Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

RECENSE

Otakar Zich a kol.: MODERNÍ LOGIKA, Orbis Praha 1958, stran 241, cena 10,—Kčs.

Knížka je rozdělena do osmi kapitol zpracovaných různými autory. Předmluvu napsal vedoucí kolektivu prof. dr. O. ZICH, kapitoly I, III, V a VI napsal O. WEINBERGER, kapitolu II M. MLEZIVA, kapitolu IV K. BERKA, kapitolu VII M. JAURIS a kapitolu VIII P. MATERNA.

První kapitola (str. 11—28) o „Základních pojmech teorie vyjadřování" je úvodní kapitolou, ve které jsou uvedeny některé druhy jazyků a jejich funkce při sdělování našich poznatků. Na mnoha příkladech jsou zde objasňovány jednotlivé základní pojmy logické, podrobněji studované až v dalších kapitolách. Stručně je pojednáno o formální povaze logiky a o metajazyku. V druhé kapitole (str. 29—75) je systematicky probrán výrokový kalkul. Na řadě příkladů je popsána jeho tabulková výstavba a naznačena deduktivní výstavba a zavedena konjunktivní normální forma. V závěru je poznámka o aplikacích výrokového kalkulu v teorii elektrických obvodů a o vícehodnotových logikách. Ve třetí kapitole (str. 76—92) je podrobně objasněn pojem n-místného predikátu a n-místné výrokové funkce, je pojednáno o kvantorech a jejich významu a nakonec je jednomístných výrokových funkcí využito k popisu vztahů mezi soudy logického čtverce. Čtvrtá kapitola (str. 93—127) je věnována třídnímu kalkulu, tj. z větší části elementům teorie množin a množinové Booleovy algebry vyloženým z naivního hlediska. V samostatné poznámce je popsána souvislost mezi třídním a výrokovým kalkulem. V závěru je třídního kalkulu využito k popisu a zhodnocení kategorických sylogismů. Pátá kapitola (str. 128—141) o „Logice relací" pojednává v podstatě o elementech teorie binárních relací a některých jejich základních vlastnostech. V šesté kapitole (str. 142—148) s názvem „Logika funkcí" jsou uvedena jenom základní pravidla odvozování ve funkčním kalkulu. Sedmá kapitola (str. 149—204) je věnována axiomatické metodě, která je, s přihlédnutím k formalisaci, aplikována při výstavbě výrokového, třídního a funkčního kalkulu. Jako příklad axiomatisace mimo logiku je popsána Peanova axiomatika přirozených čísel. V závěru je pojednáno o bezespornosti, úplnosti a nezávislosti uvedených axiomatických systémů. Poslední, osmá kapitola (str. 205—220) pojednává o definicích. Vedle obvyklých typů definic jako jsou běžné (tj. nominální) definice, definice abstrakcí, definice rekurentní a implicitní (tj. axiomatické) definuje se neobvyklý pojem definice kontextuální a nekontextuální takto: „Takovou definici, jejíž definiendum obsahuje vedle definované konstanty ještě jiné výrazy (nejčastěji proměnné), můžeme nejvýhodněji nazvat kontextuální, protože příslušná konstanta není definována isolovaně, sama o sobě, nýbrž v určité souvislosti, v určitém kontextu" (209). Samostatně se uvádí ještě definice syntetická a analytická, o nichž se říká, že „prvá má metasystémový způsob zápisu (např. pomocí znaku $=_{df}$), kdežto druhá je formulí daného systému" (214). Každá kapitola je zakončena cvičeními.

Kniha je doplněna (str. 221—242) seznamem nejpoužívanějších odvoditelných formulí, encyklopedickým heslem „moderní logika", zajímavými údaji „O autorech", seznamem literatury, jmenným a věcným rejstříkem a obsahem.

Knížka tedy (s výjimkou kapitoly VIII) podává přehled o některých oborech v celém světě zařazovaných do elementů matematické logiky, ale přesto nese název „Moderní logika". Tento název je výrazem jistých rozpaků nad souvislostmi mezi matematikou a logikou. Čtenář se např. dovídá o moderní logice, „která byla až do třicátých let našeho století pěstována jako teoretická disciplina hlavně v souvislosti s matematikou" (5), ale nedoví se již, že tento stav prakticky na celém světě trvá dodnes. Nebo se píše, že moderní logika „došla zejména v posledních letech velmi významných aplikací ve vědách a v technice" (5) nebo dokonce „Dnes nalézá moderní logika tak bohaté pole aplikací, že by bylo velmi odvážné chtít je nějak omezit" (229), ale nepíše se konkretně, že mimomatematické (a mimologické) aplikace má z moderní logiky jenom výrokový kalkul a to v teorii elektrických obvodů (viz kap. II) a trochu v matematické linguistice v souvislosti se strojovými překlady a snad ještě někde jinde, takže ostatní obory moderní logiky mají zatím stále své významné aplikace právě jenom v matematice (a logice) nebo skrze matematiku (např. prostřednictvím teorie množin). Ostatně moderní logika sama je aplikací matematiky na zkoumání logických zákonitostí a to v tom smyslu, že matematici vybudovali teorii moderní logiky obdobně jako se v matematice budují rozmanité speciálnější teorie pro účely aplikací. Není tedy zatím důvodu nahrazovat termín „matematická logika" termínem jiným a to tím spíše, když „Hlubší výklad moderní logiky se neobejde bez znalostí teorie čísel, teorie množin, teorie grup a ještě jiných partií matematiky" (7). Konečně se zdá být zbytečným rozlišování tzv. logické a matematické techniky a při tom zdůrazňování „Tento cíl (tj. zvládnutí logické techniky, pozn. rec.), jehož praktický význam nemůže být dost zdůrazněn, sledoval kolektiv autorů záměrně" (9).

„Knížka si totiž klade za úkol vyplnit jistou mezeru v naší dosavadní literatuře, jež postrádá takový úvod, který by naučil čtenáře zejména logické technice" (9). Tato mezera v naší matematicko-logické literatuře skutečně existovala, neboť jedinou úvodní a populární publikací z tohoto oboru je „Úvod do filosofie matematiky" od O. Zicha z roku 1947. To však znamená, že po této knížce sáhnou nejen nematematici, ale i matematici a studující matematiky navzdory tomu, že „Knížka není napsána pro odborníky v matematice, tím méně pro odborníky v matematické logice" (7). V každém případě autoři napsali pokud možno nematematický úvod do oboru s velmi náročnými matematickými předpoklady a aplikacemi. To byl ale úkol, jako ostatně každá popularisace matematiky (patrně proto u nás tak vzácná), velice nesnadný a obtížný. Např. veliké nebezpečí je skryto v nematematických příkladech z denního života, které autoři musí vyhledávat zejména tehdy, když se jimi objasňují pojmy mající své významné aplikace (např. v kap. III—VI) právě jenom v matematice. Čtenáři-nematematikovi, kterému je knížka původně určena, se totiž při čtení příslušných míst nemohou vybavit bohaté matematické teorie, které by zabránily vzniku pochybností o ceně a významu jednotlivých pojmů nebo označení. A je-li čtenář kritický, snadno u něho vznikne dojem, že celý přínos moderní logiky je jenom v tom, že přepisuje věci dobře známé a jednoduché do složité symboliky, dojem o záměrných učenostech a bezcenném hračkářství. To je ovšem dojem nesprávný a škodlivý, který nevznikne nikde, kde se uvádějí konkrétní matematické aplikace nebo alespoň vhodné matematické příklady. A nelze říci, že to autoři nečiní. Při formulaci matematických příkladů je však někdy patrná jistá nezkušenost. Např. nejsou příliš vhodnými obraty, jako „Vztah ‚býti menší' není definován pro komplexní čísla, neboť ze dvou různých komplexních čísel není vždy jedno menší" (78), nebo se hovoří o „matematické algebře" (98) na rozdíl od algebry logiky, nebo „Obdobně jako v matematice platí dále zákony komutativní" (120) či „matematické sčítání" (120) apod. K nedorozumění může vést tato formulace: „Při vzájemně jednoznačném přiřazení tedy musí být dáno: 1. pravidlo, které určuje každému prvku třídy a přiřazený prvek z třídy b; 2. pravidlo, které určuje každému prvku třídy b přiřazený prvek z třídy a" (140) nebo obrat „pro srovnání nekonečných tříd lze použít jen ekvivalence ve shora definovaném smyslu, nikoli však rovnosti počtu prvků" (141). Je třeba při této příležitosti litovat, že knížka nebyla sepsána ve spolupráci s matematiky příp. s matematickými logiky, nebo že nebyla matematiky alespoň redigována. Je také např. škoda, že kapitoly III a IV nebyly zpracovány přímo matematicky s použitím běžné množinové terminologie. Proč v elementárním úvodu zavádět termín „třídy", když máme termín „množiny"? To bude patrně otázka, kterou položí matematik po přečtení těchto kapitol.

V popularisační, úvodní a učebnicové matematické literatuře je nejdůležitější otázkou metoda výkladu a zpracování látky. Metoda výkladu v této knížce je volena správně. Záleží v postupném objasňování probírané látky (např. s některými pojmy výrokového kalkulu seznámí se čtenář již v úvodní kapitole I, podrobně je výrokový kalkul probrán v kapitole II a konečně další doplňky jsou ještě v kapitole VII) a v předmluvě je označena jako „frakcionovaná destilace" (6). Při zpracování někrerých kapitol se však projevuje snaha zavádět zbytečně mnoho nových termínů i snaha zacházet do podrobností a tím utápět výsledky a pojmy významné v množství jiných ale podružných (což je takřka všeobecný nedostatek poválečné vysokoškolské učebnicové literatury z matematiky). Příkladem jsou některé vzorce a názvy jako „zákony agresivnosti a neutrálnosti" (108) nebo „zákony expanse a absorpce" (114) nebo termíny „poloreflexivní, polosymetrický a polotransitivní" (135, 136). Rozhodně je také zbytečné zavádět více termínů pro jediný pojem, jako je tomu v již vzpomenuté definici „jednoznačného přiřazení, ...zobrazení, ...funkce" (140). Ne vždy se volí pokud možno jednoduché a názorné způsoby zavádění nových pojmů. Např. velmi názorný pojem množinové inkluse se zavádí takto: „je to vlastnost společná všem uspořádaným dvojicím tříd f, g (v tomto pořadí), pro jejichž prvky x platí (x) $[x \in f \rightarrow x \in g]$". Čtenář je nadto povzbuzen poznámkou, že „Toto vymezení není zcela přesné, pro účely této knížky však musí postačovat" (100). Teprve dodatečně „jako důsledek našeho vymezení vztahu $\subset$" (101) se uvádí obvyklý způsob podmínky. Zde a ještě na jiných místech (zejména v kap. VII) jsou na čtenáře, jemuž je knížka určena, kladeny značné nároky. Když se však nějaký pojem zavede, např. uvedený pojem množinové inkluse a např. pojem „rozsahu dvoumístného vztahu" (131), má se ho také co nejvíce užívat, tedy např. definovat stručně inklusi vztahů jako inklusi jejich rozsahů (viz 132).

Nakonec je třeba si všimnout slohu a způsobů vyjadřování. V úvodní knížce, jejímiž autory jsou vesměs logikové, by se neměly vyskytovat formulace obrazné, nejasné nebo formulace skýtající možnost nesprávného výkladu. Např. „Chápeme-li daný jednomístný predikát jako shrnutí skupiny vlastností" (94), nebo „je to jaksi souhrn všech objektů, o kterých vztah jedná, o kterých něco vypovídá" (131). Proč říkat „je méně důležité zachovat pořadí kvantifikátorů (téhož typu, pozn. rec.)" (147), když na tom pořadí nezáleží vůbec, nebo proč říkat „Příklady takových výrazů označujících třídy jsou názvy: stromy, města, barvy, přirozená čísla, ..." (20), a uvést tím čtenáře do rozpaků nad pojmy či názvy strom, město, barva atd. Je ostatně trochu podivné, že o pojmu se v celé knížce vůbec nehovoří až jen v kapitole VIII. V kapitole IV při aplikaci teorie tříd na sylogistiku se rovněž s pojmy pracuje, ale nikde není např. jasně řečeno, že rozsah pojmu je právě jistou třídou předmětů. Říká se na jedné straně, že „vztahový znak je vlastně totéž co vícemístný predikát" (130), ale na druhé straně se rozlišují termíny „relace" a „relátor" (129) apod. Čtenáři se studium knížky jistě ztěžuje, když se na jiném místě v souvislosti s rekurentní definicí vlastnosti V uvádí příklad: „Vlastností V budiž konstanta $+$, která v matematice ze dvou čísel vytváří třetí (‚součet')" (211) a jinde zase „Budeme používat další predikátové konstanty $+$ takové, že $+xyz$ znamená ‚číslo x je rovno součtu čísel y a z' ..., $+$ je predikát použitý k vyjádření určitého vztahu mezi třemi individui" (191). Zcela nesrozumitelné jsou formulace „Z hlediska logiky musíme lišit dva významy, které spojujeme s tímto slovem (se slovem vztah, pozn. rec.): a) Vztahem můžeme rozumět určitou skutečnost... b) Vztahem můžeme rozumět určitou myšlenkovou strukturu..."

(128), nebo „Pojem relace můžeme nejlépe osvětlit tím, že uvedeme strukturní součásti vztahu a že budeme charakterisovat tyto jeho stavební elementy. Vztah se skládá: 1. z členů relace, 2. z relačního spojení (vztahového znaku, relátoru)“ a na konci téže strany „Slovní vazba nebo symbol naznačující, o jaké vztahové spojení mezi členy relace jde, se nazývá vztahový znak (= relátor)“ (129). Proč nakonec uvádět čtenáře do rozpaků příkladem výroku „Kdo úmyslně usmrtí člena vlády, bude potrestán smrtí... Toto tvrzení je pravdivé...“ (89) nebo příkladem vadného výroku „Evangelíci jsou křesťanskou církví“ (101)? Souhrnně je třeba konstatovat, že zpracování různých kapitol je značně různorodé; nejsoustavněji a při tom úsporně jsou zpracovány kapitoly II a VII, jakkoliv VII. kapitola je nejnáročnější.

Tiskové chyby: 74^{16} má být $[(p \to q) \to p] \to p$; 77^{20} má být $< (a, b)$; 88^{1} má být $(p \equiv \equiv q) \equiv (\overline{p} \equiv \overline{q})$; 133^{4} má být $K\ a < b$ zní inversní vztah $b < a$ (místo $b > a$); 166^{6} má být $\overline{p}$ znamená zařízení...; 166^{14} má být když vstupem zařízení...; 218_{15} má být $R(x, y)$ místo $x\ R(x, y)$.

Nakonec je třeba ocenit iniciativu kolektivu autorů, že se podjali obtížného úkolu a vydali přístupně napsanou knížku, v níž informují širokou čtenářskou obec o základních otázkách a metodách moderní logiky. Jejich iniciativu je nutno ocenit tím více, že logika, zdá se už tradičně, je u nás stále nedostatečně pěstována i podporována.

Karel Čulík, Brno

Dvě knihy o teorii prvočísel. *K. Prachar*: PRIMZAHLVERTEILUNG. Grundlehren der math. Wissenschaften sv. 91. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957. Stran X + 415. — *W. Specht*: ELEMENTARE BEWEISE DER PRIMZAHLSÄTZE. Hochschulbücher für Mathematik sv. 30. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956. Stran 78.

Pracharova kniha je bohatá monografie o dnešním stavu teorie. Knížka Spechtova je monothematická — jak říká už její titul — a velmi elementárně napsána. Čtenář, který se zajímá jen o Spechtovu knížku, může si z následující recense přečíst jen úvod až do vzorce (5), dále to, co říkám o kap. III a IV Pracharovy knihy a potom začít s četbou recense knížky Spechtovy.

První známý důkaz věty, že existuje nekonečně mnoho prvočísel, podal EUKLEIDES. Označíme-li tedy znakem $\pi(x)$ počet prvočísel nejvýše rovných číslu x, praví Eukleidova věta, že $\pi(x) \to +\infty$ pro $x \to +\infty$. Vzniká nyní otázka, jak hustá jsou prvočísla, tj. jak rychle roste $\pi(x)$ s rostoucím x. „Řádově“ určil velikost funkce $\pi(x)$ před více než 100 lety Čebyšev, který dokázal elementárním způsobem toto: existují kladná čísla c_1, c_2 tak, že je

$$c_2 \frac{x}{\lg x} < \pi(x) < c_1 \frac{x}{\lg x} \quad \text{pro} \quad x > 2\,. \tag{1}$$

Dále dokázal: má-li podíl $\pi(x) : \dfrac{x}{\lg x}$ limitu (pro $x \to +\infty$), je tato limita nutně rovna jedné. Ale důkaz existence této limity, tj. důkaz vzorce

$$\pi(x) = \frac{x}{\lg x} + o\left(\frac{x}{\lg x}\right) \tag{2}$$

nechal na sebe čekat ještě několik desítiletí a současně si vyžádal — aspoň z počátku — hlubokých (poměrně) prostředků z teorie analytických funkcí. Již EULER si povšiml, že funkce $\zeta(s)$ komplexní proměnné $s = \sigma + it$, definovaná v polorovině $\sigma > 1$ vzorcem

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}\,, \tag{3}$$

souvisí s prvočísly (jak ukazuje poslední součin, v němž se násobí přes všechna prvočísla p). RIEMANN ukázal, že studium této funkce metodami teorie analytických funkcí[1]) vede k hlubokým výsledkům o prvočíslech. Rovnici (2) však Riemann nedokázal;[2]) teprve teorie celistvých funkcí konečného řádu, vytvořená HADAMARDEM, umožnila Hadamardovi a DE LA VALLÉE-POUSSINOVI dokázat (současně, v r. 1896) rovnici (2). Současně se ukázalo, že lepší aproximaci funkce $\pi(x)$ než $\frac{x}{\lg x}$ dává funkce $\int_2^x \frac{dt}{\lg t}$; tak de la Vallée-Poussin dokázal toto: Položíme-li

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\lg t} + R(x)\,, \tag{4}$$

existují kladná čísla c_3, c_4, c_5 tak, že

$$|R(x)| < c_3 x e^{-c_4\sqrt{\lg x}} \quad \text{pro} \quad x > c_5\,, \tag{5}$$

takže $R(x)$ je nižšího řádu než $x(\lg x)^{-n}$ pro libovolně velké n; naproti tomu nebyl dosud dokázán odhad $R(x) = O(x^{1-\varepsilon})$ pro žádné $\varepsilon > 0$.

Důležitým mezníkem v rozvoji analytické teorie prvočísel je dvojdílná kniha E. LANDAUA „Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen" (1909), která podává snad úplný stav teorie v oné době. Landau také podstatně zjednodušil důkaz vzorce (4), (5). Kdežto Hadamard užíval toho, že funkci $\zeta(s)$ lze analyticky pokračovat do celé roviny (s výjimkou jednoduchého pólu v bodě $s = 1$)[3]) a budoval svůj důkaz na teorii celistvých funkcí konečného řádu, ukazuje Landau, že se při důkazu lze omezit na prostředky daleko elementárnější a vyšetřovat funkci $\zeta(s)$ pouze v blízkosti přímky $\sigma = 1$.

Po vydání Landauovy knihy nastal velký rozvoj této nauky, který se jeví též v Landauově knize „Vorlesungen über Zahlentheorie" z r. 1927 i v četných monografiích, vyšlých do r. 1947. O těchto knihách jsem dosti obšírně psal v tomto časopise[4]) a proto budu psát o obsahu Pracharovy knihy stručněji, hlavně o těch partiích, které jsou obsaženy již v knihách mnou recensovaných. Ale thematika těchto knih je většinou omezena jen na některé části analytické teorie prvočísel, a mimoto bylo v posledním desítiletí dosaženo dalších podstatných výsledků. Bylo tedy na čase shrnout hlavní metody a výsledky do systematické monografie, která si ovšem při dnešním bohatství příslušné literatury nemůže činit nároky na takovou úplnost jako před padesáti lety Landauův Handbuch. Této obtížné úlohy se ujal Prachar a zhostil se jí s plným zdarem. Poznamenejme ihned, že teorie prvočísel, ač většinou značně složitá a v některých partiích dokonce velmi obtížná, nevyžaduje skoro žádných speciálních znalostí. Mimo to Prachar v čtyřicetistránkovém *Dodatku* uvádí a velkou většinou i dokazuje některé méně běžné věty, kterých se v textu užívá. Proto je kniha plně přístupná čtenáři, který ovládá běžný kurs diferenciálního a integrálního počtu a teorie analytických funkcí, jakož i nejjednodušší počátky teorie čísel. Vyžaduje se ovšem jistá zběhlost v matematickém, především kvantitativním uvažování (téměř nepřetržitě samé odhady).

Kapitola I začíná nejjednoduššími věcmi (počínajíc Eukleidem), obsahuje důkaz nerovností (1) a další výsledky podobně elementárního rázu.

---

[1]) Riemannovi předchůdci se omezovali především na reálné s.
[2]) Ostatně ani ty výsledky, jež Riemann uvádí, nejsou u něho opatřeny úplnými důkazy.
[3]) Zde šel ve stopách Riemannových.
[4]) Viz Časopis pro pěstování matem. a fysiky *57* (1927), 62—63; *67* (1937), D 54—56; *67* (1938), D 303—306; *76* (1951), 35—65.

Kapitola II obsahuje metodu síta a její některé aplikace (s dalšími aplikacemi se setkáme v kap. V). Je známo, jak můžeme k postupnému hledání prvočísel použíti Eratosthenova síta (v kap. I ho bylo pro ilustraci použito k důkazu vztahu $\pi(x) = o(x)$). Hledáme-li přitom všechna prvočísla menší než číslo n, stačí „vyškrtat" právé násobky všech prvočísel menších než $\sqrt{n}$. Ale teprve r. 1920 ukázal norský matematik V. BRUN, že vhodnou (nesmírně důvtipnou) modifikací této v podstatě početní metody lze dosáhnout závažných obecných výsledků, do té doby nepřístupných. Prachar uvádí modifikaci Brunovy metody, pocházející od Brunova krajana A. SELBERGA. Jde o toto: Je dána konečná posloupnost přirozených čísel $n_1, n_2, \ldots, n_N$ (tato čísla nemusí být navzájem různá) a číslo $z \geqq 2$; hledá se horní odhad pro počet oněch indexů k, pro něž n_k není dělitelno žádným prvočíslem $p \leqq z$ (věta 3.1 a 3.2). Následuje několik aplikací, odvozených většinou z obecné věty 4.2, která — zdá se mně — pochází od autora knihy. Uveďme jen slavný výsledek Brunův o tzv. prvočíselných dvojčatech: Počet dvojic prvočísel p, q s rozdílem $q - p = 2$, ležících v intervalu $\langle 2, x \rangle$, je $O(x(\lg x)^{-2})$ — srovnej s (1).

Kapitola III obsahuje obvyklý analytický důkaz vzorce (2); vlastně je zde již vše připraveno i pro důkaz ostřejšího výsledku (4), (5), ale ten je pro úsporu místa vynechán, ježto se objeví v obecnějším tvaru v kap. IV. Následují některé věty obdobné a konečně slavný *elementární* důkaz formule (2), o kterém se podrobněji zmiňuji v recensi Spechtovy knížky.

Kapitola IV. Označme znakem $\pi(x; k, l)$ počet prvočísel nejvýše rovných x v aritmetické posloupnosti

$$l,\ k + l,\ 2k + l,\ 3k + l,\ \ldots \quad (0 \leqq l < k,\ (k, l) = 1)\,. \tag{6}$$

(Je-li největší společný dělitel $(k, l) > 1$, obsahuje (6) nejvýše jedno prvočíslo a proto nás tento případ nezajímá.) Analytický aparát ke zkoumání funkce $\pi(x; k, l)$ vytvořil před 120 lety DIRICHLET; místo funkce $\zeta(s)$ vystupují zde funkce Dirichletovy, definované pro $\sigma > 1$ $(s = \sigma + it)$ řadami

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}\,,$$

kde χ je tzv. charakter modulo k; počet těchto charakterů a tedy i počet Dirichletových funkcí při daném k je roven $\varphi(k)$ (tj. počtu zbytkových tříd podle modulu k nesoudělných s k). Již Dirichlet dokázal, že (6) obsahuje nekonečně mnoho prvočísel; v dalším vývoji se při *pevném* k dospělo pro $\pi(x; k, l)$ k obdobnému odhadu jako (4), (5), pouze integrál je nutno dělit číslem $\varphi(k)$. Pro různé účely je však třeba odvodit odhady platící pro $x \to + \infty$ stejnoměrně vzhledem ke k v nějakém oboru $k < f(x)$, kde $f(x)$ je nějaká funkce, rostoucí do nekonečna spolu s x. Tím vznikají nové problémy, které se nevyskytly v kapitole III, tj. pro $k = 1$; viz např. Siegelovu větu o největším reálném nulovém bodu Dirichletovy funkce s reálným charakterem.

Kapitola V obsahuje některé zajímavé věty, spočívající z velké části na metodách kap. II; uvedu jen dvě ukázky: Nechť p_i je i-té prvočíslo. Kdyby prvočísla byla velmi pravidelně rozložena, dalo by se podle (2) čekat, že $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{p_{i+1} - p_i}{\lg p_i} = 1$; není však tomu tak, nýbrž je

$$\liminf \frac{p_{i+1} - p_i}{\lg p_i} < 1\,, \quad \limsup \frac{p_{i+1} - p_i}{\lg p_i} = +\infty\,,$$

a u druhé formule je známo ještě více (Erdös).

Je-li $a > 1$ celé, mají čísla n tvaru $n = p + a^m$ (p probíhá všechna prvočísla, m všechna přirozená čísla) kladnou dolní asymptotickou hustotu[5]) (Romanov).

Kapitola VI obsahuje důkaz slavné věty Vinogradovovy: Všechna dosti velká lichá čísla jsou vyjádřitelná jako součet tří prvočísel; a dále důkaz (spočívající na Vinogradovových metodách) věty: Sudá čísla, nevyjádřitelná součtem dvou prvočísel, mají horní asymptotickou hustotu 0 (v. d. Corput, Čudakov, Estermann).

Kapitola VII se zabývá funkčně teoretickými vlastnostmi Dirichletových funkcí, speciálně tedy i funkce $\zeta(s)$. Dosud jsme se zabývali jen vlastnostmi těchto funkcí v blízkosti přímky $\sigma = 1$ a v polorovině $\sigma > 1$; zde se vyšetřují tyto funkce v celé rovině, odvozuje se funkcionální rovnice a dále řada formulí, ukazujících souvislost různých součtů, obsahujících prvočísla, s nulovými body Dirichletových funkcí, ležícími v pásu $0 < \sigma < 1$ ($s = \sigma + it$). Tyto nulové body hrály hlavní roli již v kap. III, IV. Kdyby ležely všechny na přímce $\sigma = \frac{1}{2}$ (tzv. Riemannova domněnka), zlepšily by se podstatně odhady zbytku ve vzorcích pro $\pi(x)$, $\pi(x; k, l)$.

Pokud sahají tabulky, je $R(x)$ v (4) pro $x > 2$ stále záporné (přitom se však bere trochu jiný hlavní člen, totiž tzv. „hlavní hodnota" integrálu od 0 do x). Avšak Littlewood ukázal, že existuje číslo $c_6 > 0$ a nekonečně mnoho přirozených čísel x resp. y, pro něž je

$$R(x) > c_6 \frac{\sqrt{x}}{\lg x} \lg \lg \lg x\,, \quad R(y) < -c_6 \frac{\sqrt{y}}{\lg y} \lg \lg \lg y\,.$$

Kapitola VIII obsahuje skvělou Vinogradovovu metodu pro odhad trigonometrických součtů ve zjednodušené (ale ještě velmi složité) formě, kterou jí dal Hua. Z ní lze odvodit podstatné snížení odhadu zbytku $R(x)$; k tomu se ještě autor vrací v kap. IX.

Kapitola IX. Budiž $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; budiž $N(\alpha, T, k)$ součet počtů nulových bodů všech $\varphi(k)$ Dirichletových funkcí, příslušných k modulu k, jež leží v oboru $\alpha < \sigma < 1$, $|t| \leqq T$ ($s = \sigma + it$). Kdyby pro Dirichletovy funkce platila Riemannova domněnka, bylo by $N(\alpha, T, k) = 0$; hlavním předmětem kap. IX je odhad funkce $N(\alpha, T, k)$ shora, který se zlepšuje, když α roste. Z aplikací této věty uveďme zajímavý výsledek o rozdílu dvou po sobě následujících prvočísel. Z (2) plyne: Je-li $\varepsilon > 0$, leží v intervalu $\langle x, x + \varepsilon x\rangle$ pro dosti velká x aspoň jedno prvočíslo. Zde se dokazuje, že tentýž výsledek platí pro interval $\langle x, x + x^\alpha\rangle$, je-li $\alpha > \frac{5}{8}$ (ostatně se α dá ještě zmenšit).

Kapitola X. Budiž $p_1(k, l)$ nejmenší prvočíslo v posloupnosti (6). Kdyby pro Dirichletovy funkce platila Riemannova domněnka, plynulo by z ní, že

$$p_1(k, l) < c_7 k^2 \lg^4 k \quad \text{pro} \quad k \geqq 2\,,$$

kde c_7 je číslo na k, l nezávislé (viz kap. VII). Ale dosud není nejmenší naděje, že by se podařilo v dohledné době rozhodnouti o správnosti této domněnky. Kdyby se podařilo aspoň dokázat (což však také neumíme), že nulové body všech Dirichletových funkcí leží v nějaké polorovině $\sigma < 1 - \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$, plynulo by z úvah kap. VII, že existuje číslo $c_8 > 0$ (nezávislé na k, l) tak, že

$$p_1(k, l) < k^{c_8} \quad \text{pro} \quad k \geqq 2\,. \tag{7}$$

Tím větší bylo překvapení, když se Linnikovi podařilo dokázat vzorec (7) bez užití jaké-

[5]) Dolní (horní) asymptotickou hustotou posloupnosti $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ rozumíme číslo

$$\liminf_{x \to +\infty} \frac{N(x)}{x} \quad \text{(resp. lim sup)}\,,$$

kde $N(x)$ je počet čísel $a_n \leqq x$.

koliv nedokázané domněnky. Svrchovaně obtížný důkaz Linnikův zjednodušil RODOSSKIJ; ale i tak zaujímá v Pracharově knize 40 stránek.

Jak je patrno z podaného velmi neúplného přehledu, obsahuje Pracharova kniha bohatý výběr látky, a to jak partie „klasické" nebo již monograficky zpracované, tak i věci dosud rozptýlené pouze v časopisecké literatuře — to se týká hlavně kap. II, V, IX, X. Náleží mu proto dík matematické veřejnosti za to, že tyto kapitoly učinil přístupnými širšímu kruhu zájemců. Kniha je napsána velmi pečlivě a systematicky, důkazy jsou úplně provedeny; autor se snaží drobnými poznámkami osvětlit smysl technicky obtížných míst, která se v této teorii velmi často vyskytují. Primát ve složitosti mají poslední dvě nebo tři kapitoly; to však leží v podstatě věci, a autor učinil vše, aby čtenář mohl zvládnout tyto partie, mimořádné svou obtížností i závažností. Tiskových nebo autorských nedopatření je v poměru k složitosti textu málo, a čtenář si je většinou snadno opraví. Chtěl bych závěrem upozornit na tři místa, která by čtenáři mohla působit obtíže; tyto připomínky mají ovšem smysl jen pro čtenáře, který studuje Pracharovu knihu.

A. S první obtíží se čtenář setká na str. 35—40 při důkazu Selbergovy věty 3.1. Je velmi dobře, že autor přibližuje čtenáři smysl této věty tím, že její důkaz podává geneticky. Ale chceme-li dostat bezvadný důkaz, je nutno věc ještě jednou projít a odstranit některé nesrovnalosti v důkazu i v samotném znění věty 3.1, při čemž se již, znajíce smysl věty i důkazu, můžeme omezit na pouhou verifikaci. Již v samotném znění věty není ve vzorcích (3.15) zaručeno, že se v $f_1(r)$ nevyskytnou výrazy tvaru $\infty - \infty$ ani, že se Z neobjeví ve tvaru $\frac{0}{0}$. Těmto obtížím se lze vyhnout takto: čísla r, d, d_1, d_2 omezíme a priori na dělitele čísla D (tedy na čísla, nedělitelná druhou mocninou žádného prvočísla); $f_1(r)$ definujeme součinem v (3.32) — s běžnými konvencemi pro počítání s $+\infty$; při konečném f vyjde ihned první ze vzorců (3.15).

Funkci $\omega(d)$ definujme jen pro dělitele čísla D — stačí, když ji definujeme napřed pro prvočinitele čísla D a potom klademe $\omega(1) = 1$, $\omega(p_1 p_2 \dots p_k) = \omega(p_1)\,\omega(p_2) \dots \dots \omega(p_k)$ pro $p_1 p_2 \dots p_k \mid D$ ($a \mid b$ značí: a je dělitelem čísla b). Rovnici (3.4) pojímáme jako definici čísla R_d a vynecháme požadavek $|R_d| \leqq \omega(d)$ — toho bude zapotřebí až ve větě 3.2 na str. 41. Jestliže nyní $\omega(d) \neq 0$ pro všechna $d \mid D$, je $f(d)$ konečné a verifikace věty 3.1 se snadno provede. Jestliže je $\omega(p') = 0$ pro některá $p' | D$, $\omega(p'') > 0$ pro ostatní $p'' | D$, zvolme $\varepsilon > 0$ a definujme novou funkci $\omega_\varepsilon(p'') = \omega(p'')$, $\omega_\varepsilon(p') = \varepsilon$. Pro tuto funkci ω_ε už věta 3.1 platí, a stačí nyní provésti přechod $\varepsilon \to 0$.

B. Důkaz věty 6.2 na str. 126 je správný teprve tehdy, jestliže je dokázáno, že naše ekvivalence je vztah transitivní. Buďte χ, χ_1, χ_2 charaktery s moduly resp. k, k_1, k_2; χ ekvivalentní s χ_1 i s χ_2. Máme dokázat, že χ_1 je ekvivalentní s χ_2. Budiž tedy $(a, [k_1, k_2]) = 1$. Budiž k' součin všech prvočinitelů čísla k, jež nedělí $k_1 k_2$. Potom existuje celé y tak, že $b = a + [k_1, k_2]\, y$ je nesoudělné s k', tedy nesoudělné s $k k_1 k_2$, a tedy $\chi_1(a) = \chi_1(b) = \chi(b) = \chi_2(b) = \chi_2(a)$.

C. K větě 3.1 na str. 349. Při velmi malém δ_1 je obor (3.4), (3.5) velmi „dlouhý" ve směru osy t, a proto na str. 364^{1-5} nestačí, že $L(s, \chi_0) \neq 0$ v jistém okolí bodu 1. Věta 3.1 je tedy dokázána v knize jen v tom smyslu, že se nepočítají nulové body funkce $L(s, \chi_0)$. Proto je třeba dát pozor při aplikacích této věty v kap. X.

Předně se na str. 366^{1-5} nesmíme odvolávat na χ_0; ale Siegelova věta dá dokonce $\lambda_0 = o(\log k)$ pro $k \to \infty$, což ještě budeme potřebovat. Věty 3.1 se užívá ještě (což je hlavní bod) na str. 367_{3-1} v tom, že se vynechávají v součtu členové s indexem $n \leqq \lambda_0 - \log\log k - 1$, kteří přicházejí v úvahu ovšem jen pro $\lambda_0 > \log\log k$. Musíme tedy ještě přidat tyto členy, pokud pocházejí od nulových bodů funkce $L(s, \chi_0)$, tj. od nulových bodů funkce $\zeta(s)$ (neboť v příslušných oborech $G_n^{(4)}$ je $\sigma > 0$), při čemž $|t| \leqq 1$. Příslušný příspěvek k (4.14) je pro velká k menší než

$$\left(\frac{2}{\log k}\right)^N \cdot c_{100} \cdot e^{-c_{101}\eta_0 \log k} c_{102}^N < c_{100} e^{-c_{101}\eta_0 \log k} < c_{100} e^{-\eta_0 \lambda_0}$$

(neboť $\lambda_0 = o(\log k)$), takže neruší.

Uvedu ještě několik drobností: Str. 365, vzorec (4.9): Neexistuje-li výjimečný nulový bod, je třeba klásti $\delta_0 = \frac{A_3}{\log k}$. Str. 311[11]: čti $k(k + z) \log z$ (chybí $\log z$). Str. 321, věta 3.1: Podmínku $\sigma \geqq 1 - \omega(T)$ v (3.2) nahraďme slabší podmínkou $\sigma \geqq 1 - c\,\omega(T)$ ($c > 0$). Toho je třeba u věty 3.3 (str. 323), protože teprve při této modifikaci zaručuje věta 3.1 resp. 3.2 spolu s větou 6.2 z kap. VIII existenci příslušného a ($0 < a < 1$). Str. 343_3: Exponent při M_1 je záporný. Tedy nestačí $M_1 > \log k$, $M_2 > \frac{1}{2} \log k$, nýbrž je třeba užít $M_2 > \frac{1}{2}M_1$ a potom teprve $M_1 > \log k$. Str. 357_{10}: obdobně. Str. 348, vzorec (2.72) a dále: čti $N\left(1 - \frac{\lambda}{\log k}, \ldots\right)$. Str. 359^{11-14}: Jde jen o prvočísla, jež nedělí k. Str. 362_6: Je vynechán pól v bodě $- 1 + \beta_1$, ale příslušné residuum ve výsledku neruší. Další drobná nedopatření a tiskové chyby si pozorný čtenář opraví sám.

Obrátím se nyní ke knížce Spechtově. Na rozdíl od souhrnné monografie Pracharovy soustředí se Spechtova knížka na jediný problém, totiž na elementární důkaz vzorce

$$\pi(x) = \frac{x}{\lg x} + o\left(\frac{x}{\lg x}\right) \tag{8}$$

a obdobného vzorce pro aritmetickou posloupnost (6):[6])

$$\pi(x; k, l) = \frac{1}{\varphi(k)} \frac{x}{\lg x} + o\left(\frac{x}{\lg x}\right). \tag{9}$$

Nalezení elementárního důkazu těchto vzorců A. Selbergem (1948; také Erdös má zde podstatné zásluhy) je jedním z největších úspěchů analytické teorie čísel v posledním desítiletí. Důkaz vzorce (8) používá pouze elementárních vlastností exponenciální funkce a logaritmu a některých triviálních integrálů; k důkazu vzorce (9) je třeba ještě komplexních odmocnin z jedničky, které se vyskytují v Dirichletových charakterech.

První část knížky je věnována důkazu vzorce (8). Je psána tak elementárně, že je přístupna absolventu úvodního kursu analysy na universitě nebo na technice. Některé číselně teoretické funkce a některé vztahy mezi nimi však při tomto elementárním výkladu poněkud „spadnou s nebe". Pokusím se ukázat, jak se k těmto funkcím a vztahům dojde, vyjdeme-li od funkce $\zeta(s)$ (viz (3)); v knížce Spechtově se ovšem nevychází od nekonečné řady (3), nýbrž vzorce se odvozují elementárně. Budiž $\mu(n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) Möbiova funkce: $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$, je-li n součinem k různých prvočísel, $\mu(n) = 0$, je-li n dělitelné aspoň druhou mocninou některého prvočísla. Budiž $\Lambda_1(n) = \log p$, je-li $n > 1$ mocninou prvočísla p, jinak budiž $\Lambda_1(n) = 0$. Z nekonečného součinu v (3) logaritmickým derivováním plyne (stále pro $\sigma > 1$)

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_1(n)}{n^s}. \tag{10}$$

---

[6]) V knize Pracharově je v kap. III dána jiná varianta elementárního důkazu, ale jen pro (8), nikoliv pro (9).

Definujeme ještě funkci $\Lambda_2(n)$ rovnicí

(11) $$\frac{\zeta''(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_2(n)}{n^s}.$$

Z (3) plyne snadno

(12) $$(-1)^k \zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg^k n}{n^s}, \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Provedeme-li v (10) a (11) vynásobení řad vlevo podle (12), obdržíme pro $k = 1, 2$:

(13) $$\Lambda_k(n) = \sum_{d/n} \mu(d) \lg^k \frac{n}{d},$$

kde se sčítá přes všechny dělitele d čísla n. Z identity

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) = -\frac{\zeta''(s)}{\zeta(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \cdot \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

pak plyne

(14) $$\Lambda_2(n) = \Lambda_1(n) \lg n + \sum_{d/n} \Lambda_1(d) \Lambda_1\left(\frac{n}{d}\right).$$

V dalším průběhu jsou důležité funkce

(15) $$\psi_1(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda_1(n), \quad \psi_2(x) = \sum_{n \leqq x} \Lambda_2(n).$$

Je dávno známo, a lehce se dokáže, že vzorec (8) je rovnocenný se vzorcem

(16) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\psi_1(x)}{x} = 1, \quad \text{tj.} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\varrho(x)}{x} = 0,$$

kde $\varrho(x) = \psi_1(x) - x$. Snadno se dokáže[7])

(17) $$\psi_1(x) = O(x), \quad \psi_2(x) = 2x \lg x + O(x),$$

dokonce např.

(18) $$|\varrho(x)| < 2x \quad \text{pro velká } x.$$

Naším cílem je odhad sumatorické funkce ψ_1, daný vzorcem (16); některé jiné součty, související s $\Lambda_1(n)$, se snadno odhadnou, např.

(19) $$\sum_{n \leqq x} \frac{\Lambda_1(n)}{n} = \lg x + O(1).$$

Jak nyní dokázat (16)?

Předně plyne z (19) parciální sumací snadno: Existuje číslo $C_1 > 0$ tak, že pro všechna přirozená x, y je

(20) $$\left| \sum_{n=x}^{y} \frac{\varrho(n)}{n^2} \right| < C_1.$$

[7]) Důsledné využití pomocné funkce ψ_2 (která, jak ukazuje (17), se snadno odhadne) zavedl SPECHT.

Za druhé: Existují $x_0 \geqq 1$, $C_2 \geqq 1$ tak, že v každém intervalu $(x, \lambda x)$ $(x \geqq x_0, \lambda > 2)$ existuje aspoň jedno y tak, že

$$\left|\frac{\varrho(y)}{y}\right| < \frac{C_2}{\lg \lambda} \tag{21}$$

$\left(\text{tedy je } \frac{\varrho(y)}{y} \text{ malé, je-li } \lambda \text{ velké}\right)$.[8])

Důkaz probíhá asi takto: Funkce $\frac{\varrho(t)}{t}$ je po částech spojitá; v bodě $t = p^m$ má jen „malý" skok $\frac{\lg p}{t} \leqq \frac{\lg t}{t}$. Tedy: Jestliže v intervalu $(x, \lambda x)$ mění své znamení, nabývá i hodnot blízkých nule; jestliže však nemění znamení, musí také nabývat hodnot blízkých nule, ježto by jinak součet v (20) byl příliš velký $\left(\sum_{n=x}^{\lambda x} \frac{1}{n} \text{ je totiž přibližně rovno } \lg \lambda\right)$.

Za třetí: Snadno se dokáže, že funkce $\varrho(x)$ se nemění příliš rychle. Přesně: pro $\frac{1}{2}x < y < 2x$ je

$$|\varrho(y)| \leqq |\varrho(x)| + |y - x| + O\left(\frac{y}{\lg y}\right). \tag{22}$$

Tedy *za čtvrté*: Jsou-li x, λ dosti velká, existuje podle (21) v $(x, \lambda x)$ takové y, pro něž $\left|\frac{\varrho(y)}{y}\right|$ je velmi malé, a podle (22) zůstává $\left|\frac{\varrho(t)}{t}\right|$ malým i v jistém „dosti dlouhém" okolí bodu y. Přesně formulovat to nebudu.

Vidíme tedy toto: Je-li α jakékoliv kladné číslo, leží ony body x, pro něž je

$$|\varrho(x)| \leqq \alpha x, \tag{23}$$

nepříliš řídce. Ale my chceme dokázat (16), tj. chceme dokázat, že (23) platí pro *všechna* dosti velká x. A zde nastupuje *pátý*, a to rozhodující obrat. Selberg odvodil z (14) nerovnost

$$|\varrho(x)| \leqq \frac{2}{\lg^2 x} \sum_{n \leqq x} \left|\varrho\left(\frac{x}{n}\right)\right| \lg n + O\left(\frac{x}{\lg x}\right), \tag{24}$$

a tato základní nerovnost nám umožní dokončení důkazu vzorce (16). Vezměme nějakou hodnotu $\alpha > 0$ takovou, že (23) platí pro všechna dosti velká x; podle (18) víme, že smíme vzít např. $\alpha = 2$. Kdybychom v (24) užili nerovnosti $\left|\varrho\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqq \alpha \frac{x}{n}$,[9]) dostali bychom (jak je ihned vidět) $|\varrho(x)| < \alpha x + O\left(\frac{x}{\lg x}\right)$, což není nic nového. Ale my víme podle bodu čtvrtého, že pro „značný" počet hodnot n je $\left|\varrho\left(\frac{x}{n}\right)\right|$ „daleko menší" než $\alpha \frac{x}{n}$; propočteme-li to podrobně, dostaneme z (24), že pro všechna dosti velká x je

$$|\varrho(x)| \leqq \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{512 C_2}\right) x. \tag{25}$$

---

[8]) To je první krok k (16): z (21) plyne, že $\liminf \left|\frac{\varrho(x)}{x}\right| = 0$.

[9]) Pro hodnoty n, které jsou téhož řádu jako x, nemusí tato nerovnost platit; ale ve výsledku tyto členy neruší.

Platí-li tedy (23) pro všechna dostatečně velká x, platí pro všechna dostatečně velká x dokonce i ostřejší nerovnost (25). Položme nyní $\alpha_1 = 2$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k \left(1 - \frac{\alpha_k^2}{512C_2}\right)$. Vidíme (indukcí), že ke každému k existuje x_k tak, že pro $x > x_k$ je $|\varrho(x)| \leqq \alpha_k x$. Ale zřejmě $\alpha_k \to 0$ pro $k \to \infty$; tedy platí (16) a tedy (8).

Druhá polovina Spechtovy knížky je věnována důkazu vztahu (9). Je o něco složitější, protože je třeba napřed vypracovat teorii Dirichletových charakterů $\chi(n)$, ale v závěrečné fázi probíhá podobně jako první část, a nepředpokládá u čtenáře větších znalostí než část první. Celá knížka je psána velmi důkladně, přehledně a s pečlivým zřetelem i k málo zkušenému čtenáři. Právě pro tyto čtenáře bude snad užitečné, připojím-li seznam *některých* tiskových chyb nebo nedopatření, která by mohla rušit. Str. 22, vzorec (26): vlevo čti log (místo $\log^2$). Str. 25_2 (tj. 2. řádek zdola) u prvního součtu čti: $m \leqq x$. Str. 35^2 vlevo čti: $|\varrho(x)|$. Str. 39_1 čti: $\chi(e_1 + e_2)$. Str. 43^7 čti: wenn $g \equiv -1 \pmod 4$. Str. 45^7: závorku $\{$ dej ihned za sumační znak. Str. 48^3: totéž. Str. 46: Stále čti $n \leqq x$ místo $n \leqq k$. Str. 48^7: místo $d \leqq x$ čti $n \leqq x$. Str. 48_{9-6}: čtenář si sám opraví nevhodnou formulaci (jde o Bolzano-Cauchyovu podmínku). Str. 60^3 a 60^5: na konci čti $\log^2$. Str. 65_5: Vzorec označ (73). Str. 68^6, 69^4, 74^{10}: C_4, C_5, C_6 mohou záviset na k.

Důkaz věty 31 na str. 44 je zbytečně složitý. Nejlépe je dokázat napřed vzorec (2) (který *není* vázán podmínkou $(k, l) = 1$) přímo z věty 4, načež okamžitě plyne (1). Podobně lze upravit důkaz věty 33 (užitím věty 5).

Vojtěch Jarník, Praha

Sophie Piccard: SUR LES BASES DES GROUPES D'ORDRE FINI. Avec une préface de A. Denjoy (O bázích grup konečného řádu. S předmluvou A. Denjoy). Mémoires de l'Université de Neuchatel, 25. Neuchatel 1957; XXIV, 242 str.

Spis se zabývá obšírně úvahami o bázích (konečných) grup a je pokračováním dvou spisů s podobným tématem, které autorka uveřejnila již dříve: *Sur les bases du groupe symétrique*, I (1946); II (1948). (Citováno Bases I a Bases II.) Přitom je báze definována takto:

V grupě $\mathfrak{G}$ je možno volit množinu $\mathfrak{B}$ s konečným počtem prvků vytvořujících grupu $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} = \langle\mathfrak{B}\rangle$. Dokonce je možno zvolit množinu $\mathfrak{B}$ tak, že její prvky jsou „nezávislé" (tj. že množina $\mathfrak{B}$ je ireducibilní). Je-li pak množina $\mathfrak{B}$ zvolena tak, že počet jejích prvků r je co nejmenší, nazývá autorka množinu $\mathfrak{B}$ „bází" grupy $\mathfrak{G}$ a číslo r „řádem báze" $\mathfrak{B}$.

V úvodu nejprve podává hlavní definice a věty z teorie grup abstraktních a grup permutačních („substitučních"),[1]) pokud jich bude ke studiu spisu zapotřebí a pak uvádí některé věty, hlavně ze spisů Bases I a II, kterých bude dále použito jako vět pomocných.

Kapitola I obsahuje obecné úvahy o bázích konečných grup.

Kapitola II se zabývá studiem bází grupy symetrické $\mathfrak{S}_n$ a grupy alternující $\mathfrak{A}_n$, u nichž jedna z permutací báze je cykl řádu > 1. Toto studium navazuje na studium grup, které vytvořuje systém souvislý a primitivní cyklů téhož řádu. Probírají se všechny grupy, které se mohou vytvořit souvislým a primitivním systémem cyklů řádu m pro $2 \leqq m \leqq 9$.

Kapitola III je věnována nejprve studiu primitivních grup, které mají bázi řádu 2 a pak je dokázána obecná věta o celkovém počtu bází takových grup. U primitivních grup stupně $n \leqq 10$, jimiž se autorka zabývala, existovala vždy báze řádu 2. Prozkoumána je celá řada takových grup a u nich stanoven úhrnný počet bází.

Kapitola IV se zabývá složením grup imprimitivních. Je ukázáno, že existují grupy imprimitivní, jejichž báze má řád $r > 2$.

[1]) Dobrou průpravu ke studiu recenzované knihy může poskytnout spis: H. Lugowski-H. J. Weinert, Grundzüge der Algebra I, 1957, vzhledem k tomu, že je v ní podáno dosti látky z teorie grup permutačních.

Kapitola V pojednává o systémech vytvořujících prvků „grupy regulární". Grupou regulární se zde nazývá transitivní grupa permutační, jejíž stupeň je roven řádu.

Kapitola VI obsahuje definující relace tzv. „charakteristické relace" grupy symetrické $\mathfrak{S}_n$ pro různé báze: Uvedeny tu všechny báze řádu 2 grupy $\mathfrak{S}_n$ vyjádřené permutacemi pro $n \leqq 6$ a zároveň definující relace pro $n \leqq 5$. Pro $n = 6$ je odkázáno na disertaci autorčina žáka M. CALAMA (Univ. Neuchatel, 1959).

Kapitola VII obsahuje *Větu Hölderovu*: Grupa symetrická $\mathfrak{S}_n$ pro $n \geqq 3$ a pro $n \neq 6$ nemá vnější automorfismy (což znamená, že grupa $\mathfrak{S}_n$ je v těchto případech úplná).[2]) Důkaz je proveden použitím bází. Nadto však pro $n = 6$ je dokázáno, že grupa $\mathfrak{S}_6$ má 720 vnějších automorfismů, právě tolik jako automorfismů vnitřních.

Kapitola VIII. Několik vět z obecné teorie permutací a poznámky k nim. Grupy Mathieuovy, Burnsideovy a zobecněné grupy Kleinovy.

O grupě Mathieuově stupně 12 (M_{12}), řádu 95 040 pětinásobně transitivní a jejích tří podgrupách dokázáno, že mají báze řádu 2.[3])

W. BURNSIDE[4]) uvádí zajímavý příklad primitivní grupy G_{7200} stupně 36, řádu 7200, která má normální imprimitivní podgrupu G_{3600} řádu 3600. O grupách G_{7200} a G_{3600} autorka dokazuje, že mají bázi řádu 2.

Konečně se autorka zabývá grupou Abelovou G_{2^n}, která je zobecněním grupy Kleinovy $\mathfrak{B}_4$ (Vierergruppe), a grupami z ní odvozenými.

Jak již ze stručného obsahu je vidět, poskytuje spis mnoho podnětů k další práci o grupách permutačních a jejich bázích a o příslušných definujících relacích. Ovšem zdá se mi, že asi nebude mnoho čtenářů, kteří by knihu systematicky prostudovali. A již z tohoto důvodu musím poukázat na to, že není ke knize připojen index, který by usnadnil orientaci v knize a hledání v ní.

Karel Rychlík, Praha

Pál Imre: TÉRLÁTTATÓS ÁBRÁZOLÓ MÉRTAN (Deskriptívna geometria v anaglyfoch). Műszaki könyvkiadó, Budapest 1959, str. 192, obr. 494. Cena 39,— Ft, viaz.

Kniha je veľmi zaujímavým a cenným prínosom do učebnicovej literatúry z deskriptívnej geometrie. Jej charakteristickou náplňou sú obrázky, ktoré konštruoval sám autor. Preložený názov knihy je „Deskriptívna geometria v anaglyfoch". (Nemecký prospekt, ktorým vydavateľstvo oznamovalo prípravu vydania diela, uvádza ho pod názvom „Darstellende Geometrie in Raumbildern".)

Učebnica je v svetovej literatúre svojho druhu originálna tým, že všetky dôležité základné aj zložitejšie konštrukcie deskriptívnej geometrie v rozsahu preberanom na vysokých školách technických sú v nej demonštrované zásadne na obrázkoch-anaglyfoch. (Zo 494 obrázkov knihy je 266 anaglyfických.) Anaglyfické obrázky sú umiestené vždy na celej ľavej strane knižky, zatiaľ čo na pravej strane je príslušný teoretický výklad.

Anaglyfy sú konštruované ako dvojstredové priemety; pravda, na obrázkoch sú narysované len dôležité výsledné „modelové" čiary, nie však konštrukcie, ktoré k nim viedli. Ku kvalite anaglyfov knihy prispelo okrem ich veľmi dobrej konštrukcie aj neobyčajne poda-

[2]) Jiný jednoduchý důkaz tohoto tvrzení je podán v § 13 2. vyd., KUROŠOVY Teorie grup, která je nyní přístupná v anglickém překladě. V 1. vyd. ani v německém překladě tento důkaz není obsažen.

[3]) O této Mathieuově grupě je zmínka v JORDANOVĚ „Traité des substitutions" 1870, str. 33. Ovšem bylo by jistě velmi záslužné, kdyby autorka podobným způsobem probrala další grupy Mathieuovy: M_{11}, M_{22}, M_{23}, M_{24} stupňů pořadě 11, 22, 23, 24; řádů 7920, 433520, 10 200960, 244 823040 a pořadě 4-, 3-, 4-, 5násobně transitivní, které jsou stejně ako M_{12} vesměs jednoduché. O nich viz W. WITT, Abh. Math. Sem. Hamburg, 1938, 256—264, kde je i další literatura.

[4]) W. BURNSIDE, Theory of groups of finite order, 1. vyd., str. 192—193, 2. vyd. 1911, str. 202—203.

rené riešenie farebnotechnického prevedenia a tlače, čo bolo docielené dlhým experimentovaním a úzkou spoluprácou autorovou s pracovníkmi tlačiarne v priebehu tlače. Tieto anaglyfy, pozorované anaglyfickými dvojfarebnými okuliarmi (priloženými ku knihe), poskytujú hneď — bez akéhokoľvek dlhšieho prispôsobovania zraku — dokonalý priestorový (plastický) dojem, zhodný s dojmom pri pozorovaní skutočného objektu v priestore dvoma očami. Objekty z obrázkov priamo „vyskakujú“ do priestoru, takže anaglyfické obrázky knižky predstavujú vlastne bohatú zbierku modelov.

Pri výcviku priestorovej predstavivosti základný význam má realizovanie objektov, alebo geometrických útvarov, ktoré si treba predstaviť, najprv pomocou ich vzorových súčiastok, t. j. drótených, plechových a iných modelov základných geometrických útvarov.

Autor knihy má iste pravdu, keď tvrdí, že väčšiu cenu ako najdokonalejšia zbierka modelov najlepšie vybavenej školy má taký prostriedok, ktorým možno výcvik priestorovej predstavivosti pestovať kedykoľvek a kdekoľvek aj mimo rámca prednášok a vyučovania, viazaného na čas a miesto školy. Takým prostriedkom je práve anaglyf. Je jednoduchší ako model. I keď je zostrojenie anaglyfu (dvojstredového priemetu) dosť pracné a teda pomerne drahé, je vždy lacnejšie ako zhotovenie zložitého modelu. Okrem toho, ako hovorí autor, zdá sa, že je vhodnejší na vyjadrenie geometrických predstáv aj preto, lebo z rysu (obrázku) do priestoru „sa vynorujúca“ čiara anaglyfu je o mnoho „geometrickejšia“ ako najjemnejšia niť, struna, alebo iný modelový materiál. Čo najúplnejšie využitie tohoto znamenitého názorného prostriedku je práve hlavným cieľom citovanej učebnice.

Vecný obsah knihy je nasledovný: Po krátkom *úvode* o cieli a správnom používaní knihy sú vysvetlené *základné stereometrické pojmy* a zobrazené anaglyfickými obrázkami.

Ďalšia časť „*Mongeova projekcia (združené priemety)*“ je venovaná kolmému premietaniu na dve a viac združených priemetní, v ktorom sú riešené všetky základné polohové a metrické úlohy o bodoch, priamkach, rovinách aj jednoduchých hranatých a oblých telesách. Menšia kapitola tejto časti vysvetľuje tiež osvetľovanie.

V rozsiahlej časti „*Krivky a plochy*“ sú prebraté a pekne priestorovo znázornené základné pojmy a najmä dôležité technické krivky a plochy (skrutkovica, rotačné plochy, zbortené plochy, rôzne úlohy o nich; tu je tiež vysvetlený princíp stereografickej projekcie).

Osobitná časť knihy je venovaná „*kótovanému premietaniu*“ a jeho aplikáciám v technickej praxi (topografickým plochám, technickým úpravám v teréne, riešeniu úloh banskomeračskej praxe: riešeniu tektonických zlomov, ochranného piliera a konštrukcii spojovacích banských diel).

Náplň knihy uzavierajú „*Vybrané časti z axonometrického a centrálneho premietania*“, v ktorých sú stručne ukázané základy ortogonálnej a klinogonálnej axonometrie, centrálneho premietania a lineárnej perspektívy (priesečnou metódou).

Na konci knihy je pripojený zoznam pomocnej študijnej literatúry a osobitný cenný zoznam literatúry o anaglyfoch.

Spôsob výkladu knihy je jasný a stručný. Po vysvetlení teoretického základu určitej partie sú hneď uvedené ľahšie zrozumiteľné aplikácie. Odvodzovania a dôkazy sú zpravidla vynechané, okrem takých dôkazov, kde je dôležité práve pochopenie priestorových vzťahov (napr. Quetelet-Dandelinova poučka o rovinných rezoch na rotačnej kužeľovej ploche).

Maďarské ministerstvo školstva schválilo knihu ako pomocnú vysokoškolskú učebnicu. Bude môcť byť však dobre použitá na všetkých stupňoch technickej a prírodovedeckej výuky na školách (stredných, odborných a vysokých). Dobre poslúži aj samoukom a najmä pri diaľkovom štúdiu bude priam nepostrádateľnou študijnou pomôckou.

(Podľa autorovho zdelenia vydavateľstvo Műszaki pripravuje vydanie knihy tiež v ruskej, anglickej a nemeckej reči. Do konca roku 1960 má výjsť aj slovenský preklad v Slovenskom vydavateľstve technickej literatúry v Bratislave; preklad bude vytlačený v Budapešti, čím sa zaručí dobrá kvalita anaglyfických obrázkov knihy.)

Karol Rečičár, Košice

Jozef Filip: PREHĽAD DESKRIPTIVNEJ GEOMETRIE. Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava, 1959, 1. vyd., náklad 8200 výt., str. 332, obr. 201, cena Kčs 14,90 váz.

Knížka je vhodným přehledem těch částí deskriptivní geometrie, které jsou v osnovách tohoto předmětu na všeobecně vzdělávací škole, přičemž zřejmě hledisko použití vedlo někde autora k menším rozšířením (osová afinita a její použití při řezu roviny a kruhového válce).

Při čtení knížky poznáme, že obsah jejích 13 kapitol lze v podstatě rozdělit na tři větší části. V úvodní části (I. až V. kapitola) je především vysvětlena hlavní úloha deskriptivní geometrie tak, jak je pak v knížce dále pojata, potom užívaná symbolika k provádění geometrických zápisů, základní vztahy stereometrické mezi body, přímkami a rovinami (tj. zejména věty o incidenci, rovnoběžnosti, protínání a kolmosti), osová afinita v rovině s jejími vlastnostmi a ohniskové vlastnosti kuželoseček, pro parabolu také důležitá vlastnost subtangenty a subnormály.

Ve druhé části (VI. až VIII. kapitola) jsou vyloženy dva nejužívanější zobrazovací způsoby: pravoúhlé promítání na jednu průmětnu (a to tzv. kótované promítání) a podstata pravoúhlého promítání na dvě k sobě kolmé průmětny (tzv. Mongeovo promítání) včetně zavádění dalších pomocných průměten. V obou zmíněných promítacích způsobech jsou řešeny úlohy polohy a nejjednodušší metrické úlohy.

Protože ve třetí části jsou zobrazovány v příslušném pravoúhlém promítání hranoly a jehlany příp. kruhové válce a kužele a také plocha kulová (IX. a X., XII. a XIII. kapitola), je v XI. kapitole pojednáno o rovnoběžném průmětu kružnice a elipsy a výklad o tom je spojen s řadou dalších konstrukcí elipsy výhodných pro její vyrýsování. Vedle zobrazení uvedených těles je podrobně ukázáno, jak se sestrojují průměty jejich rovinných řezů (pro rovinný řez na rotačním válci příp. na rotačním kuželi je proveden důkaz věty Quetelet-Dandelinovy i s důsledky užitečnými při rýsování průmětu kuželosečky — řezu na rovinu kolmou k ose plochy), dále průměty jejich průsečíků s přímkou a jejich sítě (s výjimkou plochy kulové).

V knížce, svým účelem vhodné k opakování nebo jako úvod k dalšímu studiu deskriptivní geometrie, nejsou obvykle prováděny všechny důkazy. V textu je úplně vyřešeno 27 příkladů se všemi podrobnostmi včetně důkazu správnosti konstrukce a diskuse řešení. Vedle toho k přímému procvičení látky je připojeno celkem 237 úloh, které bezprostředně navazují na vyloženou látku a zpravidla ani nepotřebují nějakého návodu k řešení. Proto jistě knížka dobře splní daný úkol: bez přílišného zatěžování podrobnostmi umožní čtenáři rychlé zopakování nebo podá uceleně nejdůležitější pojmy a konstrukce z obou vyložených zobrazovacích metod. Pro všechny tyto vlastnosti může být také vhodnou pomůckou pro studující technických škol a v tomto případě zvlášť pro studující při zaměstnání, k čemuž neméně dobře poslouží i malý (kapesní) formát knížky.

Karel Drábek, Praha

André Angot: UŽITÁ MATEMATIKA PRO ELEKTROTECHNICKÉ INŽENÝRY. Z fran. originálu „Compléments de Mathématique destinés aux ingénieurs de l'Électrotechnique et des Télécommunications“ přeložil Ing. dr. A. Ter-Manueliane, vydalo SNTL Praha 1960, stran 812, obr. 370, cena váz. 110 Kčs.

Citovaná kniha je věnována výkladu některých partií matematiky, které jsou potřebné v různých odvětvích teoretické elektrotechniky. Svým zaměřením je určena především elektroinženýrům a má být pomůckou při jejich dalším postgraduálním studiu.

Je zde probrána zhruba následující látka: Funkce komplexní proměnné, Fourierova řada, Fourierův integrál, vektorový počet, maticový počet, základy tensorového počtu, metody integrace diferenciálních rovnic, speciální transcendentní funkce, operátorový počet, počet pravděpodobnosti, počet numerický a grafický.

Všimněme si především toho, co může kniha přinést inženýrům elektrotechniky. Bezesporu kladnou stránkou díla je, že výběr látky je poměrně bohatý a že ve všech kapitolách jsou uvedeny příklady z elektrotechniky, ilustrující použití příslušné matematické partie. Naproti tomu výklad vlastních matematických skutečností trpí přílišnou formálností a má vyslovený charakter reportáže. Je proto otázkou, do jaké míry bude inženýr při studiu schopen proniknout matematické myšlenky jednotlivých kapitol, není-li již obeznámen s příslušnou věcí z jiného, důkladnějšího díla.

U díla tohoto typu je přirozené, že se všude neuvádějí důkazy; není však vhodné vydávat něco za důkaz, co důkazem není, jak se to zde často činí. Ještě horší je, že v knize jsou některé úvahy (např. Gibbsův zjev na str. 97—99), které podstatu věci úplně zatemňují a vzbuzují podezření, že autor problém správně nepochopil.

Z uvedeného vyplývá, že s moderním pojením matematiky nemá kniha nic společného; mimo to skrývá pro inženýry jisté nebezpečí: nezasvěcený čtenář snadno podlehne dojmu, že matematika se obejde bez jakýchkoli předpokladů a že všechny možné operace lze libovolně provádět a zaměňovat. Takový čtenář je potom překvapen, dojde-li k rozporu, z čehož obvykle vyvozuje, že matematika se nehodí k řešení technických problémů.

Zůstává tedy spornou otázka, zda volba tohoto díla k překladu byla šťastná.

Václav Doležal, Praha