Časopis pro pěstování matematiky, roč. 85 (1960), Praha

OPTIMÁLNÍ REGULACE

HANA SVOBODOVÁ a JIŘÍ VANÍČEK, Praha

(Došlo dne 1. září 1959)

V článku se referuje o výsledcích dosažených v teorii optimální regulace a podává se přehled literatury tohoto oboru.

S rozvojem techniky stále přibývá procesů, které jsou řízeny automaticky, bez přímého zásahu člověka.

Praktický podklad otázek, o kterých se jedná v tomto článku, je asi tento: Chceme, aby se přístroj během své práce udržoval stále v určitém stavu, optimálním pro jeho výkonnost (např. správná rychlost přítoku paliva kosmických raket, dostatečně velký, ale přitom bezpečný počet rozštěpených atomů za jednotku času v atomovém reaktoru, správný počet otáček rotoru turbiny apod.).

První otázka je, jak sestrojit uvažovaný přístroj tak, aby se stále udržoval v tomto optimálním stavu. (Typický příklad zařízení, které nám to zprostředkuje, je známý Wattův regulátor užívaný běžně u parních strojů.)

Ve skutečnosti však na soustavu stále působí řada nahodilých prvků, které ji vychylují z optimální polohy, např. změny zatížení u parní turbiny. Druhý, neméně důležitý problém je tento:

Předpokládejme, že můžeme nějakým způsobem zasahovat do uvažovaného děje tak, že v určitém rozsahu měníme vstupní parametry (např. hloubku, do které jsou spuštěny kadmiové tyče brzdící rozpad v atomovém reaktoru). Otázka je, jak máme tyto parametry měnit, aby se soustava vrátila z libovolné polohy do optimální co nejdříve, za optimální čas, a z kterých poloh je vůbec možno vrátit soustavu do optimální polohy.

Matematická formulace problému je tato:

Nechť T je topologický prostor. Budeme říkat, že je dán regulační proces, je-li dán systém n diferenciálních rovnic

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, u)$$

nebo vektorově

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)\,, \quad \text{kde} \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n,\ x_1(t), \ldots, x_n(t) \tag{1}$$

jsou reálné funkce času t, $u \in T$, $f_i(\mathbf{x}, u)$ jsou spojité funkce v $E_n \times T$ a mají spojité parciální derivace prvního řádu podle proměnných x_j $(j = 1, \ldots, n)$ v $E_n \times T$. Regulátorem našeho procesu budeme nazývat zobrazení $u(t)$ intervalu $\langle t_0, t_1 \rangle$ do T.

Budeme říkat, že regulátor $u(t)$ převádí bod ξ_0 v ξ_1, jestliže existuje řešení soustavy (1) s regulátorem $u(t)$ tak, že

$$\mathbf{x}(t_0) = \xi_0\,, \quad \mathbf{x}(t_1) = \xi_1\,.$$

Regulátor budeme nazývat optimální mezi body ξ_0 a ξ_1, jestliže převádí bod ξ_0 v ξ_1 za čas τ a jestliže neexistuje regulátor, který by převáděl bod ξ_0 v ξ_1 za čas kratší.

Úkolem je najít optimální regulátor převádějící libovolný bod ξ do počátku a vyjádřit tento regulátor jako funkci bodu $\mathbf{x}$ (výchylky) místo času t.

Pro obecný případ nelineární soustavy se podařilo sovětským matematikům L. S. PONTRJAGINOVI a R. V. GAMKRELIDZOVI odvodit nutnou podmínku pro optimálnost regulátoru, tak zvaný princip maxima (za předpokladu, že funkce $u(t)$ je po částech spojitá a má body nespojitosti pouze prvního druhu).

V [8] je nejprve řešen obecnější problém, najít takový regulátor, aby funkcionál

$$L(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}(t), u(t))\, \mathrm{d}t\,,$$

kde f_0 je funkce spojitá v $E_n \times T$, byl minimální. Pro speciální případ

$$f_0 \equiv 1 \tag{2}$$

dostáváme pak optimální regulátor. Výsledky pro tento důležitý speciální případ lze shrnout v následující větu:

Nechť ψ je libovolná vektorová funkce; označme skalární součin $(\psi, \mathbf{f}(\mathbf{x}, u)) = H(\psi, \mathbf{x}, u)$ a $\sup\limits_{u \in T} H(\psi, \mathbf{x}, u) = M(\psi, \mathbf{x})$.

Věta 1. *Nechť $u(t)$ je optimální regulátor vzhledem k* (2) *soustavy* (1) *a $\mathbf{x}(t)$ jemu odpovídající řešení soustavy* (1). *Potom existuje taková nenulová vektorová funkce $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))$, že*

$$H(\psi(t_0), \mathbf{x}(t_0), u(t_0)) \geqq 0\,,$$

a funkce $\psi(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $u(t)$ vyhovují Hamiltonovu systému

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial \psi_j} \quad (j = 1, \ldots, n)\,, \quad \frac{\mathrm{d}\psi_j}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (j = 1, \ldots, n)\,,$$

přičemž $H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) = M(\psi(t), \mathbf{x}(t))$. Ukazuje se kromě toho, že funkce $H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t))$ je konstantní, takže $H(\psi(t), \mathbf{x}(t), u(t)) \geqq 0$. Viz [8].

Mnohem úplnějších výsledků lze dosáhnout pro případ lineární soustavy.

Uvažujme systém n diferenciálních rovnic

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}_1 u_1(t) + \ldots + \mathbf{c}_r u_r(t) . \tag{3}$$

O matici $\mathbf{A}$ předpokládáme, že je regulární a nezávisí na t; $\mathbf{x}$, $\mathbf{c}_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ jsou n-členné sloupcové vektory.

Pontrjagin a Gamkrelidze předpokládají, že regulátory $u_j(t)$ jsou po částech spojité a mají body nespojitosti pouze prvního druhu. (Viz [4, 7, 8].)

V naší nepublikované práci, která získala první cenu v celostátní studentské vědecké soutěži za přírodní vědy, je předpokládáno, že regulátory $u_j(t)$ jsou měřitelné funkce. Za prostor T budeme brát kartézský součin r jednorozměrných intervalů $\langle -1, 1 \rangle$.[1])

Pro tento případ byla dokázána Gamkrelidzem [6] a nezávisle na něm námi ve shora uvedené práci existence optimálního regulátoru pro lineární soustavy.

Věta o existenci optimální soustavy regulátorů:

Označme $\boldsymbol{\Phi} = \|\varphi_{ik}\|$ fundamentální matici řešení soustavy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ v $\langle 0, +\infty)$, tj. funkční matici, pro kterou platí $\dot{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}$. Dále označíme inversní matici $\boldsymbol{\Phi}^{-1} = \boldsymbol{\Psi}$.

Řešení soustavy (3) je určeno vzorcem

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t) \left(\mathbf{q}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^r \mathbf{c}_j u_j(\tau) \, d\tau\right) \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, +\infty) . \tag{4}$$

Označme $\mathbf{x}(t, u_1, \ldots, u_r)$ řešení soustavy (3) příslušné k systému regulátorů $\{u_1, \ldots, u_r\}$.

Věta 2. *Nechť existuje systém regulátorů* $\{v_1(t), \ldots, v_r(t)\}$ *definovaných na* $\langle 0, +\infty)$ *a* $T' > 0$ *tak, že pro příslušné řešení soustavy* (3) *je* $\mathbf{x}(T', v_1, \ldots, v_r) = \xi_1$, *kde* $\xi_0 \neq \xi_1 \in E_n$.

Pak existuje systém regulátorů $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ *a číslo* $0 < T \leqq T'$ *tak, že platí:*

1. $\mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r) = \xi_1$,

2. *pro libovolný systém regulátorů* $\{u_1, \ldots, u_r\}$ *a* $0 < t < T$ *je* $\mathbf{x}(t, u_1, \ldots, u_r) \neq \xi_1$.

Důkaz. Buď M množina těch $t \in \langle 0, +\infty)$, ke kterým existuje systém regulátorů $\{u_1, \ldots, u_r\}$ tak, že $\mathbf{x}(t, u_1, \ldots, u_r) = \xi_1$. M je zdola omezena nulou, a protože $T' \in M$, je $M \neq \emptyset$, tedy existuje $\inf M = T$.

Je-li $T = T'$, je nutně $T \in M$ a věta je dokázána. Buď $T < T'$, pak existuje klesající posloupnost $T' = t_0 > t_1 > \ldots$ tak, že $t_n \to T$ a $t_n \in M$. Ze vzorce (4) plyne, že příslušné funkce $u_1^m, \ldots, u_r^m$ je možno volit tak, že $u_j^m(t) = 0$ pro $t \in (t_m, +\infty)$, tedy je

[1]) L. S. Pontrjagin v [8] zobecnil výsledky pro případ, že T je konvexní mnohostěn v E_r.

$$\xi_1 = \mathbf{x}(t_m, u_1^m, \ldots, u_r^m) = \boldsymbol{\Phi}(t_m)\,(\mathbf{q}_0 + \int_0^{t_m} \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^r \mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\,\mathrm{d}\tau) =$$
$$= \boldsymbol{\Phi}(t_m)\,(\mathbf{q}_0 + \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^r \mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\,\mathrm{d}\tau)\,.$$

Protože u_j^m je měřitelná a omezená, existuje neurčitý Lebesgueův integrál, a označíme-li

$$U_j^m(t) = \int_0^t u_j^m(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,U_j^m(t) = u_j^m(t)$ skoro všude. Platí

$$\int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\,\mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\,\mathbf{c}_j\,\mathrm{d}U_j^m(\tau)\,,$$

kde vpravo je Lebesgue-Stieltjesův integrál.

Jest

$$|U_j(\tau_2) - U_j(\tau_1)| \leqq \int_{\tau_1}^{\tau_2} |u_j^m(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leqq |\tau_2 - \tau_1|\,,$$

takže funkce U_j^m splňují Lipschitzovu podmínku s konstantou 1. Tedy funkce U_j^m jsou stejně spojité a také stejně omezené. Podle Arzelovy věty lze z $\{U_j^m\}$ vybrat posloupnost $\{\tilde{U}_j^m\}$ stejnoměrně konvergentní: $\tilde{U}_j^m \to H_j$. Ze stejnoměrné konvergence $\tilde{U}_j^m \to H_j$ plyne, že také H_j splňuje Lipschitzovu podmínku s konstantou 1 a tedy existuje skoro všude $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,H_j(\tau) = \eta_j(\tau)$ a je

$$|\eta_j(\tau)| = \left|\lim_{t\to\tau} \frac{H_j(t) - H_j(\tau)}{t - \tau}\right| \leqq 1\,.$$

Protože je $|u_j^m| \leqq 1$, jsou variace funkcí U_j^m v intervalu $\langle 0, T'\rangle$ omezeny konstantou T' nezávislou na m a užitím Hellyovy věty [1] dostaneme

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\,\mathbf{c}_j\,\mathrm{d}\tilde{U}_j^m(\tau) = \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\,\mathbf{c}_j\,\mathrm{d}H_j = \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\,\mathbf{c}_j\,\eta_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{T} \boldsymbol{\Psi}(\tau)\,\mathbf{c}_j\,\eta_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

(protože $\eta_j = 0$ pro $t > T$).

Tedy i

$$\lim_{m\to\infty} \boldsymbol{\Phi}(\tilde{t}_m)(\mathbf{q}_0 + \int_0^{T'} \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^r \mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\,\mathrm{d}\tau) =$$
$$= \boldsymbol{\Phi}(T)(\mathbf{q}_0 + \int_0^{T} \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^r \mathbf{c}_j\, u_j^m(\tau)\,\mathrm{d}\tau) = \xi_1\,,$$

což znamená, že $\mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r) = \xi_1$, a tedy $T \in M$.

Pro další vyšetřování je nutno zavést na soustavu omezující předpoklad.

Systém (3) budeme nazývat regulární, jestliže žádný z vektorů $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_r$ neleží v žádném podprostoru $P \subset E_n$ nižší dimense než n, invariantním vzhledem k operátoru $\mathbf{A}$.

Ukazuje se, že pro regulární soustavu mají optimální regulátory zvláště jednoduchý tvar. Mají konečně mnoho bodů nespojitosti a nabývají pouze hodnot 1 a -1. (Ztotožňujeme ovšem funkce, které se liší pouze na množině nulové míry.)

O tvaru řešení platí tato věta:

Věta 3. *Buď* (3) *regulární soustava a* $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ *soustava optimálních regulátorů soustavy* (3) *mezi body* ξ_0 *a* ξ_1. *Pak existuje řešení systému* $\dot{\omega} = -\mathbf{A}'\omega$ *tak, že platí* $\eta_j(t) = \operatorname{sgn}(\omega(t) \cdot \mathbf{c}_j)$ *skoro všude.*

Naznačíme pouze nejdůležitější etapy důkazu. Označíme $A(t)$ množinu všech bodů $\mathbf{x}(t, u_1, \ldots, u_r)$, kde $\{u_1, \ldots, u_r\}$ je systém regulátorů; dále označíme $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ systém optimálních regulátorů a T optimální čas. Platí:

a) Množina $A(T)$ je konvexní a bod $\xi_1 = \mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r)$ leží na její hranici.

b) Je-li A konvexní množina, potom každým bodem její hranice lze vést nadrovinu R takovou, že A leží celá v jednom poloprostoru vyťatém nadrovinou R.

Existuje tedy nadrovina R procházející bodem ξ_1 taková, že množina $A(T)$ leží celá v jednom poloprostoru vyťatém nadrovinou R. Označme $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ vektor kolmý k R, orientovaný tak, že pro každý systém regulátorů $\{u_1, \ldots, u_r\}$ je

$$\mathbf{a} \cdot [\mathbf{x}(T, u_1, \ldots, u_r) - \mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r)] \leqq 0 . \tag{5}$$

Označme

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\Phi}(T) , \quad \omega(t) = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\Psi}(t) . \tag{6}$$

Vektorová funkce $\omega(t)$ definovaná vztahy (6) splňuje soustavu $\dot{\omega} = -\mathbf{A}'\omega$.

c) Je-li systém (3) regulární, jsou vektory $\mathbf{c}_j, \mathbf{A}\mathbf{c}_j, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{c}_j$ lineárně nezávislé.

Z těchto tvrzení již snadno plyne věta o tvaru řešení.

Podle (4) a (5) je

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}[\mathbf{x}(T, u_1, \ldots, u_r) - \mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r)] = \\ &= \int_0^T \mathbf{a}\, \boldsymbol{\Phi}(\tau)\, \boldsymbol{\Psi}(\tau) \sum_{j=1}^r \mathbf{c}_j(u_j(\tau) - \eta_j(\tau))\, d\tau = \\ &= \int_0^T \omega(\tau) \sum_{j=1}^r \mathbf{c}_j(u_j(\tau) - \eta_j(\tau))\, d\tau \leqq 0 . \end{aligned} \tag{7}$$

Protože funkce $\omega(\tau) \cdot \mathbf{c}_j$ mají v intervalu $\langle 0, T \rangle$ pouze konečný počet nulových bodů, platí, že $\operatorname{sgn} \omega(\tau) \cdot \mathbf{c}_j$ je funkce po částech konstantní s konečným počtem bodů nespojitosti. Stačí tedy dokázat toto:

Je-li $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ systém optimálních regulátorů, je $\eta_j = \operatorname{sgn} \omega(\tau) \cdot \mathbf{c}_j$, $j = 1, \ldots, r$, skoro všude v $\langle 0, T \rangle$.

Označme G^j_+ množinu těch $t \in \langle 0, T\rangle$ takových, že $\operatorname{sgn} \omega(t) \,.\, \mathbf{c}_j = 1$ a $\eta_j(t) < 1$. Nechť $\mu(G^j_+) > 0$. Definujme systém regulátorů $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r\}$ takto:

$$\vartheta_i = \eta_i \quad \text{pro} \quad i \neq j \quad \text{a} \quad t \in \langle 0, T\rangle\,,$$
$$\vartheta_j = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad t \in G^j_+ \\ \eta_j & \text{pro} \quad t \in \langle 0, T\rangle \dot{-} G^j_+\,. \end{cases}$$

Dosadíme-li do výrazu (7), dostaneme:

$$\int_0^T \omega(\tau) \sum_{k=1}^r \mathbf{c}_k(\vartheta_k(\tau) - \eta_k(\tau))\, d\tau = \int_{G^j_+} \omega(\tau)\, \mathbf{c}_j(1 - \eta_j(\tau))\, d\tau > 0$$

a to je spor s (7). Tedy $\mu(G^j_+) = 0$.

Podobně definujeme G^j_- a dokážeme, že $\mu(G^j_-) = 0$. Tedy $\mu(G^j) = 0$, kde $G^j = \underset{t \in \langle 0,T\rangle}{\mathscr{E}} (\eta_j \neq \operatorname{sign} \omega \,.\, \mathbf{c}_j)$.

Jednoznačnost systému optimálních regulátorů plyne z následující věty:

Věta 4. *Jsou-li $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ a $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r\}$ dva systémy optimálních regulátorů, je $\eta_j = \vartheta_j$, $j = 1, \ldots, r$, skoro všude v $\langle 0, T\rangle$.*

(Při určování optimálního regulátoru vzorcem $\eta_j(t) = \operatorname{sgn} \omega(t) \,.\, \mathbf{c}_j$ tedy nezáleží na volbě nadroviny R.)

Důkaz. Buď $\mathbf{x}(T, \eta_1, \ldots, \eta_r) = \mathbf{x}(T, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_r) = \xi_1$. Pak také $\mathbf{x}\left(T, \frac{\eta_1 + \vartheta_1}{2}, \ldots, \frac{\eta_r + \vartheta_r}{2}\right) = \xi_1$. Nechť existuje $1 \leq j \leq r$ tak, že $\eta_j \neq \vartheta_j$ na nějaké množině G^j, která nemá nulovou míru. Označme

$$N^j = \underset{t \in \langle 0,T\rangle}{\mathscr{E}} (|\eta_j(t)| \neq 1)\,, \quad M^j = \underset{t \in \langle 0,T\rangle}{\mathscr{E}} (|\vartheta_j(t)| \neq 1)\,;$$

potom $\mu(N^j) = \mu(M^j) = 0$. Ale pak $\frac{\eta_j + \vartheta_j}{2} = 0$ na $G^j \dot{-} (M^j \cup N^j)$, což je spor, protože $\left\{\frac{\eta_1 + \vartheta_1}{2}, \ldots, \frac{\eta_r + \vartheta_r}{2}\right\}$ je systém optimálních regulátorů, a tedy musí být $\left|\frac{\eta_j + \vartheta_j}{2}\right| = 1$ skoro všude.

V praxi není příliš důležité určit optimální regulátory mezi dvěma pevně zvolenými body jako funkce času t, ale je důležité určit je v závislosti na poloze bodu $\mathbf{x}$ tak, aby se bod pohybující se podle rovnic

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}_1\, u_1(\mathbf{x}) + \ldots + \mathbf{c}_r\, u_r(\mathbf{x})$$

dostal z libovolné polohy do optimální za minimální čas. Tomuto úkolu se říká s y n t é z a o p t i m á l n í s o u s t a v y.

Vzhledem k tomu, že o optimální poloze předpokládáme, že se v ní při ideálních podmínkách, tj. při vyloučení všech rušivých vlivů a při nepůsobení regulátorů, soustava stále udržuje, budeme brát za tuto polohu počátek.

Z existenční věty a z věty o jednoznačnosti plyne, že existuje taková množina $G \subset E_n$, pro kterou platí:

Je-li $\mathbf{x} \in G$, pak existuje právě jedna optimální trajektorie vedoucí z $\mathbf{x}$ do počátku; jestliže $\mathbf{x}$ non $\in G$, neexistuje žádný regulátor mezi body $\mathbf{x}$ a $\mathbf{0}$. Lze dokázat, že tato množina je vždy otevřená a konvexní a že může (ale nemusí) splynout s celým E_n. Pontrjagin v [8] odvodil, že postačující podmínkou pro $G = E_n$ je, aby reálné části všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ byly záporné.

Chceme určit nejprve množinu G těch bodů, z kterých je možno dospět do počátku pomocí nějakého regulátoru (a podle existenční věty také pomocí optimálního regulátoru) a pak na G definovat funkce $u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_r(\mathbf{x})$, při kterých se libovolný bod $\xi \in G$ dostane do počátku v nejkratším čase.

Možnost určit funkci u pouze v závislosti na bodu $\mathbf{x}$ je dána tím, že je-li $u(t)$ optimální regulátor mezi body ξ_0 a ξ_1 a $\mathbf{x}(t, u)$ příslušné řešení systému (3) takové, že $\xi_0 = \mathbf{x}(t_0)$, $\xi_1 = \mathbf{x}(t_1)$, $t_0 < t_1$, a je-li $t_0 \leqq t_2 < t_3 \leqq t_1$, je také $u(t)$ optimální regulátor mezi body $\xi_2 = \mathbf{x}(t_2)$ a $\xi_3 = \mathbf{x}(t_3)$.

Dále se omezíme pouze na jeden regulátor a uvedeme postup konstrukce funkce u.

Z věty o tvaru optimálního regulátoru plyne, že všechny optimální trajektorie a optimální regulátory vycházející pro $t = 0$ z počátku dostaneme řešením soustavy podmínek:

$$(8) \qquad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}\, u(t)\,, \qquad u(t) = \operatorname{sgn}\,(\omega(t)\,.\,\mathbf{c})\,, \qquad \dot{\omega} = -\mathbf{A}'\omega$$

v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ pro různé počáteční podmínky pro $\omega(t)$ a počáteční podmínku $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ pro vektorovou funkci $\mathbf{x}(t)$.

K určení u v závislosti na $\mathbf{x}$ vyšetříme množinu těch bodů, ve kterých příslušná funkce $u(t)$ mění znaménko. Řešíme tedy (8) při libovolné počáteční podmínce pro $\omega(t)$. Je-li pro určitou počáteční podmínku stále $\omega(t)\,.\,\mathbf{c} \neq 0$, nemění na příslušné trajektorii tato funkce znaménko a tedy je tam $u(\mathbf{x})$ rovno stále buď 1 nebo -1. Jinak určíme pro každou počáteční podmínku první bod, v kterém je skalární součin $\omega(t)\,.\,\mathbf{c} = 0$. Dostaneme tzv. křivku prvních zvratů. Nyní opět řešíme (8) pro různé počáteční podmínky na křivce prvních zvratů a dostaneme tím křivku druhých zvratů atd.

Pro ilustraci uvádíme, jak vypadá situace ve třech jednoduchých, ale charakteristických případech. Silně je zakreslena křivka zvratu, slabě hranice oblasti G a čerchovaně některé trajektorie (viz obr. 1 až 3).

Zajímavé myšlenky obsahují některé práce N. N. Krasovského, které vyšly v poslední době.

V [12] je řešena úloha o optimální regulaci pro dvě nelineární rovnice, jejichž pravé strany závisí explicitně na čase. V práci je uvedena bez důkazu existenční věta analogická k větě 2. Dále jsou uvedeny nutné a postačující podmínky pro optimálnost a je popsána metoda přibližného řešení. Je uvedena věta, zaručující korektnost úlohy v tomto smyslu: Jsou-li

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \eta\, \mathbf{q}(t)\,, \tag{9}$$

$$|\eta(t)| \leqq 1$$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{y}, t) + \eta\, \mathbf{q}^{(1)}(t)\,, \tag{10}$$

dva regulační procesy, pak ke každému $\varepsilon > 0$ a bodu $\mathbf{x}_0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je-li

$$|\mathbf{q} - \mathbf{q}^{(1)}| < \delta\,, \quad |\mathbf{f} - \mathbf{f}^{(1)}| < \delta\,, \quad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i^{(1)}}{\partial y_j}\right| < \delta$$

a je-li T_0 optimální čas příslušný k úloze (9), existuje také optimální regulátor úlohy (10) a pro příslušný optimální čas $T_0^{(1)}$ platí $|T_0 - T_0^{(1)}| < \varepsilon$.

V [13] je ukázáno, že některé nutné podmínky pro optimálnost již ani v jednoduchých případech nelze zeslabit.

V [11] je řešena stejná úloha jako v [12] pro libovolný počet rovnic. Situace je mnohem složitější než v případě dvou rovnic. Za omezujících předpokladů pro pravé strany je dokázána existenční věta a některé postačující podmínky pro optimálnost regulátoru.

Odlišná metoda je zpracována v [10] a [14]. V [10] se uvažuje systém explicitně závislý na čase

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, t, u_1, \ldots, u_n)\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Za přípustné regulátory se považují funkce $u_i(t)$ po částech spojité, pro které platí

$$\mathbf{G}_T(u_1(T), \ldots, u_r(T)) = N\,,$$

kde N je daná konstanta a $\mathbf{G}_T$ funkcionál závislý na u_j v $\langle t_0, t_0 + T\rangle$.

Na příklad:

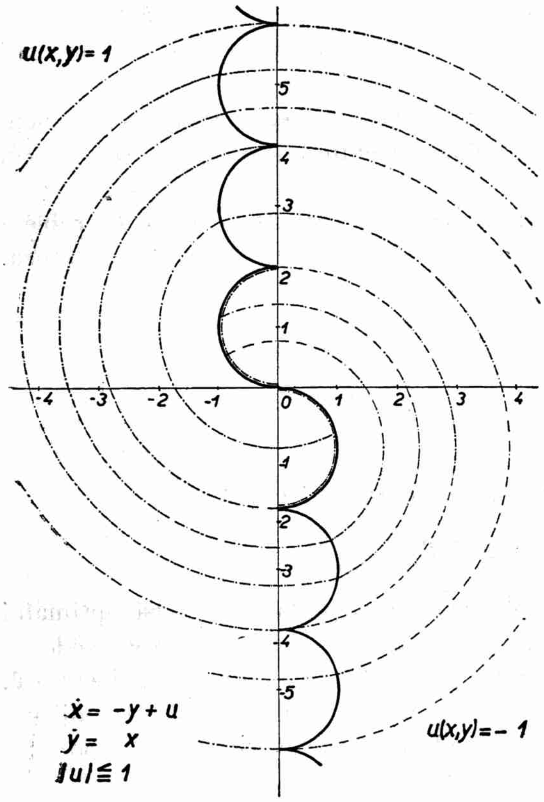
1. $\mathbf{G}_T = \max |u_k(t)|\,, \quad k = 1, \ldots, n\,, \quad \tau \in \langle t_0, t_0 + T\rangle\,;$
2. $\mathbf{G}_T = \left(\int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=1}^{r} u_k^2(\tau)\, d\tau\right)^{\frac{1}{p}}\,;$
3. $\mathbf{G}_T = \frac{1}{T}\left(\int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=1}^{r} u_k^2(\tau)\, d\tau\right)$ a jiné.[2])

Buď nyní $t > t_0$ libovolný pevný čas; $\eta(\tau)$ funkce, pro kterou je $\mathbf{x}(t, \eta_1, \ldots, \eta_r) = \xi_1$. Najdeme při pevném t

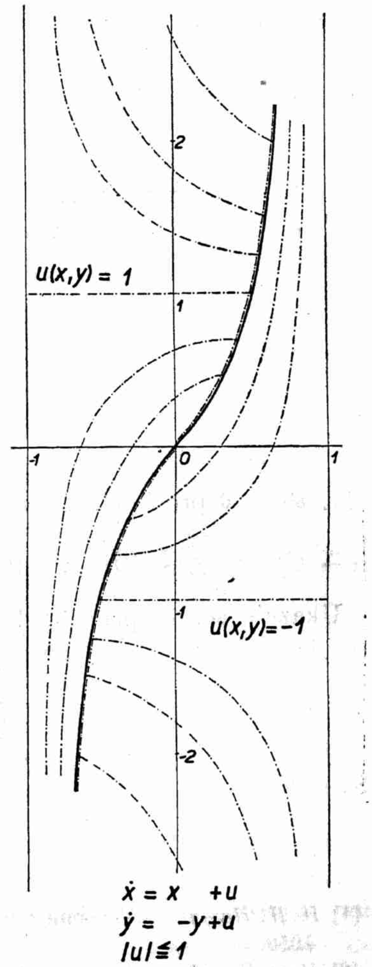
$$\min \mathbf{G}_T(\eta_1(t), \ldots, \eta_r(t)) = F(t)\,.$$

---

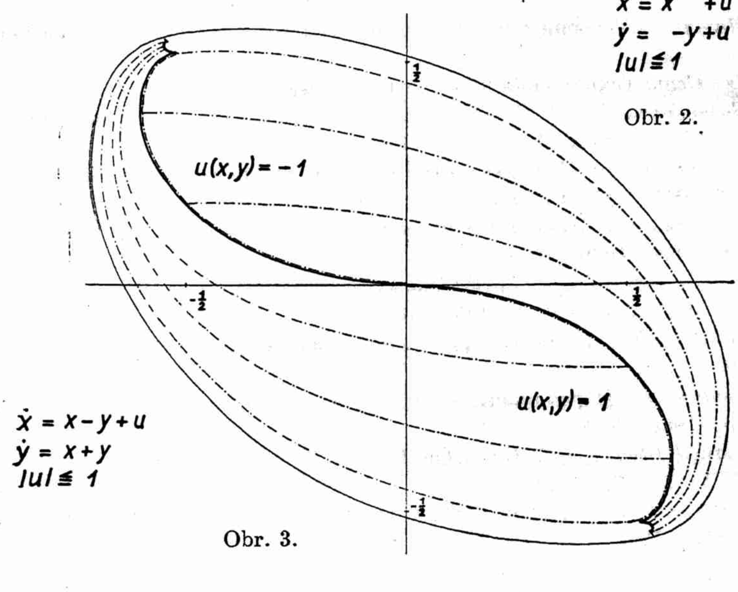
[2]) Omezení 1 vede zřejmě na problém, který jsme již vyšetřovali. Při 2 jde pro $p = 2$ v podstatě o omezení celkové energie.



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.