1951, 218 stran; II. 1952, 220 stran.
[8] Čísla a početní výkony. *Praha, SNTL*, 1954, 248 stran.
[9] Topologické prostory. *Praha, NČSAV*, 1959, 524 stran.
[10] Učebnice matematiky pro střední školy a gymnasia, *Praha, JČMF, SPN*.

K PĚTASEDMDESÁTINÁM PROF. Dr. KARLA RYCHLÍKA

VLADIMÍR KOŘÍNEK, Praha

Dne 16. srpna 1960 se dožil sedmdesátipěti let PhDr. KAREL RYCHLÍK, profesor Českého vysokého učení technického na odpočinku. Profesor Rychlík byl první, kdo k nám uváděl svými pracemi a ve svých univerzitních přednáškách metody a pojetí moderní abstraktní algebry, která se rozvinula ze skromných počátků před první světovou válkou ve dvacátých letech ve velké a velmi významné odvětví matematiky 20. století.

Prof. Karel Rychlík se narodil v Benešově u Prahy dne 16. srpna 1885. Do obecné školy chodil ve Vlašimi, kam se zatím jeho rodiče přestěhovali. Do primy gymnázia vstoupil roku 1896 v Chrudimi. Sekundu studoval však již v Benešově. V druhém pololetí školního roku 1899—1900 se přestěhovali jeho rodiče do Prahy a proto Karel Rychlík přestoupil na Akademické gymnázium, kde 7. července 1904 maturoval s vyznamenáním. Zájem o matematiku se probudil u mladého Rychlíka velmi záhy. Na vyšším gymnáziu studoval již mnohé věci, které nebyly v osnovách matematiky na střední škole.

Není tedy divu, že se Rychlík po maturitě na podzim roku 1904 dal zapsat na filozofickou fakultu univerzity, tehdy ještě Karlo-Ferdinandovy, aby studoval matematiku a fyziku pro učitelství na školách středních, ačkoli byl před tím z mnohých stran varován. Vyhlídky tohoto oboru byly totiž tehdy velmi neutěšené. To bylo způsobeno tím, že se na matematiku v předcházejících letech studenti hrnuli, neboť bylo známo, že prof. F. J. STUDNIČKA zkouší velmi mírně. Teprve příchod prof. K. PETRA na jaře 1903 a o rok později příchod prof. J. SOBOTKY na filozofickou fakultu znamenal velké zvýšení úrovně výuky.

A právě prof. Rychlík patří k první generaci matematiků, která již absolvovala celá svá studia na univerzitě v době, když tam působili prof. Petr a prof. Sobotka. To je velmi zřejmé na celé matematické činnosti prof. Rychlíka. Prof. Rychlík píše velmi pěkně o svých středoškolských a vysokoškolských studiích v článku [*51*] „Jak jsem studoval matematiku". Výtah z tohoto článku byl uveřejněn v „Matematice ve škole" [*38*]. Velmi vystižně tam charakterizuje přednášky profesora Petra:

„Na filosofické fakultě v Praze se mi nejvíce zamlouvaly přednášky prof. Petra a chodil jsem na ně přímo s nadšením. Prof. Petr nebyl krasořečník, řeč jeho byla někdy dosti kostrbatá. Co však se nedostávalo na formě, bylo bohatě vynahrazeno obsahem. Větší části jeho přednášek bylo možno použít po malých úpravách přímo, ovšem stalo se také někdy, celkem zřídka, že jsem si s něčím nevěděl rady. Tu však vždy mohly sloužit jeho přednášky aspoň jako program a bylo možno si věc vyhledat v literatuře učebnicové nebo v časopisech. Po celé tři roky svých studií v Praze jsem

přednášky i seminář prof. Petra pilně navštěvoval a je také zpracoval a studoval (ovšem i kolokvoval)."

Stejným hlubokým dojmem působily o patnáct let později přednášky profesora Petra na mne a na mé vrstevníky, kteří jsme studovali matematiku v prvních letech po konci první světové války.

V Praze studoval Rychlík až do letního semestru roku 1907 včetně. Studijní rok 1907/8 studoval na Sorbonně v Paříži, dostav za tím účelem státní stipendium. Tam poslouchal přednášky prof. Hadamarda, Picarda a Humberta a připravoval doktorskou disertaci. Po svém návratu dosáhl 16. prosince 1908 způsobilosti pro učitelství na gymnáziích a reálkách. Za domácí státní práci byla mu uznána jeho seminární práce: „O interpolaci parabolické", která byla uveřejněna pod názvem „Poznámky k theorii interpolace" [1]. Doktorátu dosáhl na filozofické fakultě 30. března 1909 na základě doktorské disertace: „O grupách ternárních kolineací holoedricky isomorfních s alternativními a symetrickými grupami permutací." Nejzajímavější část této disertace byla uveřejněna pod názvem „O grupě řádu 360 (G 360)". [2].

1. října 1909 byl jmenován placeným asistentem filozofické fakulty, když již od 21. ledna tohoto roku byl bezplatným asistentem této fakulty. 1. července 1913 přešel jako asistent na Vysokou školu technickou. Rok před tím se habilitoval z matematiky na filozofické fakultě univerzity a stal se tak docentem 15. března 1912. Jako habilitační práci předložil pojednání „Příspěvek k teorii forem". [15], [16]. Mimořádným profesorem na Českém vysokém učení technickém byl jmenován 1. prosince 1920 a řádným profesorem tamtéž 31. prosince 1923. V roce 1946 byl dán na odpočinek.

Vědecká práce profesora Rychlíka, ač není zvláště rozsáhlá, zasloužila by si většího a podrobnějšího rozboru, než to z časových důvodů mohu udělat v tomto článku. Jako mladý vědecký pracovník obrátil Rychlík svůj zájem především na *algebru* a na *teorii čísel*. Jsou to obory, jež s velkou láskou pěstoval profesor Petr. Těmto oborům zůstal také i při pozdější své vědecké práci věren. Hned však od začátku objevuje se u Rychlíka zájem o nové vědecké směry a moderní vědecká pojetí. Je to vidět již na jeho habilitační práci, jejíž téma bylo jistě zvoleno pod vlivem Petrovým. Po vzoru Delassuse (Annales de l'É. N. Sup. *13*, 1896 a *14*, 1897), který provádí podobná vyšetřování pro systémy diferenciálních rovnic parciálních, přiřaďuje každé algebraické formě f množinu E_f jednočlenů

$$a_{k_1 \ldots k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots\ldots x_r^{k_r} \, ,$$

které se v této formě vyskytují s nenulovými koeficienty, a o těchto množinách E_f odvozuje řadu vět. To je ještě všechno v duchu Petrově. Nové je však to, že tyto výsledky ihned aplikuje jednak na teorii modulů, jednak podává pomocí nich důkaz Hilbertovy věty o nulových bodech polynomů. (Viz B. L.

van der WAERDEN, Moderne Algebra, II Teil, 2 Auflage, str. 6), tedy vesměs věci z nové abstraktní algebry.

V teorii čísel věnuje hlavní pozornost teorii dělitelnosti čísel racionálních i algebraických a vůbec algebraické teorii čísel. Zde se již projevuje velmi výrazně Rychlíkův zájem o nové směry abstraktní algebry. S algebraickou teorií čísel úzce souvisí p-adická a g-adická čísla, která na začátku století uvedl do matematiky KURT HENSEL. To byl předmět dalších prací Rychlíkových, který svědčí zřejmě o tom, jak dobře dovedl Rychlík hned v zárodku odhadnout význam nových matematických objevů. p-adická čísla se stala později mohutným nástrojem pro algebraická a číselně teoretická vyšetřování.

Od p-adických čísel je již jen krok k teorii ohodnocení, jíž se týká práce [5] z roku 1919 a pak hlavně velká práce [45] z roku 1924: „Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper" ze 153. svazku Crelleova Journalu. Tehdy byla teorie ohodnocení v samých svých počátcích. Rychlík vychází z práce. J. KÜRSCHÁKA: „Über Limesbildung und die allgemeine Körpertheorie", J. f. r. n. a. Math. *142*, 1913, 211—253. Jedná se o tento problém: Je dáno (nearchimedovsky) ohodnocené těleso T a jeho algebraické nadtěleso U. Lze U ohodnotit tak, aby toto ohodnocení vytvářelo v T původní ohodnocení? Každý prvek $\alpha \in U$ je kořenem jistého jednoznačně určeného ireducibilního polynomu tvaru

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \,, \qquad a_i \in T \,.$$

Přirozenou cestou jsme vedeni k tomu, abychom pro hodnotu $|\alpha|$ v Upoložili $|\alpha| = \sqrt[n]{|a_n|}$, kdež $|a_n|$ je hodnota prvku a_n v T. Nyní je třeba dokázat, že takto definovaná funkce $|\alpha|$ na tělese U je skutečně hodnota tj., že platí $|\alpha\beta| = |\alpha| \,.\, |\beta|$, $|\alpha + \beta| \leqq \max (|\alpha|, |\beta|)$. První vztah je možno dokázat pro libovolné ohodnocené těleso a důkaz je poměrně lehký. Pro důkaz druhého vztahu třeba o T ještě předpokládat, že je to těleso úplné (perfektní). Ohodnocené těleso T je úplné (perfektní), když každá cauchyovská posloupnost z T má v T limitu. Důkaz druhého vztahu provádí Kürschák tím, že vztah převádí na tvrzení o poloměrech konvergence jistých potenčních řad, které pak dokazuje pomocí Hadamardových vět o poloměrech konvergence. Konstrukce úplného (perfektního) nadtělesa nad daným ohodnoceným tělesem pomocí cauchyovských posloupností je již u Kürscháka naskicována. Rychlík ji však důsledně všude do podrobností provádí a v tomto duchu podává úplně nový důkaz druhého vztahu pro hodnoty. K tomu cíli musí zobecnit známé, velmi důležité Henselovo lema o rozkladu polynomů. Tím postavil celou teorii ohodnocení na čistě algebraický základ. V třicátých letech vyrostla teorie ohodnocení pracemi A. OSTROVSKÉHO, F. K. SCHMIDTA, H. HASSEHO a jiných ve značně obtížnou a velmi důležitou teorii moderní algebry, která má velký význam v řadě matematických disciplin, zvláště v teorii algebraických funkcí a v moderní algebraické geometrii. Všichni autoři, kteří v letech třicátých tuto teorii budovali, vycházejí z práce Rychlíkovy, kterou citují kromě právě uvedených autorů na příklad také B. L. van der WAERDEN, IRWING KAPLANSKY, SAUNDERS MACLANE, MASAYOSHI NAGATA. Jeho práce je uváděna v monografiích a učebnicích jako jedna ze základních prací. OTTO HAUPT ji uvádí ve své učebnici: „Einführung in die Algebra" již v roce 1929 a O. F. G. SCHILLING ji zaznamenává ve své knize „Theory of valuation" z roku 1950, tedy v době, kdy teorie ohodnocení má již docela jinou tvářnost, než měla tehdy, kdy ji Rychlík spoluzakládal. Jest to práce, kterou se stal profesor Rychlík matematikem mezi algebraiky po celém světě známým.

Rychlík je též autorem tří učebnic: elementární teorie čísel [52], počtu pravděpodobnosti [53] a funkční teorie polynomu nad oborem reálných čísel [54]. Všechny svědčí o Rychlíkově velkém rozhledu a hlubokých znalostech a všechny vycházejí ze stavu vědy, vytvořeného nejnovějšími poznatky, které byly známy v době, kdy knihy psal. Rychlík uveřejnil velký počet recenzí nově vyšlých knih. Mnohá jsou malé kritické studie celého oboru, o němž knihy jednají.

Od roku 1950 Rychlík překládá důležité sovětské učebnice. (Viz [57], [58], [59], [60].) Tím pomáhá rozšiřovat znalost sovětské matematiky u nás a zároveň zmenšuje nedostatek vhodných vysokoškolských učebnic, který se pociťoval v některých oborech matematiky. Zároveň se pilně účastní na zpracování vědeckého odkazu Bernarda Bolzana. Tato činnost není pro něho nová, neboť již před válkou byl pověřen v Královské české společnosti nauk vydáváním Bolzanových spisů. (Viz [55], [56].) V poslední době se stále více zajímá prof. Rychlík o dějiny matematiky, hlavně o první polovinu 19. století u nás, dobu to, v níž působil Bolzano. ([28], [29], [30], [31], [34], [41], [47], [48].)

V celkovém souhrnu lze vědeckou práci profesora Rychlíka charakterizovat takto:

Prof. Rychlík byl prvním průkopníkem moderní abstraktní algebry u nás a to ještě v dobách, kdy se u nás o ní téměř nic nevědělo. Profesor Petr měl jistě značný zájem o tyto nové metody a toto nové pojetí algebry. Avšak v jeho vědecké práci i v jeho univerzitních přednáškách zůstávaly tyto věci spíše na okraji a poznání jich čerpal prof. Petr více z knižní učebnicové literatury než z původních prací, což znamenalo vždy jisté zpoždění za skutečným vývojem těchto disciplin. Před rokem 1920 si byl u nás sotva kdo vědom toho, že velké pojednání E. STEINITZE „Algebraische Theorie der Körper" uveřejněné v 137. svazku Crelleova Journalu v roku 1911, znamená počátek nové velké etapy ve vývoji algebry. Rychlík, který tuto práci cituje již ve svém pojednání [17] z roku 1916 to velmi záhy rozpoznal, stejně jako rozpoznal v samých začátcích pravý význam p-adických čísel nebo teorie ohodnocení.

Znalost těchto nových směrů moderní algebry šířil Rychlík i ve svých docentských přednáškách na univerzitě. Část těchto přednášek měla témata z algebry. V nich právě se snažil seznamovat posluchače s těmito novými partiemi algebry. Druhá část jeho univerzitních přednášek týkala se teorie čísel, a to vždy nějaké významné její části. Nebyla to jen algebraická teorie čísel. Jako student poslouchal jsem na příklad jeho přednášku o rozdělení prvočísel a o teorii funkce ζ. Účinek, který tyto přednášky měly na mladé posluchače matematiky, byl žel zmenšován tím, že Rychlík nebyl skvělý řečník a přednášeč.

Když byl jmenován profesorem na Českém vysokém učení technickém, stál prof. Rychlík před novými úkoly. Na technice bylo třeba přednášet nikoli algebru, nýbrž diferenciální a integrální počet a některé vyšší partie matematické analýzy důležité pro techniky. Svůj úkol, který mu byl usnadňován jeho velkým rozhledem po matematice, bral velmi vážně. Nebylo snad důležitější učebnice diferenciálního a integrálního počtu, kterou by si nebyl opatřil a neprostudoval, co je v ní nového po metodické stránce. Byl si velmi dobře vědom toho, že nelze matematiku přednášeti technikům tak, jak se to dělá na univerzitě. Byl však příliš dobrým matematikem, než aby mohl souhlasit s tím, že je nejlépe techniky učit jen početním receptům. Bohužel opět tato jeho snaha o zvýšení úrovně matematického vyučování byla zmenšována způsobem jeho přednášení, který se však postupem doby lepšil. Přesto jeho přednášky měly v období mezi dvěma válkami největší úroveň ze všech matematických přednášek, které se tehdy na Českém vysokém učení technickém konaly.

Hlavním rysem profesora Rychlíka jako matematika byl jeho úžasně živý a hluboký zájem o matematiku a profesor Rychlík si tento zájem stále zachovává. Naší mládeži nelze dnes ani dost připomínat, že opravdový a hluboký zájem o matematiku je prvním předpokladem každého vědeckého pracovníka v této vědě.

SEZNAM PUBLIKACÍ PROFESORA KARLA RYCHLÍKA

Zkratky:

Časopis	Časopis pro pěstování matematiky a fysiky do roč. 75, 1950–51. Časopis pro pěstování matematiky od roč. 76, 1951.
Rozpravy	Rozpravy II. tř. České akademie věd a umění.
Věstník	Věstník Královské české společnosti nauk.
Čech. mat. ž.	Чехословацкий математический журнал — Czechoslovak Mathematical Journal.
Pokroky	Pokroky matematiky, fysiky a astronomie.
Matematika	Matematika ve škole.

A. PŮVODNÍ VĚDECKÉ PRÁCE A OSTATNÍ ČLÁNKY

1. Poznámka k teorii interpolace. Časopis *36*, 1907, 13–44.
2. O grupě řádu 360. Časopis *37*, 1908, 360–379.
3. Příspěvek k teorii potenčních řad o více proměnných. Časopis *41*, 1912, 470–477.
4. O de la Vallée-Poussinově metodě sčítací. Časopis *46*, 1917, 313–331.
5. Příspěvek k teorii těles. Časopis *48*, 1919, 145–165.

6. Funkce spojité nemající derivace pro žádnou hodnotu proměnné v tělese čísel Henselových. Časopis *49*, 1920, 222—223.
7. O rozšíření pojmu kongruence. Časopis *58*, 1929, 92—94.
8. Determinanty v tělesech libovolné charakteristiky. Časopis *64*, 1934/5, 135—140. (Zprávy o II. sjezdu matematiků zemí slovanských.)
9. Ph. Dr. Frant. Velísek (posmrt. vzpomínka). Časopis *51*, 1922, 247—248.
10. Seznam vědeckých prací † prof. Matyáše Lercha. Časopis *54*, 1925, 140—151. (Společně s *K. Čuprem.*)
11. Prof. dr. František Rádl zemřel. Časopis *82*, 1957, 378—381. (Společně s *L. Riegrem.*) Seznam pojednání prof. dr. Fr. Rádla. Časopis *82*, 1957, 381—382.
12. Cauchyho rukopis v archivu ČSAV. Časopis *82*, 1957, 227—228.
13. Úvahy z logiky v Bolzanově rukopisné pozůstalosti. Časopis *83*, 1958, 230—235.
14. O rezolventách se dvěma parametry. Rozpravy *17*, 1908, č. 31.
15. Příspěvek k teorii forem I. Rozpravy *19*, 1910, č. 49.
16. Příspěvek k teorii forem II. Rozpravy *20*, 1911, č. 1.
17. O Henselových číslech. Rozpravy *25*, 1916, č. 55.
18. Dělitelnost v algebraických tělesech číselných vzhledem k racionálnému prvočíslu. Rozpravy *28*, 1919, č. 14.
19. Teorie dělitelnosti čísel algebraických. Rozpravy *29*, 1920, č. 2.
20. O Cantorových řadách a zlomcích g-adických. Rozpravy *37*, 1928, č. 2.
21. O rozšíření pojmu kongruence pro algebraická tělesa číselná konečného stupně. Rozpravy *38*, 1929, č. 21.
22. O větě Artinově. Rozpravy *42*, 1932, č. 23.
23. Poznámka k Böhmerovým nepravidelným posloupnostem. Rozpravy *43*, 1933, č. 8.
24. Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse. Věstník 1921/2, č. 4.
25. Zur Theorie der Teilbarkeit. Věstník 1923, č. 5.
26. Zur Theorie der Teilbarkeit in algebraischen Zahlkörpern. Věstník 1922, č. 9.
27. Eine Bemerkung zur Theorie der Ideale. Věstník 1924, č. 10.
28. Un manuscrit de Cauchy aux archives de l'Académie tchécoslovaque des sciences. Čech. mat. ž. *7(82)*, 1957, 479—481.
29. Theorie der reellen Zahlen im Bolzanos handschriftlichen Nachlasse. Čech. mat. ž. *7(82)*, 1957, 553—567.
30. Betrachtungen aus der Logik im Bolzanos handschriftlichen Nachlasse. Čech. mat. ž. *8(83)*, 1958, 197—202.
31. Cauchys Schrift „Mémoire sur la dispersion de la lumière. Čech. mat. ž. *8(83)*, 1958, 619—632.
32. Prof. dr. František Rádl. Pokroky *2*, 1957, 600.
33. K 75. výročí narození Emmy Nötherové. Pokroky *2*, 1957, 611.
34. Cauchyho rukopis v archivu ČSAV. Pokroky *2*, 1957, 633—637.
35. E. Galois. Pokroky *2*, 1957, 729—733.
36. K 250. výročí Tschirenhausenovu. Pokroky *4*, 1959, 232—234.
37. Nicolas Bourbaki. Pokroky *4*, 1959, 673—678.
38. Jak jsem studoval matematiku. Matematika *7*, 1957, 300—309.
39. Diofantická rovnice. Matematika *8*, 1958, 22—28.
40. 1958—19 . 58=8591—85 . 91. Tamtéž, 597—603.
41. Bolzanův pobyt v Liběchově. Matematika *9*, 1959, 111—113.
42. Matyáš Lerch a jeho odpovědi na otázky ankety o metodě práce matematiků. Matematika *9*, 1959, 170—173.
43. Výpočet čísla e základu přirozených logaritmů. Matematika *9*, 1959, 394—402.
44. Původ „arabských" číslic. Matematika *9*, 1959, 553—561.

45. Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper. Journal für reine u. angew. Mathematik *153*, 1924, 94—107.
46. Eine Bemerkung zur Determinantentheorie. Journal für reine u. angew. Mathematik *167*, 1931, 197.
47. Un manuscrit de Cauchy .... Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications *10*, 1957. (Přetisk z Čech. mat. ž. *7(82)*, 1957.)
48. Теория вещественных чисел в рукописном наследии Болцано. Истор.-матем. исследования *11*, 1958, (Viz Čech. mat. ž. *7(82)* 1957.)
49. La Théorie des Fonctions de Bolzano. Atti del Congresso internaz. dei Matematici, Bologna 1928, vol. *VI*, 503—505.
50. Über die Anwendung der Methode von Sochocki. Sprawozdania z Pierwszego kongresu matematyków Krajów Slowiańskich, Warszawa 1929.
51. Jak jsem studoval matematiku. Praha 1956 (cyklostilováno).

V Příloze k Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky otištěny články:

O poslední větě Fermatově pro $n = 4$ a $n = 3$. Roč. *39*, 1910, 65—86.
O poslední větě Fermatově pro $n = 5$. Roč. *39*, 1910, 185—195; 305—317.
Geometrické znázornění řetězců. Roč. *40*, 1911, 225—236.
Sestrojení pravidelného sedmnáctiúhelníku. Roč. *41*, 1912, 81—93.
O kvadratických tělesech číselných. Roč. *50*, 1921, 49—59; 177—190.

B. KNIŽNÍ PUBLIKACE

52. Úvod do elementární teorie číselné. JČMF, Praha, 1931, Kruh sv. 7. Druhé vydání: Přírodov. nakladatelství, Praha 1950.
53. Úvod do počtu pravděpodobnosti. JČMF, Praha 1935 (zinkografie).
54. Úvod do analytické teorie mnohočlenů s reálnými koeficienty. Nakl. ČSAV, Praha, 1957.

C. KRITICKÁ VYDÁNÍ SPISŮ

55. B. Bolzano, Funktionenlehre. Král. čes. spol. nauk, Praha, 1930, XX, 184, *24*, VI. Spisy B. Bolzana sv. 1.
56. B. Bolzano, Zahlentheorie. Král. čes. společnost nauk, Praha, 1931, VI, 58, *12*. Spisy B. Bolzana sv. 2.

D. PŘEKLADY

57. V. I. Glivenko, Teorie pravděpodobnosti. Přírod. naklad. Praha, 1950.
58. A. J. Chinčin, Řetězové zlomky. Přírod. naklad. Praha, 1952.
59. A. G. Kuroš, Algebraické rovnice libovolných stupňů. Popul. předn. z matem. sv. 3, St. naklad. tech. lit. Praha, 1953.
60. A. N. Tichonov - A. A. Samarskij, Rovnice matematické fyziky. (Společně s *A. Apfelbeckem.*) Naklad. ČSAV Praha, 1955.

OSMDESÁTINY AKADEMIKA BOHUMILA BYDŽOVSKÉHO

Na počet osmdesátin akademika BOHUMILA BYDŽOVSKÉHO, profesora Karlovy university, konala se dne 23. května 1960 na matematicko-fysikální fakultě Karlovy university slavnostní schůze uspořádaná Matematicko-fysikální sekcí ČSAV, matematicko-fysikální fakultou KU a Jednotou československých matematiků a fysiků. Schůzi zahájil a vedl akademik VOJTĚCH JARNÍK a o životě, díle a veřejném působení akademika Bydžovského promluvil oslavencův žák prof. dr. JOSEF METELKA z Palackého university v Olomouci. Poté jubilant v improvisovaném proslovu prošel nejzajímavějšími úseky a zkušenostmi svého života; schůze se účastnil velký počet čs. matematiků, většinou bývalých žáků profesora Bydžovského. Průběh schůze byl zdařilý a velmi srdečný.

Redakce

NOVÍ ČLENOVÉ ČESKOSLOVENSKÉ AKADEMIE VĚD

Na XI. valném shromáždění ČSAV dne 16. dubna 1960 se konala volba nových členů. Za nové členy ČSAV byli zvoleni tito matematici:

Zahraničním řádným členem ČSAV byl zvolen akademik Polské akademie věd a její vicepresident WACŁAW SIERPIŃSKI, profesor matematiky na varšavské universitě;

řádným členem ČSAV akademik SAV ŠTEFAN SCHWARZ, profesor Slovenské vysoké školy technické v Bratislavě, laureát státní ceny;

členy korespondenty ČSAV profesor dr. VLADIMÍR KNICHAL, ředitel Matematického ústavu ČSAV a dr. ANTONÍN ŠPAČEK, zástupce ředitele Ústavu teorie informace a automatisace ČSAV.

Redakce

SYMPOSIUM O TEORII GRUP A JEJICH APLIKACÍ VE FLORENCII

Ve dnech 11. až 13. dubna 1960 konalo se ve Florencii symposium o teorii grup a jejich aplikací, pořádané Matematickým ústavem florentinské university. Kromě řady domácích matematiků (mezi nimi G. SANSONE, B. SEGRE, G. ZAPPA), zúčastnili se symposia též zahraniční delegáti G. HIGMAN (Anglie), F. LOONSTRA (Holandsko), H. WIELANDT a O. TAMASCHKE (NSR), J. SZÈP (Maďarsko) aj. Celkem bylo předneseno 20 příspěvků (9 přednášek a 11 sdělení), z nichž zhruba polovina měla úzký vztah ke geometrii. Z ČSR se symposia zúčastnil V. DLAB a měl sdělení pod názvem „O charakterizaci cyklických grup".

Vlastimil Dlab, Khartoum

NÁVŠTĚVY ZAHRANIČNÍCH MATEMATIKŮ V ČSR

Dne 12. dubna 1960 přiletěli do Prahy pracovníci Výpočtového střediska AV SSSR v Moskvě, vědecký tajemník tohoto ústavu kandidát fys.-mat. věd J. I. ALICHAŠKIN a vedoucí oddělení ing. J. I. TORGOV.

Za svého třínedělního pobytu v Československu navštívili oba hosté Matematický ústav ČSAV, Ústav teorie informace a automatizace, Ústav pro jaderný výzkum, Výzkumný ústav matematických strojů, n. p. Tesla a n. p. Kancelářské stroje; ve dnech 25. až 27. dubna byli hosty VUT v Brně a Slovenské akademie věd.

Zajímali se především o poslední výsledky v oblasti programování a numerických metod (zvláště při řešení diferenciálních rovnic), o stav a využití matematických strojů u nás a o technické problémy při stavbě elektronkových počítačů. Oba hosté pobesedovali s pracovníky uvedených institucí a hovořili také o práci svého ústavu a o výrobě a využití počítačů v SSSR.

Za svého pobytu si prohlédli též památky Prahy a jejího okolí.

*

Od 25. dubna do 22. května 1960 byli hosty ČSAV a SAV vědečtí pracovníci Matematického ústavu Maďarské akademie věd G. GRÄTZER a E. T. SCHMIDT. Navštívili Prahu, Brno a Košice a měli rozhovory s mnohými československými matematiky; předmětem jejich zájmu byla zejména Jordan-Dedekindova řetězová podmínka, částečně uspořádané grupy, částečně uspořádané množiny, teorie svazů.

G. Grätzer a E. T. Schmidt přednesli tři přednášky: „O obecných podgrupách a obecných homomorfismech Abelových grup" (14. května v Bratislavě), ve které podali řešení problému 85 prof. L. FUCHSE z teorie Abelových grup; „Kolokvium o teorii svazů v Oberwolfachu (NSR)" (18. května v Košicích), kde podali referát o kolokviu; „Jordan-Dedekindova řetězová podmínka" (21. května v Bratislavě), na níž byly uvažovány nekonečné analogie obyčejné podmínky.

Návštěva maďarských soudruhů měla význam pro rozšíření zahraničních styků našich matematiků zabývajících se algebrou.

Redakce

OBHAJOBY DISERTAČNÍCH PRACÍ DOKTORŮ A KANDIDÁTŮ VĚD

Při Matematickém ústavu ČSAV obhájil dne 25. března 1960 Ing. dr. Ivo BABUŠKA disertační práci doktora fysikálně-matematických věd na thema „Stabilita definičních oblastí vzhledem k základním úlohám teorie parciálních diferenciálních rovnic, zejména v souvislosti s teorií pružnosti".

Disertační práce kandidáta fysikálně-matematických věd obhájili: Na matematicko-fysikální fakultě KU dne 22. února 1960 LADISLAV PROCHÁZKA práci „Některé strukturní otázky Abelových grup bez torse konečné hodnosti" a při Matematickém ústavu ČSAV dne 25. března 1960 EMIL VITÁSEK práci „O kvasistacionárním řešení rovnice pro vedení tepla".

Redakce

PŘEDNÁŠKY A DISKUSE POŘÁDANÉ JČMF A MATEMATICKÝM ÚSTAVEM ČSAV V PRAZE

4. 1. 1960: *Zdeněk Kopal* (Manchester), Numerické integrace diferenciálních rovnic.
4. 1. 1960: *Luboš Nový* a *Jaroslav Folta*, Naše matematika v letech 1790—1860.
11. 1. 1960: *Karel Rektorys*, O nelineárních diferenciálních rovnicích parabolického typu.
18. 1. 1960: Slavnostní zasedání k 100. výročí smrti Jánose Bolyaie. Hlavní referát *Karel Havlíček*.
20. 1. 1960: *Petr Mandl*, Jednostranně ohraničené difusní procesy.
1. 2. 1960: *Zdeněk Horský*, Naše astronomie v letech 1790—1900.
8. 2. 1960: *Anton Kotzig*, Některé nové výsledky v teorii orientovaných grafů.
15. 2. 1960: *Albína Dratvová*, Vědecký odkaz Arnošta Dittricha.
22. 2. 1960: Slavnostní schůze na pamět desátého výročí smrti profesora Karla Petra. Hlavní referát *Štefan Schwarz*.
7. 3. 1960: *Václav Štěpánský*, Nová universální nomografická zobrazovací metoda.
14. 3. 1960: *Rudolf Výborný*, Princip maxima pro parciální diferenciální rovnici 2. řádu.
21. 3. 1960: *A. N. Kolmogorov* (Moskva), O limitních větách pro součty nezávislých sčítanců.
4. 4. 1960: *Irena Seidlerová*, Charakteristika období 1860—1900: Naše fysika.
13. 4. 1960: *Věra Trnková*, Topologické prostory, v nichž uzávěr množiny nemusí být uzavřená množina.
13. 4. 1960: *Antonín Špaček*, Teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky ve Francii a v NSR.

2. 5. 1960: *Luboš Nový* a *Jaroslav Folta*, Naše matematika 1860—1900.
10. 5. 1960: *Ludvík Janoš*: Vztah spektra dvou krajových problémů (pro strunu a nosník).
11. 5. 1960: *Jaroslav Hájek*, Rozmístění bodů v rovině, optimální z hlediska výběrových šetření.
16. 5. 1960: *Karel Čulík*, Absolutní hodnota matice.
23. 5. 1960: Slavnostní schůze na počest osmdesátin akademika Bohumila Bydžovského.
1. 6. 1960: *Vlastimil Dlab*, O jednom vztahu mezi vektorovými prostory a primárními Abelovými grupami s omezenými řády.
Jan Sedláček, Statistické modely životnosti a odhady jejich parametrů.
6. 6. 1960: *Miroslav Novotný*, O kardinálních mocninách.

Redakce

ČINNOST POBOČKY JEDNOTY ČS. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V BRNĚ

1. V uplynulém období se konaly v rámci Brněnské pobočky Jednoty čs. matematiků a fysiků tyto přednášky:

5. 10. 1959: *Kozo Ishiguro* (Tokio), An Estimation of the Smith-Purcell Effect as the Light Source in the Infrared Region.
22. 10. 1959: *M. Černohorský*, Stockholmské rentgenografické konference 1959.
12. 11. 1959: *J. Cejpek*, Nové vlastnosti symetrie elementárních částic.
11. 2. 1960: *A. Švec* (Praha), Zobecnění tensorového počtu.
18. 2. 1960: *V. Havel*, O díle Jánose Bolyaie. — *R. Piska*, O životě Jánose Bolyaie (v rámci přednáškového večera pořádaného u příležitosti 100. výročí úmrtí J. Bolyaie; úvodní slovo prof. *J. Klapky*).
20. 2. 1960: *O. Borůvka*, O životě a díle Matyáše Lercha (v rámci oslav 100. výročí narozenin M. Lercha).
17. 3. 1960: *J. Brejcha*, O životě a činnosti prof. dr. Jiřího Klapky.
4. 5. 1960: *V. Pták* (Praha), Některé kombinatorické výsledky a jejich aplikace.

2. V „Diskusích o nových pracích brněnských matematiků" byly předneseny tyto referáty:

22. 2. 1960: *K. Koutský - M. Sekanina*, Modifikace topologií.
29. 2. 1960: *M. Ráb*, O řešení rovnice $y'' = A(x)\, y$ v případě oscilatorickém.
7. 3. 1960: *V. Polák*, O jisté transformaci jednoduchých rovinných lomených čar.
14. 3. 1960: *E. Barvínek*, O rozložení nulových bodů řešení lineární diferenciální rovnice $y'' = Q(t)\, y$ a jejich derivací.
21. 3. 1960: *V. Kudláček*, O částečně uspořádaných okruzích.
28. 3. 1960: *J. Hořejš*, Zobrazení definované konečnými automaty.
4. 4. 1960: *F. Šik*, Rozšíření aditivních a isotonních funkcionálů na částečně uspořádaných grupách.
11. 4. 1960: *V. Horák*, Oskulační komplexy kongruencí *W*.
19. 4. 1960: *V. Novák*, O dimensi lexikografického součtu částečně uspořádaných množin.
25. 4. 1960: *L. Kosmák*, O Bernštejnových polynomech konvexních funkcí.
2. 5. 1960: *M. Novotný*, O jednoznačnosti řešení rovnice $k^x = g$ mezi uspořádanými množinami.
16. 5. 1960: *O. Borůvka*, Monografická učebnice „Základy teorie grupoidů a grup" (obsah a metodické zpracování).

K. Svoboda, Brno

SEZNAM MATEMATICKÝCH PRACÍ VYŠLÝCH V ROCE 1959 V BRNĚ

1. Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou university v Brně, řada A, č. 403: *K. Čulík*: On Chromatic Decompositions and Chromatic Numbers of Graphs. — *V. Radochová*: Projektivní deformace korespondencí III. druhu.

2. Sborník Vojenské akademie Antonína Zápotockého, řada B (technická), sv. 7:

J. Čajka - M. Mikulík: Přímá metoda výpočtu prvků v náhradním zapojení lineární soustavy obvodů. — *S. Krohová-Šantavá*: Transformace integrálů systému dvou diferenciálních lineárních rovnic 1. řádu. — *V. Radochová*: Doplněk ke klasifikaci korespondencí II. druhu. — *J. Peňáz*: Příspěvek ke klasifikaci Koenigsova komplexu.

3. Sborník Vysokého učení technického v Brně:

V. Havel: Rozklad singulární kolineace. — *J. Vala*: O Cartanově parametru na přímkových plochách. — *J. Škrášek*: Kondensační a kontrakční metoda vyčíslení determinantů řádu $n \geqq 3$.

K. Svoboda, Brno

ZPRÁVA O PREDNÁŠKACH V JČMF V BRATISLAVE

V školskom roku 1959/60 konali sa v Bratislave v rámci JČMF tieto prednášky:

21. IX. 1959: *A. G. Kuroš*, Základy teórie kategórii.
14. X. 1959: *G. Szász*, Über die Translationen der Verbände.
28. X. 1959: *O. Borůvka*, Transformácie lin. dif. rovníc druhého rádu.
10. XI. 1959: *M. Greguš*, O diferenciálnej rovnici n-tého rádu.
1. XII. 1959: *L. Bukovský*, Gödelova veta.
10. XII. 1959: *A. Kotzig*, O niektorých problémoch z teórie grafov.
23. II. 1960: *Š. Furka*, Všeobecné riešenie kvadratickej rovnice o jednej neznámej.
9. III. 1960: *V. Svitek*, O niektorých zvláštnych transformáciach.
29. III. 1960: *M. Bázlik*, Teória homológie a kohomológie Eduarda Čecha.
5. V. 1960: *M. Fiedler*, Ortocentrické sústavy v E_n.
6. V. 1960: *V. Pták*, O niektorých kombinatorických výsledkoch a ich aplikáciach.
23. V. 1960: *O. Borůvka*, O tvorivej činnosti v matematike.
27. V. 1960: *J. Kuska*, Niektoré problémy vyučovania matematiky na strednej škole.

Ladislav Mišík, Bratislava

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960). — Vydává Československá akademie věd v Nakladatelství ČSAV, Vodičkova 40, Praha 2. — Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd, Praha 2, Žitná 25, telefon 241193. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,— Rbl 24,—, US \$ 6,—, £ stg 2,2,10, cena jednotlivého sešitu Kčs 12,—. Administrace: Poštovní novinový úřad, Praha 3, Jindřišská 14. — Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky přijímá každý poštovní novinový úřad nebo doručovatel. — Tiskne Knihtisk, n. p., závod 05 (Prometheus), Praha VIII, tř. Rudé armády 171. — Vyšlo v říjnu 1960 — A-14*01461

Zprávy:

СОДЕРЖАНИЕ (РЕЗЮМЕ)

CONTENTS OF SUMMARIES

ADRESY AUTORŮ

Čulík Karel, Brno, Kotlářská 2 (Přírodovědecká fakulta MU).
Havel Václav, Brno, Barvičova 85 (Vysoké učení technické).
Mandl Petr, Praha II, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).
Pondělíček Bedřich, Poděbrady (Elektrotechnická fakulta ČVUT).
Švec Alois, Praha II, Ke Karlovu 3 (Matematicko-fysikální fakulta KU).
Švecová Hana, Praha II, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

LITERÁRNÍ SOUTĚŽ SNTL

Vycházejíc z usnesení celostátní konference KSČ vypisuje Státní nakladatelství technické literatury, n. p. v Praze 1, Spálená 51 literární soutěž SNTL „Třetí pětiletka" na původní a dosud neuveřejněná rukopisná díla aktuálních námětů technického rozvoje z úseku

a) strojírenství, elektrotechniky, energetiky, hornictví a hutnictví,

b) chemie, stavebnictví, spotřebního a potravinářského průmyslu.

Hlavní podmínky soutěže: Soutěž se vztahuje na původní a dosud neuveřejněná díla přispívající k řešení některého základního úkolu technického rozvoje z úseku a), b). Do soutěže nebudou přijímána díla, na něž byla uzavřena nakladatelská smlouva k 31. 8. 1960 nebo na něž byly k 31. 8. 1960 v SNTL projednány náměty.

Soutěže se může zúčastnit občan ČSSR, který nejpozději do 31. 12. 1960 přihlásí svůj námět na napsání odborného díla z výše uvedených úseků Státnímu nakladatelství technické literatury na přihlašovacím lístku do soutěže a jemuž Státní nakladatelství technické literatury schválí přihlášený námět a rozsah díla pro soutěž.

Lhůta pro odevzdání rukopisu do soutěže je nejdéle jeden rok od schválení námětu.

Soutěžní porota posoudí schválené náměty zařazené do soutěže a nejlépe vypracované přihlášky s podrobnými osnovami na nejaktuálnější náměty doporučí k udělení těchto cen: 5 prvních cen po Kčs 1000,—; 5 druhých cen po Kčs 500,—; 5 třetích cen po Kčs 300,—; 10 čtvrtých cen po Kčs 100,—.

Díla splňující podmínky soutěže navrhne porota odměnit těmito peněžitými cenami: jedna první cena Kčs 10 000,—; jedna druhá cena Kčs 5000,—; jedna třetí cena Kčs 3000,—; sedm čtvrtých cen po Kčs 1000,—.

Dojde-li k vydání díla, které bylo odměněno v této soutěži, bude autorovi vyplacena kromě udělené ceny ještě obvyklá autorská odměna podle podmínek nakladatelské smlouvy.

Udělená odměna a výsledek soutěže oznámí Státní nakladatelství technické literatury všem účastníkům soutěže a vyhlásí jej v odborném tisku k 9. 5. 1962.

Podrobné podmínky soutěže zašle zájemcům na požádání SNTL, Spálená 51, Praha 1-Nové Město.

Cena čísla Kčs 12,—