Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

O JEDNÉ ITERAČNÍ METODĚ DIAGONALISACE SYMETRICKÝCH MATIC

MIROSLAV FIEDLER, Praha a VLASTIMIL PTÁK, Praha

Došlo dne 4. ledna 1959

V článku se popisuje nový iterační proces ke stanovení spektra symetrické matice. Je-li A daná symetrická matice, je udána konstrukce posloupnosti unitárních matic $U_1, U_2, \ldots$ taková, že posloupnost matic $U_k A U_k^*$ za určitých předpokladů kvadraticky konverguje k matici diagonální. Tím je zároveň podána iterační metoda k výpočtu spektra symetrické matice.

Úvod. Je-li A daná symetrická matice, existuje, jak známo, unitární matice U tak, že matice UAU^* je diagonální. Diagonální prvky této matice pak tvoří spektrum matice A. Pro numerický výpočet spektra symetrické matice nabízí se následující myšlenka: Nalézti k dané symetrické matici A jednoduchou unitární matici U tak, aby matice UAU^* byla diagonální jen přibližně — v tom smyslu, že všechny prvky mimo diagonálu matice UAU^* jsou v absolutní hodnotě malé. Podaří-li se udat matici U tak, aby se při přechodu od matice A k matici UAU^* dostatečně zmenšily nediagonální prvky, můžeme opakováním této úpravy dostati iterační proces, který v limitě vede k diagonální matici; tento proces je tedy zároveň iterační metodou k výpočtu spektra matice.

Úkolem nynější práce je popsati takový konvergentní proces. Jako míra „diagonálnosti" je volen součet čtverců absolutních hodnot nediagonálních prvků. Tato volba se ukazuje velmi výhodná, neboť uvidíme, že vhodným obratem lze tuto míru vyjádřit pomocí stop jistých matic, což umožňuje použití přehledného početního aparátu.

0. Označení. K porozumění článku je třeba znalosti základních pojmů a výsledků lineární algebry, jak jsou obsaženy např. v knize *I. M. Gelfand, Lineární algebra* [1]. Některé pojmy a výsledky, potřebné v numerických metodách (např. normy matic a některé nerovnosti) jsou shrnuty v knize *A. S. Householder, Principles of Numerical Analysis* [2]. Protože označení a názvy některých pojmů, kterých budeme v dalším užívat, nejsou v literatuře jednotná, opakujeme v tomto odstavci pro pohodlí čtenáře nejdůležitější definice a označení. U některých jednoduchých výsledků připojujeme odkaz na literaturu.

V celém článku (vyjma odst. 4) slovem matice rozumíme čtvercovou matici s komplexními prvky. V celém článku budiž n dané přirozené číslo; všechny uvažované matice budou řádu n. Je-li A daná matice s prvky a_{ik}, označme A^* matici, která na místě (i, k) má prvek $\overline{a}_{ki}$. Matici A nazýváme symetrickou, platí-li $A^* = A$; nazýváme ji antisymetrickou, platí-li $A^* = -A$. (V literatuře se často užívá názvu hermitovská místo symetrická.)

Je-li B libovolná matice, potom lze psáti $B = P + Q$, kde P je symetrická, Q antisymetrická. Snadno se zjistí, že to lze právě jedním způsobem, a to pro $P = \frac{1}{2}(B + B^*)$, $Q = \frac{1}{2}(B - B^*)$. Matice P a Q nazýváme symetrickou a antisymetrickou částí matice B. Přímým výpočtem se snadno zjistí, že platí $(AB)^* = B^*A^*$ pro libovolné dvě matice A, B.

Je-li A daná matice, nazýváme stopou matice A a značíme $\tau(A)$ číslo $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Platí tedy $\tau(A^*) = \overline{\tau(A)}$, $\tau(A + B) = \tau(A) + \tau(B)$, $\tau(\alpha A) = \alpha\,\tau(A)$ pro libovolné matice A, B a libovolné komplexní číslo α. Snadno se zjistí přímým výpočtem, že $\tau(AB) = \tau(BA)$ pro libovolné dvě matice A, B. Tohoto vztahu budeme často užívat; tak například plyne z něho rovnost $\tau[(A + B)^2] = \tau(A^2) + 2\tau(AB) + \tau(B^2)$, uvážíme-li jen, že $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

Dále odtud plyne, že platí $\tau(TAT^{-1}) = \tau(A)$ pro každou regulární matici T a každou matici A. Jiný důsledek této rovnosti, který budeme potřebovat, je: jsou-li A, B dvě symetrické matice, je stopa součinu AB číslo reálné. Skutečně, $\overline{\tau(AB)} = \tau((AB)^*) = \tau(B^*A^*) = \tau(BA) = \tau(AB)$.

Je-li A libovolná matice, snadno se zjistí, že matice AA^* je symetrická nezáporně definitní a má tedy všechna vlastní čísla nezáporná (viz [1], str. 121). Nezáporné druhé odmocniny těchto čísel se nazývají singulárními hodnotami matice A. Největší singulární hodnotu matice A označíme $h(A)$. Lze dokázat, že $h(A)$ je rovno maximu $\|Ax\|$ pro $\|x\| \leqq 1$, kde norma $\|y\|$ vektoru y složkách $y_1, \ldots, y_n$ je definována jako $\|y\| = (y_1^2 + \ldots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}$ (viz [2], str. 40 a 43). Platí potom

$$h(A + B) \leqq h(A) + h(B)\,, \quad h(AB) \leqq h(A)\, h(B)$$

pro libovolné dvě matice A, B (viz [2], str. 41).

Označme dále $Q(A) = \tau(AA^*)$. Potom pro každou unitární matici U a každou matici A platí $Q(UA) = Q(AU) = Q(A)$. Snadno se zjistí, že $Q(A) = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$, takže číslo $Q(A)$ je nezáporné pro každou matici A. Nezápornou druhou odmocninu čísla $Q(A)$ označme $N(A)$. Platí potom

$$h(A) \leqq N(A)\,, \quad N(A + B) \leqq N(A) + N(B)\,; \quad N(AB) \leqq h(A)\, N(B)$$

pro libovolné dvě matice A, B (viz [2], str. 42).

1. Pomocné věty. V tomto odstavci dokážeme některé jednoduché věty, kterých budeme později užívat.

(1,1) *Pro libovolné dvě matice A, B platí*

$$Q(A + B) = Q(A) + Q(B) + 2\mathrm{Re}\,\tau(AB^*)\,.$$

Jsou-li matice A, B symetrické, platí

$$Q(A + B) = Q(A) + Q(B) + 2\tau(AB)\,.$$

D ů k a z. Jest

$$Q(A + B) = \tau((A + B)(A^* + B^*)) = \tau(AA^* + AB^* + BA^* + BB^*) = \\ = Q(A) + Q(B) + \tau(AB^*) + \tau(BA^*)\,.$$

Stačí si nyní uvědomit, že $BA^* = (AB^*)^*$, takže $\tau(BA^*) = \tau((AB^*)^*) = \overline{\tau(AB^*)}$. Jsou-li matice A, B symetrické, je $\tau(AB^*) + \tau(BA^*) = 2\tau(AB)$.

(1,2) *Budiž A libovolná matice. Potom*

$$|\tau(A^2)| \leqq Q(A)\,.$$

D ů k a z. Jest $\tau(A^2) = \sum_i \sum_k a_{ik}a_{ki}$, takže

$$|\tau(A^2)| \leqq 2 \sum_{i<k} |a_{ik}a_{ki}| + \sum_i |a_{ii}^2| \leqq \\ \leqq \sum_{i<k} (|a_{ik}|^2 + |a_{ki}|^2) + \sum_i |a_{ii}|^2 = Q(A)\,.$$

Jsou-li P, Q dvě matice, nazveme komutátorem matic P a Q a označíme $[P, Q]$ matici $PQ - QP$. Snadno se zjistí, že pro libovolné dvě matice platí vztahy

$$[P, Q] = -[Q, P]\,, \quad [P, Q]^* = [Q^*, P^*] = -[P^*, Q^*]\,.$$

Budeme potřebovati následující zajímavé vlastnosti komutátorů.

(1,3) *Buďtež A_1, A_2, A_3, A_4 libovolné matice téhož řádu. Potom matice*

$$[A_1, A_2][A_3, A_4] + [A_1, A_3][A_4, A_2] + [A_1, A_4][A_2, A_3]$$

má nulovou stopu.

(1,4) *Buďtež A_1, A_2, A_3, A_4, T libovolné matice téhož řádu. Potom matice*

$$A_1A_2A_3[A_4, T] + A_2A_3A_4[A_1, T] + A_3A_4A_1[A_2, T] + A_4A_1A_2[A_3, T]$$

má nulovou stopu.

D ů k a z obou tvrzení plyne odtud, že uvažované výrazy lze přímým výpočtem uvésti na tvar součtu několika matic tvaru $AB - BA$.

(1,5) *Nechť W, D, S jsou matice řádu n a nechť W je záměnná s S; potom matice $WDW[D, S]$ má nulovou stopu.*

D ů k a z. Plyne ihned z předešlé věty pro

$$A_1 = A_3 = W\,, \quad A_2 = A_4 = D\,, \quad T = S\,.$$

Pro pozdější použití dokážeme ještě některé vlastnosti součinů unitárních matic.

(1,6) *Nechť $U_1, \ldots, U_s$ jsou unitární matice, E buď jednotková matice. Potom platí*

$$N(U_1 U_2 \ldots U_s - E) \leqq \sum_{i=1}^{s} N(U_i - E) .$$

Důkaz. Nechť $s > 1$ a tvrzení je správné pro součiny o počtu faktorů menším než s. Je potom

$$N(U_1 \ldots U_s - E) = N(U_1 \ldots U_{s-1}(U_s - E) + U_1 \ldots U_{s-1} - E) \leqq$$
$$\leqq N(U_s - E) + N(U_1 \ldots U_{s-1} - E) ,$$

odkud ihned plyne dokazovaná nerovnost pomocí indukčního předpokladu. Protože pro $s = 1$ nerovnost je splněna bezprostředně, je důkaz dokončen.

(1,7) *Nechť $U_1, U_2, \ldots$ je posloupnost unitárních matic taková, že $\sum_{i=1}^{\infty} N(U_i - E) < \infty$. Potom existuje $\lim_{s\to\infty} U_1 U_2 \ldots U_s = U$. Matice U je unitární a platí*

$$N(U_1 \ldots U_m - U) \leqq \sum_{j=m+1}^{\infty} N(U_j - E).$$

Důkaz. Označme $V_s = U_1 U_2 \ldots U_s$. Je potom pro $p \leqq q$

$$N(V_p - V_q) = N(V_p(U_{p+1} \ldots U_q - E)) \leqq \sum_{p+1}^{q} N(U_i - E) .$$

Odtud plyne, že posloupnost $V_1, V_2, \ldots$ je cauchyovská; prostor všech matic s normou N je zřejmě úplný, takže existuje $\lim_{s\to\infty} V_s = U$. Snadno se nahlédne, že U je unitární. Je dále

$$N(U - V_m) = \lim_{q\to\infty} N(V_q - V_m) \leqq \lim_{q\to\infty} \sum_{m+1}^{q} N(U_i - E) = \sum_{m+1}^{\infty} N(U_i - E) .$$

(1,8) *V nerovnosti $h(A) \leqq N(A)$ nastane rovnost, právě když hodnost matice A je nejvýše 1.*

Důkaz. Podle známých vět (viz např. [1], str. 59) jest hodnost libovolné matice M rovna hodnosti matice MM^*.

Má-li A hodnost nula, je zřejmě $h(A) = N(A) = 0$. Je-li tato hodnost rovna jedné, má i matice AA^* hodnost 1, a tedy jediné vlastní číslo matice AA^* je různé od nuly. Toto vlastní číslo je rovno $h^2(A)$. Poněvadž $N^2(A) = \tau(AA^*)$ je součet všech vlastních čísel matice AA^*, je $N^2(A) = h^2(A)$.

Nechť obráceně $h(A) = N(A)$. Číslo $h^2(A)$ je rovno maximálnímu číslu z vesměs nezáporných vlastních čísel matice AA^*, zatím co $N^2(A)$ je rovno součtu těchto vlastních čísel. Odtud plyne, že AA^* má nejvýše jedno vlastní číslo různé od nuly. Má tedy AA^* hodnost nejvýše jedna, a proto též A má hodnost nejvýše jedna.

2. Míra Q^* a její odhad. Budiž n dané přirozené číslo. Nechť dále M je daná množina dvojic (i, j) přirozených čísel, $1 \leqq i, j \leqq n$ taková, že s každou dvojicí (i, j) obsahuje také dvojici (j, i). Je-li A matice řádu n s prvky a_{ij}, označíme $D(A)$ matici řádu n s prvky b_{ij} definovanými následujícím způsobem:

$$b_{ij} = a_{ij}\,, \quad \text{jestliže} \quad (i, j) \in M\,, \quad b_{ij} = 0\,, \quad \text{jestliže} \quad (i, j) \text{ non} \in M\,.$$

Je-li A libovolná matice řádu n, položme

$$Q^*(A) = Q(A) - \sum_{(i,j)\in M} |a_{ij}|^2 = Q(A) - \tau(D(A)\,A^*) = \tau((A - D(A))\,A^*)\,.$$

(2,1) *Budiž A symetrická, U unitární. Označme $\tilde{A} = UAU^*$, $D = D(A)$, $V = [D, U]$. Potom platí*

$$Q^*(\tilde{A}) - Q^*(A) \leqq Q(V) - 2\tau(V(A - U)\,U^*)\,.$$

Důkaz. Uvědomíme-li si, že pro symetrickou matici A obě matice $\tilde{A}$ i D jsou opět symetrické, a že $Q(\tilde{A}) = Q(A)$, dostáváme snadným počtem

$$Q^*(\tilde{A}) = Q^*(\tilde{A} - D) \leqq Q(\tilde{A} - D) = Q(A) + Q(D) - 2\tau(\tilde{A}D) =$$
$$= Q^*(A) + \tau(DA) + Q(D) - 2\tau(\tilde{A}D)\,,$$

odkud

$$Q^*(\tilde{A}) - Q^*(A) \leqq 2Q(D) - 2\tau(\tilde{A}D)\,.$$

Dále je $\tau(\tilde{A}D) = \tau(UDU^*D) + \tau(U(A - D)\,U^*D)$. Protože zřejmě $\tau(DUDU^*)$ je reálná, dostaneme podle (1,1)

$$Q(V) = Q(DU - UD) = 2Q(D) - 2\tau(DUDU^*)\,.$$

Dále je

$$\tau(U(A - D)\,U^*D) = \tau(DU(A - D)\,U^*) = \tau((V + UD)(A - D)\,U^*) =$$
$$= \tau(V(A - D)\,U^*)\,,$$

protože zřejmě

$$\tau(UD(A - D)\,U^*) = \tau(D(A - D)) = 0\,.$$

Je tedy

$$Q^*(\tilde{A}) - Q^*(A) \leqq 2Q(D) - 2\tau(\tilde{A}D) =$$
$$= 2Q(D) - 2\tau(DUDU^*) - 2\tau(V(A - D)\,U^*) = Q(V) - 2\tau(V(A - D)\,U^*)\,,$$

čímž je důkaz dokončen.

(2,2) *Nechť matice A a D jsou symetrické, matice S antisymetrická. Označme $B = A - D$. Nechť platí $[D, S] = B$ a nechť U je unitární matice záměnná s S. Označme U_0, U_1 symetrickou a antisymetrickou část matice U; potom matice $V_0 = [D, U_1]$, $V_1 = [D, U_0]$ jsou symetrickou a antisymetrickou částí matice $V = [D, U]$ a platí*

$$Q(V) - 2\tau(U^*VB) = \tau(V_0^2) - \tau(V_1^2) - 2\tau((U_0V_0 - U_1V_1)\,B)\,.$$

Důkaz. Protože U je záměnná s S a S je antisymetrická, je také U^* záměnná s S. Odtud snadno plyne, že všechny čtyři matice S, U, U_0, U_1 jsou navzájem záměnné. Je potom zřejmě

$$\tau(VV^*) = \tau((V_0 + V_1)(V_0 - V_1)) = \tau(V_0^2) - \tau(V_1^2)\,.$$

Dále dostáváme

$$\tau(U^*VB) = \tau((U_0 - U_1)(V_0 + V_1)\,B) =$$
$$= \tau((U_0V_0 - U_1V_1 + U_0V_1 - U_1V_0)\,B)\,.$$

Je však

$$U_0V_1 - U_1V_0 = U_0[D, U_0] - U_1[D, U_1] =$$
$$= U_0DU_0 - U_0^2D - U_1DU_1 + U_1^2D = U_0DU_0 - U_1DU_1 - D\,.$$

Podle (1,5) je $\tau((U_0DU_0 - U_1DU_1 - D)[D, S]) = 0$, takže $\tau(U^*VB) = \tau((U_0V_0 - U_1V_1)\,B)$, čímž je důkaz dokončen.

Budeme potřebovati následující jednoduchou poznámku:

(2,3) *Nechť matice S je antisymetrická. K tomu, aby existovala symetrická matice H, záměnná s S tak, že matice $S + H$ je unitární, je nutné a stačí, aby matice $E + S^2$ byla nezáporně definitní.*

Důkaz. Nechť H je matice symetrická záměnná s S a nechť matice $U = S + H$ je unitární. Potom

$$E + S^2 = UU^* + S^2 = (S + H)(-S + H) + S^2 = H^2\,,$$

takže $E + S^2$ je nezáporně definitní. Je-li naopak $E + S^2$ nezáporně definitní, existují symetrické matice H záměnné s S takové, že $H^2 = E + S^2$. Snadno se zjistí, že pro libovolnou z nich matice $S + H$ je unitární.

(2,4) *Nechť matice A, D jsou symetrické, matice S antisymetrická. Nechť platí $[D, S] = B$, kdež $B = A - D$. Nechť $E + S^2$ je nezáporně definitní, nechť $U = S + \sqrt{E + S^2}$, takže U je unitární. Nechť P je matice, pro niž $\sqrt{E + S^2} = E + \frac{1}{2}S^2 + P$. Nechť $V = [D, U]$. Potom*

$$Q(V) - 2\tau(U^*VB) =$$
$$= -\tau(B^2) + \tfrac{1}{2}\tau(BSBS) - \tfrac{1}{2}\tau(B^2S^2) - \tau(R^2) - 2\tau(PB^2)\,,$$

kdež $R = [D, P]$.

Důkaz. Při označení z (2,2) bude $U_0 = E + \frac{1}{2}S^2 + P$, $U_1 = S$ dále

$$V_1 = [D, U_0] = \tfrac{1}{2}[D, S^2] + R = \tfrac{1}{2}(BS + SB) + R\,,$$
$$V_0 = [D, U_1] = [D, S] = B\,,$$
$$U_0V_0B = (E + \tfrac{1}{2}S^2 + P)\,B^2\,,$$
$$U_1V_1B = \tfrac{1}{2}(SBSB + S^2B^2) + SRB\,,$$
$$V_1^2 = \tfrac{1}{4}(BSBS + BS^2B + SB^2S + SBSB) + \tfrac{1}{2}(BS + SB)\,R +$$
$$+ \tfrac{1}{2}R(BS + SB) + R^2\,.$$

Abychom mohli dosadit do vzorce ve větě (2,2), vypočteme nejprve příslušné stopy

$$\tau(V_0^2) = \tau(B^2)\,,$$
$$-\,\tau(V_1^2) = -\,\tau(\tfrac{1}{4}(2BSBS + 2B^2S^2) + (BS + SB)\,R + R^2)\,,$$
$$-\,2\tau(U_0V_0B) = -\,2\tau(B^2) - \tau(S^2B^2) - 2\tau(PB^2)\,,$$
$$2\tau(U_1V_1B) = \tau(BSBS) + \tau(S^2B^2) + 2\tau(SRB)\,.$$

Stačí nyní jen sečíst příslušné výrazy a všimnout si, že $-\,\tau((BS + SB)\,R) + 2\tau(SRB) = 0$, což ihned plyne z věty (1,3), vezmeme-li za A_1, A_2, A_3, A_4 po řadě matice B, S, D, P.

3. V tomto odstavci odvodíme některé vztahy, které budeme potřebovat k důkazu konvergence v dalších odstavcích. Tyto vztahy jsou zde odvozeny za poněkud slabších předpokladů.

(3,1) *Nechť A a D jsou matice, $B = A - D$. Nechť S je matice, pro niž $[D, S] = B$. Potom platí pro každé přirozené k*

$$[D, S^k] = \sum_{i=0}^{k-1} S^i B S^{k-1-i}\,. \tag{1}$$

Důkaz plyne ihned úplnou indukcí podle k.

(3,2) *Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ je mocninná řada, konvergující pro $|z| < \varrho$, $\varrho > 0$, a nechť D a S jsou matice. Je-li $h(S) < \varrho$, konvergují řady matic $\sum_{k=0}^{\infty} a_k S^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k [D, S^k]$, a přitom platí*

$$[D, \sum_{k=0}^{\infty} a_k S^k] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k [D, S^k]\,.$$

Důkaz plyne ihned odtud, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(a_k S^k) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, h^k(S) < \infty\,,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} h(a_k [D, S^k]) \leqq 2h(D) \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, h^k(S) < \infty\,.$$

(3,3) *Pro $0 \leqq x \leqq 1$ platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| x^{2k} = 1 - \sqrt{1 - x^2}\,, \tag{2}$$

pro $0 \leqq x < 1$ platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |c_k| x^{2k-1} = \frac{x}{2\sqrt{1 - x^2}}\,, \tag{3}$$

kde c_k $(k = 1, 2, \ldots)$ jsou koeficienty rozvoje

$$\sqrt{1 + x^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{2k}\,. \tag{4}$$

Přitom je

$$c_1 = \tfrac{1}{2}\,, \quad c_2 = -\tfrac{1}{8}, \tag{5}$$

$$\operatorname{sign} c_k = (-1)^{k-1}\,, \quad (k = 1, 2, \ldots)\,, \tag{6}$$

$$|c_{k+1}| > \tfrac{1}{2}|c_k| \quad (k = 2, 3, \ldots)\,. \tag{7}$$

Důkaz. Binomický rozvoj (4) má zřejmě první koeficienty z (5), a přitom platí (6) a (7). Jest

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k x^{2k} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| x^{2k}\,,$$

což dává (2). Derivováním (2) dostaneme v uvedených oborech (3).

(3,4) *Pro* $0 \leqq x \leqq 1$ *platí*

$$1 - \tfrac{1}{2}x - \sqrt{1 - x} \leqq \tfrac{1}{2}x^2\,, \tag{8}$$

$$1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \sqrt{1 - x} \leqq \tfrac{3}{8}x^3\,. \tag{9}$$

Důkaz. Označme f_1 resp. f_2 funkce na levých stranách nerovností (8) resp. (9). Podle (2) a (5) lze psát $f_1(x) = x^2\, g_1(x)$, $f_2(x) = x^3\, g_2(x)$, kde g_1 i g_2 lze v $\langle 0, 1\rangle$ rozvinout v mocninné řady podle mocnin x, které mají podle (2) vesměs kladné koeficienty. Funkce g_1 i g_2 jsou tedy v $\langle 0, 1\rangle$ rostoucí funkce, tj.

$$g_1(x) \leqq g_1(1) = f_1(1) = \tfrac{1}{2}\,, \quad g_2(x) \leqq g_2(1) = f_2(1) = \tfrac{3}{8}\,.$$

Odtud ihned plynou uvedené odhady.

(3,5) *Nechť A a D jsou symetrické matice, $B = A - D$. Nechť S je antisymetrická matice, pro niž platí $[D, S] = B$ a nechť $h(S) < 1$. Potom matice $E + S^2$ je positivně definitní, matice $U = S + \sqrt{E + S^2}$, kde $\sqrt{E + S^2}$ je positivně definitní odmocnina z $E + S^2$, je unitární, a platí pro operaci Q^* z odst.* **2**

$$Q^*(UAU^*) - Q^*(A) \leqq Q(B)(\alpha(h(S)) - 1)\,,$$

kde

$$\alpha(x) = x^2 + \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})^2}{1 - x^2} \quad \textit{pro} \quad 0 \leqq x < 1\,.$$

Důkaz. Matice S^2 je zřejmě symetrická a platí $S^2 = -SS^*$. Jsou tedy vlastní čísla této matice vesměs nekladná. Nejmenší vlastní číslo matice $E + S^2$ je číslo $1 - h^2(S)$. Poněvadž S je antisymetrická a $h(S) < 1$, je matice $E + S^2$ positivně definitní. Matice $S + \sqrt{E + S^2}$ je pak zřejmě unitární podle (2,3).

Podle (2,1) a (2,4) platí

$$Q^*(UAU^*) - Q^*(A) \leqq -\tau(B^2) - \tfrac{1}{2}\tau(B^2S^2) + \tfrac{1}{2}\tau(BSBS) - \tau(R^2) - \\ - 2\tau(PB^2)\,.$$

Je však $Q(BS) = \tau(BS(BS)^*) = -\tau(B^2S^2)$ a dále podle (1,2) $\tau(BSBS) \leqq \leqq Q(BS)$, takže $-\tfrac{1}{2}\tau(B^2S^2) + \tfrac{1}{2}\tau(BSBS) \leqq Q(BS)$. Odtud

$$Q^*(UAU^*) - Q^*(A) \leqq -Q(B) + Q(BS) + Q(R) - 2\tau(PB^2)\,, \tag{11}$$

neboť $\tau(B^2) = Q(B)$, $\tau(R^2) = - Q(R)$, jak ihned plyne z toho, že matice B je symetrická, R antisymetrická.

Platí dále podle (2,4), (3,2) a (4)

$$R = [D, P] = [D, \sum_{k=2}^{\infty} c_k S^{2k}] = \sum_{k=2}^{\infty} c_k [D, S^{2k}] ,$$

takže podle (1)

$$N(R) \leqq \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| \, N([D, S^{2k}]) \leqq N(B) \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| \, 2k(h(S))^{2k} ,$$

odkud vzhledem k (3)

$$N(R) \leqq N(B) \, h(S) \frac{1 - \sqrt{1 - h^2(S)}}{\sqrt{1 - h^2(S)}} . \tag{12}$$

Abychom odhadli $- 2\tau(PB^2)$, označme $C = \sqrt{E + S^2} - E$. Snadným výpočtem zjistíme, že $C^2 = - 2P$, tedy

$$- 2\tau(PB^2) = \tau(B^2C^2) = \tau(BC(BC)^*) = Q(BC) .$$

Dále

$$h(C) = h(\sum_{k=1}^{\infty} c_k S^{2k}) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| (h(S))^{2k} ,$$

tj. podle (2) $h(C) \leqq 1 - \sqrt{1 - h^2(S)}$.

Odtud

$$- 2\tau(PB^2) = Q(BC) \leqq Q(B) \, h^2(C) \leqq Q(B)(1 - \sqrt{1 - h^2(S)})^2 . \tag{13}$$

Ze vztahů (11), (12) a (13) plyne už uvedený odhad.

(3,6) *Nechť A, D, B, S a U jsou matice definované v* (3,5). *Označme*

$$Z = UAU^* - (D - \tfrac{1}{2}[B, S]) . \tag{14}$$

Potom platí

$$N(Z) \leqq N(B) \beta(h(S)) , \tag{15}$$

kde

$$\beta(x) = x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 + \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)(1 - \sqrt{1 - x^2}) \quad \textit{pro} \quad 0 \leqq x < 1 . \tag{16}$$

Důkaz. Označme na okamžik positivně definitní $\sqrt{E + S^2} = W$. Protože U je podle (3,5) unitární, je $N(Z) = N(ZU)$. Nyní je

$$\begin{aligned} ZU = UA - (D - \tfrac{1}{2}BS + \tfrac{1}{2}SB) \, U = (S + W)(B + D) - \\ - (D + \tfrac{1}{2}SB - \tfrac{1}{2}BS)(S + W) = - [D, W] + \tfrac{1}{2}(SB + BS) + \\ + (W - E) \, B - \tfrac{1}{2}(SB - BS)(S + W - E) = \\ = - [D, W - E - \tfrac{1}{2}S^2] + (W - E) \, B - \tfrac{1}{2}(SB - BS)(S + W - E) , \end{aligned}$$

tedy podle (4) a (3,2)

$$ZU = -[D, \sum_{k=2}^{\infty} c_k S^{2k}] + (\sum_{k=1}^{\infty} c_k S^{2k}) B -$$
$$- \tfrac{1}{2}(SB - BS)(S + \sum_{k=1}^{\infty} c_k S^{2k}) = -\sum_{k=2}^{\infty} c_k [D, S^{2k}] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} c_k S^{2k} B - \tfrac{1}{2} SBS + \tfrac{1}{2} BS^2 - \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k SBS^{2k} + \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k BS^{2k+1}.$$

Avšak podle (1) platí

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k [D, S^{2k}] = \sum_{\alpha, \beta} c_{\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)} S^{\alpha} BS^{\beta}, \quad \alpha + \beta \geqq 3, \ \alpha + \beta \text{ liché},$$

takže lze psát

$$ZU = \sum_{\alpha, \beta = 0}^{\infty} \varrho_{\alpha\beta} S^{\alpha} BS^{\beta}.$$

Odtud $N(ZU) \leqq (NB) \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} |\varrho_{\alpha\beta}| [h(S)]^{\alpha+\beta} = N(B) \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k h^k(S)$,

kde $\mu_k = \sum_{\alpha+\beta=k} |\varrho_{\alpha\beta}|$. Nyní je

$$\varrho_{00} = \varrho_{01} = \varrho_{10} = 0, \quad \varrho_{20} = c_1, \quad \varrho_{11} = -\tfrac{1}{2}, \quad \varrho_{02} = \tfrac{1}{2}, \quad \varrho_{12} = \tfrac{1}{8};$$

pro $k \geqq 2$ je $\varrho_{1,2k} = -c_{k+1} - \frac{1}{2}c_k$, takže podle (6) a (7) pro $k \geqq 2$ platí $|\varrho_{1,2k}| = |c_{k+1}| - \frac{1}{2}|c_k|$; dále pro $k \geqq 1$ platí $\varrho_{2k,0} = c_k$, $\varrho_{0,2k+1} = -c_{k+1} + \frac{1}{2}c_k$, takže je $|\varrho_{0,2k+1}| = |c_{k+1}| + \frac{1}{2}|c_k|$; pro ostatní dvojice α, β je $\varrho_{\alpha\beta} = 0$ pro $\alpha + \beta = 2k \geqq 4$, $\varrho_{\alpha\beta} = c_{k+1}$ pro $\alpha + \beta = 2k + 1 \geqq 3$. Odtud plyne

$$\mu_0 = \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 1 + |c_1|, \quad \mu_3 = \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4} + 4|c_2|;$$

pro $k \geqq 2$ platí $\mu_{2k} = |c_k|$, $\mu_{2k+1} = (2k + 2)|c_{k+1}|$. Celkem platí tedy podle (2) a (3) pro $\beta(x)$ ze vztahu (16)

$$N(Z) = N(ZU) \leqq$$
$$\leqq N(B)\{h^2(S) + \tfrac{1}{4}h^3(S) + \sum_{k=2}^{\infty} 2k|c_k|(h(S))^{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|(h(S))^{2k}\} =$$
$$= N(B)\, \beta(h(S)),$$

jak jsme měli dokázat.

4. V tomto odstavci budeme specialisovat volbu matic, o nichž byla řeč v předešlých odstavcích. Budou se zde také vyskytovat matice jiného řádu než n-tého a matice obdélníkové.

Množina všech přirozených čísel 1, 2, ..., n buď rozdělena na neprázdné disjunktní sčítance $N_1, N_2, \ldots, N_p$. Zvolíme M jako množinu všech dvojic (i, j) takových, že $i \in N_r$, $j \in N_r$ pro vhodné $r = 1, 2, \ldots, p$. Pro jednoduchost můžeme předpokládati, že platí $u < v$, jakmile $u \in N_a$, $v \in N_b$ a $a < b$. Při tomto dělení se matice A rozpadne na bloky

$$\begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \ldots, & A_{1p} \\ A_{21}, & A_{22}, & \ldots, & A_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{p1}, & A_{p2}, & \ldots, & A_{pp} \end{pmatrix}$$

se čtvercovými maticemi A_{ii} na blokové diagonále.

Budiž S_i množina všech vlastních hodnot matice A_{ii}. Pro $i \neq j$ označme

$$\varrho_{ij} = \min |x - y| , \quad x \in S_i , \quad y \in S_j$$

a položme

$$c(A) = \min_{i \neq j} \varrho_{ij} .$$

(4,1) *Nechť A je symetrická matice, $c(A) > 0$. Potom existuje jediná antisymetrická matice S taková, že pro $D = D(A)$ platí $[D, S] = A - D$ a při rozdělení na bloky $N_1, \ldots, N_p$ je $S_{ii} = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, p$. Platí potom*

$$N(S_{ik}) \leqq \frac{1}{\varrho_{ik}} N(A_{ik})$$

pro každé $i, k = 1, 2, \ldots, p$, $i \neq k$,

$$N(S) \leqq \frac{\sqrt{Q^*(A)}}{c(A)} , \tag{17}$$

Důkaz. Buďte dána čísla i, k, pro něž $1 \leqq i < k \leqq p$. Úloha nalézti matici S_{ik} tak, aby $A_{ii}S_{ik} - S_{ik}A_{kk} = A_{ik}$, je ekvivalentní s řešením rovnice

$$\mathbf{M}X = A_{ik} ,$$

kdež $\mathbf{M} = A_{ii} \otimes E_k - E_i \otimes A_{kk}$ (viz [3], str. 89). Podle známých vět (viz. [3], str. 84) o tensorových součinech je $\mathbf{M}$ matice symetrická, jejíž spektrum tvoří všechna čísla tvaru $x - y$, kde $x \in S_i$, $y \in S_k$. Protože všechna tato čísla jsou různá od nuly, je $\mathbf{M}$ regulární. Existuje tedy $\mathbf{M}^{-1}$. Norma $h(\mathbf{M}^{-1})$ je rovna největší z absolutních hodnot vlastních čísel matice $\mathbf{M}^{-1}$, takže $h(\mathbf{M}^{-1}) = \frac{1}{\varrho_{ik}}$.
Odtud plyne ihned existence matice S_{ik} splňující rovnost $A_{ii}S_{ik} - S_{ik}A_{kk} = A_{ik}$ a odhad

$$N(S_{ik}) \leqq \frac{1}{\varrho_{ik}} N(A_{ik}) \leqq \frac{N(A_{ik})}{c(A)} .$$

Položme nyní pro $1 \leqq k < i \leqq p$, $S_{ik} = - S^*_{ki}$, $S_{ii} = 0$ a definujme matici S pomocí bloků S_{ik}. Snadno se zjistí, že platí $[D, S] = A - D$; odhad $N(S) \leqq \frac{\sqrt{Q^*(A)}}{c(A)}$ je snadným důsledkem předešlých nerovností.

Poznámka. Zmiňme se o jednom zvláště důležitém případě. Zvolíme-li M jako množinu všech dvojic (i, i), kdež $1 \leqq i \leqq n$, bude zřejmě $c(A) =$

$= \min\limits_{i \neq j} |a_{ii} - a_{jj}|$. Je-li potom $c(A) > 0$ a $D = D(A)$, konstrukce antisymetrické matice S takové, že $[D, S] = A - D$ je snadná: stačí voliti $s_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}$ pro $i \neq j$ a $s_{ij} = 0$ pro $i = j$. Odhad $N(S) \leqq \dfrac{\sqrt{Q^*(A)}}{c(A)}$ je bezprostřední.

(4,2) *Nechť A je symetrická matice, nechť*

$$c(A) > 0\,, \quad \sigma = \frac{\sqrt{Q^*(A)}}{c(A)} < 1\,.$$

Potom existuje antisymetrická matice S taková, že $[D, S] = A - D$, kde $D = D(A)$. Matice $E + S^2$ je positivně definitní, matice $U = S + \sqrt{E + S^2}$ unitární. Pro matici $\varphi(A) = UAU^*$ potom platí

$$Q^*(\varphi(A)) \leqq Q^*(A)\, \alpha(\sigma)\,, \tag{18}$$

$$c(\varphi(A)) \geqq c(A)\, \gamma(\sigma)\,, \tag{19}$$

kde pro $0 \leqq x < 1$ je

$$\alpha(x) = x^2 + \frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})^2}{1 - x^2}\,, \quad \gamma(x) = 1 - x^2 - \sqrt{2}x\, \beta(x)\,, \tag{20}$$

$$\beta(x) = x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 + \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)(1 - \sqrt{1 - x^2})\,.$$

Poznámka. Budeme v dalším potřebovat, že $\dfrac{1}{x^2}\alpha(x)$ a $\beta(x)$ jsou rostoucí funkce v $(0, 1)$, $\gamma(x)$ je klesající funkce v $(0, 1)$.

Důkaz. Z předešlého lemmatu (4,1) vyplývá z $c(A) > 0$ existence antisymetrické matice S, pro niž $[D, S] = A - D$ a zároveň odhad $N(S) \leqq \sigma$. Protože $\sigma < 1$, bude podle (3,5) matice $E + S^2$ positivně definitní a matice $U = S + \sqrt{E + S^2}$ unitární. Z téže věty vyplývá odhad

$$Q^*(\varphi(A)) \leqq Q^*(A)\, \alpha(h(S))\,, \tag{21}$$

neboť zřejmě $Q(B) = Q^*(A)$. Protože však $\alpha(x)$ je rostoucí funkcí v $(0,1)$ a podle (17) platí $h(S) \leqq N(S) \leqq \sigma$, dostáváme ihned (18).

Abychom dokázali odhad pro $c(\varphi(A))$, pišme $\varphi(A)$ podle (14) ve tvaru $\varphi(A) = D - \frac{1}{2}[B, S] + Z$ a označme na okamžik F matici $\varphi(A)$ a proveďme v ní stejné dělení na bloky jako v matici A. Nechť nyní $i \neq j$ a ξ_i náleží spektru matice F_{ii} a ξ_j spektru matice F_{jj}. Mějme ještě body x_i a x_j, které náleží spektrům matic A_{ii} a A_{jj}. Je potom

$$|\xi_i - \xi_j| \geqq c(A) - |\xi_i - x_i| - |\xi_j - x_j|\,.$$

Zřejmě

$$|\xi_i - x_i| \leqq N(F_{ii} - A_{ii})\,, \quad |\xi_i - x_j| \leqq N(F_{jj} - A_{jj})\,;$$

je dále

$$N(F_{ii} - A_{ii}) \leqq N(Z_{ii}) + \tfrac{1}{2}\sum_{k \neq i} N(B_{ik})\, N(S_{ki}) + \tfrac{1}{2}\sum_{k \neq i} N(S_{ik})\, N(B_{ki}) =$$

$$= N(Z_{ii}) + \sum_{k \neq i} N(B_{ik})\, N(S_{ik}),$$

odkud

$$N(F_{ii} - A_{ii}) + N(F_{jj} - A_{jj}) \leqq$$

$$\leqq N(Z_{ii}) + N(Z_{jj}) + \sum_{k \neq i} N(B_{ik})\, N(S_{ki}) + \sum_{k \neq j} N(B_{jk})\, N(S_{kj}).$$

Uvážíme-li, že

$$N(Z_{ii}) + N(Z_{jj}) \leqq \sqrt{2}\sqrt{N^2(Z_{ii}) + N^2(Z_{jj})} \leqq \sqrt{2}N(Z)$$

a použijeme-li na zbývající součet Schwarzovy nerovnosti, dostaneme odhad

$$N(F_{ii} - A_{ii}) + N(F_{jj} - A_{jj}) \leqq$$

$$\leqq \sqrt{2}N(Z) + (\sum_k Q(B_{ik}) + \sum_k Q(B_{jk}))^{\frac{1}{2}} (\sum_k Q(S_{ki}) + \sum_k Q(S_{kj}))^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{2}N(Z) + N(B)\, N(S) \leqq \sqrt{2}N(Z) + \frac{Q^*(A)}{c(A)}.$$

Odtud

$$c(\varphi(A)) \geqq c(A) - \sqrt{2}N(Z) - \frac{Q^*(A)}{c(A)} = c(A)\left(1 - \sqrt{2}\,\frac{N(Z)}{c(A)} - \sigma^2\right),$$

takže podle (15) je

$$c(\varphi(A)) \geqq c(A)(1 - \sigma^2 - \sqrt{2}\sigma\beta(h(S))) \geqq c(A)(1 - \sigma^2 - \sqrt{2}\sigma\beta(\sigma)),$$

protože $\beta(x)$ je rostoucí v $(0, 1)$ a platí $h(S) \leqq N(S) \leqq \sigma$ podle (17).

Všimněme si nyní blíže funkcí α a γ. Poněvadž funkce α je rostoucí v $\langle 0, 1)$ a funkce γ klesající v $\langle 0, 1)$, při čemž $\gamma(0) = 1$, $\lim_{x \to 1-} \gamma(x) = -\infty$, existuje v intervalu $(0, 1)$ jediný nulový bod ω funkce γ a přitom je $\gamma(x) > 0$ pro $x \in (0, \omega)$.

(4,3) *V intervalu* $(0, \omega)$ *existuje právě jedno číslo* ξ *takové, že* $\dfrac{\alpha^2(\xi)}{\gamma^2(\xi)} = 1$. *Číslo* ξ *má tuto vlastnost:*

Nechť A *je symetrická matice, pro kterou* $c(A) > 0$ *a* $0 < \dfrac{\sqrt{Q^*(A)}}{c(A)} \leqq \xi$. *Potom existuje* $\varphi(A)$ *a platí* $c(\varphi(A)) > 0$ *a*

$$\frac{\sqrt{Q^*(\varphi(A))}}{c(\varphi(A))} < \frac{1}{\xi}\left(\frac{\sqrt{Q^*(A)}}{c(A)}\right)^2 \leqq \frac{\sqrt{Q^*(A)}}{c(A)}. \tag{22}$$

Důkaz. Funkce $g(x) = \dfrac{\alpha(x)}{\gamma^2(x)}$ je v intervalu $\langle 0, \omega)$ rostoucí, při čemž $g(0) =$

$= 0$, $\lim_{x \to \omega -} g(x) = \infty$. Odtud ihned plyne existence a jednoznačnost čísla $\xi \in (0, \omega)$, pro něž $g(\xi) = 1$.

Protože $c(A) > 0$ a $\frac{\sqrt{Q^*(A)}}{c(A)} \leqq \xi < 1$, má podle (3,2) smysl matice $\varphi(A)$. Podle (18) a (19) platí

$$Q^*(\varphi(A)) \leqq Q^*(A)\, \alpha(\sigma)\,, \quad c(\varphi(A)) \geqq c(A)\, \gamma(\sigma)\,.$$

Odtud plyne $\frac{\sqrt{Q^*(\varphi(A))}}{c(\varphi(A))} \leqq \sigma \frac{\sqrt{\alpha(\sigma)}}{\gamma(\sigma)}$. Vzhledem k tomu, že $\frac{\alpha(x)}{x^2}$ je rostoucí v $(0, 1)$ a $\gamma(x)$ kladná a klesající v $(0, \omega)$, plyne odtud

$$\frac{\sqrt{Q^*(\varphi(A))}}{c(\varphi(A))} \leqq \sigma^2 \frac{\sqrt{\alpha(\sigma)}}{\sigma\, \gamma(\sigma)} \leqq \sigma^2 \frac{\sqrt{\alpha(\xi)}}{\xi\, \gamma(\xi)} = \frac{1}{\xi} \sigma^2 \leqq \sigma\,.$$

Dokázali jsme tedy nerovnost

$$\frac{\sqrt{Q^*(\varphi(A))}}{c(\varphi(A))} \leqq \frac{1}{\xi} \left(\frac{\sqrt{Q^*(A)}}{c(A)} \right)^2.$$

Předpokládejme, že zde nastane rovnost. Potom nastane rovnost také v (18); platí tedy podle (21)

$$Q^*(A)\, \alpha(\sigma) = Q^*(\varphi(A)) \leqq Q^*(A)\, \alpha(h(S))\,.$$

Protože $Q^*(A) > 0$, plyne odtud $\alpha(\sigma) \leqq \alpha(h(S)) \leqq \alpha(\sigma)$, takže $\sigma = h(S)$. Je tedy $N(S) = \sigma = h(S)$, avšak podle poznámky (1,8) nastane v nerovnosti $h(S) \leqq N(S)$ rovnost, právě když matice S má hodnost nejvýše 1. Je tedy $S = 0$, tedy $B = [D, S] = 0$, takže $Q^*(A) = Q(B) = 0$, což je spor.

(4,4) *Pro číslo ξ platí nerovnosti*

$$0{,}47172 < \xi < 0{,}47173\,, \quad 0{,}22252 < \xi^2 < 0{,}22253\,.$$

Důkaz se provede přímým výpočtem.

(4,5) Věta. *Nechť A je symetrická matice, pro kterou (při určitém dělení na bloky) platí*

$$c(A) > 0\,, \quad \sigma = \frac{\sqrt{Q^*(A)}}{c(A)} \leqq \xi\,.$$

Potom pro každé přirozené k má smysl matice $\varphi^k(A)$, posloupnost $\varphi^k(A)$ konverguje k matici L, unitárně podobné matici A, a platí:

1° $Q^*(L) = 0$;

2° $Q^*(\varphi^k(A)) \leqq Q^*(A)\, \varrho^k \mu^{2^k - 1}$, *kde* $\varrho = \alpha(\xi)$ ($\doteq 0{,}24051$), $\mu = \frac{\sigma}{\xi}$;

3° *je-li* $\varphi^k(A) = U_k\, \varphi^{k-1}(A)\, U_k^*$, *kde* U_k *jsou unitární matice z* (4,2), *potom matice* $U = V^*$, $V = U_1^* U_2^* \dots U_m^* \dots$ *existuje, je unitární a* $L = UAU^*$;

4° *pro* $m \geqq 1$ *platí*

$$N(U_1^* U_2^* \dots U_m^* - U^*) \leqq \frac{\sigma_{m+1}(1 + \sigma_{m+1})}{\xi - \sigma_{m+1}}\, \xi\,,$$

kde

$$\sigma_{m+1} = \frac{\sqrt{Q^*(\varphi^{m+1}(A))}}{c(\varphi^{m+1}(A))} \leqq \xi \left(\frac{\sigma_1}{\xi}\right)^{2m}.$$

Poznámka. Operace $\varphi(A)$ přiřazuje matici A matici tvaru UAU^*, kde však matice U závisí na A. Je tedy např. $\varphi^2(A) = \varphi(A_1)$, kdež $A_1 = \varphi(A)$, takže $\varphi^2(A) = \varphi(A_1) = U_1 A_1 U_1^* = U_1 U A U^* U_1^*$ atd.

Důkaz. Podle věty (4,3) existují matice $\varphi^k(A)$, tedy také antisymetrické matice S_k, pro něž $[D(\varphi^k(A)), S_k] = \varphi^k(A) - D(\varphi^k(A))$, a rovněž unitární matice $U_k = S_k + \sqrt{E + S_k^2}$. Podle (4,1) je

$$N(S_k) \leqq \sigma_k = \frac{\sqrt{Q^*(\varphi^k(A))}}{c(\varphi^k(A))} < 1\,,$$

takže

$$(23)\quad N(U_k - E) = N(S_k + \sqrt{E + S_k^2} - E) \leqq N(S_k) + N(\sqrt{E + S_k^2} - E) \leqq$$
$$\leqq N(S_k) + \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| [N(S_k)]^{2i} \leqq N(S_k) + [N(S_k)]^2 \leqq \sigma_k + \sigma_k^2\,.$$

Indukcí se však z (22) snadno dokáže, že pro $p \geqq 0$, $q \geqq 0$ platí

$$(24)\qquad \sigma_{p+q} \leqq \xi \left(\frac{\sigma_p}{\xi}\right)^{2^q}.$$

Odtud $N(U_k - E) \leqq 2\sigma_k \leqq 2\xi \left(\frac{\sigma_1}{\xi}\right)^{2^{k-1}}$. Protože podle (22) je $\frac{\sigma_1}{\xi} < 1$, konverguje řada $\sum_{k=1}^{\infty} N(U_k - E)$, tj. podle (1,7) konverguje nekonečný součin $U_1^* U_2^* \dots$ k unitární matici V.

Nyní pro $m \geqq 1$ podle (1,6), (23) a (24) je

$$N(U_1^* U_2^* \dots U_m^* - V) \leqq \sum_{i=m+1}^{\infty} N(U_i - E) \leqq$$
$$\leqq \sum_{i=m+1}^{\infty} \sigma_i(1 + \sigma_i) \leqq \sigma_{m+1}(1 + \sigma_{m+1}) \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{\sigma_i}{\sigma_{m+1}} \leqq$$
$$\leqq \sigma_{m+1}(1 + \sigma_{m+1}) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma_{m+1}}{\xi}\right)^{2^j - 1} \leqq \sigma_{m+1}(1 + \sigma_{m+1}) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma_{m+1}}{\xi}\right)^{j} =$$
$$= \frac{\sigma_{m+1}(1 + \sigma_{m+1})}{\xi - \sigma_{m+1}}\, \xi\,.$$

Tím je dokázáno 4° a zbytek v 4° plyne z (24).

Nyní dokážeme indukcí 2°. Pro $k = 1$ platí 2° podle (18). Poněvadž $\frac{\alpha(x)}{x^2}$ je rostoucí pro $0 < x < 1$, platí podle (18), (24) a indukčního předpokladu

$$Q^*(\varphi^k(A)) \leqq Q^*(\varphi^{k-1}(A))\,\alpha(\sigma_{k-1}) \leqq Q^*(A)\varrho^{k-1}\,\mu^{2^{k-1}-1}\,\alpha(\sigma_{k-1}) \leqq$$

$$\leqq Q^*(A)\,\varrho^{k-1}\mu^{2^{k-1}-1}\left(\frac{\xi^2\,\alpha(\sigma_{k-1})}{\sigma_{k-1}^2}\right)\left(\frac{\sigma_{k-1}}{\xi}\right)^2 \leqq$$

$$\leqq Q^*(A)\,\varrho^{k-1}\mu^{2^{k-1}-1}\left(\frac{\xi^2\,\alpha(\xi)}{\xi^2}\right)\left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{2^{k-1}} = Q^*(A)\,\varrho^k\mu^{2^k-1}\,.$$

Tím je 2° dokázáno.

Označme nyní $U = V^*$, $L = UAU^*$, $V_k = U_1^*U_2^* \dots U_k^*$ pro $k = 1, 2, \dots$ Protože $\varphi^k(A) = V_k^*AV_k$ a $V_k^* \to U$ pro $k \to \infty$, platí $\varphi^k(A) \to L$, tj. $Q^*[\varphi^k(A)] \to Q^*(L)$. Avšak podle 2° $Q^*[\varphi^k(A)] \to 0$, tj. platí i 1° a 3° a věta je dokázána.

5. Závěr. V tomto odstavci uvedeme několik poznámek k podané metodě a porovnáme ji se známými metodami.

Především je nutno říci, že naše metoda je v podstatě lokální, tj. umožňuje rychle zpřesnit výsledek, jakmile známe matici, která je už výsledku blízká (a známe ještě příslušné unitární matice, které původní matici v tuto matici transformují). Zde se nabízí srovnání se známou Newtonovou metodou řešení algebraických rovnic, a to tím spíše, že obě metody velmi rychle konvergují (pro naši metodu to plyne z (4,5)). Nezabýváme se zde metodami, jak se z obecné matice přejde v matici, hodící se již pro tuto metodu. Takových metod je známo několik, např. metoda rotací, při níž se matice transformuje unitárními maticemi vždy s jedinou dvojicí nediagonálních nenulových prvků (viz např. [2], str. 160—162).

Při aplikaci uvedené metody je nutné nejprve volit rozklad matice A na bloky. Nejdůležitější případ ovšem je, jsou-li diagonální bloky přímo rovny diagonálním prvkům matice A. V tomto případě je výpočet matice S velmi jednoduchý; výpočet matice $\sqrt{E + S^2}$ provedeme buď pomocí rozvoje v mocninnou řadu nebo iterací. Jsou-li některé diagonální prvky matice A navzájem blízké (tj. číslo $c(A)$ by bylo malé), shrneme příslušné řádky a sloupce do jediného bloku, čímž se číslo $c(A)$ zvětší. Podanou metodou najdeme pak skupiny vlastních čísel, odpovídající diagonálním blokům, podrobněji řečeno, najdeme matice menšího řádu, jejichž vlastní čísla jsou zároveň vlastní čísla dané matice. Poněvadž řády těchto menších matic (řády bloků) již zpravidla nebudou velké, lze takto např. najít vlastní čísla matice, která se od diagonální matice příliš neliší a která nemá všechny diagonální prvky zhruba stejně velké.

Metody lze však použít i k výpočtu jednoho vlastního čísla a příslušného vlastního vektoru, jsou-li totiž v některém řádku nediagonální prvky dosti malé. Stačí totiž zvolit rozdělení, při kterém diagonální prvek tohoto řádku