Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

ЗАМЕТКА ПО КОЛЕБЛЮЩИМСЯ РЕШЕНИЯМ УРАВНЕНИЯ $y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0$

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛ (Jaroslav Kurzweil), Прага

(Поступило в редакцию 7. 3. 1960 г.)

В заметке доказывается, что в теореме из статьи [1] М. Ясного второе условие может выть отброшено, так как оно по существу является следствием первого условия.

М. Ясны в [1] доказал следующую теорему:

Эсли функция $f(x)$ положительна и абсолютно непрерывна в каждом конечном промежутке $\langle x_1, x_2 \rangle$, $x_1 \geqq a$ и если, кроме того, удовлетворяст условиям

$$(n+1)\, f(x) + x f'(x) \geqq 0 \quad \textit{для} \quad x \geqq x_0\,, \tag{1}$$

$$\sqrt{x}\, I(x) \leqq M \quad \textit{для} \quad x \geqq x_0\,, \quad M > 0\,, \tag{2}$$

где

$$I(x) = \int_x^\infty \frac{f(t) \mathrm{d}t}{\left[\int_t^\infty \mathrm{d}u \int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\right]^{\frac{2n-1}{2n-2}}}\,,$$

то существуют колеблющиеся решения уравнения

$$y'' + f(x)\, y^{2n-1} = 0 \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)\,. \tag{3}$$

Покажем, что в этой теореме условие (2) можно отбросить. Если $\int_t^\infty \mathrm{d}u \int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma = \int_t^\infty (\sigma - t)\, f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma$ расходится, то по теореме Ф. В. Аткинсона [2] все решения уравнения (3)—колеблющиеся. Пусть теперь условие (1) выполнено и интеграл $\int_t^\infty \mathrm{d}u \int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma$ сходится. Из (1) следует, что

$$f(t) \geqq f(r) \left(\frac{x}{t}\right)^{n+1}, \quad x_0 \leqq x \leqq t\,, \tag{4}$$

$$\int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \geqq f(u)\, u^{n+1} \int_u^\infty \sigma^{-n-1}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{n} f(u) u\,,$$

$$\int_t^\infty \mathrm{d}u \int_u^\infty f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma \geqq \frac{1}{n} \int_t^\infty u f(u)\, \mathrm{d}u \geqq \frac{1}{n} f(t)\, t^{n+1} \int_t^\infty u^{-n}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{n(n-1)} f(t)\,.\, t^2\,.$$